

Interpolação e Extrapolação das ETTJ no Brasil

Coordenação Geral de Monitoramento de Solvência – CGSOA
Coordenação de Monitoramento de Risco– CORIS

Sergio Luis Franklin Junior
Thiago Barata Duarte
César da Rocha Neves
Eduardo Fraga

Pauta

Motivação

Introdução

Bases de dados

Modelos de ETTJ

Estimação dos parâmetros

Análise de resultados

Conclusões

Motivação

- Teste de Adequação de Passivos
- Risco de Subscrição de Vida Individual e Previdência
- Risco de Mercado

Objetivo da divulgação do estudo:

- Princípio da proporcionalidade
- Contribuir para que o mercado segurador brasileiro mensure suas obrigações, descontando seus fluxos de caixa, de maneira consistente e coerente

Pauta

Motivação

Introdução

Bases de dados

Modelos de ETTJ

Estimação dos parâmetros

Análise de resultados

Conclusões

Alguns conceitos e relações importantes

- Taxas à vista (*spot*)
- Taxas a termo (*forward*)
- Taxas contínuas
- Taxas discretas

$$(1 + R_{t,t+\tau}^t)^\tau = \prod_{k=0}^{\tau-1} (1 + FR_k^t(1))$$

$$e^{\tau \cdot y_t(\tau)} = e^{\sum_{k=0}^{\tau-1} FR_k^t(1)}$$

$$y_t(\tau) = \ln(1 + R_{t,t+\tau}^t)$$

$$R_{t,t+\tau}^t = \exp(y_t(\tau)) - 1$$

A ETTJ pode ser descrita por três tipos de curvas - todas relacionadas entre si

Curva de desconto $P_t(\tau) = \exp\{-\tau \cdot y_t(\tau)\} = \exp\left\{-\int_0^{\tau} f_t(u) du\right\}$

Curva de taxas a termo $f_t(\tau) = -\frac{1}{P_t(\tau)} \cdot P_t'(\tau) = y_t(\tau) + \tau \cdot y_t'(\tau)$

Curva de taxas à vista $y_t(\tau) = \frac{1}{\tau} \cdot \int_0^{\tau} f_t(u) du = -\frac{1}{\tau} \cdot \ln P_t(\tau)$

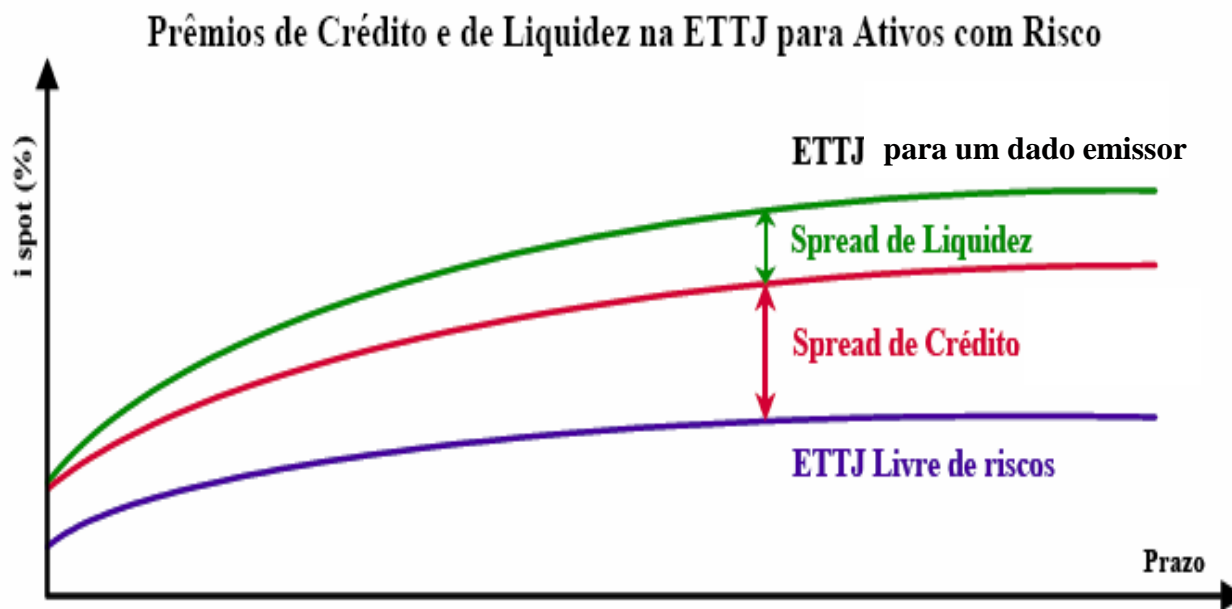
A ETTJ “livre de riscos” deve ser construída a partir de títulos isentos de risco de crédito e liquidez

Os instrumentos de renda fixa, em geral, sujeitam os seus detentores a três tipos de risco financeiro:



Nesse contexto, o risco de mercado incide somente sobre investimentos com horizontes de carregamento diferentes dos prazos dos títulos

A ETTJ “livre de riscos” é também chamada de “curva base”



Os instrumentos financeiros considerados isentos de riscos de crédito

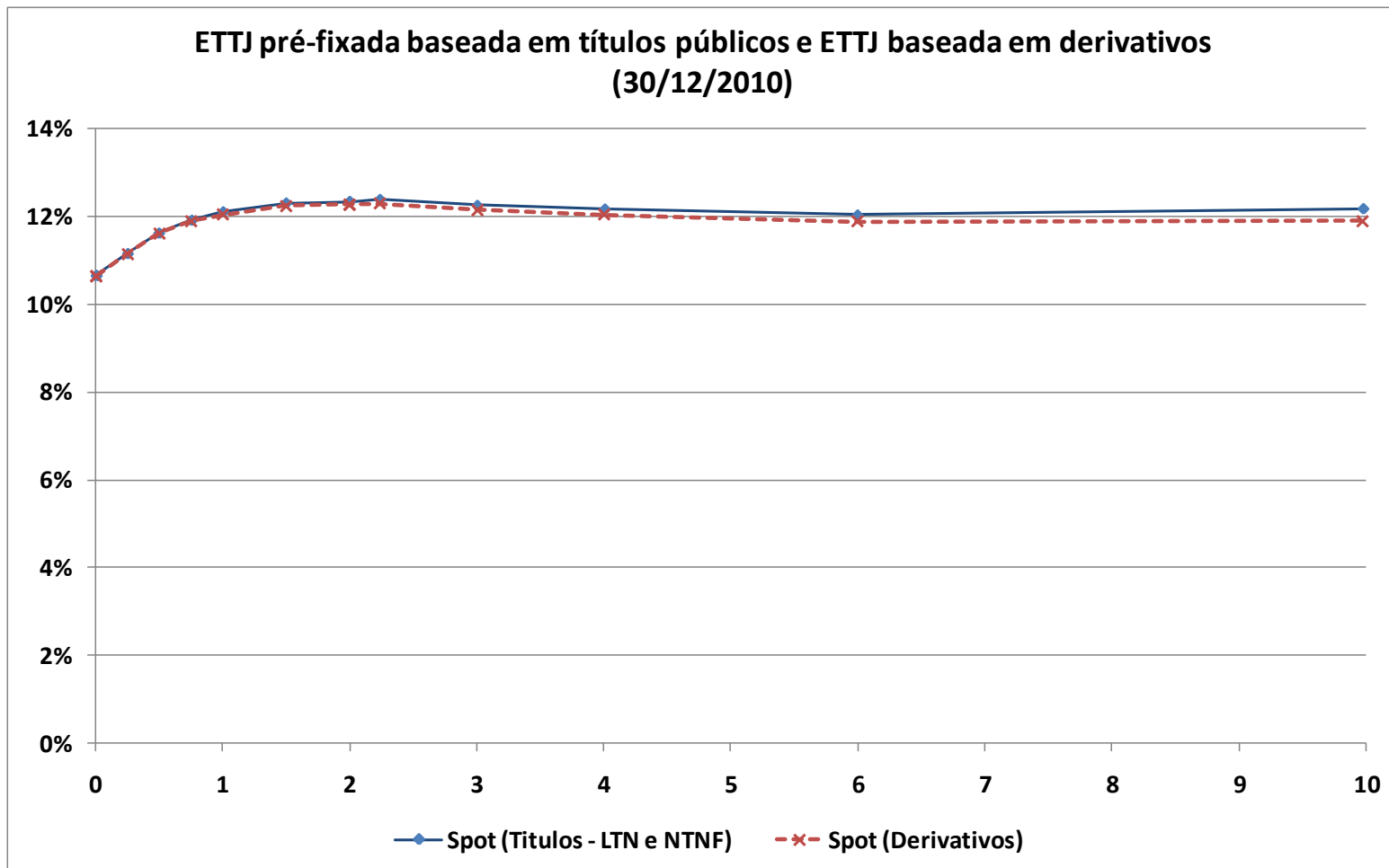
- Títulos de renda fixa emitidos pelo governo

LTN, NTN-F, NTN-B, NTN-C, etc.

- Instrumentos financeiros derivativos:

Futuro de DI1, FRA de cupom (FRC), etc.

As curvas de juros baseadas em derivativos e em títulos públicos federais



Pauta

Introdução

Bases de dados

Modelos de ETTJ

Estimação dos parâmetros

Análise de resultados

Conclusões

O que influenciou na escolha da base de dados de cada curva de juros

- Instrumento financeiro livre de riscos de maior liquidez no mercado
- Número de vértices proporcionados por cada instrumento
- Prazo do último ponto líquido de cada curva de juros

Bases de dados usadas neste trabalho

Curva de cupom IPCA

Preços unitários das Notas do Tesouro Nacional – Série B (NTN-B)

Curva de taxas “pré”

Taxas Referencias “DI x PRÉ” da BM&F (+ 500 contratos)

Curva de cupom cambial

Taxas Referencias “cupom limpo” da BM&F (+ 500 contratos)

Curva de cupom de IGPM

Taxas Referencias “DI x IGPM” da BM&F

Curva de cupom de TR

Taxas Referencias “DI x TR” da BM&F

Pauta

Introdução

Bases de dados

Modelos de ETTJ

Estimação dos parâmetros

Análise de resultados

Conclusões

A ETTJ não é diretamente observável, e precisa ser estimada a partir de dados de mercado

O procedimento mais comum é impor uma forma funcional com K parâmetros para a função desconto, para a taxa à vista ou para a taxa a termo: polinômios, *splines*, funções exponenciais, ou uma combinação destas ou outras funções.

Em um segundo momento, os K parâmetros são estimados ou calculados.

Os métodos mais proeminentes e amplamente usados por diversos bancos centrais são os propostos por Nelson e Siegel (1987) e Svensson (1994).

O modelo de Svensson

Forma funcional simples para descrever toda a estrutura a termo com apenas 6 parâmetros

- Curva de taxas a termo:

$$f_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \cdot e^{-\lambda_{1,t} \cdot \tau} + \beta_{2,t} \cdot \lambda_{1,t} \cdot \tau \cdot e^{-\lambda_{1,t} \cdot \tau} + \beta_{3,t} \cdot \lambda_{2,t} \cdot \tau \cdot e^{-\lambda_{2,t} \cdot \tau}$$

- Curva de taxas à vista:

$$y_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{1,t} \cdot \tau}}{\lambda_{1,t} \cdot \tau} \right) + \beta_{2,t} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{1,t} \cdot \tau}}{\lambda_{1,t} \cdot \tau} - e^{-\lambda_{1,t} \cdot \tau} \right) + \beta_{3,t} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\lambda_{2,t} \cdot \tau}}{\lambda_{2,t} \cdot \tau} - e^{-\lambda_{2,t} \cdot \tau} \right)$$

Características do modelo de Svensson

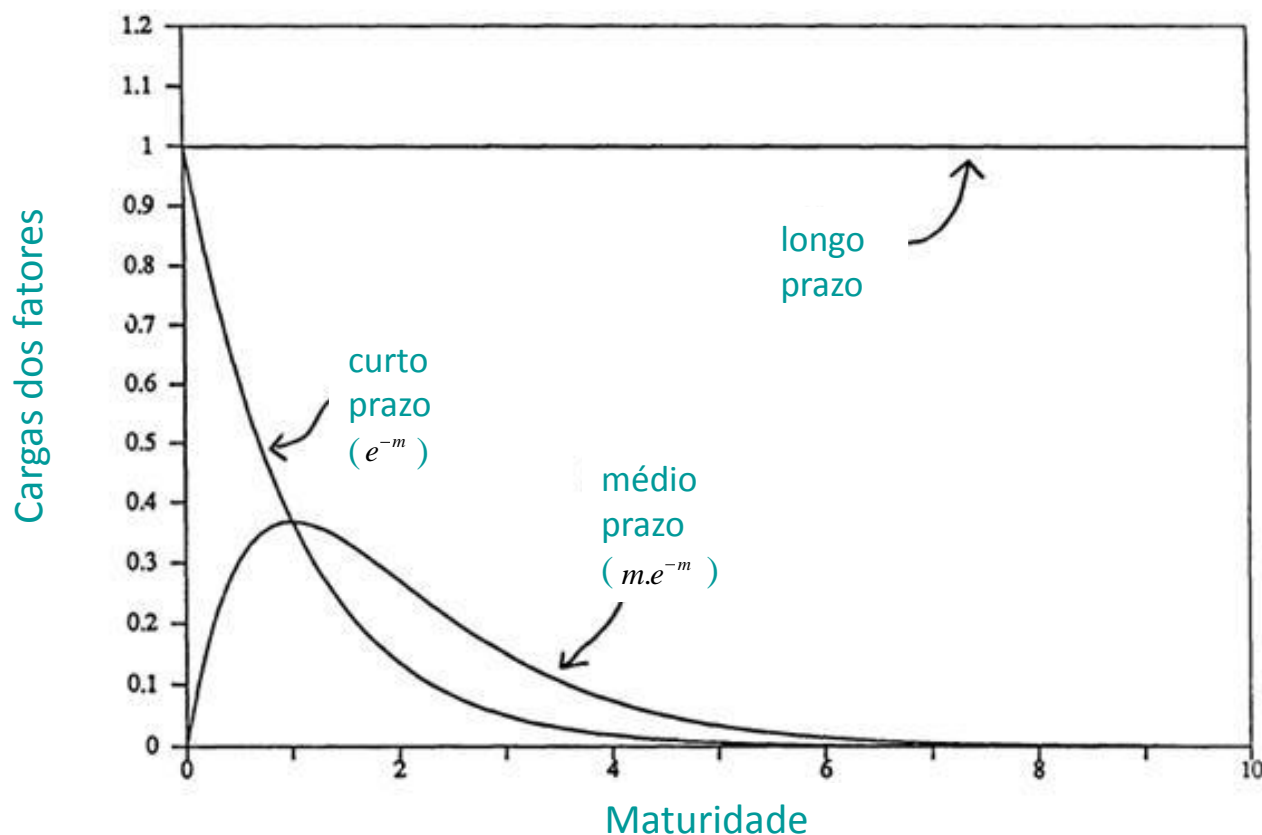
Interpretação dos fatores da estrutura a termo

- Fator de nível (ou longo prazo): $\beta_{0,t}$
- Fator de inclinação (ou curto prazo): $\beta_{1,t}$
- Fatores de curvaturas (ou médio prazo): $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$
- Velocidades de decaimento dos componentes de médio prazo: $\lambda_{1,t}$ e $\lambda_{2,t}$

Para que faça sentido econômico, os parâmetros devem satisfazer as

restrições: $\lambda_{1,t} > 0; \lambda_{2,t} > 0; \beta_{0,t} > 0; \beta_{0,t} + \beta_{1,t} > 0$

Uma escolha apropriada dos parâmetros do modelo, pode resultar em uma variedade de curvas de taxas a termo com formas monotônicas e arqueadas



Pauta

Introdução

Bases de dados

Modelos de ETTJ

Estimação dos parâmetros

Análise de resultados

Conclusões

Primeiro, é necessário definir a função objetivo que se quer minimizar ...

Para a curva de juros de cupom de IPCA:

$$FOBJ : \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} w_i \cdot \left(P_{NTN-B,i} - \sum_{j=1}^{k_i} \exp[-\tau_{j,i} \cdot y_t(\tau_{j,i})] \cdot F_{j,i} \right)^2 \right\}$$

Para as curvas de taxas “pré”, cupom cambial, cupom de IGPM e cupom de TR:

$$FOBJ : \text{Min} \left\{ \sum_{i=1}^{M_t} (\text{TxRef}_t(\tau_i) - y_t(\tau_i))^2 \right\}$$

Sujeito às seguintes restrições:

$$\left\{ \lambda_{1,t} > 0; \lambda_{2,t} > 0; \beta_{0,t} > 0; \beta_{0,t} + \beta_{1,t} > 0 \right\}$$

... para depois, definir o melhor método de estimação

Combinação de algoritmo genético (AG) com um algoritmo tradicional de otimização não-linear Quasi-Newton (QN)

- Método tradicional de otimização Quasi-Newton
 - Risco de falsa convergência
 - Bom para encontrar o mínimo local
- Algoritmos genéticos
 - Bons para varrer o espaço em busca da solução ótima
 - Dificuldades para fazer o “ajuste fino local”

Um AG foi especificamente desenvolvido para estimar os parâmetros do modelo de Svensson

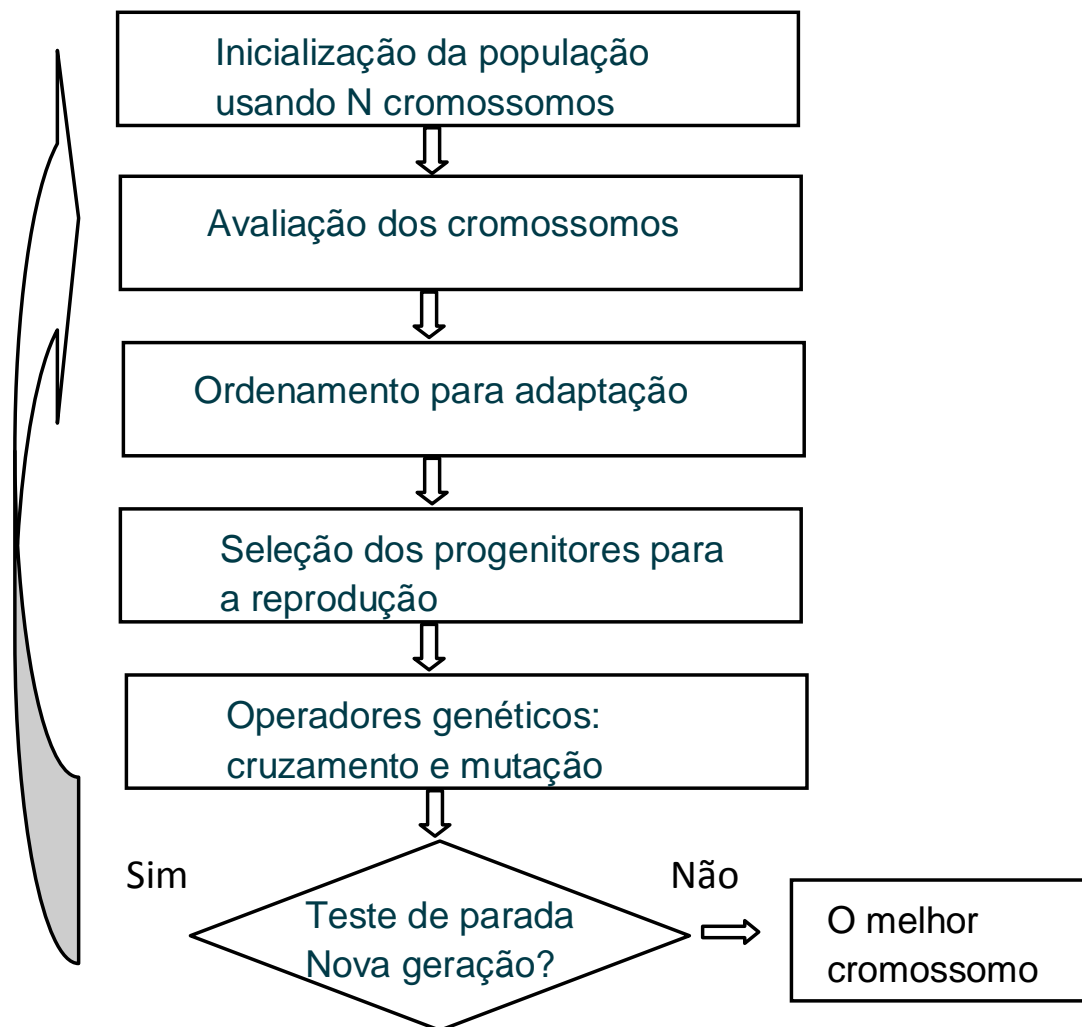
O objetivo é explorar a informação acumulada em cada iteração para orientar as buscas subsequentes do algoritmo

Tomou como base o trabalho de Gimeno e Nave (2006) do Banco Central da Espanha

Introduziu um novo operador de mutação e novos parâmetros de inicialização

Desenvolvido em Splus v.8.1

Os AG são algoritmos de busca baseados em mecanismos de seleção natural e genética



A representação cromossomial

Codificação real: cada cromossomo ($\bar{\phi} \in \mathfrak{R}^6$) representa um candidato solução do problema de otimização


A população consiste de N cromossomos

A k -ésima geração da população é representada por

$$\bar{\phi}_i^k = \left[\beta_{0,i}^k \quad \beta_{1,i}^k \quad \beta_{2,i}^k \quad \beta_{3,i}^k \quad \lambda_{1,i}^k \quad \lambda_{2,i}^k \right]^T$$

$$(i = 1, \dots, N)$$

$$(k = 1, 2, \dots)$$



Parâmetros do
modelo de
Svensson

A inicialização da população ...

Cromossomo gerador:

$$\bar{\phi}^* = [\beta_0^* \quad \beta_1^* \quad \beta_2^* \quad \beta_3^* \quad \lambda_1^* \quad \lambda_2^*]^T$$

Vetor aleatório:

$$\bar{\varepsilon}_i^1 = [\varepsilon_{0,i}^1 \quad \varepsilon_{1,i}^1 \quad \varepsilon_{2,i}^1 \quad \varepsilon_{3,i}^1 \quad \varepsilon_{4,i}^1 \quad \varepsilon_{5,i}^1]^T$$

$$\varepsilon_{j,i}^1 \sim N(0, \sigma_j^0) \quad (i = 1, \dots, N)$$

A primeira geração de N indivíduos:

$$\bar{\phi}_i^1 = \bar{\phi}^* + \bar{\varepsilon}_i^1 \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \beta_{0,i}^1 \\ \beta_{1,i}^1 \\ \beta_{2,i}^1 \\ \beta_{3,i}^1 \\ \lambda_{1,i}^1 \\ \lambda_{2,i}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \beta_3^* \\ \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{0,i}^1 \\ \varepsilon_{1,i}^1 \\ \varepsilon_{2,i}^1 \\ \varepsilon_{3,i}^1 \\ \varepsilon_{4,i}^1 \\ \varepsilon_{5,i}^1 \end{bmatrix}$$

Calibragem de σ

Medida de qualidade de um cromossomo

- Para a curva juros de cupom de IPCA

$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{N_t} w_i \cdot \left(P_{NTN-B,i} - \sum_{j=1}^{k_i} \exp[-\tau_{j,i} \cdot y_t(\tau_{j,i})] \cdot F_{j,i} \right)^2 \right\}$$

- Para as curvas de taxas “pré”, cupom cambial, cupom de IGPM e cupom de TR

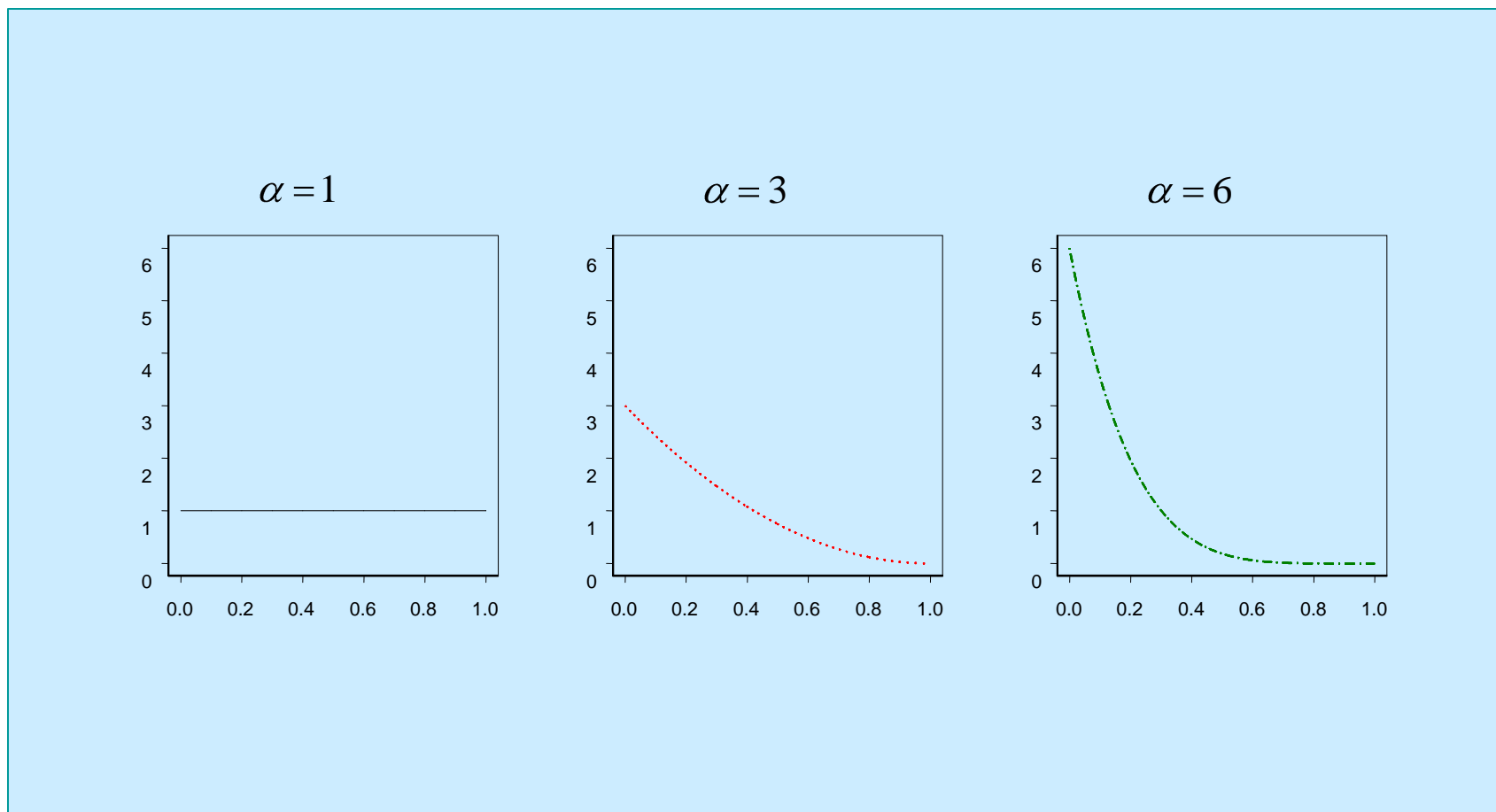
$$IM = \left\{ \sum_{i=1}^{M_t} (TxRe f_t(\tau_i) - y_t(\tau_i))^2 \right\}$$

Seleção

O AG cria uma lista de cromossomos, ordenando-os conforme o valor do IM e seleciona um número $M = N.\eta$ de cromossomos sobreviventes, onde η é o percentual de cromossomos que deve sobreviver em cada geração/iteração do algoritmo

Calibragem de η

O operador de recombinação entra em ação selecionando os cromossomos reprodutores ...



Calibragem de α

... e adiciona $N.(1 - \eta)$ novos cromossomos à geração $k + 1$

Cada gene do cromossomo filho ($\bar{\phi}_q^{k+1}$) é gerado por uma combinação linear dos respectivos genes dos dois cromossomos progenitores:

$$\bar{\phi}_q^{k+1} = D_{6 \times 6} \cdot \bar{\phi}_r^k + (\mathbf{I}_6 - D_{6 \times 6}) \cdot \bar{\phi}_s^k$$

Onde $D_{6 \times 6}$ é uma matriz diagonal com $d_{i,j} = \begin{cases} \psi_i, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$\bar{\psi}$ é um vetor coluna formado por v.a's i.i.d. em $[0, 1]$

\mathbf{I}_6 é a matriz identidade

O operador de mutação tem por objeto evitar que a solução evolua para um ótimo local

Introduz variações aleatórias nos genes dos cromossomos e testa a qualidade dos cromossomos mutantes

Cada gene de cada cromossomo pode sofrer uma mutação com probabilidade π

Quando ela acontece, uma variável aleatória $\varepsilon_{j,i}^k \sim N(0, \sigma_j^k)$ é adicionada ao gene do cromossomo

A ocorrência de mutação em diferentes genes de um mesmo cromossomo são eventos estatisticamente independentes

Calibragem de π

Critério de parada do AG e o ajuste fino local

O AG repete iterativamente os processos de seleção, recombinação e mutação até atingir um “estágio estacionário” para a evolução da espécie, alcançando o ponto (ou região) de ótimo global.

Após atingir o estado estacionário, o ponto ótimo do AG é usado como valor inicial do algoritmo Quasi-Newton, que faz o ajuste fino local até atingir o ponto de mínimo global.

Pauta

Introdução

Bases de dados

Modelos de ETTJ

Estimação dos parâmetros

Análise de resultados

Conclusões

Período de estimação

A curva de cupom de IPCA foi estimada para o último dia útil de cada mês, entre os meses de janeiro de 2006 até dezembro de 2010 (num total de 60 meses). Para cada um desses dias (datas de pregão, t), os parâmetros do modelo de Svensson foram estimados por meio de combinações de algoritmos genéticos (AG) e Quasi-Newton (QN), obtendo-se os estimadores de mínimos quadrados: $\hat{\beta}_{0,t}$, $\hat{\beta}_{1,t}$, $\hat{\beta}_{2,t}$, $\hat{\beta}_{3,t}$, $\hat{\lambda}_{1,t}$ e $\hat{\lambda}_{2,t}$

Equações de estimação

A estimativa da taxa à vista anual composta continuamente em t para o prazo τ , pode ser obtida a partir da equação:

$$\hat{y}_t(\tau) = \hat{\beta}_{0,t} + \hat{\beta}_{1,t} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\hat{\lambda}_{1,t} \cdot \tau}}{\hat{\lambda}_{1,t} \cdot \tau} \right) + \hat{\beta}_{2,t} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\hat{\lambda}_{1,t} \cdot \tau}}{\hat{\lambda}_{1,t} \cdot \tau} - e^{-\hat{\lambda}_{1,t} \cdot \tau} \right) + \hat{\beta}_{3,t} \cdot \left(\frac{1 - e^{-\hat{\lambda}_{2,t} \cdot \tau}}{\hat{\lambda}_{2,t} \cdot \tau} - e^{-\hat{\lambda}_{2,t} \cdot \tau} \right)$$

A taxa à vista discreta composta anualmente é obtida a partir da equação:

$$\hat{R}_{t,t+\tau}^t = \exp(\hat{y}_t(\tau)) - 1$$

Resultados para 30/12/2010

Para a data de 30/12/2010, os estimadores dos parâmetros do modelo de Svensson obtidos pela combinação dos métodos de algoritmo genético e Quasi-Newton para a curva de cupom de IPCA foram os seguintes:

$$\hat{\beta}_0 = 0,04829$$

$$\hat{\beta}_1 = -0,03660$$

$$\hat{\beta}_2 = 0,07895$$

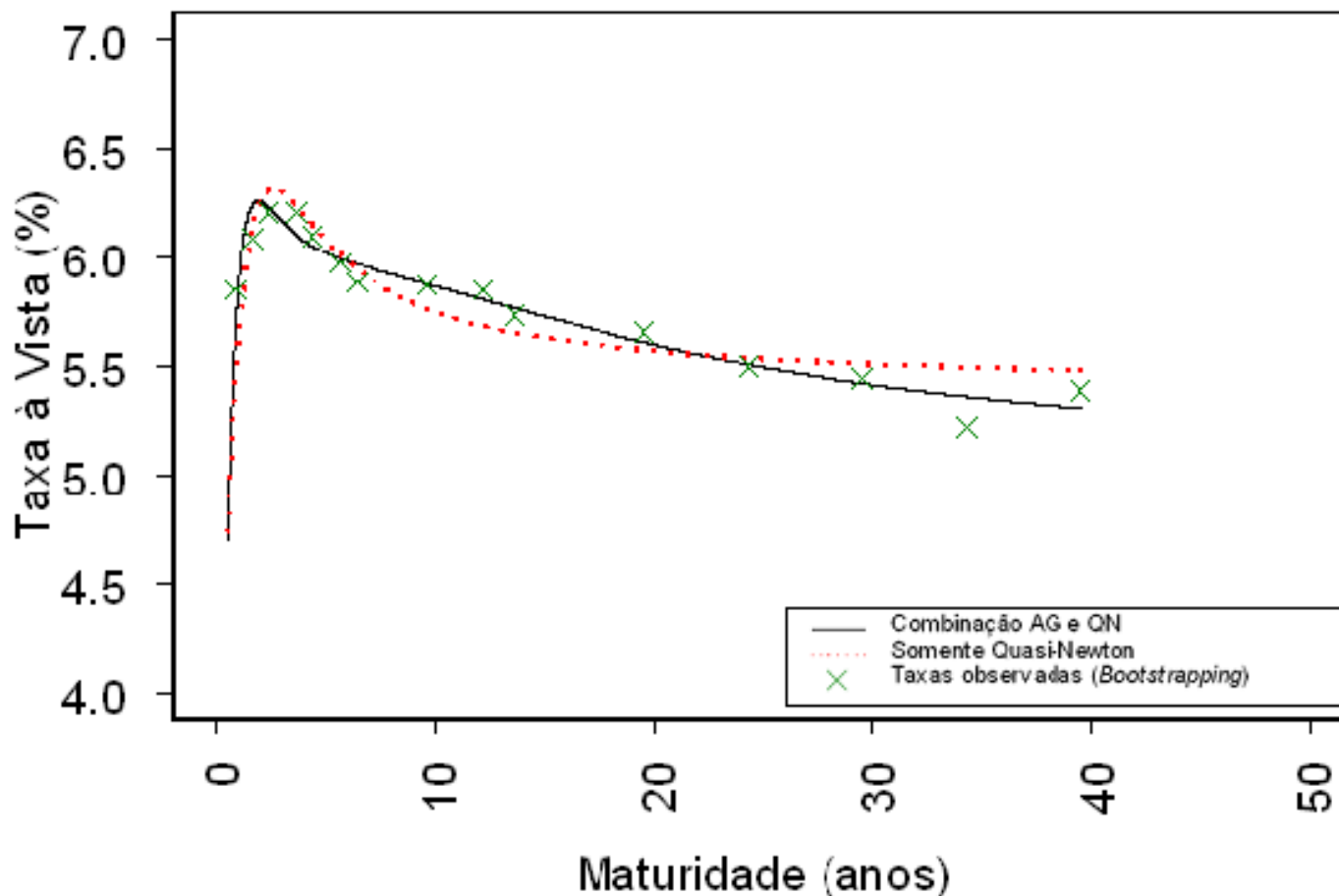
$$\hat{\beta}_3 = 0,02163$$

$$\hat{\lambda}_1 = 1,876257$$

$$\hat{\lambda}_2 = 0,19271$$

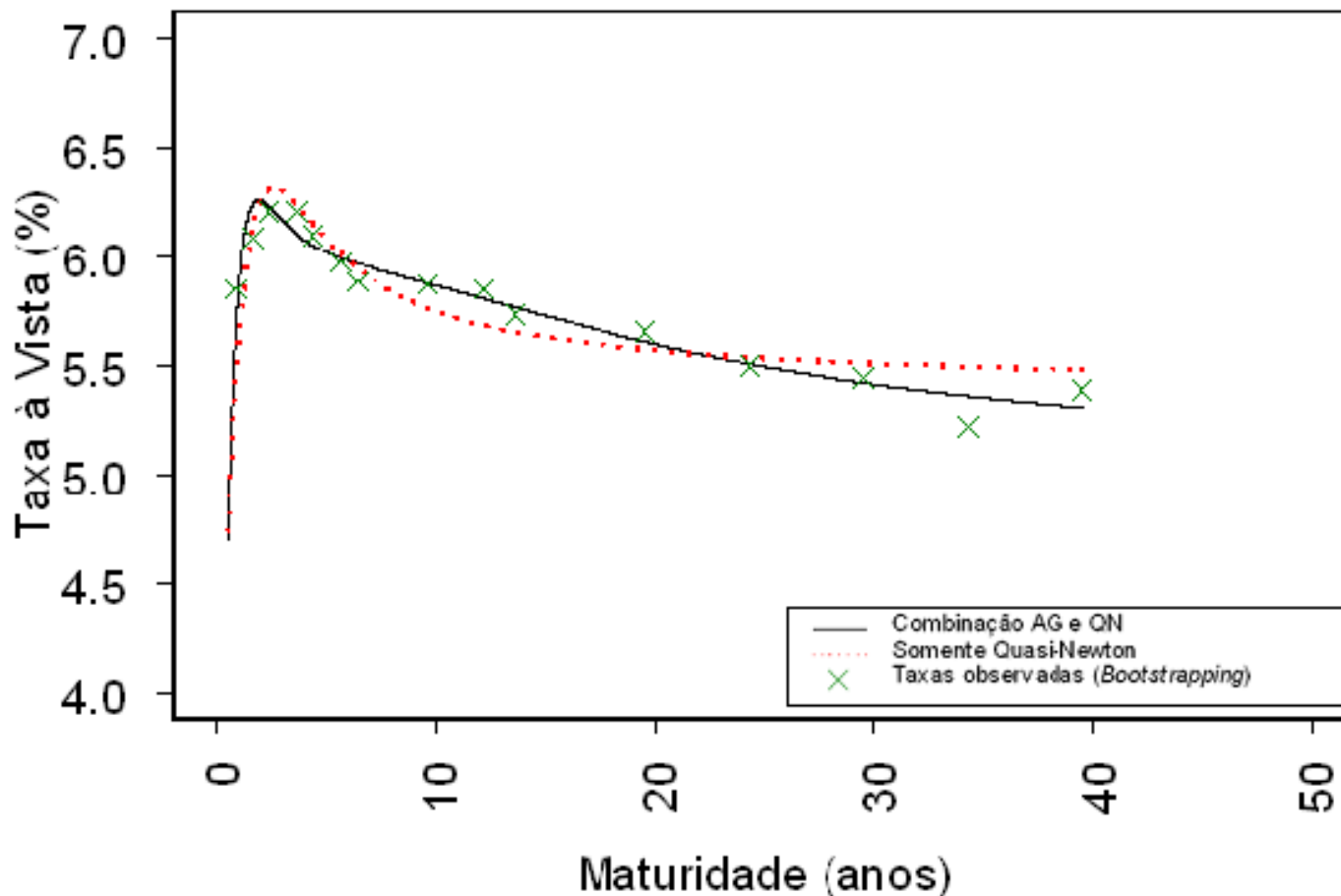
Resultados para 30/12/2010

Interpolação das ETTJ geradas por cada método de estimação e as taxas à vista observadas para cada prazo de maturidade (para a data de pregão de 30/12/2010)



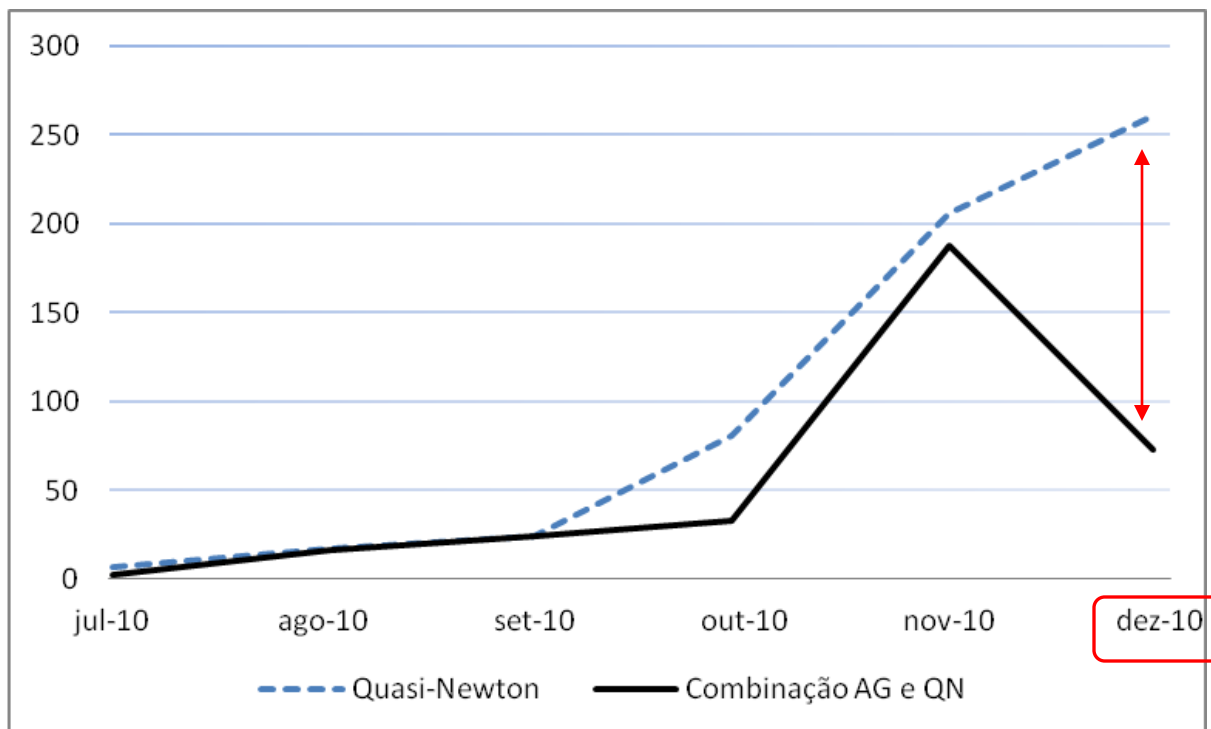
Resultados para 30/12/2010

A aplicação do AG permite melhorar o ajuste da curva de juros aos dados de mercado. A ponderação do erro quadrático de cada título pelo inverso da *duration* tornou os resíduos das taxas à vista homocedásticos.



Comparação do somatório do erro quadrático ponderado

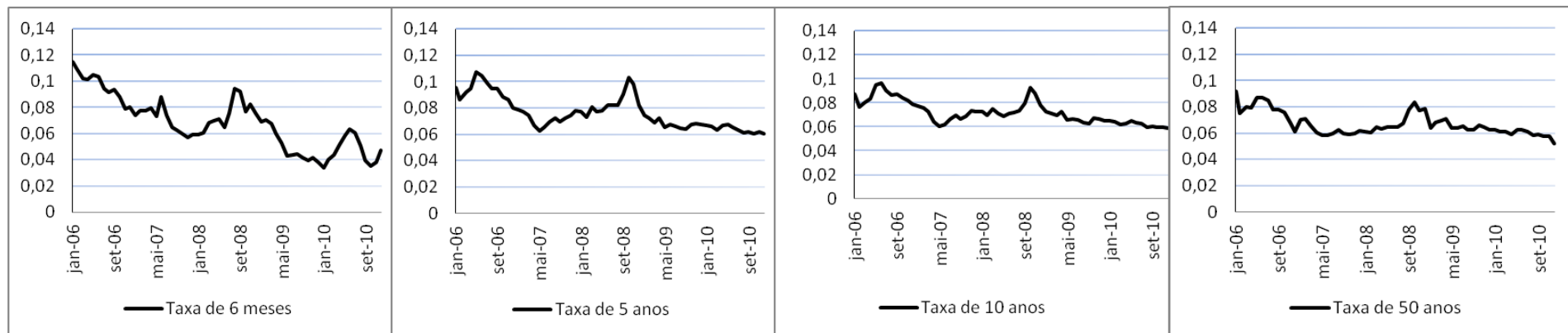
Ao empregar o AG como um pré-processador para a busca inicial do ponto (região) de ótimo global e, posteriormente, o método Quasi-Newton para a busca do ótimo local, obtém-se uma melhor estimativa da curva de juros (evitando “saltos” entre mínimos locais) e um melhor ajuste da curva aos dados de mercado.



Mês de
Calibragem

Análise de volatilidade das taxas

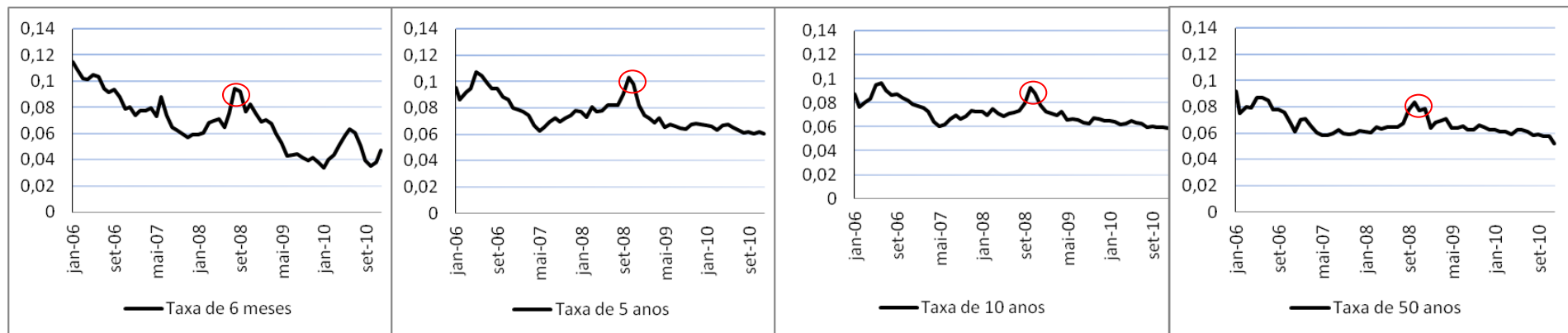
Evolução histórica e a volatilidade das taxas à vista discretas para os prazos de 6 meses, 5 anos, 10 anos e 50 anos (para este último prazo, taxas extrapoladas).



Tempo	0.5 ano	5 anos	10 anos	<u>50 anos</u>
Volatilidade	0.02097	0.01249	0.00964	<u>0.00883</u>

Análise de volatilidade das taxas

Há um “pico” em todas essas taxas no período entre setembro de 2008 e janeiro de 2009, período em aconteceu a crise dos *subprimes*.



Tempo	0.5 ano	5 anos	10 anos	50 anos
Volatilidade	0.02097	0.01249	0.00964	0.00883

Extrapolação da ETTJ

Modelos comumente usados para interpolação da estrutura a termo não permitem fazer uma extrapolção razoável, porque eventualmente levam a taxas indefinidamente crescentes ou negativas

Os modelos de suavização de taxas a termo (Nelson-Siegel e Svensson) e *flat forward* podem ser usados para extrapolção

Extrapolação da ETTJ

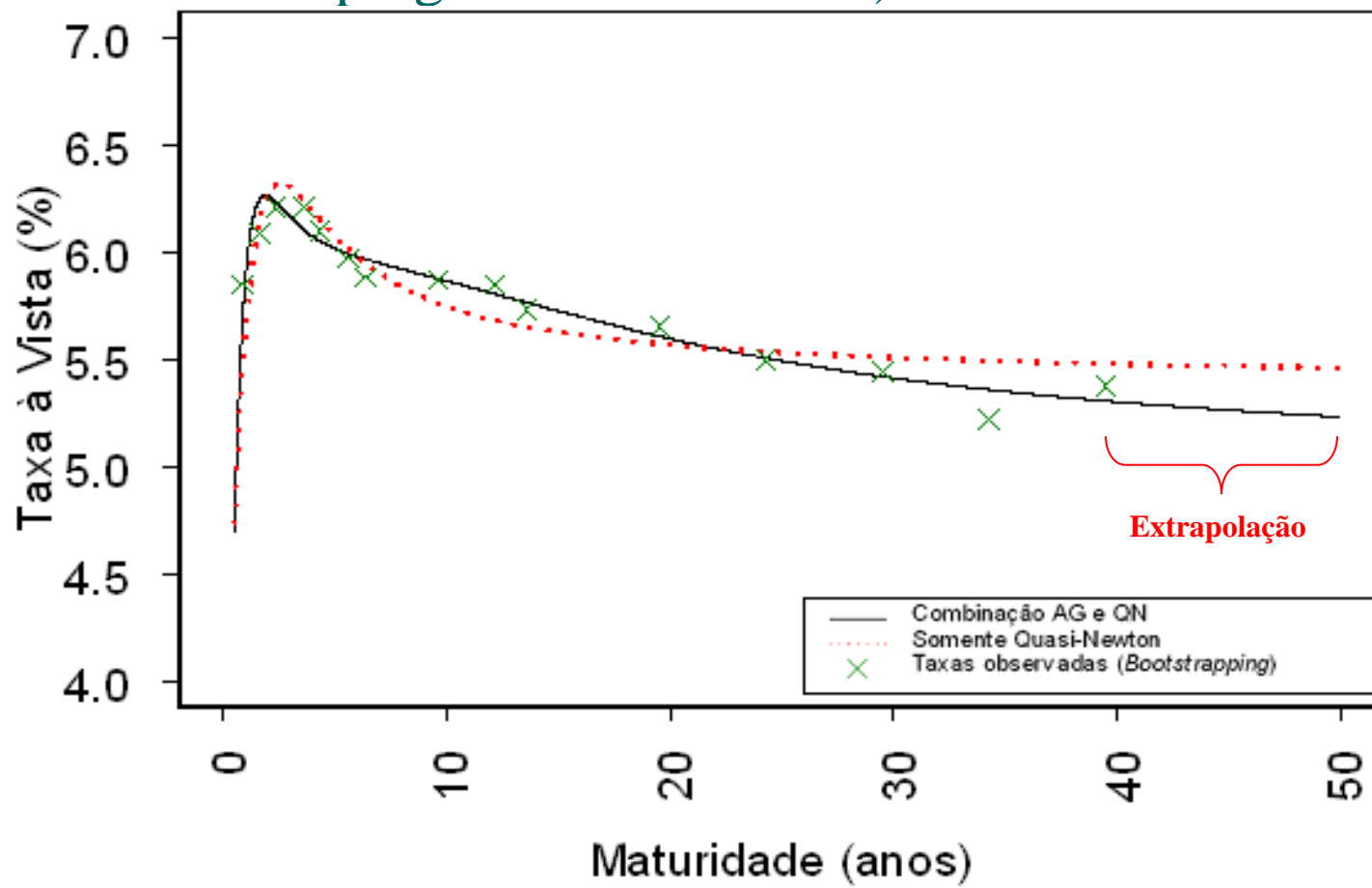
A literatura internacional sugere ainda outros métodos de interpolação e extrapolção de ETTJ, com especial destaque para os métodos propostos por Barrie e Hibbert (2008) e Smith-Wilson (2001).

Estes métodos dependem da especificação de uma “taxa a termo de longíssimo prazo” (ou *ultimate forward rate* (UFR)), e premissas sobre inflação e taxa de juros real esperadas no longo prazo. A adoção de premissas sobre essas expectativas no Brasil, para um futuro tão distante, pode ser bastante controversa.

O modelo de Svensson se mostrou apropriado para interpolação e extrapolção.

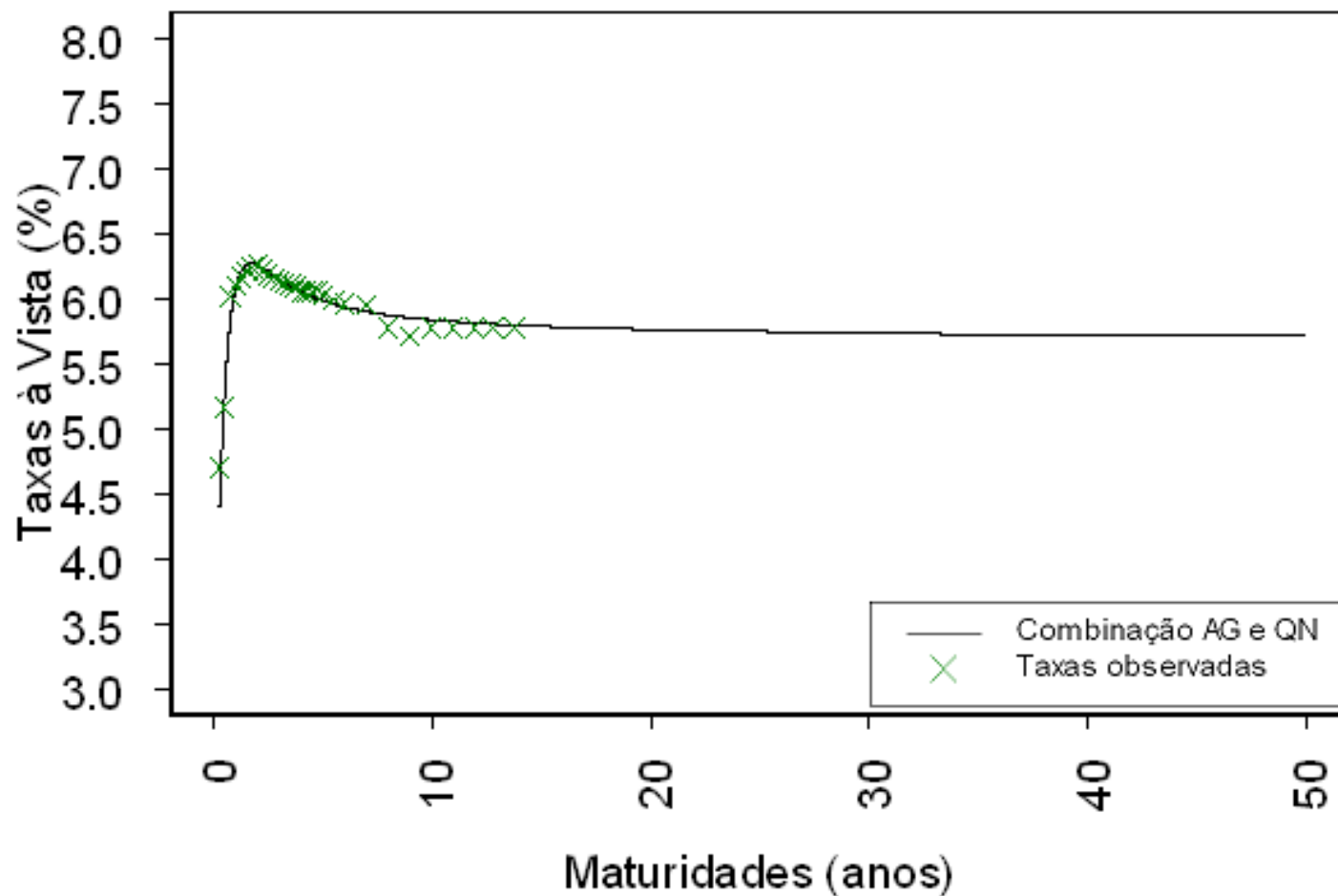
Extrapolação da ETTJ de cupom de IPCA

Extrapolação das ETTJ geradas por cada método de estimação e as taxas à vista observadas para cada prazo de maturidade (para a data de pregão de 30/12/2010)



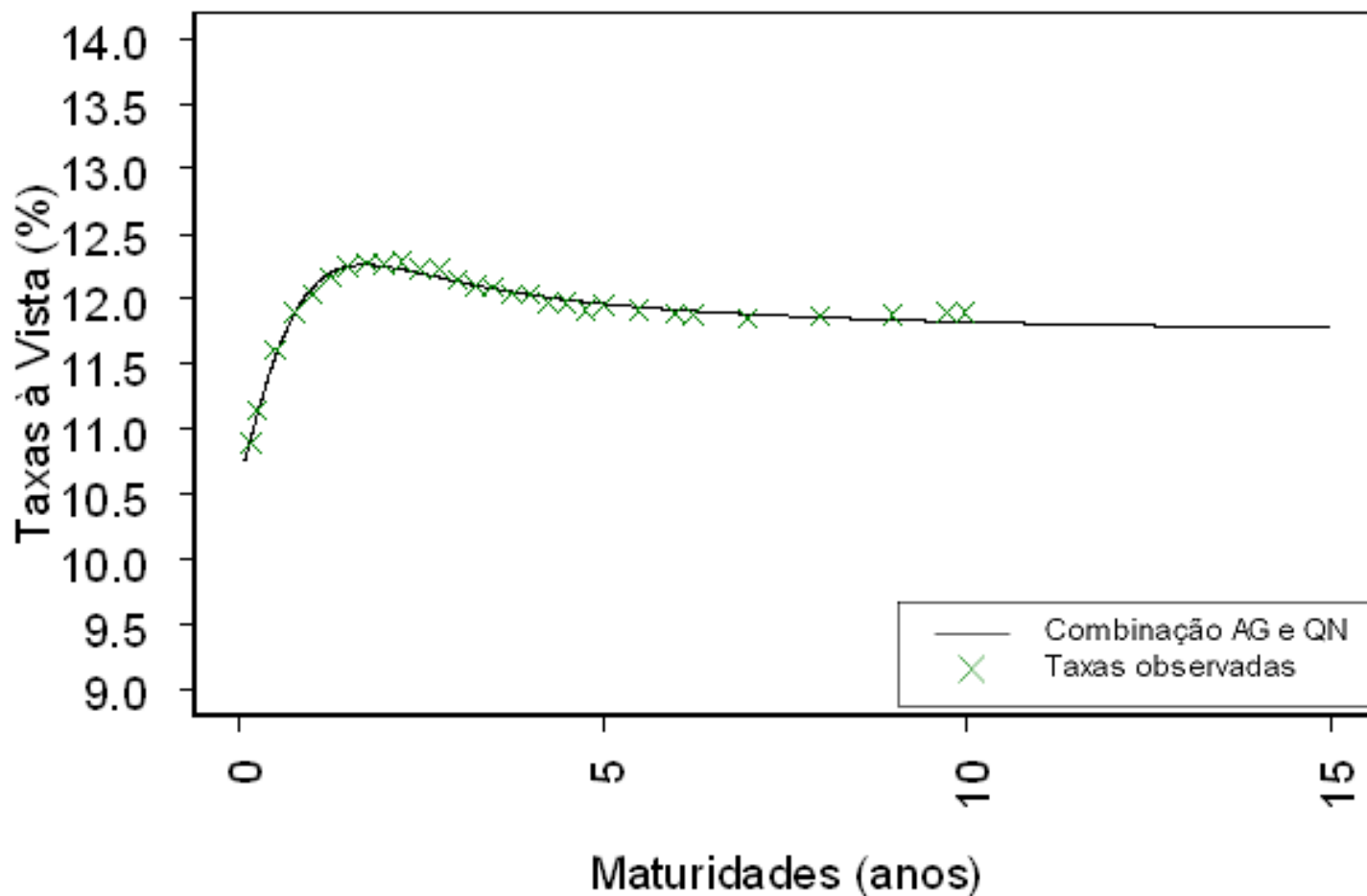
Curva de cupom de IGPM

(para a data de pregão de 30/12/2010)



Curva de taxas “pré”

(para a data de pregão de 30/12/2010)



Pauta

Introdução

Bases de dados

Modelos de ETTJ

Estimação dos parâmetros

Análise de resultados

Conclusões

Conclusões

Propomos o modelo de Svensson (1994) para a interpolação e extrapolação das ETTJ livre de riscos e o uso de algoritmos genéticos, em complemento aos algoritmos tradicionais de otimização não-linear, para a estimação dos parâmetros, o que permite reduzir o risco de falsa convergência e gerar parâmetros com séries temporais mais estáveis.

A análise dos resultados mostra que, para a extrapolação considerada neste estudo, o modelo de Svensson é apropriado.

Conclusões

Com a divulgação deste trabalho, esperamos contribuir para que o mercado segurador brasileiro construa estimativas dos valores descontados dos seus fluxos de caixa de maneira consistente e coerente, a fim de mitigar os riscos, para os segurados e acionistas, decorrentes de uma má estimação de valores.

FIM

Perguntas?

FIM

Obrigado!

Sergio Luis Franklin Júnior

SUSEP/CGSOA/CORIS

E-mail: sergio.franklin@susep.gov.br

Tel. 21-3233-4046

Thiago Barata Duarte

SUSEP/CGSOA/CORIS

E-mail: thiago.duarte@susep.gov.br

Tel. 21-3233-4062