



Relatório Técnico
N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo
do Índice de Situação Previdenciária – ISP-RPPS

Sumário

1. INTRODUÇÃO.....	3
2. ALGUNS DIAGNÓSTICOS.....	4
3. OBJETIVO.....	9
4. ESCOPO.....	9
5. BASES DE DADOS.....	9
6. METODOLOGIA.....	10
7. RESULTADOS.....	12
8. COMENTÁRIOS FINAIS.....	46
9. APÊNDICE.....	47

1. INTRODUÇÃO

O **Índice de Situação Previdenciária - ISP-RPPS**, instituído pela Portaria MF nº 01, de 03 de janeiro de 2017, tem como base as informações encaminhadas pelos entes federativos por meio do Sistema de Informações dos Regimes Públicos de Previdência Social - CADPREV e do Sistema de Informações Contábeis e Fiscais do Setor Público Brasileiro - SICONFI.

Nota: Originalmente, o **Índice** de Situação Previdenciária se denominava **Indicador** de Situação Previdenciária.

Este índice avalia diversas variáveis do RPPS e é apurado e divulgado anualmente pelo Departamento dos Regimes de Previdência no Serviço Público - DRPSP. Dentre as variáveis usadas, incluem-se certificados de regularidade previdenciárias, dados advindos do programa Pró-Gestão RPPS e do extrato previdenciário, além de informações atuariais e financeiras.

A análise implícita na construção do ISP é dividida em três dimensões: Gestão e Transparência, Situação Financeira e Situação Atuarial. No âmbito destas dimensões são utilizados seis indicadores para determinação do ISP:

- 1 - Indicador de Regularidade (rótulo: REG)
- 2 - Indicador de Envio de Informações (rótulo: ENV)
- 3 - Indicador de Modernização da Gestão (rótulo: GES)
- 4 - Indicador de Suficiência Financeira (rótulo: SUF)
- 5 - Indicador de Acumulação de Recursos (rótulo: ACU)
- 6 - Indicador de Cobertura de Compromissos Previdenciários (rótulo: COB)

O procedimento de cálculo do ISP envolve também a classificação cruzada por Porte e Maturidade de cada um dos RPPS analisados.

Para o Porte, utilizam-se atualmente 4 classificações:

- 1 - Especial, contendo Estados e Distrito Federal
- 2 - Município Grande, contendo municípios com maior Quantidade de Segurados
- 3 - Município Médio, contendo municípios com Quantidade de Segurados intermediária
- 4 - Município Pequeno, contendo municípios com menor Quantidade de Segurados

Os 3 subgrupos que abrangem os municípios têm suas fronteiras definidas por percentis pré-determinados, o 95%, rotulado de P95, e o 50%, rotulado de P50 ou mediana, da distribuição da Quantidade de Segurados, ativos e beneficiários, dos municípios.

Nota: O percentil 50%, ou P50, de uma distribuição é usualmente chamado de Mediana.

Para a Maturidade, empregam-se atualmente 2 classificações:

- 1 - Maior
- 2 - Menor

Analogamente, os 2 subgrupos da Maturidade têm suas fronteiras definidas por um percentil pré-determinado, o 50% da distribuição da Razão de Maturidade, que é a razão entre a Quantidade de Segurados Ativos e a Quantidade de Aposentados/Pensionistas.

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Por outro lado, para cada um dos seis indicadores componentes do cálculo do ISP, com exceção do Indicador de Modernização da Gestão, a atribuição de notas, ou classificações ordinais, "A", "B" ou "C", é executada estritamente dentro de cada um dos subgrupos definidos pela classificação cruzada Porte x Maturidade. Isto garante que a atribuição de notas reflete a comparação entre entes do mesmo tipo, isto é, de mesmo Porte e mesma Maturidade, simultaneamente.

Para cada indicador, dentro de cada categoria cruzada Porte x Maturidade, a sua distribuição de valores é particionada usando os tercís, T1 e T2, desta distribuição. A todos os entes com valor do indicador maior ou igual a T2, é atribuída a nota "A"; aos entes com valor do indicador maior ou igual a T1 mas menor que T2, é atribuída a nota "B", e, àqueles com valor do indicador menor que T1, é atribuída a nota "C".

Nota: Os tercís T1 e T2 correspondem, respectivamente, aos percentis 33,3% e 66,7% da distribuição, aproximadamente.

No caso específico do Indicador de Modernização da Gestão, a atribuição de notas, ou classificações, "A", "B" ou "C", é efetivada diretamente a partir das certificações que os entes tiverem obtido no Pró-Gestão RPPS:

- a) "A", para RPPS com certificado de níveis de aderência III e IV;
- b) "B", para RRPS com certificado de níveis de aderência I e II;
- c) "C", para RPPS que não obtiveram certificação em níveis de aderência.

Como a metodologia de cálculo do ISP de cada ente, a partir dos indicadores que o compõem, não está no escopo deste estudo, ela não está aqui descrita ou referenciada.

Nota: Para simplificar a notação, as notas serão representadas apenas pelas letras A, B e C sem as aspas duplas.

2. ALGUNS DIAGNÓSTICOS

Dentre os pontos de atenção reportados sobre a atual metodologia de construção do ISP, destacam-se a participação do Porte, a participação da Maturidade e a atribuição das notas A, B e C para os indicadores parciais (exceto para o Indicador de Modernização da Gestão).

Partição atual do Porte para Municípios (exclui o Porte Especial)

A metodologia atual partitiona o conjunto de entes municipais por Porte em 3 grupos delimitados pela mediana e pelo percentil 95 da distribuição de valores da variável Porte. Assim, o **Grande Porte** reúne os entes com valor de Porte maior ou igual ao do P95, o **Médio Porte** inclui os que têm valor de Porte menor que o do P95, mas maior ou igual à mediana, ou P50, e o **Pequeno Porte** abrange os que têm valor de Porte inferior à mediana.

A utilização de percentis para partitionar uma distribuição tem algumas peculiaridades que podem ser indesejadas para a situação. Tome-se, por exemplo, dentre os entes classificados como de Grande Porte em um dado ano t, o ente, rotulado como X, com o menor valor dentre os deste Porte. Suponha que o valor da variável Porte deste ente X não mude no ano t+1, que nenhum dos demais entes do Grande Porte tenham seus respectivos valores da variável Porte reduzidos abaixo do de X em t+1. Considere, adicionalmente, que pelo menos um ente, rotulado de Y, dentre os de Médio ou Pequeno Portes passe a exibir, em t+1, por alguma razão irrelevante para este exemplo, um valor da variável Porte superior ao do de X. Nesta situação, **o ente X terminará sendo**

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

reclassificado como de Médio Porte em t+1, mesmo não tendo sofrido alteração do valor do seu Porte de t para t+1. A razão terá sido a reclassificação do ente Y para o Grande Porte, esta sim causada por uma modificação efetiva no valor da sua variável Porte.

Esta reclassificação do ente X, independentemente das vantagens e desvantagens que ela possa trazer, parece um tanto injustificada. De fato, **a partição baseada em P50 e P95** não define os 3 grupos com base em 2 valores específicos de Porte, mas apenas **3 grupos com tamanhos pré-definidos: Grande**, com os 5% entes com os maiores valores de Porte, **Médio** com os 45% maiores valores seguintes e **Pequeno** com os 50% entes com menores valores de Porte.

Desta forma, não há limites numéricos inequivocamente definidos da variável Porte, que estabeleçam as fronteiras entre o Grande, o Médio e o Pequeno Portes. Mesmo conhecendo o seu valor para a variável Porte em t+1, um ente jamais saberá, com apenas esta informação, se em t+1 ele mudará ou manterá o seu grupo de Porte, pois **o seu Porte em t+1 não depende unicamente do seu valor para a variável Porte, mas sim da sua classificação percentual na distribuição de valores da variável Porte para todos os entes.**

De fato, analisando conjuntamente as classificações de Porte efetuadas em 2022 e 2023, observam-se casos semelhantes aos exemplificados acima.

As 3 tabelas que se seguem apresentam as tabulações cruzadas de Porte 2022 (nas colunas) e Porte 2023 (nas linhas) para todos os municípios presentes simultaneamente nos cálculos do ISP para 2022 e 2023. A mais à esquerda contém os municípios que exibiram **redução de valor da variável Porte** de 2022 para 2023, a do meio contém os que exibiram **aumento de valor desta variável** e a mais à direita contém os que **não exibiram variação de valor**.

Com redução de valor na variável Porte

Porte		Porte 2022			
Porte 2023	GP	MP	PP	Total	
GP	35	8		43	
MP	2	490	2	494	
PP		30	619	649	
Total	37	528	621	1.186	

Com aumento de valor na variável Porte

Porte		Porte 2022			
Porte 2023	GP	MP	PP	Total	
GP	42	18		60	
MP		388	31	419	
PP			311	311	
Total	42	406	342	790	

Sem variação de valor na variável Porte

Porte		Porte 2022			
Porte 2023	GP	MP	PP	Total	
GP	2				2
MP		27	1	28	
PP			84	84	
Total	2	27	85	114	

As células ressaltadas na cor verde representam casos nos quais a classificação de Porte em 2023 é compatível com a combinação da variação da variável Porte de 2022 e 2023 e da classificação de Porte em 2022.

Nota: Para simplificar a notação, as classificações de Porte foram codificadas como **GP = Grande Porte, MP = Médio Porte e PP = Pequeno Porte**.

Por outro lado, as células ressaltadas na cor laranja representam casos nos quais a classificação de Porte em 2023 é “incompatível” com a combinação da variação da variável Porte de 2022 e 2023 e da classificação de Porte em 2022.

Na tabela mais à esquerda, há 2 células nesta situação: Porte 2022 = MP com Porte 2023 = GP e Porte 2022 = PP com Porte 2023 = MP. Elas contêm, respectivamente 8 e 2 casos. Os municípios nelas compilados apresentaram “aumento” na classificação de Porte de 2022 para 2023, de MP para GP e de PP para MP, respectivamente, mas exibiram redução de valor da variável Porte de 2022 para 2023, o que constitui, indubitavelmente, uma situação inadequada.

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

De modo análogo, na tabela mais à direita, há 1 célula nesta situação: Porte 2022 = PP com Porte 2023 = MP. Ela contém 1 caso. O município nela posicionado apresentou “aumento” na classificação de Porte de 2022 para 2023, de PP para MP, mas não exibiu variação de valor da variável Porte de 2022 para 2023, o que também constitui uma situação inadequada.

Partição atual da Maturidade para cada grupo de Porte

Comentários absolutamente análogos aos documentados no item anterior se aplicam também ao particionamento da Maturidade, em dois grupos, com base na mediana de cada um dos grupos de Porte.

De fato, em um subgrupo de Maturidade Maior, o ente W que estivesse mais próximo da fronteira com o subgrupo de Maturidade Menor no ano t, poderia facilmente ser deslocado para o subgrupo de Maturidade Maior no ano t+1 mesmo que o seu valor para a variável Maturidade sequer se alterasse de t para t+1. Similarmente ao exemplo acima, supondo que todos os demais entes deste subgrupo de Maturidade Menor mantivessem, em t+1, seus valores superiores aos do valor do ente W, bastaria que um único ente Z do subgrupo de Maturidade Maior em t apresentasse, em t+1, um valor de Maturidade maior que o de W para que Z tomasse o lugar de W no subgrupo de Maturidade Menor e **deslocasse W para o de Maturidade Maior**.

Nota: A Maturidade Maior corresponde aos menores valores da Maturidade (de fato, da Estrutura de Maturidade de Massa), enquanto a Maturidade Menor, aos maiores valores da Maturidade.

Esta possibilidade é claramente indesejada dado que o valor da variável Maturidade para o ente W não se alterou de t para t+1.

Esta **partição da Maturidade com base em P50** não define os 2 grupos usando um valor específico da variável Maturidade, mas sim **2 grupos com tamanhos pré-definidos: Maior**, com os 50% entes com os menores valores de Maturidade e **Menor** com os 50% entes com maiores valores de Maturidade.

Desta forma, não há limite numérico claramente definido da variável Maturidade, que estabeleça a fronteira entre a Maturidades Maior e a Menor. Mesmo conhecendo o seu valor para a variável Maturidade em t+1, um ente jamais saberá, com apenas esta informação, se em t+1 ele mudará ou manterá o seu grupo de Maturidade, pois **a sua Maturidade em t+1 não depende unicamente do seu valor para a variável Maturidade, mas sim da sua classificação percentual na distribuição de valores da variável Maturidade para todos os entes**.

De fato, analisando conjuntamente as classificações de Maturidade efetuadas em 2022 e 2023, observam-se casos análogos aos ilustrados acima.

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

As 3 tabelas que se seguem apresentam as tabulações cruzadas de Maturidade 2022 (nas colunas) e Maturidade 2023 (nas linhas) para todos os municípios presentes simultaneamente nos cálculos do ISP para 2022 e 2023. A mais à esquerda contém os municípios que exibiram redução de valor da variável Maturidade de 2022 para 2023, a do meio contém os que exibiram aumento de valor desta variável e a mais à direita contém os que não exibiram variação de valor desta.

Com redução de valor na variável Maturidade

Maturidade	Matur. 2022			
	Matur. 2023	MAIM	MENM	Total
MAIM	667	71	738	
MENM	30	741	771	
Total	697	812	1.509	

Maturidade	Matur. 2022			
	Matur. 2023	MAIM	MENM	Total
MAIM	183			183
MENM	107	222	329	
Total	290	222	512	

Maturidade	Matur. 2022			
	Matur. 2023	MAIM	MENM	Total
MAIM	23			23
MENM	2	26	28	
Total	25	26	51	

É importante lembrar que variável Maturidade e a classificação Maturidade variam em direções inversas, já que o aumento do valor da variável Maturidade pode propiciar uma classificação “menor” da Maturidade, enquanto a redução do valor da variável Maturidade pode propiciar uma classificação “maior” da Maturidade.

As células ressaltadas na cor verde representam casos nos quais a classificação de Maturidade em 2023 é compatível com a combinação da variação da variável Maturidade de 2022 e 2023 e da classificação de Maturidade em 2022.

Nota: Para simplificar a notação, as classificações de Maturidade foram codificadas como **MAIM = Maior Maturidade e MENM = Menor Maturidade**.

Por outro lado, as células ressaltadas na cor laranja representam casos nos quais a classificação de Maturidade em 2023 é “incompatível” com a combinação da variação da variável Maturidade de 2022 e 2023 e da classificação de Maturidade em 2022.

É importante ter em mente que o valor da variável Maturidade e a classificação da Maturidade, Menor ou Maior, variam em direções inversas. Portanto, quando o valor da variável Maturidade diminui, a classificação de Maturidade só poderia aumentar (de Menor para Maior). De modo análogo, quando o valor da variável Maturidade aumenta, a classificação de Maturidade só poderia diminuir (de Maior para Menor).

Na tabela mais à esquerda, há 1 célula nesta situação: Maturidade 2022 = MAIM com Maturidade 2023 = MENM. Ela contém 30 casos. Os municípios nela compilados apresentaram “redução” na classificação de Maturidade de 2022 para 2023, de MAIM para MENM e também exibiram redução de valor da variável Maturidade de 2022 para 2023. Isto constitui, indubitavelmente, uma situação inadequada já que a redução de valor da variável Maturidade de 2022 para 2023 jamais poderia causar uma “redução” na classificação de Maturidade de 2022 para 2023.

De modo análogo, na tabela mais à direita, há 1 célula nesta situação: Maturidade 2022 = MAIM com Maturidade 2023 = MENM. Ela contém 2 casos. Os municípios nela posicionados apresentaram “redução” na classificação de Maturidade de 2022 para 2023, de MAIM para MENM, mas não exibiram variação de valor da variável Maturidade de 2022 para 2023, o que também constitui uma situação inadequada.

Atribuição atual de notas para os Indicadores Parciais (exceto Indicador de Modernização da Gestão)

No caso da atribuição de notas ordinais A, B e C para cada um dos entes de cada subgrupo cruzado Porte x Maturidade, em cada um dos indicadores componentes do ISP, o problema se repete, mas com consequências potencialmente mais indesejadas ainda.

Nota: em todos as situações, casos e exemplos abordados a seguir, o foco estará sempre na atribuição destas notas ordinais para um único indicador componente do ISP em um subgrupo cruzado Porte x Maturidade específico.

O efeito indesejado exemplificado anteriormente para as partições de Porte e, também, de Maturidade revela-se ainda mais incômodo na atribuição das notas A, B e C.

No ano t, para um indicador específico, tome-se o ente P que recebeu nota A com o menor valor observado do indicador dentre todos os entes que receberam nota A. Considere-se também o ente Q que recebeu nota B com o maior valor observado do indicador dentre todos os entes que receberam nota B.

Suponha que, no ano t+1, os valores do indicador para todos os entes do subgrupo em análise não tenham se alterado, com exceção do valor para um ente R, que, em t, recebeu nota B, com valor do indicador obviamente inferior ao de Q. Suponha ainda que, em t+1, o valor para o ente R tenha aumentado e passado a ser superior ao correspondente de P.

Pelo particionamento atual em tercis, o ente R passou a se posicionar acima do 2º tercil, T2, que ficava exatamente entre Q e P, e, portanto, passou para a nota A em t+1, o que é totalmente compatível com o seu aumento de valor do indicador.

Mas, com este reposicionamento de R entre os entes do seu subgrupo, o ente P, passou, em t+1, a ficar posicionado abaixo do 2º tercil, T2. Assim, em t+1, P “caiu” da nota A para a nota B, mesmo não tendo exibido qualquer alteração no valor do seu indicador. Sua nota piorou sem que tenha havido qualquer piora no seu valor. Adicionalmente, na comparação entre P e Q, P era melhor que Q no ano t, tendo nota A contra a nota B de Q. No entanto, apesar dos correspondentes valores do indicador para P e Q, em t+1, serem idênticos aos que eles haviam obtido em t, no ano t+1, tanto P quanto Q ficaram com a mesma nota B! Claramente, são várias as inadequações neste procedimento de atribuição das notas ordinais.

O mais preocupante é que as alterações nas avaliações individuais e comparativas entre os entes P e Q se alteraram do ano t para o ano t+1 como efeito exclusivo da alteração do valor do indicador, de t para t+1, de um terceiro ente R!

Um exemplo similar poderia ser construído com os mesmos entes P e Q e um outro ente S que tivera nota A no ano t, mas cujo valor do indicador caíra de t para t+1 tornando-se inferior ao valor para o ente Q em t+1. Neste caso, a nota alterada, sem alteração no valor do indicador, seria a de P, que “subiria” de B para A. Ou seja, as avaliações individuais e comparativas entre os entes P e Q se alterariam do ano t para o ano t+1 como efeito exclusivo da alteração do valor do indicador, de t para t+1, de um outro ente S!

Com o método dos tercis, as fronteiras entre as notas A, B e C não são previamente definidas por limites numéricos conhecidos do indicador. Mesmo conhecendo o seu valor para o indicador em t+1, um ente jamais saberá, com apenas esta informação, se em t+1 ele mudará ou manterá a sua nota, pois a sua nota em t+1 não depende diretamente do seu valor para o indicador, mas sim da **sua classificação percentual na distribuição de valores do indicador para todos os entes**.

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Fica claro que, com a atual metodologia, um ente não tem como saber, a priori, que patamar de valor do indicador ele precisaria alcançar em $t+1$ para alterar a sua nota.

Além disso, caso ocorra uma melhora ou piora razoavelmente “uniforme” em todos os entes, a distribuição do indicador poderá permanecer praticamente inalterada, muito embora ela tenha se deslocado para um lado (melhora) ou para o outro (piora). Apesar do deslocamento da distribuição, um terço dos entes continuará a receber nota A, outro terço, nota B e outro terço, nota C.

3. OBJETIVO

Este estudo tem como objetivo avaliar e sugerir novos métodos para a especificação dos 3 grupos de Porte, dos 2 grupos de Maturidade e, também, novos critérios para atribuição das notas ordinais A, B e C para cada um dos indicadores componentes do ISP, com exceção do Indicador de Modernização da Gestão.

O cerne da solução é **o estabelecimento de limites numéricos conhecidos tanto para a classificação de Porte como de Maturidade**. Além disso, **para cada indicador, o foco é a discriminação de limites numéricos conhecidos para a atribuição das notas A, B e C em cada um dos subgrupos Porte x Maturidade estabelecidos**.

A motivação para este estudo foi a manifesta insatisfação de uma quantidade relevante de entes com as atuais metodologias de definição dos grupos de Porte e de Maturidade e, principalmente, com a metodologia de atribuição das notas ordinais A, B e C em cada indicador, dentro de cada subgrupo de Porte x Maturidade.

4. ESCOPO

Este trabalho se restringe a **estudar, testar e propor novos métodos para a especificação dos grupos de Porte e de Maturidade e, também, novos critérios para atribuição das notas ordinais A, B e C para cada um dos indicadores componentes do ISP, com exceção do Indicador de Modernização da Gestão**.

A definição do ISP e a sua fórmula de cálculo estão fora do escopo deste estudo. Também não são avaliadas as formulações matemáticas que determinam os valores de cada um dos indicadores componentes do ISP.

5. BASES DE DADOS

A base de dados utilizada foi fornecida pelo cliente e contém todos os dados utilizados para a construção e cálculo do ISP nos anos de 2020 a 2023.

6. METODOLOGIA

O foco da metodologia é a substituição do método de particionamento de uma distribuição de frequência com base em percentis, cuja característica principal é apenas pré-determinar os tamanhos dos grupos, por outro que defina fronteiras explícitas através da efetiva identificação de agrupamentos inerentes à estrutura da distribuição em estudo.

Nota: para facilitar a referência, esta metodologia é chamada de **Metodologia Nova** e rotulada de **MN**. Por outro lado, a **Metodologia Atual** é rotulada de **MA**.

O problema será dividido em 3 etapas. A primeira será a definição de um novo método para a especificação dos 3 grupos de Porte, Pequeno, Médio e Grande. Concluída esta etapa, a segunda será a definição de um novo método para a especificação dos 2 grupos de Maturidade, Menor e Maior.

Com estas duas etapas concluídas, estarão definidos todos os novos subgrupos da participação cruzada Porte x Maturidade dos entes analisados.

A partir desta estrutura de classificação dos entes, será definido um novo método de atribuição de notas para cada um dos indicadores parciais de interesse, em cada subgrupo Porte x Maturidade, de forma independente dos demais subgrupos.

Outra vez, o cerne da metodologia será a identificação de agrupamentos existentes na distribuição, que permitam definir fronteiras explicitadas por valores da própria distribuição da variável em análise.

Para isto foi desenvolvido um algoritmo que analisa a distribuição de densidade da variável em estudo e procura **identificar pontos de separação de subconjuntos de dados da distribuição**. Nele, a **busca é por mínimos locais da distribuição**, já que estes pontos são valores para os quais a densidade decresce à sua esquerda e cresce à sua direita, sugerindo que **o subconjunto de pontos à sua esquerda pode ser “separado” do de pontos à sua direita**.

No caso do Porte, o objetivo é identificar dois destes pontos de separação para definir os subconjuntos de Porte, Pequeno, Médio e Grande. Para a Maturidade, o objetivo é apontar um único destes pontos de separação para definir os subconjuntos de Maturidade, Menor e Maior. Finalmente, para cada um dos Indicadores Parciais, o objetivo é novamente identificar dois destes pontos de separação para definir os subconjuntos de notas, A, B e C, para o Indicador.

Este algoritmo utiliza o KDE, Kernel Density Estimator, que é uma ferramenta de alisamento por núcleos (kernel) que serve para estimar a forma completa de uma distribuição de densidade de probabilidade, a partir de um conjunto de observações desta distribuição. Utilizando o KDE como estimativa da distribuição em análise, o algoritmo busca identificar mínimos locais do KDE para explorá-los e selecioná-los como possíveis limites para a separação de subconjuntos da distribuição.

Completada essa 3^a etapa da MN, é preciso **estender os resultados obtidos em cada Indicador Parcial para os seus subgrupos definidos pela participação cruzada Porte x Maturidade**, já que uma das ideias centrais da atribuição de notas A, B e C é comparar entes somente dentro de cada subgrupo da participação.

Foram explorados dois métodos alternativos, a serem aplicados para cada Indicador Parcial:

- (1) **utilizar a própria MN ao Indicador, separadamente em cada um dos subgrupos da partição ou**
- (2) **ajustar os dois limites do Indicador, definidos pela MN, para cada um dos subgrupos da partição, através de uma transformação linear parametrizada pela mediana e desvio interquartílico (DIQ) do Indicador e também pela mediana e desvio interquartílico de cada subgrupo da partição separadamente.**

A primeira alternativa não apresentou resultados consistentemente satisfatórios, principalmente devido a presença de subgrupos muito pequenos na partição cruzada Porte x Maturidade.

A segunda alternativa provou ser de aplicação mais simples e gerou resultados satisfatórios. A transformação linear utilizada para a definição dos dois limites, entre os subconjuntos de notas A, B e C em cada subgrupo da partição, é uma técnica de padronização usando a mediana e o desvio interquartílico (DIQ) descrita pela seguinte fórmula:

$$\text{Lim}_{\text{subgr}} = \text{Mediana}_{\text{subgr}} + [\text{DIQ}_{\text{subgr}} * (\text{Lim}_{\text{Indic}} - \text{Mediana}_{\text{Indic}}) / \text{DIQ}_{\text{Indic}}]$$

onde

$\text{Lim}_{\text{Indic}}$ é o limite definido pela MN para o Indicador Parcial,

$\text{Mediana}_{\text{Indic}}$ é a Mediana da distribuição do Indicador Parcial,

$\text{DIQ}_{\text{Indic}}$ é o Desvio Interquartílico da distribuição do Indicador Parcial,

$\text{Lim}_{\text{subgr}}$ é o limite ajustado para o Indicador Parcial dentro do Subgrupo,

$\text{Mediana}_{\text{subgr}}$ é a Mediana da distribuição do Indicador Parcial dentro do Subgrupo,

$\text{DIQ}_{\text{subgr}}$ é o Desvio Interquartílico da distribuição do Indicador Parcial dentro do Subgrupo.

Nota: a prevalência de distribuições com forte assimetria e caudas longas sugeriu a utilização do par mediana/DIQ em vez do mais “popular” par média/DP (DP é o desvio-padrão).

Obviamente, esta fórmula é aplicada a cada um dos dois limites, tanto ao que separa os subconjuntos de notas C e B quanto ao que separa os de notas B e A.

O objetivo desta transformação linear é ajustar cada um dos dois limites encontrados para um dado Indicador a cada um dos subgrupos da partição Porte x Maturidade. Para tanto, calcula-se, para cada um dos dois limites separadamente, a distância deste limite à mediana da distribuição do Indicador, $(\text{Lim}_{\text{Indic}} - \text{Mediana}_{\text{Indic}})$, para, em seguida, dividí-la pelo DIQ (desvio interquartílico), $(\text{Lim}_{\text{Indic}} - \text{Mediana}_{\text{Indic}}) / \text{DIQ}_{\text{Indic}}$. Este resultado é **a distância entre o limite e a mediana do Indicador, expressa em unidades de DIQ, a DLMD**.

Para ajustar cada limite do Indicador à distribuição de um dado subgrupo, basta utilizar a mediana e o DIQ deste subgrupo para calcular o limite ajustado do subgrupo, $\text{Lim}_{\text{subgr}}$, multiplicando a distância entre o limite e a mediana do Indicador, expressa em unidades de DIQ, a DLMD, pelo DIQ da distribuição do subgrupo e somar ao resultado a mediana da distribuição do subgrupo.

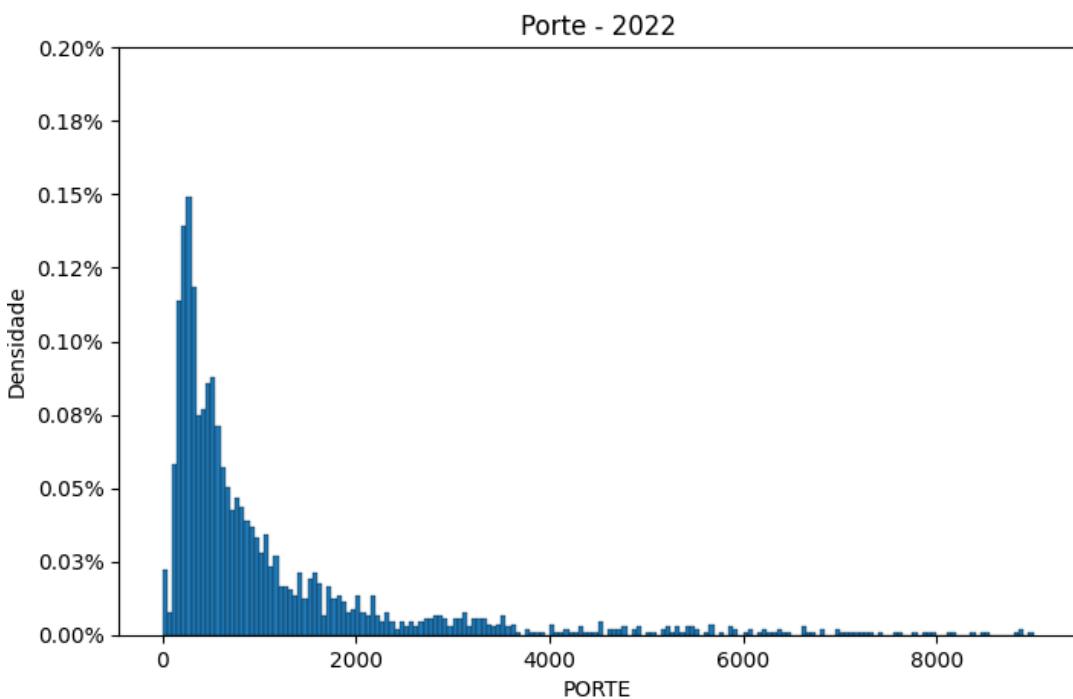
Isto garante que, em unidades do respectivo DIQ, os dois limites de um subgrupo estarão a uma distância idêntica da respectiva mediana que os correspondentes limites do Indicador estão da mediana do próprio Indicador, em unidades de DIQ do Indicador.

7. RESULTADOS

❖ A variável classificadora Porte

Com base nos dados de 2022 e de 2023, uma análise preliminar da distribuição da variável Porte, que é a **quantidade total de segurados ativos, aposentados e pensionistas de cada ente (rótulo: AAP)**, evidencia que a distribuição é fortemente assimétrica, com uma cauda direita muito longa. O gráfico que se segue exibe a distribuição da **densidade de frequência** da variável AAP.

Distribuição de Densidade de Frequência de AAP – dados de 2022



Nota: para melhorar a visualização, o eixo-x está truncado à direita, para AAP>10.000.

Em 2022, há apenas 54 entes com a AAP > 10.000 e o valor máximo desta variável é 235.063 para São Paulo – SP. Claramente, estes entes, não exibidos no gráfico, serão classificados como de Grande Porte.

A “curva” desta distribuição apresenta alguns pontos nos quais ela “muda” de comportamento, mesmo que transitoriamente. **Nestes pontos ocorrem mínimos locais que poderiam ser bons pontos para estabelecer divisórias entre grupos.** Entre 300 e 2.000, há alguns mínimos locais interessantes. Finalmente, de pouco menos de 4.000 em diante, a densidade de frequência se torna extremamente baixa, sugerindo que esta faixa poderia representar os entes de maior porte.

Por causa da forte assimetria exibida pela distribuição, optou-se por **aplicar uma transformação normalizadora à variável AAP**, de modo a suavizar decisivamente esta característica. Portanto, a variável modelada é **AAP NORM**, a AAP normalizada.

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Com os dados de 2022, processou-se o algoritmo destinado a identificar divisórias inerentes à própria distribuição da AAP Normalizada. Como o Porte é tradicionalmente particionado em três grupos, Pequeno, Médio e Grande, o algoritmo buscou uma solução com duas divisórias para definir a participação do Porte.

Para evitar a criação de partições com algum grupo de tamanho muito reduzido, o algoritmo foi parametrizado pelo **tamanho mínimo, MÍN**, aceitável para cada um dos três grupos. Uma solução satisfatória foi encontrada com o parâmetro MÍN=5%, cujo valor foi sugerido pela metodologia atual.

Os limites resultantes, para os dados de 2022, já convertidos para valores originais da variável AAP, são **379,3 e 4.796,6 segurados ativos, aposentados e pensionistas.** Desta forma, **os entes com AAP < 379,3 são classificados como de Pequeno Porte, os com 379,3 <= AAP < 4.796,6, como de Médio Porte e os com AAP >= 4.796,6, como de Grande Porte.**

As estatísticas sobre os tamanhos dos três grupos de Porte estão contidas na seguinte tabela, que também exibe os tamanhos dos três grupos gerados pela metodologia atual:

Partição de Porte pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2022

Porte 2022	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
GP	6,8%	3,9%
MP	62,3%	46,0%
PP	30,9%	50,1%
Total	100,0%	100,0%

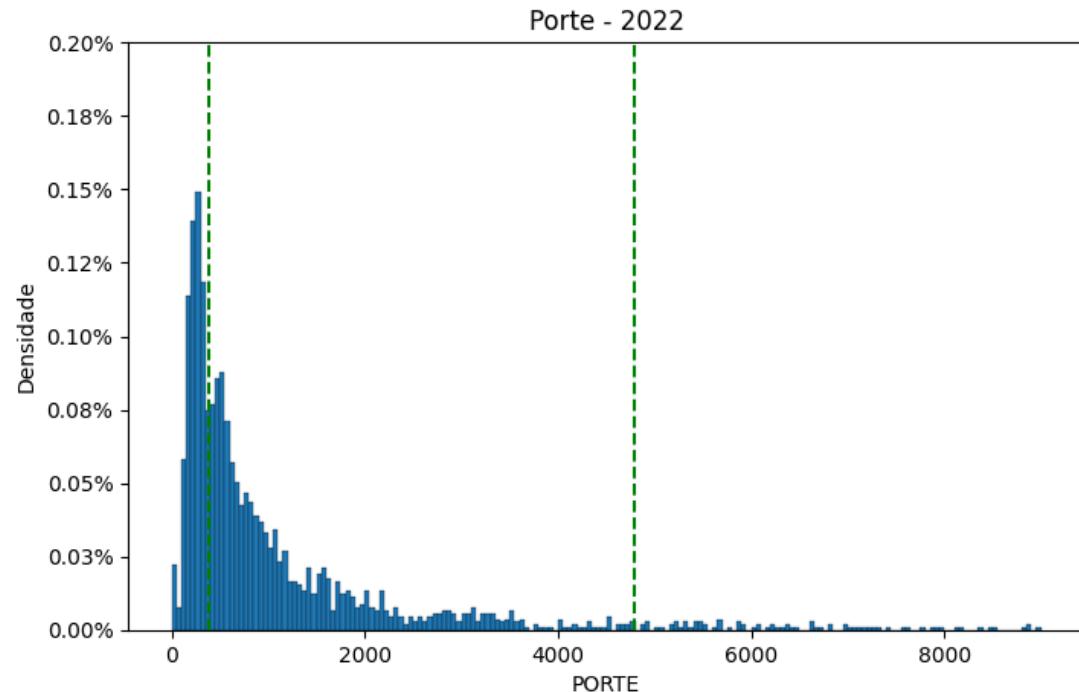
Nota: (1) As frequências relativas apresentadas para a MN incluem apenas os entes municipais envolvidos na modelagem, excluindo os entes do Porte Especial, Estados e DF, e os entes Não-Classificados.

Como era de se esperar, os tamanhos dos novos grupos divergem daqueles dos grupos determinados em 2022 pela metodologia atual dos percentis. As maiores diferenças são verificadas nos grupo PP e MP, indicando que a MN reclassificaria uma parte dos PP de 2022 para MP. O tamanho do porte GP não sofreria grande alteração, com uns poucos entes do grupo MP em 2022 sendo reclassificados para GP pela MN.

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição de AAP para 2022:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Frequência de AAP – dados de 2022



Para verificar a “estabilidade ao longo do tempo” dos tamanhos dos grupos gerados pela MN, ela também foi aplicada aos dados de 2023, sem considerar os de 2022.

Os valores resultantes, para os dados de 2023, já convertidos para valores originais da variável AAP, são **377,1 e 4.572,8 segurados ativos, aposentados e pensionistas**. Desta forma, **os entes com AAP < 377,1 são classificados como de Pequeno Porte, os com 377,1 <= AAP < 4.572,8, como de Médio Porte e os com AAP >= 4.572,8, como de Grande Porte.**

Partição de Porte pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2023

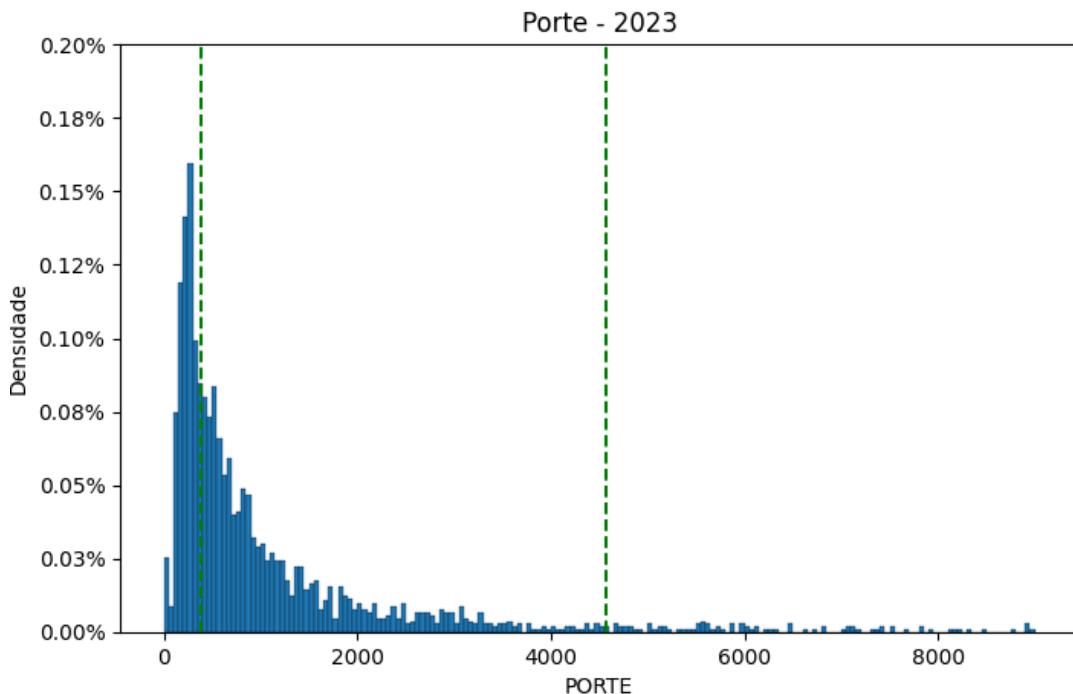
Porte 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
GP	7,4%	5,0%
MP	61,3%	45,0%
PP	31,3%	50,0%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) As frequências relativas apresentadas para MN incluem apenas os entes municipais envolvidos na modelagem, excluindo os entes do Porte Especial, Estados e DF, e os entes Não-Classificados.

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição de AAP para 2023:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Frequência de AAP – dados de 2023



Comparando os tamanhos dos grupos, gerados pela MN, para 2022 e para 2023, observa-se uma semelhança bastante satisfatória.

Partição de Porte pela Metodologia Nova (MN) – dados de 2022 e de 2023

Porte	Frequência Relativa (%)	
	MN em 2022	MN em 2023
GP	6,8%	7,4%
MP	62,3%	61,3%
PP	30,9%	31,3%
Total	100,0%	100,0%

Assim, conclui-se que a MN poderia ser implementada para dados futuros com base nas divisórias definidas pela MN para 2023. Neste caso, **os grupos seriam definidos pelas seguintes regras:**

- se **AAP < 378**, o ente é classificado como de Pequeno Porte,
- se **378 <= AAP < 4.573**, o ente é classificado como de Médio Porte, e,
- se **AAP >= 4.573**, o ente é classificado como de Grande Porte

Nota: Por uma questão de praticidade, os limites estão expressos como números inteiros, já que a variável de interesse é expressa em números inteiros.

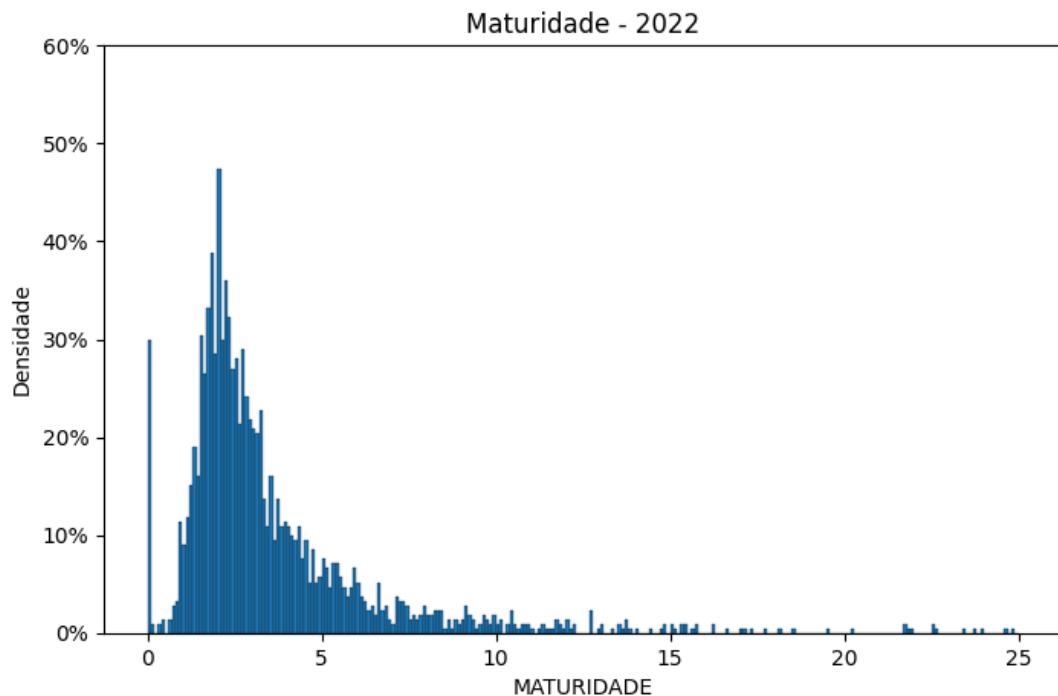
Para garantir uma maior previsibilidade no cálculo do ISP para os gestores dos entes, sugere-se que estes limites sejam recalculados apenas vigorarem por, por exemplo, três anos.

Exemplificando, os limites acima, definidos com base nos dados de 2023, teriam vigência para os cálculos do ISP nos anos de 2024, 2025 e 2026. Ao final de 2026, com base nos dados de AAP para 2026, novos limites seriam calculados pela MN para vigorarem em 2027, 2028 e 2029. E assim sucessivamente.

❖ **A variável classificadora Maturidade**

Com base nos dados de 2022 e de 2023, uma análise preliminar da distribuição da variável Maturidade, que é a **estrutura de maturidade de massa de cada ente (rótulo: EMM)**, evidencia que a distribuição também é fortemente assimétrica, com uma cauda direita muito longa. O gráfico abaixo exibe a distribuição da **densidade de frequência** da variável EMM.

Distribuição de Densidade de Frequência de EMM – dados de 2022



Nota: para melhorar a visualização, o eixo-x está truncado à direita, para $EMN > 25,0$.

Há apenas 35 entes com a $EMM > 25,0$ e o valor máximo desta variável é 736,0 para Machado - MG.

A “curva” desta distribuição também apresenta alguns pontos nos quais ela “muda” de comportamento, mesmo que transitoriamente. **Nestes pontos ocorrem mínimos locais que poderiam ser bons pontos para estabelecer a divisória entre grupos.**

Por causa da forte assimetria exibida pela distribuição, optou-se por **aplicar uma transformação normalizadora à variável EMM**, de modo a suavizar decisivamente esta característica. Portanto, **a variável modelada é EMM NORM**, a EMM normalizada.

Com os dados de 2022, processou-se o algoritmo destinado a identificar divisórias inerentes à própria distribuição da EMM Normalizada. Como a Maturidade é tradicionalmente particionada em dois grupos, Menor e Maior Maturidade, **o algoritmo buscou uma solução com uma única divisória para definir a partição da Maturidade.**

Para evitar a criação de partições com algum grupo de tamanho muito pequeno, o algoritmo foi parametrizado pelo **tamanho mínimo, MÍN**, aceitável para cada um dos dois grupos. Uma solução satisfatória foi encontrada com o parâmetro **MÍN=30%**, cujo valor foi sugerido pela metodologia atual, que, teoricamente, produz dois grupos com 50% dos entes cada.

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

O limite resultante, para os dados de 2022, já convertido para valor original da variável EMM, é **2,671** para a estrutura de maturidade de massa. Desta forma, **os entes com EMM <= 2,671 são classificados como de Maior Maturidade e os com EMM > 2,671, como de Menor Maturidade.**

As estatísticas sobre os tamanhos dos dois grupos de Maturidade são exibidas na seguinte tabela, que também exibe os tamanhos dos dois grupos gerados pela metodologia atual:

Partição de Maturidade pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2022

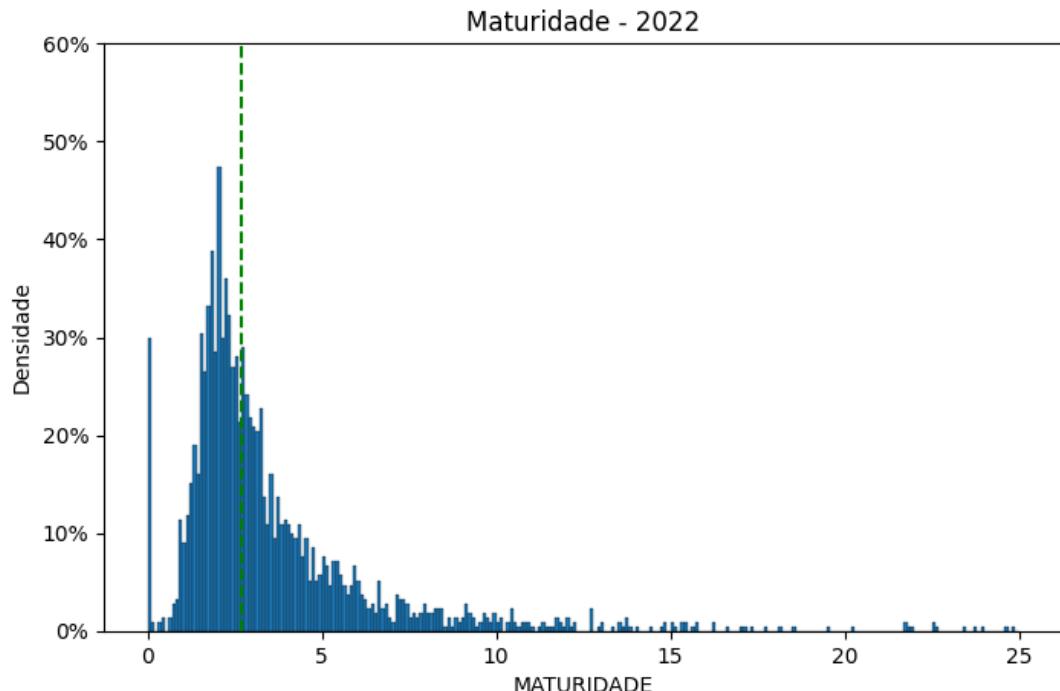
Maturidade 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
MENM	53,1%	48,3%
MAIM	46,9%	51,7%
Maturidade	100,0%	100,0%

Nota: As frequências relativas apresentadas para a MN incluem apenas os entes municipais envolvidos na modelagem, excluindo os entes do Porte Especial, Estados e DF, e os entes Não-Classificados.

Peculiarmente, **os tamanhos dos novos grupos são bem semelhantes àqueles dos grupos determinados em 2022 pela metodologia atual dos percentis**, com o grupo de Menor Maturidade um pouco superior a 50%.

Graficamente, o limite acima explicitado (a linha tracejada vertical em cor verde) se apresenta da seguinte forma na distribuição de EMM para 2022:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Frequência de EMM – dados de 2022



Para verificar a “estabilidade ao longo do tempo” dos tamanhos dos grupos gerados pela MN, ela também foi aplicada aos dados de 2023, sem considerar os de 2022.

O limite resultante, para os dados de 2023, já convertido para valor original da variável EMM, é **2,532** para a estrutura de maturidade de massa. Desta forma, **os entes com EMM <= 2,532 são classificados como de Maior Maturidade e os com EMM > 2,532, como de Menor Maturidade.**

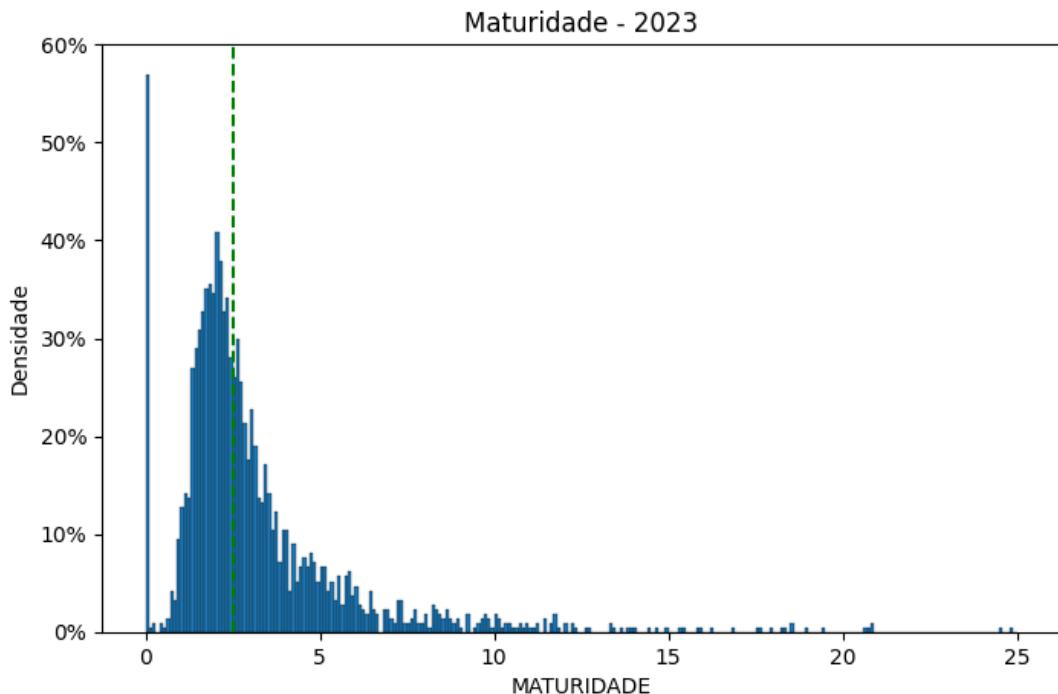
Partição de Maturidade pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2023

Maturidade 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
MENM	51,7%	45,3%
MAIM	48,3%	54,7%
Total	100,0%	100,0%

Novamente, **os tamanhos dos novos grupos são bem semelhantes àqueles dos grupos determinados em 2023 pela metodologia atual dos percentis**, com o grupo de Menor Maturidade levemente superior a 50%.

Graficamente, o limite acima explicitado (a linha tracejada vertical em cor verde) se apresenta da seguinte forma na distribuição de EMM para 2023:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Frequência de EMM – dados de 2023



Comparando os tamanhos dos grupos, gerados pela MN, para 2022 e para 2023, nota-se uma semelhança bastante grande.

Partição de Maturidade pela Metodologia Nova (MN) – dados de 2022 e de 2023

Maturidade	Frequência Relativa (%)	
	MN em 2022	MN em 2023
MENM	53,1%	51,7%
MAIM	46,9%	48,3%
Total	100,0%	100,0%

Assim, conclui-se que a MN poderia ser implementada para dados futuros com base na divisória definida pela MN para 2023. Portanto, **os grupos seriam definidos pelas seguintes regras**:

- se **EMN <= 2,5324**, o ente é classificado como de Maior Maturidade, e,
- se **EMN > 2,5324**, o ente é classificado como de Menor Maturidade

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Para garantir uma maior previsibilidade no cálculo do ISP para os gestores dos entes, a sugestão é que este limite seja recalculado apenas vigorarem por, por exemplo, três anos.

Exemplificando, o limite acima, definido com base nos dados de 2023, teria vigência para os cálculos do ISP nos anos de 2024, 2025 e 2026. Ao final de 2026, com base nos dados de EMM para 2026, um novo limite seria calculado pela MN para vigorar em 2027, 2028 e 2029. E assim sucessivamente.

❖ **Os Subgrupos da Partição Porte x Maturidade**

Combinando as partições definidas para Porte e Maturidade, tanto pela MN quanto pela MA, obtém-se a classificação cruzada Porte x Maturidade. Na tabela que se segue, é possível comparar os tamanhos dos contingentes em cada um dos seus 6 subgrupos para os dados de 2023.

Partição Porte x Maturidade pelas Metodologias Atual (MA) e Nova (MN) – dados de 2023

Grupo-Subgrupo 2023	Frequência Relativa		Frequência	
	MA	MN	MA	MN
GP-MENM	2,5%	3,0%	53	60
GP-MAIM	2,5%	4,4%	52	87
MP-MENM	24,1%	31,2%	504	621
MP-MAIM	20,9%	30,1%	438	599
PP-MENM	28,1%	17,5%	588	348
PP-MAIM	21,9%	13,8%	459	275
Todos	100,0%	100,0%	2.094	1.990

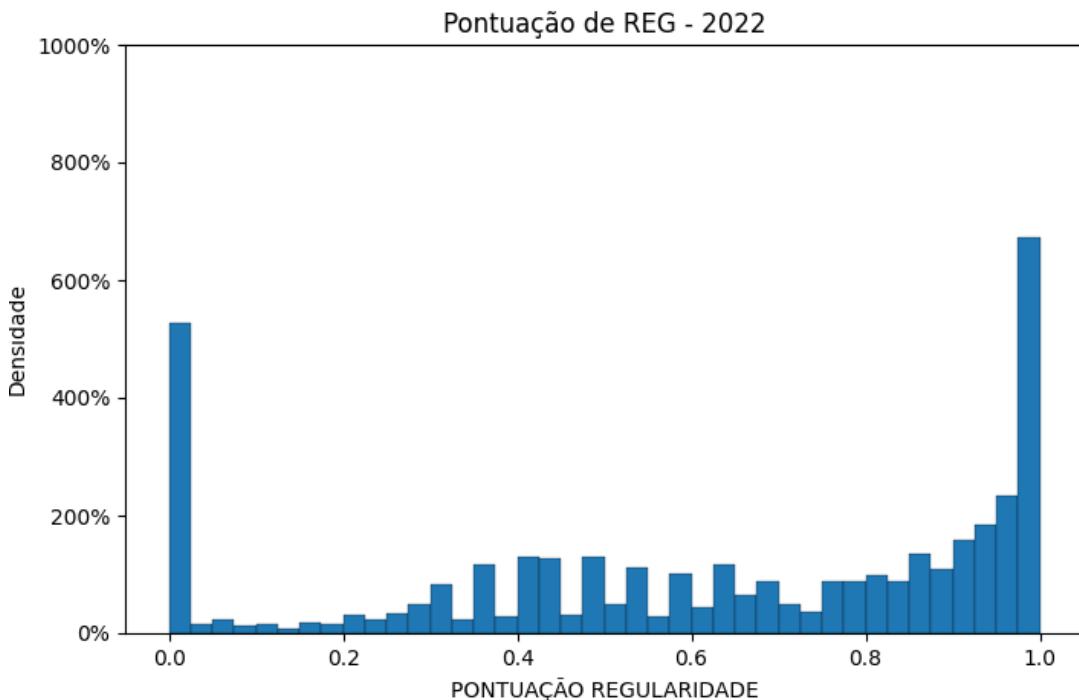
Nota: (1) PP = Pequeno Porte, MP = Médio Porte, GP = Grande Porte, MENM = Menor Maturidade, MAIM = Maior Maturidade, (2) As frequências totais diferem em razão dos diferentes quantitativos de entes Não-Classificados por cada metodologia.

Como já observado acima, nos comentários sobre o Porte, a MN produz uma redução dos subgrupos de Pequeno Porte (PP), de 21,9% para 13,8% para o subgrupo MAIM e de 28,1% para 17,5% para o subgrupo MENM. Por outro lado, ela gera um aumento dos subgrupos de Médio Porte (MP), de 20,9% para 30,1% para o subgrupo MAIM e de 24,1% para 31,2% para o subgrupo MENM. Os tamanhos dos subgrupos de Grande Porte (GP) também aumentaram levemente com a MN.

❖ **O indicador parcial Regularidade (REG)**

Com base nos dados de 2022 e de 2023, uma análise preliminar da distribuição da pontuação do indicador parcial Regularidade (REG), evidencia que a distribuição está restrita ao intervalo [0-1], com picos bem expressivos em 0 e 1. O gráfico abaixo exibe a distribuição da **densidade de frequência** da variável Pontuação de REG (PREG).

Distribuição de Densidade de Frequência da Pontuação de REG – dados de 2022



A “curva” desta distribuição apresenta diversos pontos nos quais ela “muda” de comportamento, mesmo que transitoriamente. **Os pontos de mínimo local poderiam ser bons pontos para estabelecer divisórias entre os subconjuntos com notas A, B e C.**

Com a distribuição restrita ao intervalo [0-1], optou-se por **aplicar a MN diretamente à Pontuação de REG**. Portanto, **a variável modelada é Pontuação de REG**.

Com os dados de 2022, processou-se o algoritmo destinado a identificar divisórias inerentes à própria distribuição da Pontuação de REG. Como são necessários três subconjuntos para a atribuição das notas A, B e C, **o algoritmo buscou uma solução com duas divisórias para definir a partição do notas**.

Para evitar a criação de partições com algum grupo de tamanho muito grande, o algoritmo foi parametrizado pelo **tamanho máximo, MÁX**, aceitável para cada um dos três grupos. Uma solução satisfatória foi encontrada com o parâmetro MÍN=55%. Desta forma, nenhum dos subconjuntos destinados a receber as notas A, B e C poderá exceder 55% do total de casos com pontuação de REG.

Os limites resultantes, para os dados de 2022, são **0,181 e 0,645**. Desta forma, **os entes com PREG < 0,181 recebem nota C, os com 0,181 <= PREG < 0,645 recebem nota B e os com PREG >= 0,645 recebem nota A**.

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

As estatísticas sobre os tamanhos dos três subconjuntos de notas A, B e C estão contidas na seguinte tabela, que também exibe os tamanhos dos três grupos gerados pela metodologia atual:

Partição de Notas de REG pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2022

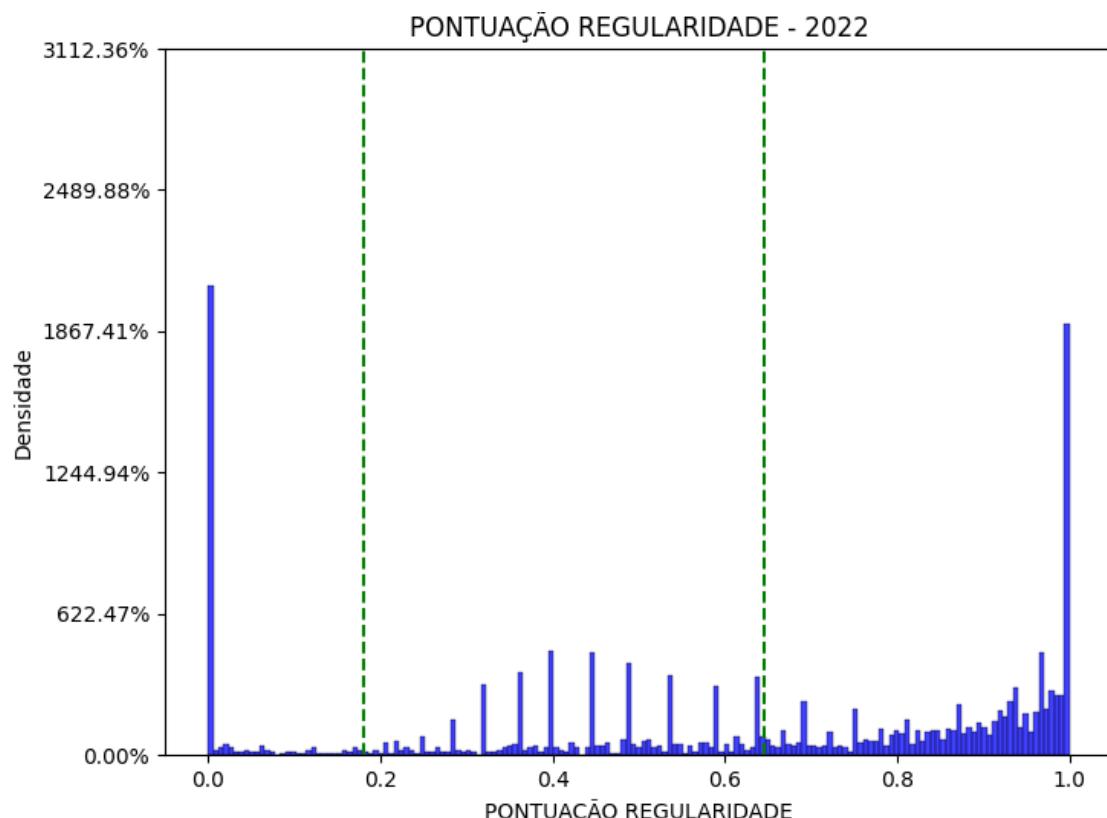
REG 2022	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	52,8%	33,4%
B	31,5%	34,1%
C	15,7%	32,5%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido** foram automaticamente classificados na Nota C.

Como era de se esperar, os tamanhos dos novos grupos divergem daqueles dos grupos determinados em 2022 pela metodologia atual dos percentis. As maiores diferenças são verificadas nas notas A e C.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição da Pontuação de REG para 2022:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Pontuação de REG – dados de 2022



Para verificar a "estabilidade ao longo do tempo" dos tamanhos dos subconjuntos gerados pela MN, ela também foi aplicada aos dados de 2023, sem considerar os de 2022.

Os valores resultantes, para os dados de 2023, são **0,089 e 0,737**. Desta forma, **os entes com PREG < 0,089 recebem nota C, os com 0,089 <= PREG < 0,737 recebem nota B e os com PREG >= 0,737 recebem nota A**.

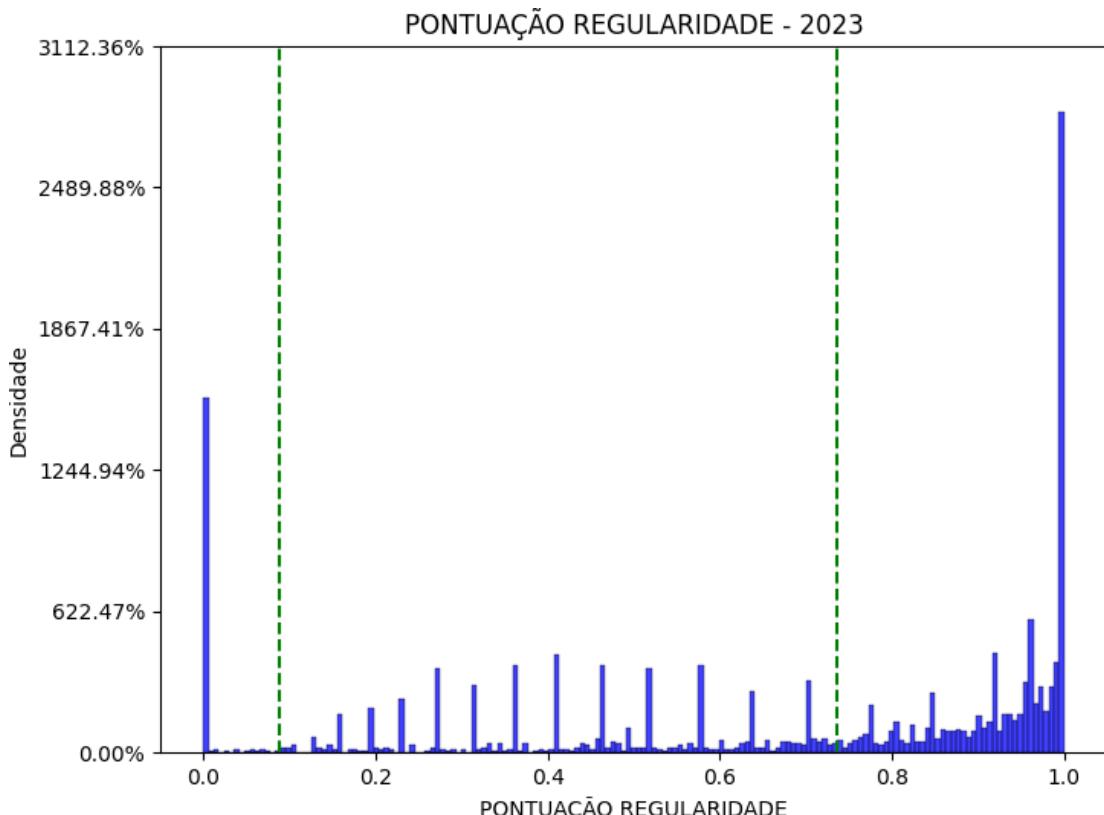
Partição de Notas de REG pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2023

REG 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	53,6%	33,7%
B	36,4%	33,0%
C	10,0%	33,3%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição da Pontuação de REG para 2023:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Frequência de Pontuação de REG – dados de 2023



Comparando os tamanhos dos grupos, gerados pela MN, para 2022 e para 2023, observa-se uma semelhança bastante satisfatória.

Partição de Notas de REG pela Metodologia Nova (MN) – dados de 2022 e de 2023

REG	Frequência Relativa (%)	
	MN em 2022	MN em 2023
A	52,8%	53,6%
B	31,5%	36,4%
C	15,7%	10,0%
Total	100,0%	100,0%

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Assim, conclui-se que a MN poderia ser implementada para dados futuros com base nas divisórias definidas pela MN para 2023. Portanto, **os grupos seriam definidos pelas seguintes regras:**

- se **PREG < 0,089**, o ente recebe nota de REG igual a C,
- se **0,089 <= PREG < 0,737**, o ente recebe nota de REG igual a B, e,
- se **PREG >= 0,737**, o ente recebe nota de REG igual a A

Para garantir uma maior previsibilidade no cálculo do ISP para os gestores dos entes, a sugestão é que estes limites sejam recalculados apenas após vigorarem por, por exemplo, três anos.

Exemplificando, os limites acima, definidos com base nos dados de 2023, teriam vigência para os cálculos do ISP nos anos de 2024, 2025 e 2026. Ao final de 2026, com base nos dados de AAP para 2026, novos limites seriam calculados pela MN para vigorarem em 2027, 2028 e 2029. E assim sucessivamente.

Aplicação da Partição de REG aos subgrupos Porte x Maturidade

A adequação da partição de notas obtida para a pontuação do indicador parcial REG foi efetuada através da padronização dos valores dos limites determinados, utilizando a mediana e o desvio interquartílico de cada subgrupo Porte x Maturidade para adequá-los.

Com os dados de 2023, os limites inferior e superior ajustados para cada subgrupo estão discriminados na tabela abaixo.

Limites Inferior e Superior de REG para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	Lim Inf Ajust	Lim Sup Ajust
PE	0,5748	0,8945
GP-MENM	0,1644	0,7996
GP-MAIM	0,4605	0,8856
MP-MENM	0,0930	0,7520
MP-MAIM	0,0410	0,6822
PP-MENM	0,3222	0,8312
PP-MAIM	0,1548	0,7825
NC	0,0000	0,1858

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**, (2) PP = Pequeno Porte, MP = Médio Porte, GP = Grande Porte, PE = Porte Especial, NC = Não-classificado, MENM = Menor Maturidade, MAIM = Maior Maturidade, (3) O limite inferior ajustado do subgrupo NC resultou negativo e foi corrigido para 0 (zero), pois a pontuação de REG é sempre não-negativa.

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Com estes limites ajustados para cada subgrupo de Porte x Maturidade, os percentuais de notas A, B e C atribuídas em cada um dos subgrupos foi o seguinte:

Distribuição de Notas de REG para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	REGULARIDADE		
	C	B	A
GE	11,1%	37,0%	51,9%
GP-MENM	8,3%	31,7%	60,0%
GP-MAIM	14,9%	32,2%	52,9%
MP-MENM	9,2%	36,4%	54,4%
MP-MAIM	7,2%	37,9%	54,9%
PP-MENM	14,7%	28,4%	56,9%
PP-MAIM	13,8%	33,8%	52,4%
NC	0,0%	41,3%	58,7%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**.

Na tabela precedente, é possível observar que as distribuições de notas A, B e C em cada subgrupo são razoavelmente semelhantes. Os percentuais de notas A são particularmente similares nos oito subgrupos. No subgrupo NC, há 0,0% de notas C pois seu limite inferior ajustado é 0 (zero) e a pontuação de REG é sempre não-negativa.

Revisando a partição de Notas A, B e C da Pontuação de REG, a partir dos resultados obtidos nos 8 subgrupos, obtém-se a tabela comparativa abaixo:

Partição de Notas de REG pelas MN e MA usando resultados dos subgrupos – dados de 2023

REG 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	55,0%	33,7%
B	35,2%	33,0%
C	9,8%	33,3%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**. Este procedimento aumenta o percentual de Nota C e reduz os de B e A.

❖ O indicador parcial Envio (ENV)

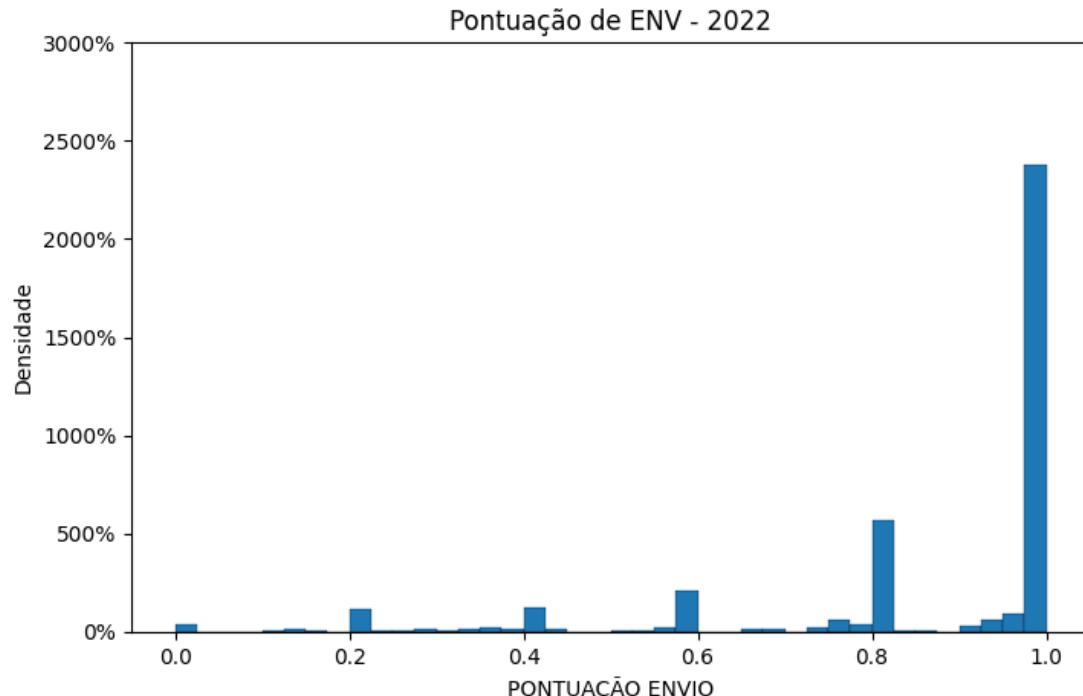
Com base nos dados de 2022 e de 2023, uma análise preliminar da distribuição da pontuação do indicador parcial Envio (ENV), evidencia que a distribuição está restrita ao intervalo [0-1], com picos bem distintos em 0 e 1.

Diferentemente da distribuição do Indicador REG, vista acima, **a de ENV exibe uma altíssima frequência de valores iguais a 1, o valor máximo deste indicador**. Para 2022, 56,2% dos valores de ENV são iguais a 1 e, para 2023, são 63,9%.

Esta peculiaridade na definição da Pontuação de ENV afeta o funcionamento da técnica dos tercis na MA, já que, como o 2º tercil é igual a 1 em ambos os anos, a proporção de entes que recebe nota A é muito superior aos 33,33% “preconizados” pela MA. Este aspecto afeta também a solução a ser encontrada pela MN, já que **todos os entes com valor da Pontuação de ENV igual a 1 têm de receber nota A**.

O gráfico abaixo exibe a distribuição da **densidade de frequência** da variável Pontuação de ENV (PENV).

Distribuição de Densidade de Frequência da Pontuação de ENV – dados de 2022



Esta distribuição apresenta diversos pontos nos quais ela “muda” de comportamento, mesmo que transitoriamente. **Os pontos de mínimo local poderiam ser bons pontos para estabelecer divisórias entre os subconjuntos com notas A, B e C.**

Com a distribuição restrita ao intervalo [0-1], optou-se por **aplicar a MN diretamente à Pontuação de ENV**. Portanto, **a variável modelada é Pontuação de ENV**.

Com os dados de 2022, processou-se o algoritmo destinado a identificar divisórias inerentes à própria distribuição da Pontuação de ENV. Como são necessários três subconjuntos para a atribuição das notas A, B e C, **o algoritmo buscou uma solução com duas divisórias para definir a partição das notas**.

Para evitar que o grupo de nota A se tornasse excessivamente grande, o algoritmo foi parametrizado pelo **tamanho máximo, MÁX**, aceitável para cada um dos três grupos. Uma solução satisfatória foi encontrada com o parâmetro MÍN=75%. Desta forma, nenhum dos subconjuntos destinados a receber as notas A, B e C poderá exceder 75% do total de casos com pontuação de ENV.

Os limites resultantes, para os dados de 2022, são **0,651 e 0,845**. Desta forma, **os entes com PENV < 0,651 recebem nota C, os com 0,651 <= PENV < 0,845 recebem nota B e os com PENV >= 0,845 recebem nota A**.

As estatísticas sobre os tamanhos dos três subconjuntos de notas A, B e C estão contidas na seguinte tabela, que também exibe os tamanhos dos três grupos gerados pela metodologia atual:

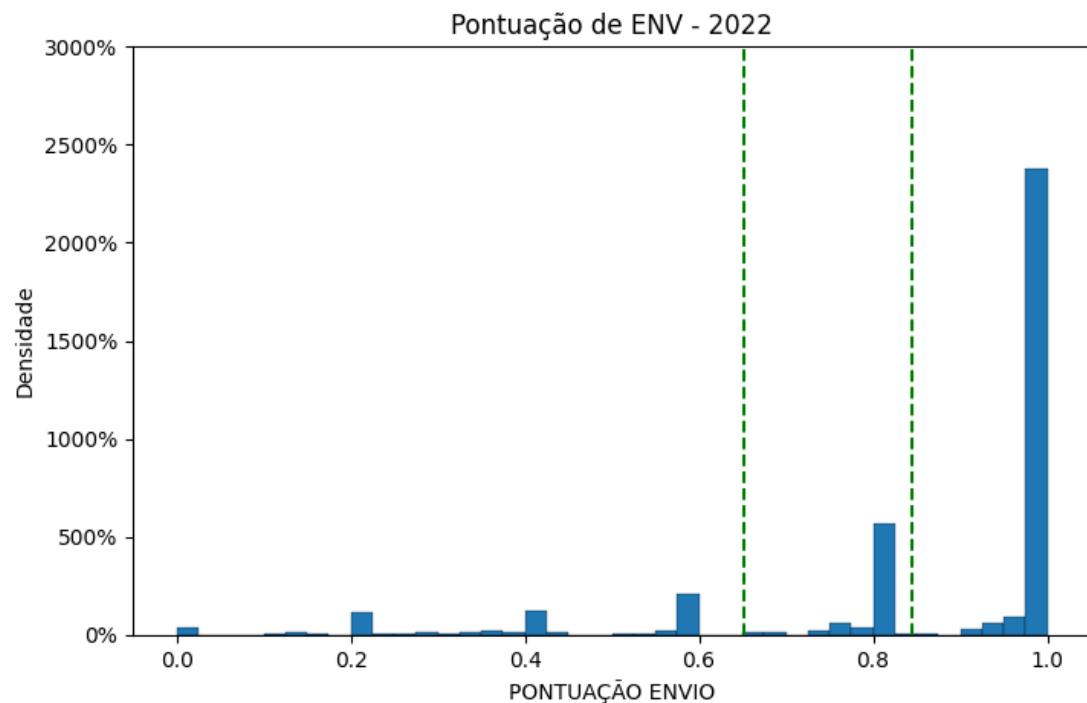
**Partição de Notas de ENV pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2022**

ENV 2022	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	64,5%	56,0%
B	18,1%	19,9%
C	17,4%	24,1%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C.

Os tamanhos dos novos grupos divergem daqueles dos grupos determinados em 2022 pela metodologia atual dos percentis. As maiores diferenças são verificadas nas notas A e C, já que, para o subgrupo de nota A, a MN incorporou entes com valores próximos de 1.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição da Pontuação de ENV para 2022:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Pontuação de ENV – dados de 2022

Para verificar a “estabilidade ao longo do tempo” dos tamanhos dos subconjuntos gerados pela MN, ela também foi aplicada aos dados de 2023, sem considerar os de 2022.

Os valores resultantes, para os dados de 2023, já convertidos para valores originais da variável AAP, são **0,666 e 0,860 segurados ativos, aposentados e pensionistas**. Desta forma, **os entes com PENV < 0,666 recebem nota C, os com 0,666 <= PENV < 0,860 recebem nota B e os com PENV >= 0,860 recebem nota A**.

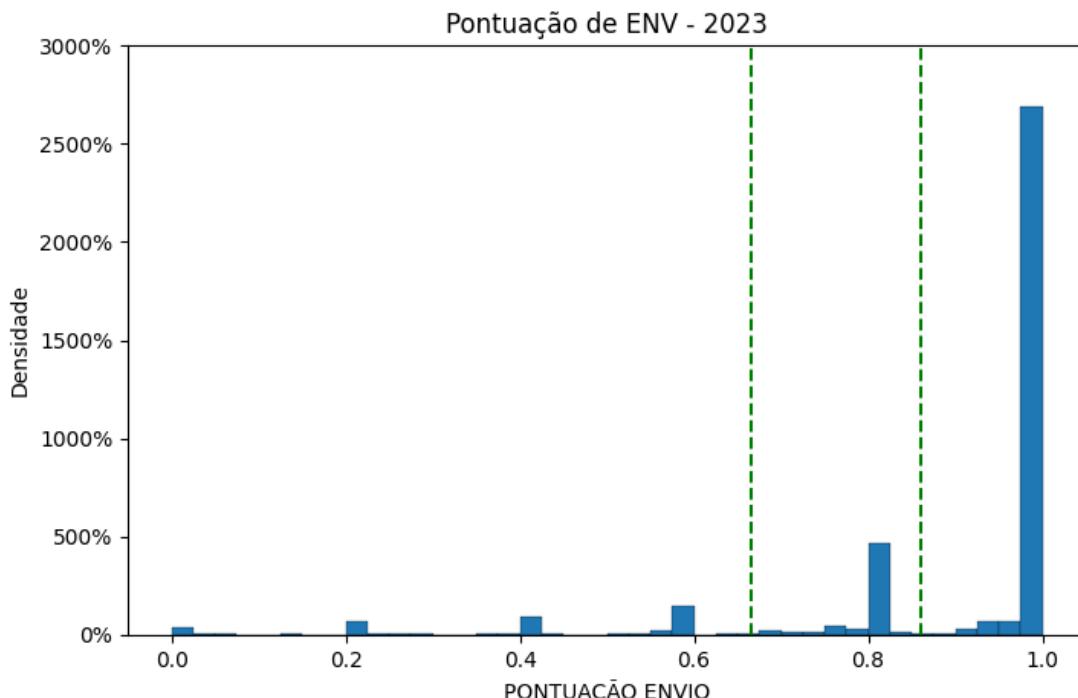
Partição de Notas de ENV pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2023

ENV 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	72,0%	63,6%
B	15,4%	5,8%
C	12,5%	30,5%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição da Pontuação de ENV para 2023:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Frequência de Pontuação de ENV – dados de 2023



Comparando os tamanhos dos grupos, gerados pela MN, para 2022 e para 2023, observa-se uma semelhança bastante satisfatória.

Partição de Notas de ENV pela Metodologia Nova (MN) – dados de 2022 e de 2023

ENV	Frequência Relativa (%)	
	MN em 2022	MN em 2023
A	64,5%	72,0%
B	18,1%	15,4%
C	17,4%	12,5%
Total	100,0%	100,0%

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Assim, conclui-se que a MN poderia ser implementada para dados futuros com base nas divisórias definidas pela MN para 2023. Portanto, **os grupos seriam definidos pelas seguintes regras:**

- se **PENV < 0,666**, o ente recebe nota de ENV igual a C,
- se **0,666 <= PENV < 0,860**, o ente recebe nota de ENV igual a B, e,
- se **PENV >= 0,860**, o ente recebe nota de ENV igual a A

Para garantir uma maior previsibilidade no cálculo do ISP para os gestores dos entes, a sugestão é que estes limites sejam recalculados apenas após vigorarem por, por exemplo, três anos.

Exemplificando, os limites acima, definidos com base nos dados de 2023, teriam vigência para os cálculos do ISP nos anos de 2024, 2025 e 2026. Ao final de 2026, com base nos dados de AAP para 2026, novos limites seriam calculados pela MN para vigorarem em 2027, 2028 e 2029. E assim sucessivamente.

Aplicação da Partição de ENV aos subgrupos Porte x Maturidade

A adequação da partição de notas obtida para a pontuação do indicador parcial ENV foi efetuada através da padronização dos valores dos limites determinados, utilizando a mediana e o desvio interquartílico de cada subgrupo Porte x Maturidade para adequá-los.

Com os dados de 2023, os limites inferior e superior ajustados para cada subgrupo estão discriminados na tabela abaixo.

Limites Inferior e Superior de ENV para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	Lim Inf Ajust	Lim Sup Ajust
PE	0,6657	0,8603
GP-MENM	0,9373	0,9738
GP-MAIM	0,9721	0,9884
MP-MENM	0,6657	0,8603
MP-MAIM	0,7075	0,8777
PP-MENM	0,9721	0,9884
PP-MAIM	0,8746	0,9476
NC	0,000	0,1808

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**, (2) PP = Pequeno Porte, MP = Médio Porte, GP = Grande Porte, PE = Porte Especial, NC = Não-classificado, MENM = Menor Maturidade, MAIM = Maior Maturidade, (3) O limite inferior ajustado do subgrupo NC resultou negativo e foi corrigido para 0 (zero), pois a pontuação de ENV é sempre não-negativa.

Com estes limites ajustados para cada subgrupo de Porte x Maturidade, os percentuais de notas A, B e C atribuídas em cada um dos subgrupos foi o seguinte:

Distribuição de Notas de ENV para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	ENVULARIDADE		
	C	B	A
GE	7,4%	29,6%	63,0%
GP-MENM	23,3%	5,0%	71,7%
GP-MAIM	20,7%	6,9%	72,4%
MP-MENM	10,0%	15,8%	74,2%
MP-MAIM	11,2%	14,5%	74,3%
PP-MENM	24,4%	2,9%	72,7%
PP-MAIM	24,0%	2,2%	73,8%
NC	0,0%	15,1%	84,9%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**.

Na tabela precedente, é possível observar que as distribuições de notas A, B e C em quatro dos seis subgrupos de entes municipais são razoavelmente semelhantes. As exceções são os subgrupos MP-MENM, Médio Porte e Menor Maturidade, e MP-MAIM, Médio Porte e Maior Maturidade, que têm um percentual de notas B mais alto e de notas C mais baixo que os outros quatro. No subgrupo PE, o percentual de notas B é mais alto e o de notas C, mais baixo que nos entes municipais.

Revisando a partição de Notas A, B e C da Pontuação de ENV, a partir dos resultados obtidos nos 8 subgrupos, obtém-se a tabela comparativa abaixo:

Partição de Notas de ENV pelas MN e MA usando resultados dos subgrupos – dados de 2023

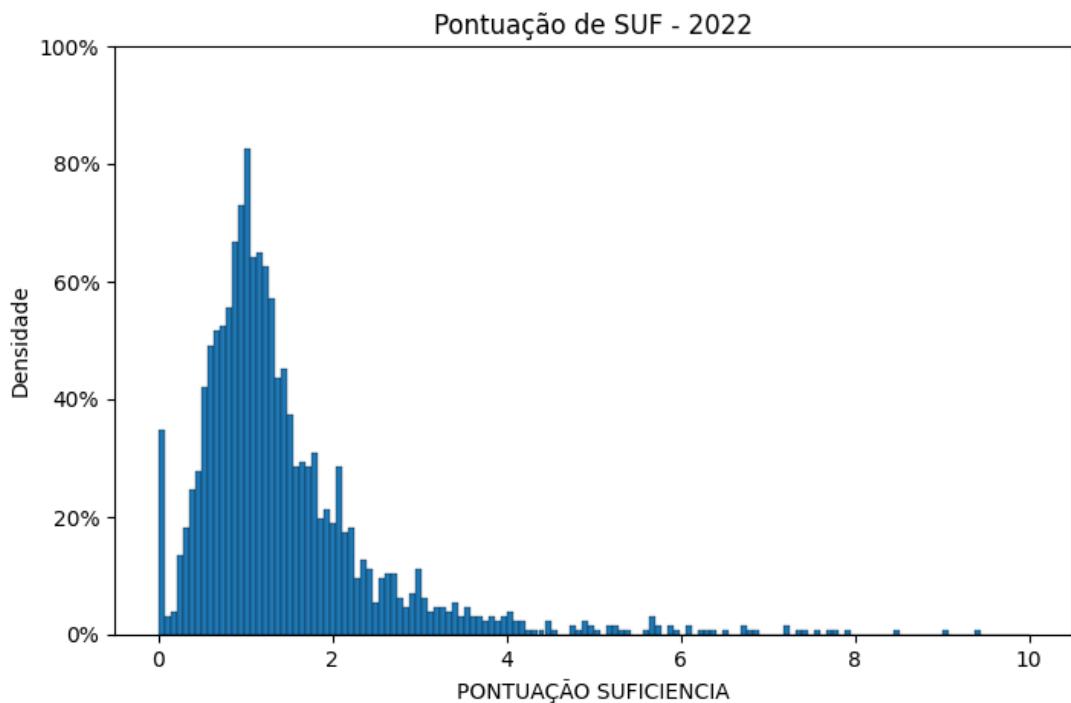
ENV 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	74,3%	63,6%
B	11,1%	5,8%
C	14,7%	30,5%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**. Este procedimento aumenta o percentual de Nota C e reduz os de B e A.

❖ **O indicador parcial Suficiência (SUF)**

Com base nos dados de 2022 e de 2023, uma análise preliminar da distribuição da pontuação do indicador parcial Suficiência (SUF), evidencia que a distribuição é fortemente assimétrica, com uma cauda direita muito longa. O gráfico abaixo exibe a distribuição da **densidade de frequência** da variável Pontuação de SUF (PSUF).

Distribuição de Densidade de Frequência da Pontuação de SUF – dados de 2022



Nota: para melhorar a visualização, o eixo-x está truncado à direita, para Pontuação de SUF>10.

Em 2022, há apenas 44 entes com a Pontuação de SUF > 10 e o valor máximo desta variável é 6.378,423 para Castanheira - MT. Claramente, estes entes, não exibidos no gráfico, receberão nota A.

A “curva” desta distribuição apresenta diversos pontos nos quais ela “muda” de comportamento, mesmo que transitoriamente. **Nestes pontos ocorrem mínimos locais que poderiam ser bons pontos para estabelecer divisórias entre os subconjuntos com notas A, B e C.**

Excluindo da modelagem os entes com Pontuação de SUF > 10, já que estes não afetam a identificação das duas divisórias necessárias, optou-se por **aplicar a MN diretamente à Pontuação de SUF**. Portanto, **a variável modelada é Pontuação de SUF**.

Com os dados de 2022, processou-se o algoritmo destinado a identificar divisórias inerentes à própria distribuição da Pontuação de SUF. Como são necessários três subconjuntos para a atribuição das notas A, B e C, **o algoritmo buscou uma solução com duas divisórias para definir a partição do notas.**

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Para evitar a criação de partições com algum grupo de tamanho muito grande, o algoritmo foi parametrizado pelo **tamanho máximo, MÁX**, aceitável para cada um dos três grupos. Uma solução satisfatória foi encontrada com o parâmetro MÍN=50%. Desta forma, nenhum dos subconjuntos destinados a receber as notas A, B e C poderá exceder 50% do total de casos com pontuação de SUF.

Os limites resultantes, para os dados de 2022, são **1,106 e 1,695**. Desta forma, **os entes com PSUF < 1,106 recebem nota C, os com 1,106 <= PSUF < 1,695 recebem nota B e os com PSUF >= 1,695 recebem nota A**.

As estatísticas sobre os tamanhos dos três subconjuntos de notas A, B e C estão contidas na seguinte tabela, que também exibe os tamanhos dos três grupos gerados pela metodologia atual:

Partição de Notas de SUF pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2022

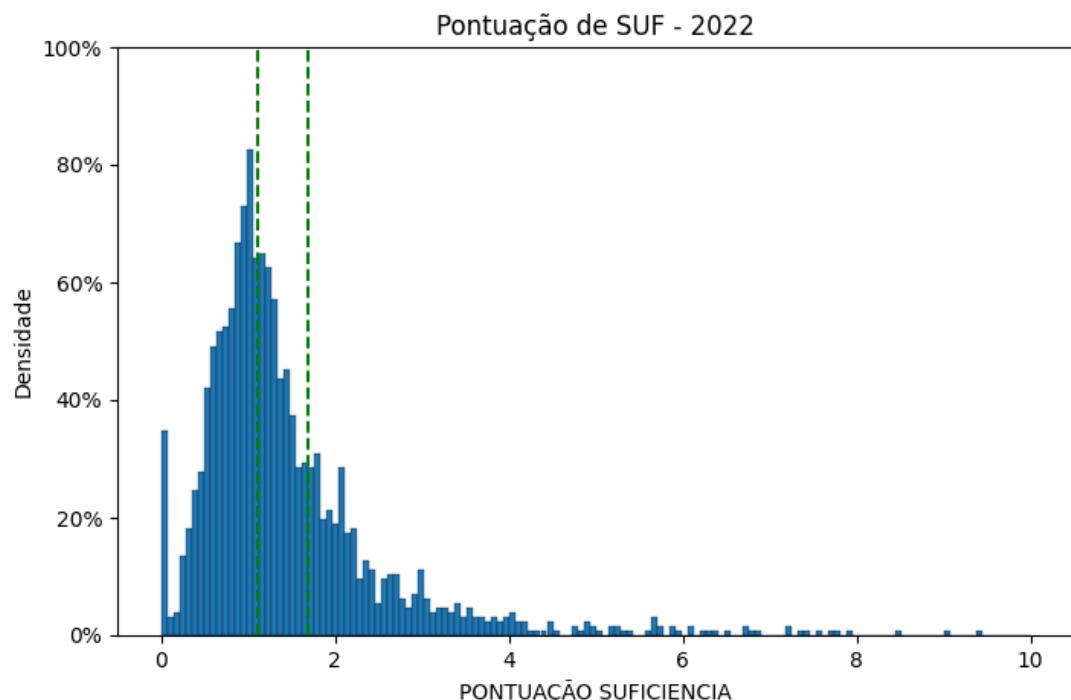
SUF 2022	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	28,8%	28,6%
B	27,0%	28,5%
C	44,2%	42,9%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C.

Neste caso, os tamanhos dos novos grupos são bastante semelhantes àqueles determinados em 2022 pela metodologia atual dos percentis.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição de PSUF para 2022:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Pontuação de SUF – dados de 2022



Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Para verificar a “estabilidade ao longo do tempo” dos tamanhos dos subconjuntos gerados pela MN, ela também foi aplicada aos dados de 2023, sem considerar os de 2022.

Os valores resultantes, para os dados de 2023, são **1,194** e **1,725**. Desta forma, **os entes com PSUF < 1,194 recebem nota C, os com 1,194 <= PSUF < 1,725 recebem nota B e os com PSUF >= 1,725 recebem nota A**.

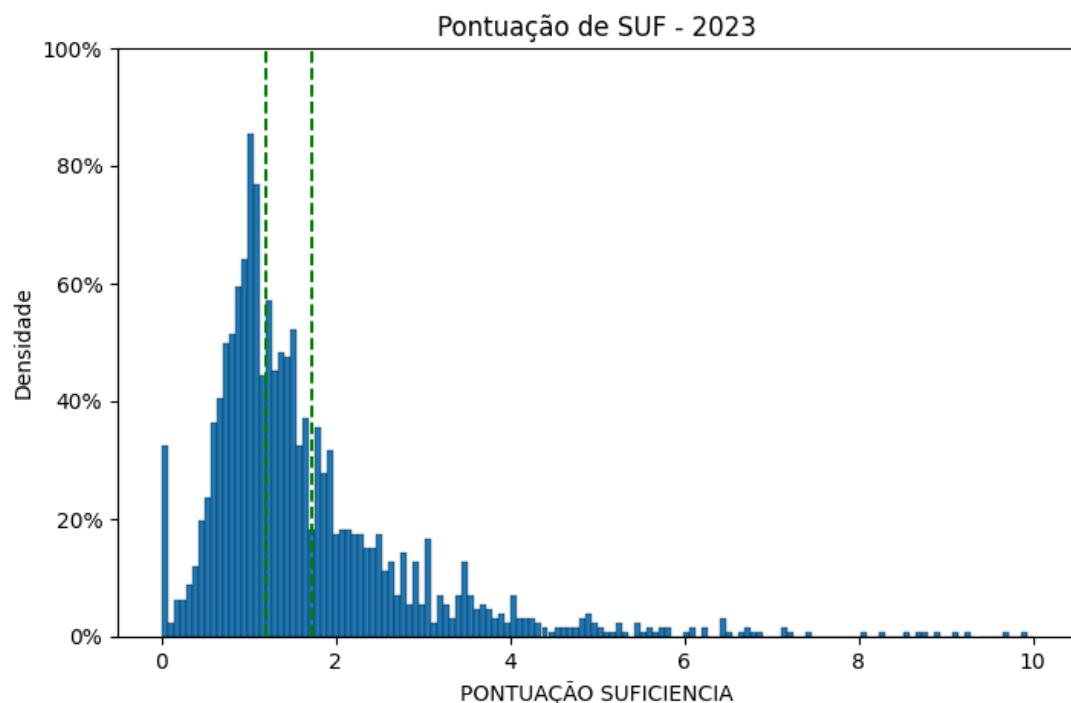
Partição de Notas de SUF pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2023

SUF 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	35,2%	28,7%
B	22,6%	28,6%
C	42,2%	42,7%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição da Pontuação de SUF para 2023:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Frequência de Pontuação de SUF – dados de 2023



Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Comparando os tamanhos dos grupos, gerados pela MN, para 2022 e para 2023, observa-se uma semelhança bastante satisfatória.

Partição de Notas de SUF pela Metodologia Nova (MN) – dados de 2022 e de 2023

SUF	Frequência Relativa (%)	
	MN em 2022	MN em 2023
A	28,8%	35,2%
B	27,0%	22,6%
C	44,2%	42,2%
Total	100,0%	100,0%

Assim, conclui-se que a MN poderia ser implementada para dados futuros com base nas divisórias definidas pela MN para 2023. Portanto, **os grupos seriam definidos pelas seguintes regras:**

- se **PSUF < 1,194**, o ente recebe nota de SUF igual a C,
- se **1,194 <= PSUF < 1,725**, o ente recebe nota de SUF igual a B, e,
- se **PSUF >= 1,725**, o ente recebe nota de SUF igual a A

Para garantir uma maior previsibilidade no cálculo do ISP para os gestores dos entes, a sugestão é que estes limites sejam recalculados apenas após vigorarem por, por exemplo, três anos.

Exemplificando, os limites acima, definidos com base nos dados de 2023, teriam vigência para os cálculos do ISP nos anos de 2024, 2025 e 2026. Ao final de 2026, com base nos dados de AAP para 2026, novos limites seriam calculados pela MN para vigorarem em 2027, 2028 e 2029. E assim sucessivamente.

Aplicação da Partição de SUF aos subgrupos Porte x Maturidade

A adequação da partição de notas obtida para a pontuação do indicador parcial SUF foi efetuada através da padronização dos valores dos limites determinados, utilizando a mediana e o desvio interquartílico de cada subgrupo Porte x Maturidade para adequá-los.

Com os dados de 2023, os limites inferior e superior ajustados para cada subgrupo estão discriminados na tabela abaixo.

Limites Inferior e Superior de SUF para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	Lim Inf Ajust	Lim Sup Ajust
PE	0,5574	0,7355
GP-MENM	1,5206	2,1915
GP-MAIM	0,8100	1,0242
MP-MENM	1,6256	2,3143
MP-MAIM	0,9508	1,2395
PP-MENM	1,9943	2,8767
PP-MAIM	1,0482	1,3857
NC	1,0367	1,5769

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C, (2) PP = Pequeno Porte, MP = Médio Porte, GP = Grande Porte, PE = Porte Especial, NC = Não-classificado, MENM = Menor Maturidade, MAIM = Maior Maturidade,

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Com estes limites ajustados para cada subgrupo de Porte x Maturidade, os percentuais de notas A, B e C atribuídas em cada um dos subgrupos foi o seguinte:

Distribuição de Notas de SUF para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	SUFICIÊNCIA		
	C	B	A
GE	44,4%	22,2%	33,3%
GP-MENM	46,7%	25,0%	28,3%
GP-MAIM	41,4%	24,1%	34,5%
MP-MENM	49,6%	19,6%	30,8%
MP-MAIM	47,1%	23,7%	29,2%
PP-MENM	52,0%	17,8%	30,2%
PP-MAIM	54,5%	17,8%	27,6%
NC	56,3%	18,3%	25,4%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**.

Na tabela precedente, é possível observar que, para cada uma das três notas, A, B e C, os percentuais observados nos oito subgrupos são razoavelmente similares.

Revisando a partição de Notas A, B e C da Pontuação de SUF, a partir dos resultados obtidos nos 8 subgrupos, obtém-se a tabela comparativa abaixo:

Partição de Notas de SUF pelas MN e MA usando resultados dos subgrupos – dados de 2023

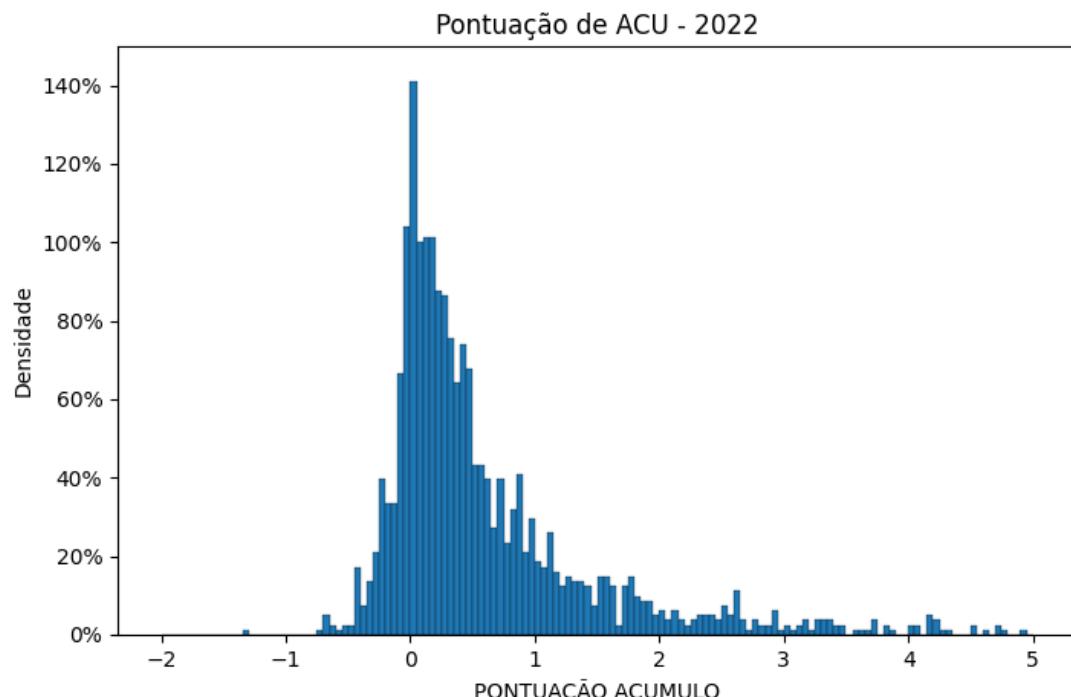
SUF 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	29,6%	28,7%
B	20,5%	28,6%
C	49,8%	42,7%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**. Este procedimento aumenta o percentual de Nota C e reduz os de B e A.

❖ **O indicador parcial Acumulação (ACU)**

Com base nos dados de 2022 e de 2023, uma análise preliminar da distribuição da pontuação do indicador parcial Acumulação (ACU), evidencia que a distribuição é bastante assimétrica, com uma cauda direita bem longa. O gráfico abaixo exibe a distribuição da **densidade de frequência** da variável Pontuação de ACU (PACU).

Distribuição de Densidade de Frequência da Pontuação de ACU – dados de 2022



Nota: para melhorar a visualização, o eixo-x está truncado à direita, para Pontuação de ACU>5, e à esquerda, para Pontuação de ACU<-2.

Em 2022, há apenas 58 entes com a Pontuação de ACU > 5 e o valor máximo desta variável é 2.443,969 para Nova Nazaré - MT. Claramente, estes entes, não exibidos no gráfico, receberão nota A. Por outro lado, há apenas 5 entes com a Pontuação de ACU < -2 e o valor máximo desta variável é -23,182 para Mampituba - RS. Claramente, estes entes, não exibidos no gráfico, receberão nota C.

A “curva” desta distribuição apresenta diversos pontos nos quais ela “muda” de comportamento, mesmo que transitoriamente. **Neles ocorrem mínimos locais que poderiam ser boas posições para definir divisórias entre os subconjuntos com notas A, B e C.**

Excluindo da modelagem os entes com Pontuação de ACU > 5 e com Pontuação de ACU < -2, já que estes não afetam a identificação das duas divisórias necessárias, optou-se por **aplicar a MN diretamente à Pontuação de ACU**. Portanto, **a variável modelada é Pontuação de ACU**.

Com os dados de 2022, processou-se o algoritmo destinado a identificar divisórias inerentes à própria distribuição da Pontuação de ACU. Como são necessários três subconjuntos para a atribuição das notas A, B e C, **o algoritmo buscou uma solução com duas divisórias para definir a participação do notas.**

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Para evitar a criação de partições com algum grupo de tamanho muito grande, o algoritmo foi parametrizado pelo **tamanho máximo, MÁX**, aceitável para cada um dos três grupos. Uma solução satisfatória foi encontrada com o parâmetro MÍN=55%. Desta forma, nenhum dos subconjuntos destinados a receber as notas A, B e C poderá exceder 55% do total de casos com pontuação de ACU.

Os limites resultantes, para os dados de 2022, são **0,381 e 1,057**. Desta forma, **os entes com PACU < 0,381 recebem nota C, os com 0,381 <= PACU < 1,057 recebem nota B e os com PACU >= 1,057 recebem nota A**.

As estatísticas sobre os tamanhos dos três subconjuntos de notas A, B e C estão contidas na seguinte tabela, que também exibe os tamanhos dos três grupos gerados pela metodologia atual:

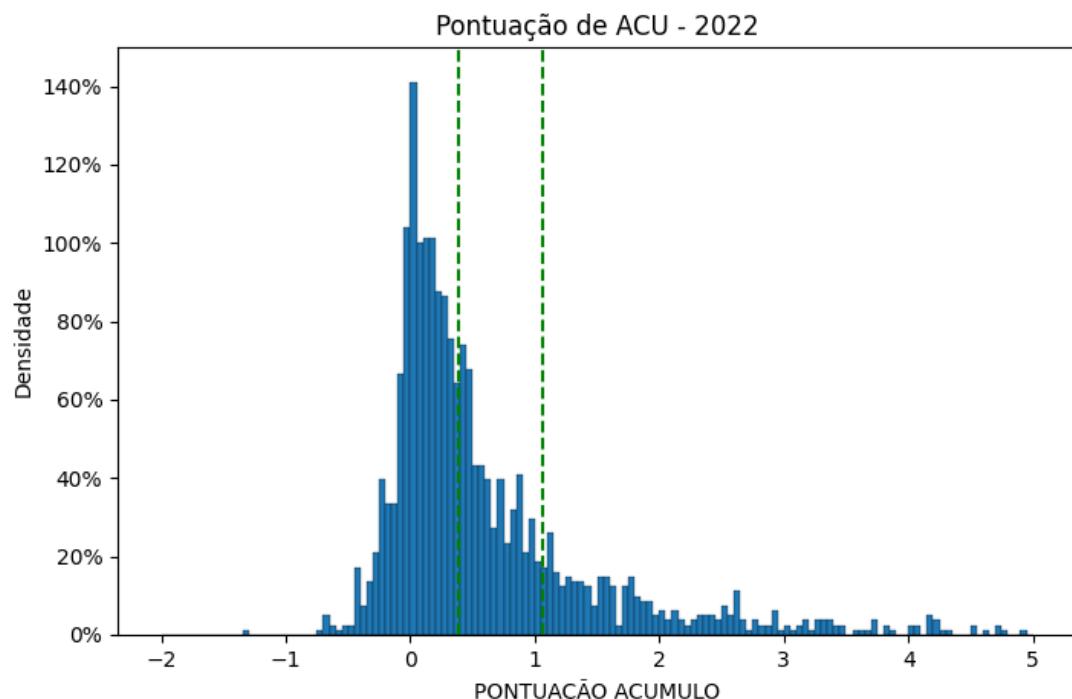
Partição de Notas de ACU pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2022

ACU 2022	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	22,0%	26,3%
B	25,6%	25,9%
C	52,4%	47,8%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C.

Os tamanhos dos novos grupos são bastante semelhantes àqueles determinados em 2022 pela metodologia atual dos percentis. As maiores diferenças são verificadas nas notas A e C, cujas proporções variaram em direções opostas. O percentual de notas B praticamente não se alterou.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição de AAP para 2022:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Pontuação de ACU – dados de 2022


Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Para verificar a “estabilidade ao longo do tempo” dos tamanhos dos subconjuntos gerados pela MN, ela também foi aplicada aos dados de 2023, sem considerar os de 2022.

Os valores resultantes, para os dados de 2023, são **0,257** e **1,278**. Desta forma, **os entes com PACU < 0,257 recebem nota C, os com 0,257 <= PACU < 1,278 recebem nota B e os com PACU >= 1,278 recebem nota A**.

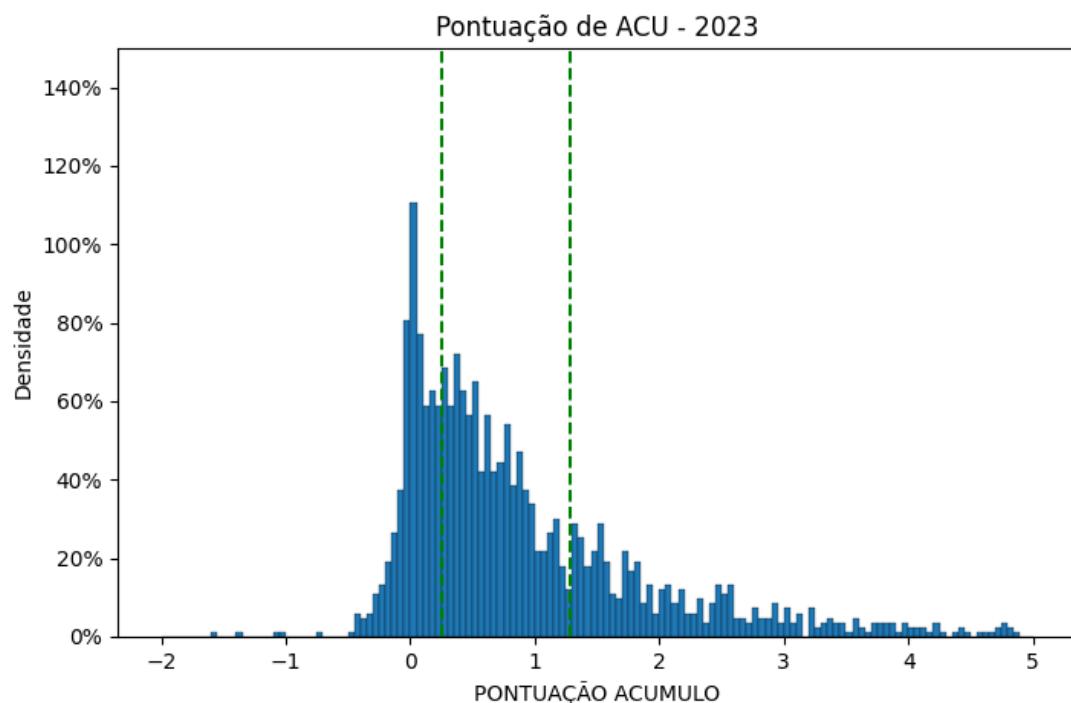
Partição de Notas de ACU pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2023

ACU 2022	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	29,1%	27,3%
B	42,5%	27,0%
C	28,4%	45,7%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição da Pontuação de ACU para 2023:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Frequência de Pontuação de ACU – dados de 2023



Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

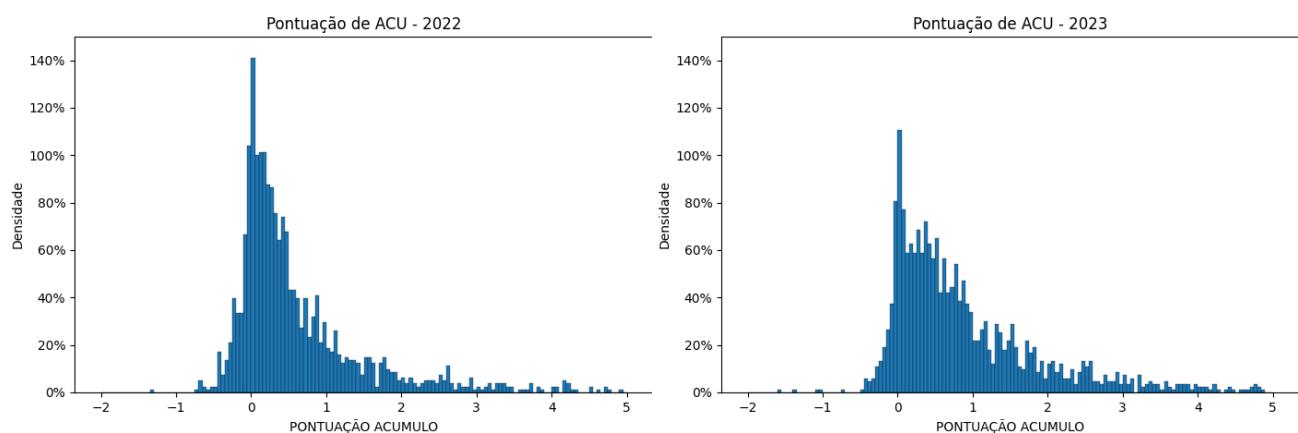
Comparando os tamanhos dos grupos, gerados pela MN, para 2022 e para 2023, observam-se **discrepâncias significativas**.

Partição de Notas de ACU pela Metodologia Nova (MN) – dados de 2022 e de 2023

ACU	Frequência Relativa (%)	
	MN em 2022	MN em 2023
A	22,0%	29,1%
B	25,6%	42,5%
C	52,4%	28,4%
Total	100,0%	100,0%

A situação do Indicador ACU é bastante distinta das dos demais, já que, em razão de sua definição, seu valor pode oscilar significativamente de um ano para o outro. Isto permite que a própria distribuição da PACU varie consideravelmente de um ano para o outro. E, diferentemente dos demais indicadores estudados, foi exatamente isto que aconteceu.

Justapondo os gráficos de 2022 e 2023, as diferenças no formato e posição das distribuições de PACU ficando evidentes:



A distribuição de 2022 se localiza mais à esquerda, perto do 0 (zero), é mais concentrada em torno de sua “região central” e exibe um “achatamento” muito discreto. Por outro lado, a de 2023 se localiza mais à esquerda do que à de 2022, é mais “espalhada” no intervalo de 0 a 2 e exibe um “achatamento” bem mais pronunciado na sua “região central”.

Na tabela abaixo, apresenta-se uma comparação, usando apenas as estatísticas usuais de posição e dispersão, entre as distribuições de 2022 e 2023 para cada um dos cinco indicadores estudados:

Indicador	Variações de 2022 para 2023			
	Média	DP	Mediana	DIQ
REG	7%	-1%	14%	-1%
ENV	4%	-11%	0%	0%
SUF	14%	12%	12%	13%
ACU	47%	13%	85%	44%
COB	-8%	8%	-11%	-5%

Nota: (1) DP = desvio-padrão, DIQ = desvio interquartílico.

Vê-se, claramente, que as variações das estatísticas das distribuições de ACU são bem mais significativas que as dos demais indicadores, com exceção do desvio-padrão. A média de ACU em 2023, 0,588, é 85% maior que a de 2022, 0,317. Estes números demonstram que a distribuição de 2023 “se localiza” mais à direita que a de 2022, como visualizado nos gráficos acima.

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Além disso, o DIQ de ACU em 2023, 1,138, é 44% maior que a de 2022, 0,792. Isto indica que o “achatamento” da distribuição de 2023 é bem maior que o da de 2022.

Portanto, há clara evidência da maior “volatilidade” da posição e do formato da distribuição de ACU no período 2022-2023, quando ACU é comparado com os demais indicadores.

Se essa maior “volatilidade” da distribuição de ACU for confirmada em um estudo de período maior, sugere-se que a própria definição da Pontuação de ACU seja questionada e investigada, com possibilidade de alteração da sua própria definição.

Supondo que este tipo de alteração na forma da distribuição não ocorra nos próximos anos, conclui-se que a MN poderia ser implementada para dados futuros com base nas divisórias definidas pela MN para 2023. Portanto, **os grupos seriam definidos pelas seguintes regras:**

- se **PACU < 0,257**, o ente recebe nota de ACU igual a C,
- se **0,257 <= PACU < 1,278**, o ente recebe nota de ACU igual a B, e,
- se **PACU >= 1,278**, o ente recebe nota de ACU igual a A

Para garantir uma maior previsibilidade no cálculo do ISP para os gestores dos entes, a sugestão é que estes limites sejam recalculados apenas após vigorarem por, por exemplo, três anos.

Exemplificando, os limites acima, definidos com base nos dados de 2023, teriam vigência para os cálculos do ISP nos anos de 2024, 2025 e 2026. Ao final de 2026, com base nos dados de AAP para 2026, novos limites seriam calculados pela MN para vigorarem em 2027, 2028 e 2029. E assim sucessivamente.

No entanto, em razão desta mudança de formato observada de 2022 para 2023, **é recomendável, acompanhar a evolução desta distribuição a cada ano futuro.**

Aplicação da Partição de ACU aos subgrupos Porte x Maturidade

A adequação da partição de notas obtida para a pontuação do indicador parcial ACU foi efetuada através da padronização dos valores dos limites determinados, utilizando a mediana e o desvio interquartílico de cada subgrupo Porte x Maturidade para adequá-los.

Com os dados de 2023, os limites inferior e superior ajustados para cada subgrupo estão discriminados na tabela abaixo.

Limites Inferior e Superior de ACU para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	Lim Inf Ajust	Lim Sup Ajust
PE	-0,0129	0,1578
GP-MENM	0,5093	1,3396
GP-MAIM	0,0912	0,4028
MP-MENM	0,7433	1,8097
MP-MAIM	0,1247	0,5923
PP-MENM	1,0772	2,4752
PP-MAIM	0,1819	0,8143
NC	0,0513	1,0388

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C, (2) PP = Pequeno Porte, MP = Médio Porte, GP = Grande Porte, PE = Porte Especial, NC = Não-classificado, MENM = Menor Maturidade, MAIM = Maior Maturidade, (3) Como a variável ACU pode assumir valores negativos, os limites discriminados na tabela acima também podem ser negativos.

Relatório Técnico N° 002/2025

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Com estes limites ajustados para cada subgrupo de Porte x Maturidade, os percentuais de notas A, B e C atribuídas em cada um dos subgrupos foi o seguinte:

Distribuição de Notas de ACU para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	SUFICIÊNCIA		
	C	B	A
GE	14,8%	59,3%	25,9%
GP-MENM	36,7%	38,3%	25,0%
GP-MAIM	43,7%	33,3%	23,0%
MP-MENM	43,2%	32,9%	24,0%
MP-MAIM	43,7%	35,6%	20,7%
PP-MENM	41,1%	32,2%	26,7%
PP-MAIM	49,5%	31,3%	19,3%
NC	63,5%	22,2%	14,3%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C.**

Na tabela precedente, é possível observar que os percentuais observados nos seis subgrupos de entes municipais são razoavelmente similares para cada uma das três notas, A, B e C.

Por outro lado, os subgrupos PE e NC, que tem características muito peculiares, exibem distribuições de notas A, B e C distintas dos demais 6 subgrupos. No PE, há uma forte prevalência de notas B, enquanto no NC predomina a nota C.

Revisando a partição de Notas A, B e C da Pontuação de ACU, a partir dos resultados obtidos nos 8 subgrupos, obtém-se a tabela comparativa abaixo:

Partição de Notas de ACU pelas MN e MA usando resultados dos subgrupos – dados de 2023

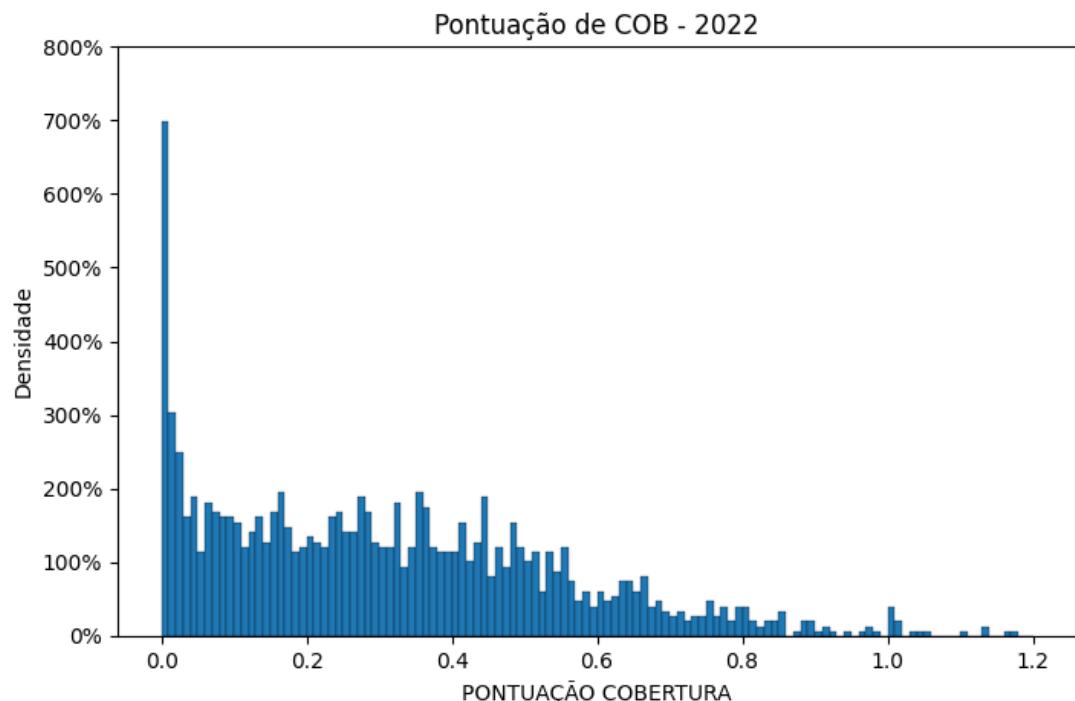
ACU 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	22,4%	27,3%
B	33,2%	27,0%
C	44,5%	45,7%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C.** Este procedimento aumenta o percentual de Nota C e reduz os de B e A.

❖ **O indicador parcial Cobertura (COB)**

Com base nos dados de 2022 e de 2023, uma análise preliminar da distribuição da pontuação do indicador parcial Cobertura (COB), evidencia que a distribuição é bastante assimétrica, com uma cauda direita bem longa. O gráfico abaixo exibe a distribuição da **densidade de frequência** da variável Pontuação de COB (PCOB).

Distribuição de Densidade de Frequência da Pontuação de COB – dados de 2022



Nota: para melhorar a visualização, o eixo-x está truncado à direita, para Pontuação de COB > 1,2.

Em 2022, há apenas 7 entes com a Pontuação de COB > 1,2 e o valor máximo desta variável é 2,2846 para Poço das Trincheiras - AL. Claramente, estes entes, não exibidos no gráfico, receberão nota A.

A “curva” desta distribuição apresenta diversos pontos nos quais ela “muda” de comportamento, mesmo que transitoriamente. **Neles ocorrem mínimos locais que poderiam ser boas posições para definir divisórias entre os subconjuntos com notas A, B e C.**

Excluindo da modelagem os entes com Pontuação de COB > 1,2, já que estes não afetam a identificação das duas divisórias necessárias, a opção mais estável foi **aplicar a MN à Pontuação de COB Normalizada**. Portanto, **a variável modelada é Pontuação de COB NORM**.

Com os dados de 2022, processou-se o algoritmo destinado a identificar divisórias inerentes à própria distribuição da Pontuação de COB NORM. Como são necessários três subconjuntos para a atribuição das notas A, B e C, **o algoritmo buscou uma solução com duas divisórias para definir a partição das notas**.

Para evitar a criação de partições com algum grupo de tamanho muito grande, o algoritmo foi parametrizado pelo **tamanho máximo, MÁX**, aceitável para cada um dos três grupos. Uma solução satisfatória foi encontrada com o parâmetro MÍN=50%. Desta forma, nenhum dos subconjuntos destinados a receber as notas A, B e C poderá exceder 50% do total de casos com pontuação de COB NORM.

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Os limites resultantes, para os dados de 2022, já convertidos para valores da variável original **PCOB**, são **0,067 e 0,295**. Desta forma, **os entes com PCOB < 0,067 recebem nota C, os com 0,067 <= PCOB < 0,295 recebem nota B e os com PCOB >= 0,295 recebem nota A**.

As estatísticas sobre os tamanhos dos três subconjuntos de notas A, B e C estão contidas na seguinte tabela, que também exibe os tamanhos dos três grupos gerados pela metodologia atual:

Partição de Notas de COB pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2022

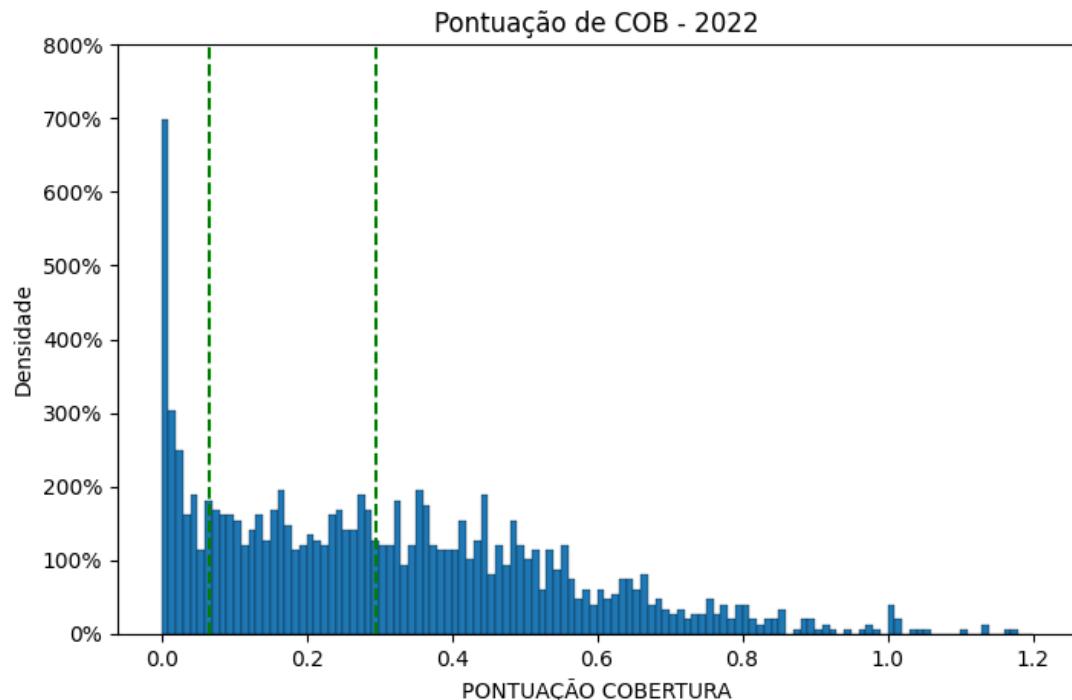
COB 2022	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	47,9%	23,3%
B	33,6%	23,1%
C	18,5%	53,6%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C, (2) Os percentuais da coluna MN se referem à variável COB, não COB NORM.

Como era de se esperar, os tamanhos dos novos grupos divergem daqueles dos grupos determinados em 2022 pela metodologia atual dos percentis. As maiores diferenças são verificadas nas notas A e C, com a A crescendo e a C decrescendo significativamente. O percentual de notas B também cresceu bastante.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição de AAP para 2022:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Pontuação de COB – dados de 2022



Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Para verificar a “estabilidade ao longo do tempo” dos tamanhos dos subconjuntos gerados pela MN, ela também foi aplicada aos dados de 2023, sem considerar os de 2022.

Os valores resultantes, para os dados de 2023, já convertidos para valores da variável original PCOB, são **0,078 e 0,278**. Desta forma, **os entes com PCOB < 0,078 recebem nota C, os com 0,078 <= PCOB < 0,278 recebem nota B e os com PCOB >= 0,278 recebem nota A.**

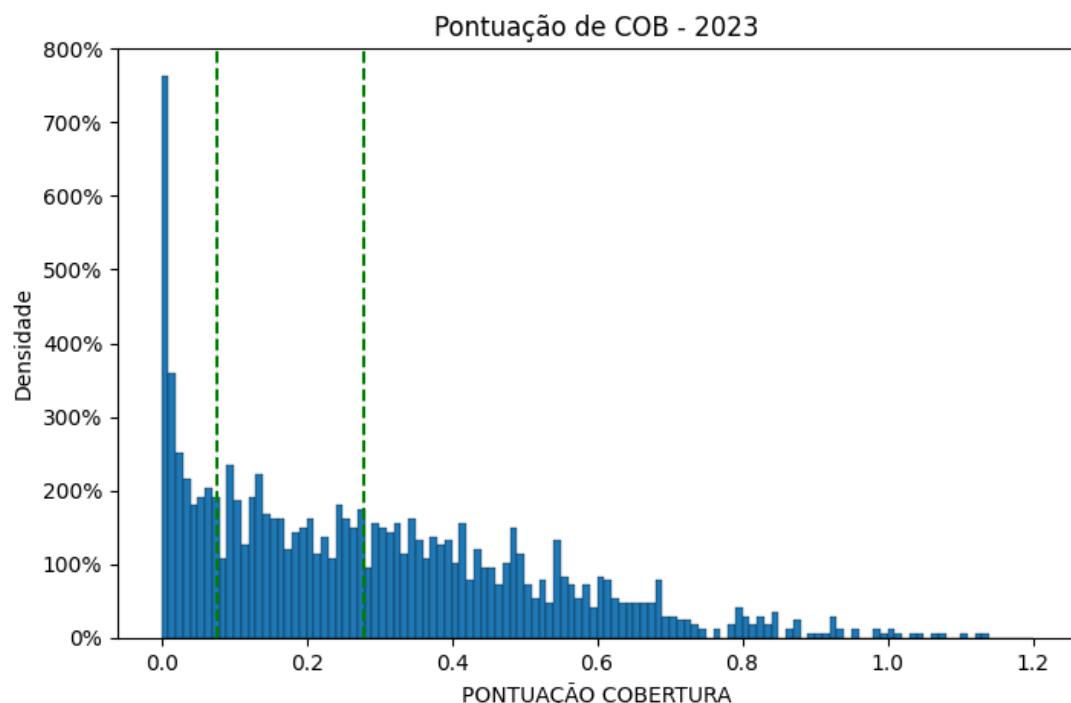
Partição de Notas de COB pelas Metodologias Nova (MN) e Atual (MA) – dados de 2023

COB 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	45,1%	26,1%
B	31,9%	25,8%
C	23,0%	48,1%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**, (2) Os percentuais da coluna MN se referem à variável COB, não COB NORM.

Graficamente, os limites acima explicitados (as linhas tracejadas verticais em cor verde) se apresentam da seguinte forma na distribuição da Pontuação de COB para 2023:

Limites da MN para a Distribuição de Densidade de Frequência de Pontuação de COB – dados de 2023



Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Comparando os tamanhos dos grupos, gerados pela MN, para 2022 e para 2023, observa-se uma semelhança bastante satisfatória.

Partição de Notas de COB pela Metodologia Nova (MN) – dados de 2022 e de 2023

COB	Frequência Relativa (%)	
	MN em 2022	MN em 2023
A	47,9%	45,1%
B	33,6%	31,9%
C	18,5%	23,0%
Total	100,0%	100,0%

Assim, conclui-se que a MN poderia ser implementada para dados futuros com base nas divisórias definidas pela MN para 2023. Portanto, **os grupos seriam definidos pelas seguintes regras:**

- se **PCOB < 0,078**, o ente recebe nota de COB igual a C,
- se **0,078 <= PCOB < 0,278**, o ente recebe nota de COB igual a B, e,
- se **PCOB >= 0,278**, o ente recebe nota de COB igual a A

Para garantir uma maior previsibilidade no cálculo do ISP para os gestores dos entes, a sugestão é que estes limites sejam recalculados apenas após vigorarem por, por exemplo, três anos.

Exemplificando, os limites acima, definidos com base nos dados de 2023, teriam vigência para os cálculos do ISP nos anos de 2024, 2025 e 2026. Ao final de 2026, com base nos dados de AAP para 2026, novos limites seriam calculados pela MN para vigorarem em 2027, 2028 e 2029. E assim sucessivamente.

Aplicação da Partição de COB aos subgrupos Porte x Maturidade

A adequação da partição de notas obtida para a pontuação do indicador parcial COB foi efetuada através da padronização dos valores dos limites determinados, utilizando a mediana e o desvio interquartílico de cada subgrupo Porte x Maturidade para adequá-los.

Com os dados de 2023, os limites inferior e superior ajustados para cada subgrupo estão discriminados na tabela abaixo.

Limites Inferior e Superior de COB para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	Lim Inf Ajust	Lim Sup Ajust
PE	0,0063	0,0249
GP-MENM	0,1246	0,2850
GP-MAIM	0,0114	0,1135
MP-MENM	0,1570	0,3454
MP-MAIM	-0,0073	0,1463
PP-MENM	0,2134	0,4662
PP-MAIM	0,0844	0,2747
NC	0,0247	0,1494

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C, (2) PP = Pequeno Porte, MP = Médio Porte, GP = Grande Porte, PE = Porte Especial, NC = Não-classificado, MENM = Menor Maturidade, MAIM = Maior Maturidade.

Métodos de Particionamento aplicados ao Cálculo do ISP-RPPS - DM. 088343

Com estes limites ajustados para cada subgrupo de Porte x Maturidade, os percentuais de notas A, B e C atribuídas em cada um dos subgrupos foi o seguinte:

Distribuição de Notas de COB para cada subgrupo Porte x Maturidade – dados de 2023

Grupo-Subgrupo	SUFICIÊNCIA		
	C	B	A
GE	51,9%	18,5%	29,6%
GP-MENM	33,3%	28,3%	38,3%
GP-MAIM	26,4%	32,2%	41,4%
MP-MENM	39,5%	24,8%	35,7%
MP-MAIM	17,9%	44,6%	37,6%
PP-MENM	35,3%	25,0%	39,7%
PP-MAIM	38,5%	24,4%	37,1%
NC	95,2%	2,4%	2,4%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**, (2) O percentual positivo de entes com Nota C no subgrupo MP-MAIM, Médio Porte e Maior Maturidade, é derivado integralmente de entes neste subgrupo com este indicador não-preenchido.

Na tabela precedente, é possível notar que os percentuais observados para cinco dos seis subgrupos de entes municipais são razoavelmente similares para cada uma das três notas, A, B e C, com predomínio da nota A. A única exceção é o subgrupo MP-MAIM, Médio Porte e Maior Maturidade. Neste, para o qual a nota B prevalece.

Por outro lado, os subgrupos PE e NC, que tem características muito peculiares, exibem distribuições de notas A, B e C distintas dos demais 6 subgrupos. No PE, há uma forte prevalência de notas C, enquanto no NC mais de 95% dos entes recebe nota C.

Revisando a partição de Notas A, B e C da Pontuação de COB, a partir dos resultados obtidos nos 8 subgrupos, obtém-se a tabela comparativa abaixo:

Partição de Notas de COB pelas MN e MA usando resultados dos subgrupos – dados de 2023

COB 2023	Frequência Relativa (%)	
	MN	MA
A	35,3%	26,1%
B	29,3%	25,8%
C	35,4%	48,1%
Total	100,0%	100,0%

Nota: (1) Como na MA, na MN, os entes **com Indicador não-preenchido foram automaticamente classificados na Nota C**. Este procedimento aumenta o percentual de Nota C e reduz os de B e A.

8. COMENTÁRIOS FINAIS

Os resultados obtidos com a aplicação da Metodologia Nova mostraram-se bastante satisfatórios. A proposta introduz novos limites para os subgrupos de Porte e Maturidade, bem como para os indicadores parciais, respeitando as estruturas das distribuições subjacentes e estabelecendo limites mais consistentes com as características observadas.

Adicionalmente, as notas deixam de ser baseadas na posição relativa de um ente com respeito aos demais entes, passando a se fundamentar em limites pré-definidos que servirão como metas para os períodos futuros.

Essas mudanças, de forma geral, solucionam quase todos os problemas identificados na abordagem por percentis empregada pela Metodologia Atual.

No entanto, dois aspectos das variáveis estudadas não puderam, nesta versão do estudo, que não avalia as próprias definições das Classificadoras e dos Indicadores, ser totalmente adequados:

1. a altíssima percentagem de casos com Pontuação de ENV igual a 1, e,
2. a grande variação de 2022 para 2023 da posição e aspecto da distribuição da variável Pontuação de ACU.

Nestes dois casos, a recomendação inevitável é que estudos adicionais sejam executados para identificar formas de evitar ou corrigir estas "distorções".

Adicionalmente, é possível imaginar que as variáveis classificadoras, Porte e Maturidade, como já comentado em reuniões de trabalho passadas, possam também ser alvo de estudos adicionais com o objetivo de identificar uma gama maior de variáveis básicas que permitam definir classificações mais "justas" para o Porte e para a Maturidade dos entes.

Alguns pontos não abordados neste trabalho, mas que poderiam ser explorados em estudos futuros incluem

- a análise do impacto dos limites definidos no ano t quando aplicados ao ano t+1,
- a revisão das definições e do cálculo das variáveis indicadoras,
- a validação e revisão sistemática dos dados,
- a revisão do cálculo do ISP,
- a definição de um intervalo de anos para recalcular os limites de grupos e notas, e,
- o estabelecimento de um número mínimo de segurados, ativos ou não, para que um ente não seja classificado como "Não Classificado".

Para finalizar, vale ressaltar que uma mudança metodológica desta magnitude só deverá ser implementada mediante uma extensiva campanha educacional junto aos entes, para conscientizá-los das vantagens inerentes à esta grande mudança.

9. APÊNDICE

❖ **Modelo de Clusterização com KDE**

Este apêndice apresenta detalhes técnicos do modelo de clusterização desenvolvido utilizando a técnica de Kernel Density Estimation (KDE). O KDE estima a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória com base nos dados observados, e os mínimos locais da curva de densidade são usados como divisores entre os clusters. O número de agrupamentos gerados pode ser controlado ajustando o bandwidth (rótulo: bw), um hiperparâmetro que define o grau de suavização da curva KDE.

O modelo é estruturado de forma a permitir a identificação de clusters em dados unidimensionais, ajustando automaticamente os limites entre os grupos com base em critérios de densidade e proporção. Para isso, o modelo emprega dois "loops" principais: um interno, que ajusta o modelo para um número de clusters específico, e outro externo, que garante que as restrições de negócio sejam atingidas.

Dicionário de Termos

- Num_Cluster: Número de clusters ideal.
- Largura de Banda (bw): Parâmetro que controla a largura da janela no cálculo do KDE, influenciando a suavização da estimativa de densidade.
- Prop_Outliers: Proporção mínima de elementos necessária para considerar um cluster como válido.
- Min_Local: Lista de mínimos locais na função de densidade, indicativos de potenciais limites entre clusters.
- Min_Local_Validos: Subconjunto dos mínimos locais que atendem aos critérios de proporção e densidade mínima.
- Perc_Grupos: Dicionário contendo a proporção de elementos em cada cluster.
- Num_Iter_Interna: Número máximo de iterações permitidas para o loop interno.
- Num_Iter_Externa: Número máximo de iterações permitidas para o loop externo.
- Densidade_Min: Valor mínimo de densidade necessário nos limites entre clusters para que sejam considerados válidos.

Ajuste para uma Largura de Banda Específica

Primeiramente, a densidade de probabilidade dos dados é estimada utilizando KDE com uma largura de banda especificada. Depois são identificados os mínimos locais da curva de densidade. Esses mínimos indicam potenciais limites entre clusters. Para cada mínimo, a proporção de elementos nos clusters é avaliada. Os clusters com proporções de elementos menores que Prop_Outliers são considerados outliers e são combinados com o menor cluster válido adjacente. Os mínimos locais válidos são então armazenados e usados para prever os grupos nos dados, servindo de limites para os clusters. O pseudocódigo abaixo organiza o procedimento, destacando as etapas de cálculo, identificação de limites e ajuste dos clusters.

Pseudocódigo:

1. Estimar a densidade (KDE) com uma largura de banda específica.
2. Identificar mínimos locais (Min_Local).
3. Para cada Min_Local:
 - a. Avaliar proporções nos clusters e identificar clusters de outliers.
 - b. Combinar clusters de outliers com clusters adjacentes.
 - c. Armazenar os mínimos locais após combinações em Min_Local_Validos.
4. Atualizar proporções de grupos com os Min_Local_Validos.

O Loop Interno

O loop interno ajusta iterativamente a largura de banda (bw) por uma busca binária do KDE para encontrar o número de clusters especificado. Ele começa inicializando um intervalo, com um valor mínimo e máximo para bw. Em cada iteração, calcula a média desse intervalo, ajusta o KDE com esse valor e identifica mínimos locais. O número de clusters é avaliado e, caso não corresponda ao esperado, o intervalo é ajustado. Este processo se repete até atingir o número desejado de clusters ou o limite de iterações. Dentro do loop, é testado também as densidades nos pontos de mínimo encontrados e definido um mínimo para esses valores (Densidade_Min), para evitar que o KDE tenha áreas de densidade muito baixa entre os clusters e, por isso, que os limites sejam definidos em um ponto arbitrário dentro desta área. O pseudocódigo a seguir descreve o processo, explicitando as etapas de cálculo.

Pseudocódigo:

1. Inicializar largura de banda mínima (bw_min) e máxima (bw_max).
2. Enquanto iterações < Num_Iter_Interna:
 - a. Definir largura de banda (bw_temp) como a média do intervalo atual.
 - b. Ajustar o KDE e identificar mínimos locais.
 - c. Verificar número de clusters encontrados:
 - i. Se válido e densidades nos pontos de mínimo adequadas, sair do loop.
 - ii. Se menor que Num_Cluster, bw_max recebe bw_temp.
 - iii. Se maior que Num_Cluster, bw_min recebe bw_temp.

O Loop Externo

O loop externo valida e ajusta os clusters gerados para que respeitem as proporções definidas. Ele começa testando as proporções obtidas e, caso alguma não seja válida, incrementa o número de clusters desejados, executando novamente o loop interno. Após calcular novos limites, clusters pequenos ou inadequados são identificados e fundidos iterativamente. A fusão ocorre com base na densidade e na proximidade: um cluster pequeno é combinado com o vizinho que tem menor densidade ou que resulta em uma divisão mais equilibrada. Este processo garante que os clusters finais respeitem as restrições de proporção e sejam consistentes com a estrutura dos dados. O pseudocódigo a seguir descreve o processo. O pseudocódigo a seguir descreve o processo, explicitando as etapas de cálculo.

Pseudocódigo

1. Iniciar tentativa com número inicial de clusters.
2. Enquanto regras não forem válidas e iterações < Num_Iter_Externa:
 - a. Incrementar número desejado de clusters.
 - b. Executar o loop interno.
 - c. Para os menores clusters que estejam sobrando, em relação a Num_Clusters:
 - i. Se for o primeiro cluster, combinar com o vizinho seguinte;
 - ii. Se for o último cluster, combinar com o vizinho anterior;
 - iii. Caso contrário, combinar com o vizinho que tiver menor densidade ou equilíbrio na fusão.

Como regra de negócio, foram definidos limites máximo e mínimo para a proporção de entes em cada grupo.

Este modelo de clusterização baseado em KDE é particularmente adequado para dados unidimensionais devido à simplicidade e eficiência na identificação de padrões de densidade. Essa abordagem é especialmente útil em cenários onde se busca uma interpretação clara e objetiva dos grupos formados, já que os KDEs e limites podem ser facilmente mostrados em gráficos e interpretados.