Exemplo Prático de Utilização da ETTJ

1. **Objetivo**

Este anexo foi elaborado com o intuito de exemplificar, de forma prática e sucinta, a utilização da estrutura a termo de taxas de juros livres de risco (ETTJ), apresentada no artigo *Interpolação e Extrapolação da Estrutura a Termo de Taxas de Juros para Utilização pelo Mercado Segurador Brasileiro*, no cálculo do valor presente esperado dos fluxos de caixa que decorram do cumprimento dos contratos e certificados dos planos de seguro, de previdência complementar aberta e de resseguro.

2. Exemplo de precificação

A Entidade de Previdência Complementar Aberta *XPTO S.A* possui no dia 30/12/2010 dois contratos, que têm seus compromissos com os participantes atualizados pelo Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O primeiro deles possui somente um pagamento no valor de R$ 5.000,00, que está previsto para o dia 15/11/2011. O segundo resultará no pagamento de duas parcelas no valor de R$ 1.000,00 cada, uma no dia 15/2/2012 e a outra no dia 15/8/2012.

Em função dos compromissos assumidos, a companhia deve utilizar a ETTJ para a curva de cupom de IPCA para cálculo do valor presente de suas obrigações com o participante.

2.1 Entendimento dos parâmetros divulgados

Os parâmetros ($\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, $\hat{\lambda}_1$ e $\hat{\lambda}_2$) deverão ser utilizados na equação proposta por Nelson-Siegel e estendida por Svensson[1], para o cálculo da taxa à vista anual composta continuamente em t (data de cálculo) para o prazo τ (prazo em anos até o vencimento). Esta equação é dada por:

$$y_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}.(\frac{1-e^{-\lambda_{1,t}.\tau}}{\lambda_{1,t}.\tau}) + \beta_{2,t}.(\frac{1-e^{-\lambda_{1,t}.\tau}}{\lambda_{1,t}.\tau} - e^{-\lambda_{1,t}.\tau}) + \beta_{3,t}.(\frac{1-e^{-\lambda_{2,t}.\tau}}{\lambda_{2,t}.\tau} - e^{-\lambda_{2,t}.\tau}) \qquad (1)$$

[1] Para um maior entendimento da equação proposta vide artigo elaborado pela SUSEP *"Interpolação e Extrapolação da Estrutura a Termo de Taxas de Juros para Utilização pelo Mercado Segurador Brasileiro"* divulgado no link: http://www.susep.gov.br/menumercado/modelo_ettj.asp

Tendo em vista que o exemplo proposto possui a data-base 30/12/2010, utiliza-se os valores divulgados para a ETTJ de cupom de IPCA para a referida data:

$\hat{\beta}_0$ = 0,04829 $\hat{\lambda}_1$ = 1,876257

$\hat{\beta}_1$ = -0,03660 $\hat{\lambda}_2$ = 0,19271

$\hat{\beta}_2$ = 0,07895

$\hat{\beta}_3$ = 0,02163

Logo, como resultado, obtém-se a equação para o dia 30/12/2010:

$$\hat{y}_{30/12/2010}(\tau) = 0{,}04829 - 0{,}03660.(\frac{1-e^{-1{,}876257.\tau}}{1{,}876257.\tau}) + 0{,}07895.(\frac{1-e^{-1{,}876257.\tau}}{1{,}876257.\tau} - e^{-1{,}876257.\tau}) + 0{,}02163.(\frac{1-e^{-0{,}19271.\tau}}{0{,}19271.\tau} - e^{-0{,}19271.\tau})$$

2.2 Cálculo das taxas para os vencimentos

a) Primeiro Contrato:

Dado que o vencimento do contrato será no dia 15/11/2011, a maturidade é de 220 dias úteis[2]. Logo, a taxa à vista anual composta continuamente para o prazo é igual à:

$$\hat{y}_{30/12/2010}(\tfrac{220}{252}) = 0{,}04829 - 0{,}03660.(\frac{1-e^{-1{,}876257.\frac{220}{252}}}{1{,}876257.\frac{220}{252}}) +$$
$$+ 0{,}07895.(\frac{1-e^{-1{,}876257.\frac{220}{252}}}{1{,}876257.\frac{220}{252}} - e^{-1{,}876257.\frac{220}{252}}) +$$
$$+ 0{,}02163.(\frac{1-e^{-0{,}19271.\frac{220}{252}}}{0{,}19271.\frac{220}{252}} - e^{-0{,}19271.\frac{220}{252}})$$

$$\hat{y}_{30/12/2010}(\tfrac{220}{252}) = 0{,}05542$$

[2] O prazo em dias úteis deve ser calculado desconsiderando-se os sábados, domingos e feriados nacionais. A listagem de feriados nacionais é divulgado pela Andima (Anbima) e pode ser obtida através do link: http://www.andima.com.br/feriados/feriados.asp

A taxa contínua pode ser facilmente convertida em discreta, através da seguinte igualdade:

$$\hat{R}^{t}_{t,t+\tau} = \exp(\hat{y}_t(\tau)) - 1 \qquad (2)$$

Onde:

- $\hat{R}^{t}_{t,t+\tau}$ representa a taxa à vista discreta composta anualmente para o prazo τ calculada na data *t.*

Logo, tem-se que a taxa à vista discreta composta anualmente para o prazo é igual à:

$$\hat{R}^{30/12/2010}_{30/12/2010\ ,\ 15/11/2011} = \exp(0{,}05542) - 1$$

$$\hat{R}^{30/12/2010}_{30/12/2010\ ,\ 15/11/2011} = 0{,}05699$$

b) Segundo Contrato:

Dado que os pagamentos restantes do contrato serão efetuados nos dias 15/2/2012 e 15/8/2012, as maturidades são, respectivamente, 285 e 410 dias úteis. Logo, as taxas serão:

Primeiro Pagamento

$$\hat{y}_t(\tfrac{285}{252}) = 0{,}04829 - 0{,}03660.(\frac{1-e^{-1{,}876257.\frac{285}{252}}}{1{,}876257.\frac{285}{252}}) +$$
$$+ 0{,}07895.(\frac{1-e^{-1{,}876257.\frac{285}{252}}}{1{,}876257.\frac{285}{252}} - e^{-1{,}876257.\frac{285}{252}}) +$$
$$+ 0{,}02163.(\frac{1-e^{-0{,}19271.\frac{285}{252}}}{0{,}19271.\frac{285}{252}} - e^{-0{,}19271.\frac{285}{252}})$$

$$\hat{y}_t(\tfrac{285}{252}) = 0{,}05846$$

Conversão da taxa contínua para discreta

$$\hat{R}^{30/12/2010}_{30/12/2010\ ,\ 15/2/2012} = \exp(0{,}05846) - 1$$

$$\hat{R}^{30/12/2010}_{30/12/2010\ ,\ 15/2/2012} = 0{,}06020$$

Segundo Pagamento

$$\hat{y}_t\left(\tfrac{410}{252}\right) = 0{,}04829 - 0{,}03660.\left(\frac{1-e^{-1{,}876257.\frac{410}{252}}}{1{,}876257.\frac{410}{252}}\right) +$$
$$+ 0{,}07895.\left(\frac{1-e^{-1{,}876257.\frac{410}{252}}}{1{,}876257.\frac{410}{252}} - e^{-1{,}876257.\frac{410}{252}}\right) +$$
$$+ 0{,}02163.\left(\frac{1-e^{-0{,}19271.\frac{410}{252}}}{0{,}19271.\frac{410}{252}} - e^{-0{,}19271.\frac{410}{252}}\right)$$

$$\hat{y}_t\left(\tfrac{410}{252}\right) = 0{,}06056$$

Conversão da taxa contínua para discreta

$$\hat{R}^{30/12/2010}_{30/12/2010\ ,\ 15/8/2012} = \exp(0{,}06056) - 1$$
$$\hat{R}^{30/12/2010}_{30/12/2010\ ,\ 15/8/2012} = 0{,}06243$$

Assim, todas as taxas que deverão ser consideradas para os três pagamentos dos dois contratos foram calculadas, resumidamente: 5,699% a.a. para o único pagamento do primeiro contrato, 6,020% a.a. para o primeiro pagamento do segundo contrato e 6,243% a.a. para o segundo pagamento do segundo contrato.

2.3 Cálculo do valor presente esperado dos fluxos de caixa

a) Primeiro Contrato:

Considerando que o contrato possui somente um pagamento no valor de R$ 5.000,00, o prazo até o vencimento é de 220 dias úteis e a taxa discreta anual para este prazo é igual a 5,699% a.a., o valor presente do fluxo de caixa do contrato pode ser calculado através da fórmula:

$$VP = \sum_{j=1}^{k} (1 + \hat{R}^{t}_{t,t+\tau_j})^{(-\tau_j/252)}.F_j \qquad (3)$$

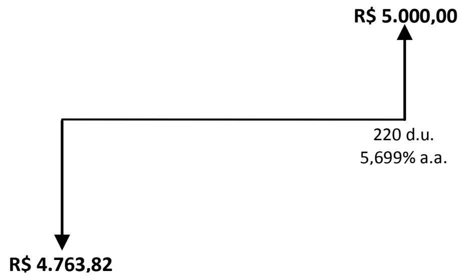
Onde:

- VP representa o valor presente esperado dos fluxos de caixa;
- k o número de pagamentos do contrato; e
- F_j o j-ésimo pagamento do contrato.

Logo, para o primeiro contrato o valor presente do fluxo de caixa, desconsiderando quaisquer decrementos, é igual à:

$$VP = (1 + 5{,}699\%)^{\left(-220/252\right)}.5000{,}00$$
$$VP = R\$4.763{,}82$$

Com isso, o fluxograma para o contrato pode ser representado pela seguinte estrutura:

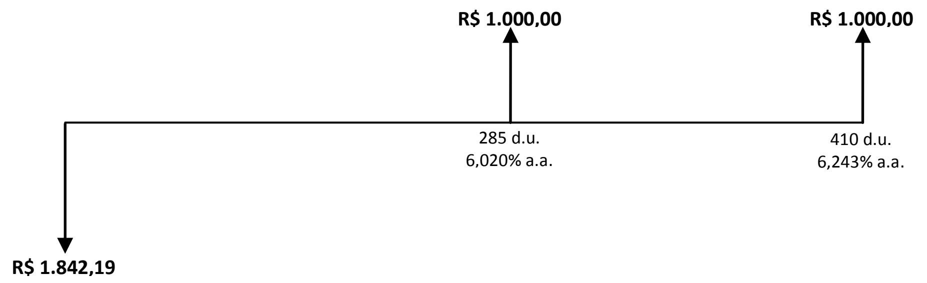


b) Segundo Contrato:

Considerando que o contrato possui dois pagamentos de R$ 1.000,00 cada, os prazos até os vencimentos são 285 e 410 dias úteis e a taxa discreta anual para estes prazos são iguais a 6,020% e 6,243% respectivamente, o valor presente do fluxo de caixa, desconsiderando quaisquer decrementos, do segundo contrato é dado por:

$$VP = (1 + 6{,}020\%)^{\left(-285/252\right)}.1000{,}00 + (1 + 6{,}243\%)^{\left(-410/252\right)}.1000{,}00$$
$$VP = 936{,}02 + 906{,}17$$
$$VP = 1.842{,}19$$

Com isso, o fluxograma para o contrato pode ser representado pela seguinte estrutura:



c) Valor presente esperado total dos fluxos de caixa

Após o cálculo dos valores presentes dos fluxos de caixa, desconsiderando quaisquer decrementos, para cada contrato, pode-se obter o valor presente total, somando-se os valores de cada obrigação:

$$VPtotal = R\$4.763{,}82 + R\$1.842{,}19$$

$$VPtotal = R\$6.606{,}02$$

Com isso, a estrutura do valor presente esperado dos fluxos de caixa que decorram do cumprimento dos contratos para esta EAPC é representada por: