

A distribuição normal é uma distribuição contínua que pode ser obtida através da generalização da distribuição binomial quando N , o número de tentativas, é muito grande.

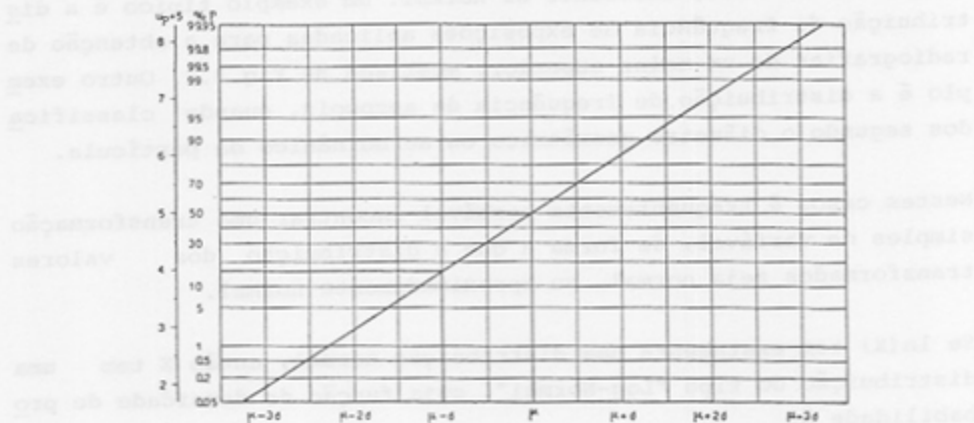


Fig. 4.6

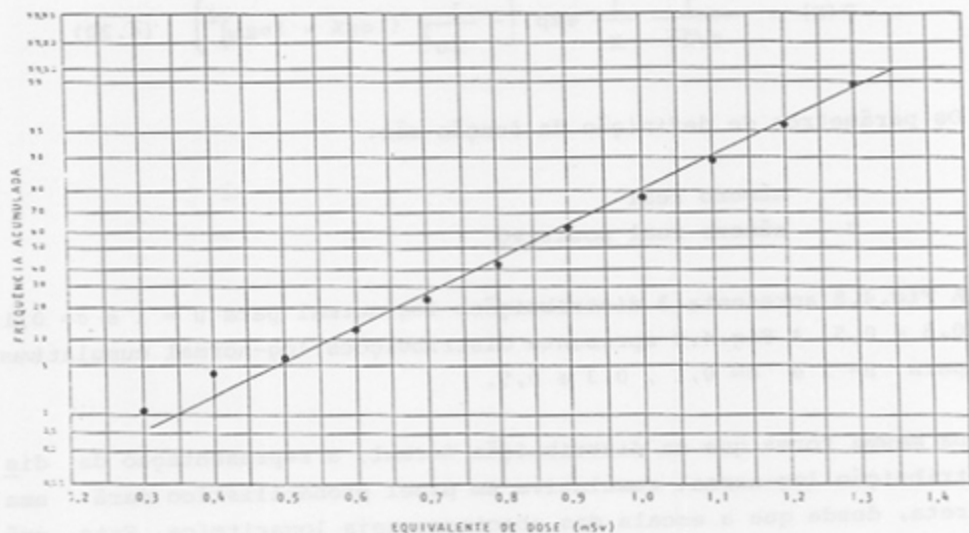


Fig. 4.7

IV.2.2 - DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL

Muitas distribuições de frequência relacionadas a medidas de efeitos biológicos, psicológicos e econômicos, apresentam uma distribuição assimétrica, diferente da normal. Um exemplo típico é a distribuição de frequência de exposições aplicadas para a obtenção de radiografias de um molar superior, mostrada na Fig.3.1. Outro exemplo é a distribuição de frequência de aerossóis, quando classificados segundo o diâmetro geométrico ou aerodinâmico da partícula.

Nestes casos é frequentemente possível encontrar uma transformação simples de variável, de forma a que a distribuição dos valores transformados seja normal, ou aproximadamente normal.

Se $\ln(X)$ tem exatamente uma distribuição normal, então X tem uma distribuição do tipo "Log-Normal", cuja função de densidade de probabilidade é:

$$P(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{1}{X} \exp \left(- \frac{1}{2\sigma^2} (\log X - \log \mu)^2 \right) \quad (4.20)$$

Os parâmetros de definição da função são:

- μ número real
 σ número real positivo

A Fig.4.8 apresenta 3 distribuições log-normal para $\mu = 1$ e $\sigma = 0,1$, $0,3$ e $0,5$. A Fig.4.9 apresenta distribuições log-normal cumulativas para $\mu = 1$ e $\sigma = 0,1$, $0,3$ e $0,5$.

Da mesma forma que na distribuição normal, a representação da distribuição log-normal cumulativa em papel probabilístico dará uma reta, desde que a escala das abscissas seja logarítmica. Este gráfico constitui uma forma de reconhecimento de distribuição tipo log-normal para dados experimentais coletados de amostras. Quando o resultado apresenta duas inclinações, é sinal de que existe a

composição de dois grupos distintos na amostra, correspondendo uma distribuição log-normal para cada um.

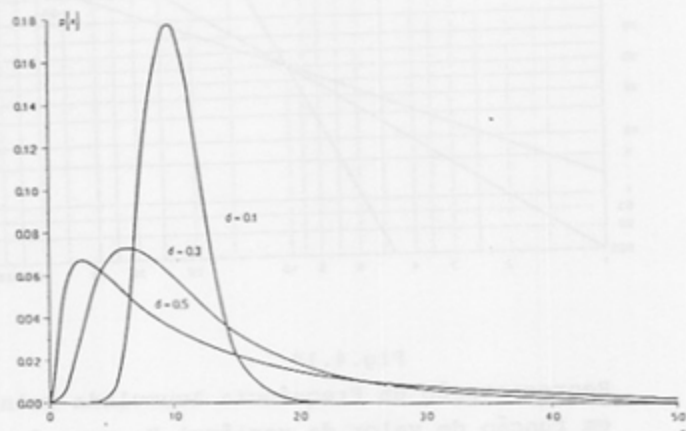


Fig.4.8

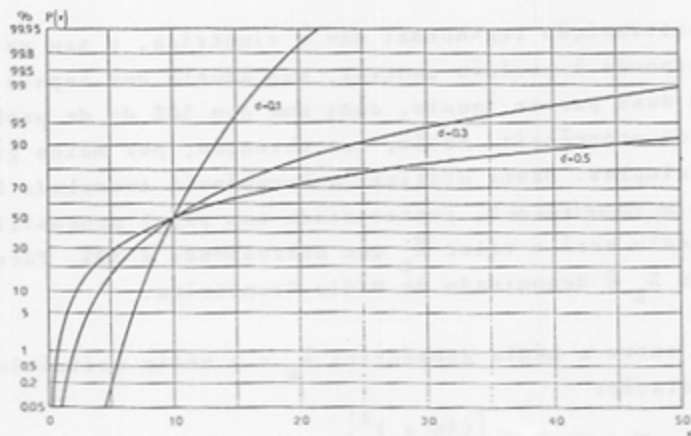


Fig.4.9

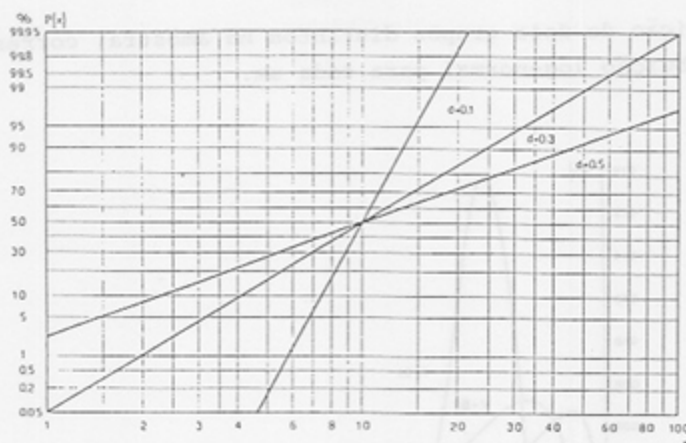


Fig.4.10

Representação da Frequência Acumulada Relativa em função do valor da variável X , para 3 distribuições Log-Normais de valor médio 1, em papel probabilístico e escala logarítmica.

IV.2.2.1 - Média Geométrica

Como a distribuição log-normal não é simétrica, o seu valor médio não corresponde à posição central, mas àquela que separa a distribuição em duas partes iguais, cada uma com 50% de de probabilidade total de ocorrência. Assim, sua obtenção, por meios gráficos, é bastante simples. Basta utilizar a Frequência Acumulada Relativa, em função do logaritmo de X , representada num papel probabilístico, e o valor médio será o valor $\bar{X}_g$ que corresponde à 50%. Para este caso o valor $\bar{X}_g$ é denominado de Média Geométrica.

A relação entre a média geométrica $\bar{X}_g$ e a média aritmética $\bar{X}$ é dada pela relação:

$$\bar{X} = \bar{X}_g \cdot \exp \left(\frac{(\ln s_g)^2}{2} \right)$$

onde, s_g = desvio padrão geométrico.

IV.2.2.2 - Desvio Padrão Geométrico

Para a obtenção do desvio padrão geométrico s_g , utiliza-se o mesmo gráfico de frequência acumulada relativa versus o logaritmo de X, pela expressão:

$$s_g = \frac{X_{PC(84,1\%)} }{X_{PC(50\%)}}$$

onde,

$X_{PC(84,1\%)}$ = valor de log(X) correspondente à frequência acumulada de 84,1%;

$X_{PC(50\%)}$ = valor de log(X) correspondente à média geométrica, com PC = 50%.

No caso da obtenção de $\bar{X}_g$ e s_g de valores experimentais, para melhor estimativa, é bom utilizar, após o ajuste dos pontos, a expressão:

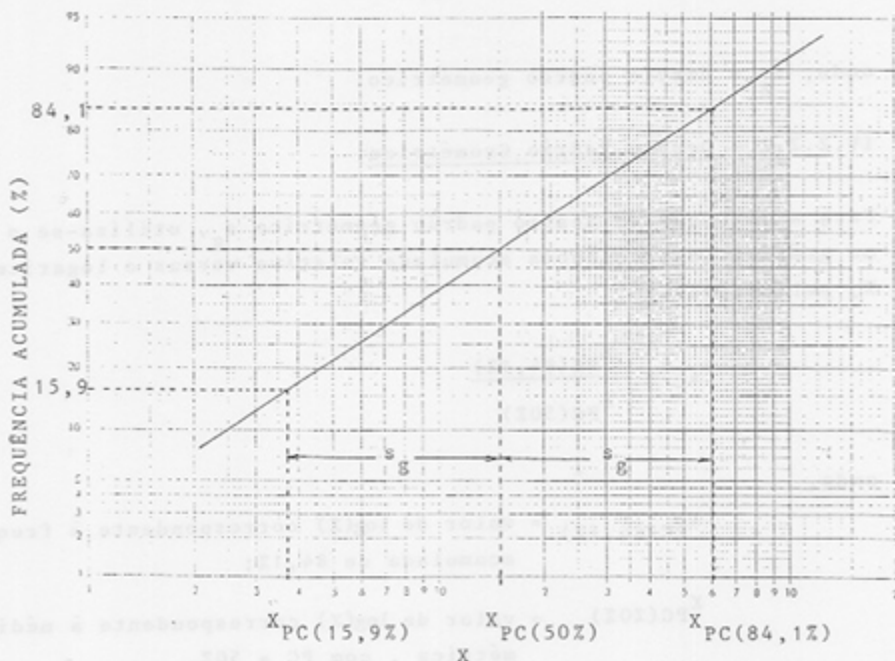
$$s_g = \log \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{X_{PC(50\%)}}{X_{PC(15,9\%)}} + \frac{X_{PC(84,1\%)}}{X_{PC(50\%)}} \right] \right\}$$

IV.2.2.3 - Desvio Padrão

A conexão entre o desvio padrão geométrico e o desvio padrão é dada pela relação:

$$s = \log(s_g)$$

A distribuição log-normal é uma distribuição normal das frequências de ocorrência, não dos valores da variável X, mas dos valores do seu logaritmo. Isto significa uma distribuição de ordens de grandeza da variável X.



IV.2.3 - DISTRIBUIÇÃO QUI-QUADRADO (χ^2)

Supondo que as variáveis randômicas $X_1, X_2, \dots, X_v$ apresentem cada uma uma distribuição normal, a soma de seus quadrados será,

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_v^2 \quad (4.21)$$

Essa soma de quadrados tem a função densidade,

$$P(X) = \frac{1}{2^{v/2} \Gamma(v/2)} X^{v/2-1} e^{-X/2} \quad (X \geq 0) \quad (4.22)$$

onde,

v = inteiro e positivo = grau de liberdade

Γ = função gama (fatorial generalizado)

A distribuição expressa por (4.22) denomina-se "Distribuição χ^2 " e é definida por um único parâmetro: ν .

A distribuição possui inclinação positiva conforme pode ser visto na Fig.4.11.

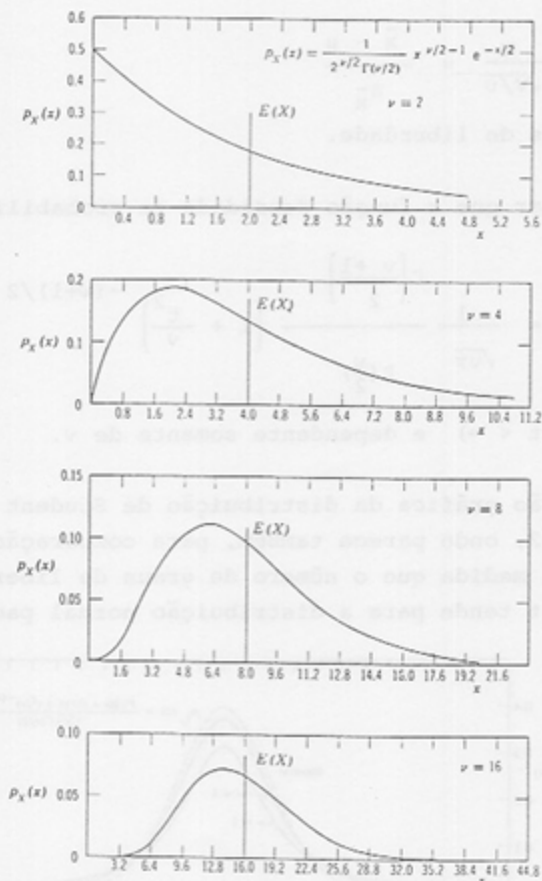


Fig.4.11

IV.2.4 - DISTRIBUIÇÃO t DE STUDENT

Uma distribuição extensivamente usada em testes de hipóteses em estatística é a distribuição t desenvolvida por W.S.Gosset, sob o pseudônimo de "Student".

Considerando as variáveis randômicas independentes U e V, onde U é distribuída normalmente como $N(0,1)$ e V é distribuída como χ^2 , pode-se definir a variável t,

$$t = \frac{U}{\sqrt{V/v}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} \quad (4.23)$$

onde v = graus de liberdade.

Pode se mostrar que a função densidade de probabilidade é,

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-(v+1)/2} \quad (4.24)$$

onde $(-\infty < t < \infty)$ e dependente somente de v.

A representação gráfica da distribuição de Student para $v=1$ e 4 está na Fig.4.12, onde parece também, para comparação, a distribuição normal. À medida que o número de graus de liberdade aumenta, a distribuição t tende para a distribuição normal padrão $N(0,1)$.

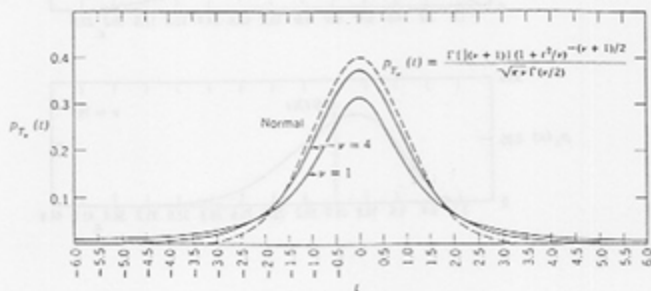


Fig.4.12

A distribuição t é simétrica para $t = 0$ e, a média e a variância são, respectivamente, para $v > 2$:

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \sigma^2 &= \frac{v}{v-2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

A distribuição t se aplica para amostras pequenas ($n < 30$) e os valores de t servem para fixar os limites do intervalo de confiança desejado. Desta forma um resultado de medida é dado por,

$$\bar{x} \pm t_p s_{\bar{x}} \quad (4.26)$$

onde,

$\bar{x}$ = valor médio da amostra

$s_{\bar{x}}$ = desvio padrão da média da amostra = $s/\sqrt{n}$

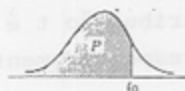
t_p = valor de t crítico que limita o intervalo de confiança onde $p = (1 - \alpha/2)$ é o percentual exigido, por exemplo $p = 0,99$. O valor de t_p é às vezes denominado de percentil.

α = incerteza associada, por exemplo, 0,05 (5%).

É bom salientar aqui o uso de tabelas, como a Tabela 4.4 que fornece os valores de t_p em função dos graus de liberdade e do percentual p . Quando se deseja um intervalo de confiança de 95%, por exemplo, busca-se na tabela o valor correspondente a $t_{(1-\alpha/2)}$ ou seja, $t_{0,975}$ e não $t_{0,95}$, devido à maneira como foi obtida a tabela. Conforme se percebe, os valores tabelados foram obtidos através da frequência acumulada até t_p , numa distribuição monocaudal. Entre tanto, o intervalo de confiança é fixado com limites de uma distribuição bi-caudal, ou seja, a incerteza α é distribuída simetricamente, metade ($\alpha/2$) para cada lado. Por exemplo, para um intervalo de confiança de 99%, ou incerteza de 1% ($\alpha=0,01$) busca-se o valor na coluna $t_{0,995} = t_{1-\alpha/2} = t_{1-0,005}$. Existem tabelas que fornecem os valores diretamente.

Tabela 4.4

$$P = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{v\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dt$$



P v	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Reproduced from Pearson and Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1 (1958), p. 138, and from Table III, Fisher and Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1953, and by permission of authors and publishers.

IV.2.5 - DISTRIBUIÇÃO F

Uma distribuição frequentemente usada em conexão com dados de amostras com distribuição normal é a Distribuição F.

Assim, se U e V são variáveis randômicas independentes, cada uma com distribuição do tipo Qui-Quadrado e, v_1 e v_2 são números inteiros e positivos, denominados de graus de liberdade, respectivamente, então,

$$F = \frac{U/v_1}{V/v_2} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (4.27)$$

sendo F um número real e positivo, apresenta uma função de densidade de probabilidade dada por:

$$P(F) = \frac{\Gamma((v_1+v_2)/2)}{\Gamma(v_1/2)\Gamma(v_2/2)} (v_1/v_2)^{v_1/2} \frac{F^{(v_1-2)/2}}{(1+v_1 F/2)^{(v_1+v_2)/2}} \quad (4.28)$$

A média e a variância da distribuição F são, respectivamente:

$$E = \frac{v_2}{v_2-2}$$

$$V = \frac{2v_2^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-2)^2(v_2-4)}$$

Existem 2 casos limites da distribuição F que devem ser notados:

- quando $v_1=1$, a distribuição F é igual à distribuição t com v_2 graus de liberdade;
- quando $v_2 \rightarrow \infty$, a distribuição F tende à qui-quadrado com v_1 graus de liberdade.

IV.3 - RELACIONAMENTO ASSINTÓTICO ENTRE DISTRIBUIÇÕES

Algumas distribuições convergem assintoticamente para outras sob várias condições limites. Na Tabela 4.5 estão sumarizadas as distribuições assintóticas.

Tabela 4.5 - As condições limites sobre os parâmetros das distribuições indicam a convergência como in

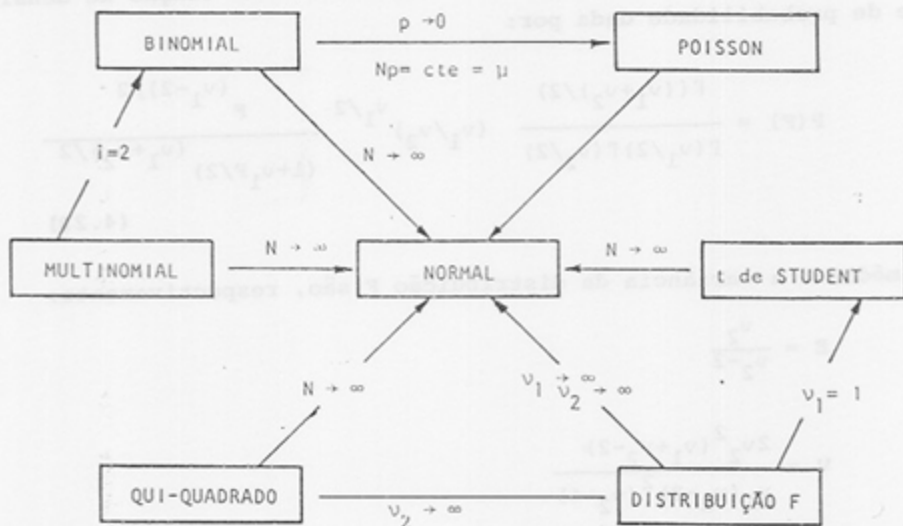


Tabela 4.6

POISSON DISTRIBUTION

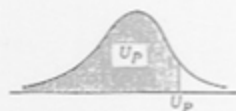
Values of $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}$

X	θ									
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.0952	0.1813	0.2592	0.3297	0.3935	0.4512	0.5034	0.5507	0.5934	0.6321
2	0.0047	0.0175	0.0369	0.0616	0.0902	0.1219	0.1558	0.1912	0.2275	0.2642
3	0.0002	0.0011	0.0036	0.0079	0.0144	0.0231	0.0341	0.0474	0.0629	0.0803
4	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0018	0.0034	0.0058	0.0091	0.0135	0.0190
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0008	0.0014	0.0023	0.0037
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0006
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
X	θ									
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.6671	0.6988	0.7275	0.7534	0.7769	0.7981	0.8173	0.8347	0.8504	0.8647
2	0.3010	0.3374	0.3732	0.4082	0.4422	0.4751	0.5068	0.5372	0.5663	0.5940
3	0.0996	0.1205	0.1429	0.1665	0.1912	0.2166	0.2428	0.2694	0.2963	0.3233
4	0.0257	0.0338	0.0431	0.0537	0.0656	0.0788	0.0932	0.1087	0.1253	0.1429
5	0.0054	0.0077	0.0107	0.0143	0.0186	0.0237	0.0296	0.0364	0.0441	0.0527
6	0.0010	0.0015	0.0022	0.0032	0.0045	0.0060	0.0080	0.0104	0.0132	0.0166
7	0.0001	0.0003	0.0004	0.0006	0.0009	0.0013	0.0019	0.0026	0.0034	0.0045
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0006	0.0008	0.0011
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
X	θ									
	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.8775	0.8892	0.8997	0.9093	0.9179	0.9257	0.9328	0.9392	0.9450	0.9502
2	0.6204	0.6454	0.6691	0.6916	0.7127	0.7326	0.7513	0.7689	0.7854	0.8009
3	0.3504	0.3773	0.4040	0.4303	0.4562	0.4816	0.5064	0.5305	0.5540	0.5768
4	0.1614	0.1806	0.2007	0.2213	0.2424	0.2640	0.2859	0.3081	0.3304	0.3528
5	0.0621	0.0725	0.0838	0.0959	0.1088	0.1226	0.1371	0.1523	0.1682	0.1847
6	0.0204	0.0249	0.0300	0.0357	0.0420	0.0490	0.0567	0.0651	0.0742	0.0839
7	0.0059	0.0075	0.0094	0.0116	0.0142	0.0172	0.0206	0.0244	0.0287	0.0335
8	0.0015	0.0020	0.0026	0.0033	0.0042	0.0053	0.0066	0.0081	0.0099	0.0119
9	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009	0.0011	0.0015	0.0019	0.0024	0.0031	0.0038
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001

* Taken with permission from E. C. Molina, "Poisson's Exponential Binomial Limit," D. Van Nostrand, New York.

Tabela 4.7
PERCENTAGE POINTS (U_p) OF THE NORMAL DISTRIBUTION*

Values of U_p such that $\Phi(U_p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{U_p} e^{-u^2/2} du = \Phi$



P	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.50	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.0226
0.51	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.0476
0.52	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.0728
0.53	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.0979
0.54	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.1231
0.55	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.1484
0.56	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.1738
0.57	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.1993
0.60	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.2767
0.61	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.3029
0.62	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.3292
0.63	0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.3558
0.64	0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.3826
0.65	0.3853	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.4097
0.66	0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.4372
0.67	0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.4649
0.68	0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.4930
0.69	0.4959	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215
0.70	0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505
0.71	0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799
0.72	0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098
0.73	0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403
0.74	0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713
0.75	0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031
0.76	0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356
0.77	0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688
0.78	0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030
0.79	0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381
0.80	0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8633	0.8669	0.8705	0.8742
0.81	0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116
0.82	0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502
0.83	0.9542	0.9581	0.9621	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904
0.84	0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322
0.85	1.0364	1.0407	1.0450	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758
0.86	1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217
0.87	1.1264	1.1311	1.1359	1.1407	1.1455	1.1503	1.1552	1.1601	1.1650	1.1700
0.88	1.1750	1.1800	1.1850	1.1901	1.1952	1.2004	1.2055	1.2107	1.2160	1.2212
0.89	1.2265	1.2319	1.2372	1.2426	1.2481	1.2536	1.2591	1.2646	1.2702	1.2759
0.90	1.2816	1.2873	1.2930	1.2988	1.3047	1.3106	1.3165	1.3225	1.3285	1.3346
0.91	1.3408	1.3469	1.3532	1.3595	1.3658	1.3722	1.3787	1.3852	1.3917	1.3984
0.92	1.4051	1.4118	1.4187	1.4255	1.4325	1.4395	1.4466	1.4538	1.4611	1.4684
0.93	1.4758	1.4833	1.4909	1.4985	1.5063	1.5141	1.5220	1.5301	1.5382	1.5464
0.94	1.5548	1.5632	1.5718	1.5805	1.5893	1.5982	1.6072	1.6164	1.6258	1.6352
0.95	1.6449	1.6546	1.6646	1.6747	1.6849	1.6954	1.7060	1.7169	1.7279	1.7392
0.96	1.7507	1.7624	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250	1.8384	1.8522	1.8663
0.97	1.8808	1.8957	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774	1.9954	2.0141	2.0335
0.98	2.0537	2.0749	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973	2.2262	2.2571	2.2904
0.99	2.3263	2.3656	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521	2.7478	2.8782	3.0902

* Reproduced with permission from Pearson and Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1 (1958), p. 112.

TABLE 4.8
Cumulative Normal Distribution^a

$$\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^X e^{-u^2/2} du$$



X	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86866	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99691	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99897	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99957	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

^a Reproduced with permission from Pearson and Hartley, *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1 (1958), pp. 104-108.

Tabela 4.10
PERCENTAGE POINTS OF THE F-DISTRIBUTION*

Values of F_{α, ν_1, ν_2} such that $P = \frac{1}{B(\nu_1/2, \nu_2/2)} \int_0^{F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}} g^{(\nu_1/2-1)}(1+g)^{-(\nu_1+\nu_2/2)} dg$
 $P = 0.95$

$\nu_1 \backslash \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.3	215.7	224.6	230.2	234.0	236.4	238.0	239.2	240.0	240.8	241.5	242.0	242.5	242.8	243.0	243.1	243.2	243.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.32	19.37	19.41	19.44	19.46	19.48	19.49	19.50	19.51	19.52	19.53	19.54	19.55	19.56	19.57
3	10.13	9.93	9.82	9.75	9.69	9.64	9.60	9.57	9.55	9.53	9.52	9.51	9.50	9.50	9.50	9.50	9.50	9.50	9.50
4	7.01	6.84	6.79	6.73	6.68	6.64	6.60	6.56	6.54	6.52	6.51	6.50	6.50	6.50	6.50	6.50	6.50	6.50	6.50
5	5.61	5.39	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.72	4.71	4.70	4.70	4.70	4.70	4.70	4.70	4.70
6	5.09	5.14	4.78	4.78	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.94	3.93	3.93	3.93	3.93	3.93
7	4.61	4.66	4.36	4.36	3.99	3.87	3.80	3.74	3.69	3.65	3.62	3.59	3.56	3.54	3.53	3.53	3.53	3.53	3.53
8	4.23	4.28	4.07	4.07	3.71	3.59	3.52	3.46	3.41	3.37	3.34	3.31	3.28	3.26	3.25	3.25	3.25	3.25	3.25
9	3.94	3.98	3.86	3.86	3.51	3.39	3.32	3.26	3.21	3.17	3.14	3.11	3.08	3.06	3.05	3.05	3.05	3.05	3.05
10	3.74	3.78	3.66	3.66	3.31	3.19	3.12	3.06	3.01	2.97	2.94	2.91	2.88	2.86	2.85	2.85	2.85	2.85	2.85
11	3.58	3.62	3.50	3.50	3.15	3.03	2.96	2.91	2.86	2.82	2.79	2.76	2.73	2.71	2.70	2.70	2.70	2.70	2.70
12	3.45	3.49	3.37	3.37	3.02	2.90	2.83	2.78	2.73	2.69	2.66	2.63	2.60	2.58	2.57	2.57	2.57	2.57	2.57
13	3.34	3.38	3.26	3.26	2.91	2.79	2.72	2.67	2.62	2.58	2.55	2.52	2.49	2.47	2.46	2.46	2.46	2.46	2.46
14	3.24	3.28	3.16	3.16	2.81	2.69	2.62	2.57	2.52	2.48	2.45	2.42	2.39	2.37	2.36	2.36	2.36	2.36	2.36
15	3.16	3.20	3.08	3.08	2.73	2.61	2.54	2.49	2.44	2.40	2.37	2.34	2.31	2.29	2.28	2.28	2.28	2.28	2.28
16	3.09	3.13	3.01	3.01	2.66	2.54	2.47	2.42	2.37	2.33	2.30	2.27	2.24	2.22	2.21	2.21	2.21	2.21	2.21
17	3.03	3.07	2.95	2.95	2.60	2.48	2.41	2.36	2.31	2.27	2.24	2.21	2.18	2.16	2.15	2.15	2.15	2.15	2.15
18	2.98	3.02	2.90	2.90	2.55	2.43	2.36	2.31	2.26	2.22	2.19	2.16	2.13	2.11	2.10	2.10	2.10	2.10	2.10
19	2.93	2.97	2.85	2.85	2.50	2.38	2.31	2.26	2.21	2.17	2.14	2.11	2.08	2.06	2.05	2.05	2.05	2.05	2.05
20	2.89	2.93	2.81	2.81	2.46	2.34	2.27	2.22	2.17	2.13	2.10	2.07	2.04	2.02	2.01	2.01	2.01	2.01	2.01
21	2.85	2.89	2.77	2.77	2.42	2.30	2.23	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.00	1.98	1.97	1.97	1.97	1.97	1.97
22	2.82	2.86	2.74	2.74	2.39	2.27	2.20	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.97	1.95	1.94	1.94	1.94	1.94	1.94
23	2.79	2.83	2.71	2.71	2.36	2.24	2.17	2.12	2.07	2.03	2.00	1.97	1.94	1.92	1.91	1.91	1.91	1.91	1.91
24	2.76	2.80	2.68	2.68	2.33	2.21	2.14	2.09	2.04	2.00	1.97	1.94	1.91	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88
25	2.73	2.77	2.65	2.65	2.30	2.18	2.11	2.06	2.01	1.97	1.94	1.91	1.88	1.86	1.85	1.85	1.85	1.85	1.85
26	2.70	2.74	2.62	2.62	2.27	2.15	2.08	2.03	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83	1.82	1.82	1.82	1.82	1.82
27	2.68	2.72	2.60	2.60	2.25	2.13	2.06	2.01	1.96	1.92	1.89	1.86	1.83	1.81	1.80	1.80	1.80	1.80	1.80
28	2.65	2.69	2.57	2.57	2.22	2.10	2.03	1.98	1.93	1.89	1.86	1.83	1.80	1.78	1.77	1.77	1.77	1.77	1.77
29	2.63	2.67	2.55	2.55	2.20	2.08	2.01	1.96	1.91	1.87	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	1.75	1.75	1.75	1.75
30	2.61	2.65	2.53	2.53	2.18	2.06	1.99	1.94	1.89	1.85	1.82	1.79	1.76	1.74	1.73	1.73	1.73	1.73	1.73
40	2.47	2.51	2.39	2.39	2.04	1.92	1.85	1.80	1.75	1.71	1.68	1.65	1.62	1.60	1.59	1.59	1.59	1.59	1.59
60	2.34	2.38	2.26	2.26	1.91	1.79	1.72	1.67	1.62	1.58	1.55	1.52	1.49	1.47	1.46	1.46	1.46	1.46	1.46

$\nu_1 \backslash \nu_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	972.7	975.9	977.9	978.3	978.6	978.7	978.8	978.9	979.0
2	17.44	18.04	18.44	18.74	18.94	19.09	19.21	19.31	19.39	19.45	19.49	19.52	19.54	19.56	19.57	19.58	19.59	19.60	19.61
3	12.22	10.65	9.98	9.60	9.16	8.70	8.38	8.09	7.84	7.62	7.43	7.26	7.11	6.98	6.86	6.75	6.64	6.54	6.44
4	10.01	8.81	7.96	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.42	5.37	5.33	5.30	5.28	5.26	5.24
5	8.81	7.58	6.60	6.00	5.51	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.72	4.67	4.63	4.60	4.58	4.56	4.54	4.52
6	8.07	6.58	5.49	5.03	4.58	4.32	4.26	4.17	4.11	4.04	3.98	3.94	3.89	3.85	3.82	3.80	3.78	3.76	3.74
7	7.52	6.31	5.08	4.72	4.32	4.13	4.03	3.95	3.87	3.81	3.77	3.72	3.68	3.65	3.63	3.61	3.59	3.57	3.55
8	7.09	5.86	4.53	4.27	3.92	3.74	3.64	3.56	3.49	3.43	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.20	3.18
9	6.74	5.48	4.25	4.00	3.65	3.48	3.38	3.30	3.22	3.16	3.12	3.08	3.04	3.01	2.99	2.97	2.95	2.93	2.91
10	6.46	5.18	4.05	3.80	3.45	3.28	3.18	3.10	3.02	2.96	2.92	2.88	2.85	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
11	6.25	5.00	3.87	3.61	3.26	3.09	2.99	2.91	2.83	2.77	2.73	2.69	2.66	2.63	2.61	2.59	2.57	2.55	2.53
12	6.07	4.84	3.71	3.45	3.10	2.93	2.84	2.76	2.68	2.62	2.58	2.54	2.51	2.48	2.46	2.44	2.42	2.40	2.38
13	5.91	4.69	3.56	3.30	2.95	2.78	2.69	2.61	2.53	2.47	2.43	2.39	2.36	2.33	2.31	2.29	2.27	2.25	2.23
14	5.76	4.54	3.41	3.15	2.80	2.63	2.54	2.46	2.38	2.32	2.28	2.24	2.21	2.18	2.16	2.14	2.12	2.10	2.08
15	5.62	4.39	3.27	3.01	2.66	2.49	2.40	2.32	2.24	2.18	2.14	2.10	2.07	2.04	2.02	2.00	1.98	1.96	1.94
16	5.49	4.27	3.14	2.88	2.53	2.36	2.27	2.19	2.11	2.05	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86	1.84	1.82	1.80
17	5.36	4.14	3.01	2.75	2.40	2.23	2.14	2.06	1.98	1.92	1.88	1.84	1.80	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67
18	5.24	4.02	2.89	2.63	2.28	2.11	2.02	1.94	1.86	1.80	1.76	1.72	1.68	1.64	1.61	1.59	1.57	1.55	1.53
19	5.12	3.90	2.77	2.51	2.16	1.99	1.90	1.82	1.74	1.68	1.64	1.60	1.56	1.52	1.49	1.47	1.45	1.43	1.41
20	5.00	3.78	2.65	2.39	2.04	1.87	1.78	1.70	1.62	1.56	1.52	1.48	1.44	1.40	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29
21	4.89	3.67	2.54	2.28	1.93	1.76	1.67	1.59	1.51	1.45	1.41	1.37	1.33	1.29	1.26	1.24	1.22	1.20	1.18
22	4.78	3.56	2.43	2.17	1.82	1.65	1.56	1.48	1.40	1.34	1.30	1.26	1.22	1.18	1.15	1.13	1.11	1.09	1.07
23	4.67	3.45	2.32	2.06	1.71	1.54	1.45	1.37	1.29	1.23	1.19	1.15	1.11	1.07	1.04	1.02	1.00	0.98	0.96
24	4.57	3.35	2.22	1.96	1.61	1.44	1.35	1.27	1.19	1.13	1.09	1.05	1.01	0.97	0.94	0.92	0.90	0.88	0.86
25	4.47	3.25	2.12	1.86	1.51	1.34	1.25	1.17	1.09	1.03	0.99	0.95	0.91	0.87	0.84	0.82	0.80	0.78	0.76
26	4.37	3.15	2.02	1.76	1.41	1.24	1.15	1.07	0.99	0.93	0.89	0.85	0.81	0.77	0.74	0.72	0.70	0.68	0.66
27	4.28	3.06	1.93	1.67	1.32	1.15	1.06	0.98	0.90	0.84	0.80	0.76	0.72	0.68	0.65	0.63	0.61	0.59	0.57
28	4.19	2.97	1.84	1.58	1.23	1.06	0.97	0.89	0.81	0.75	0.71	0.67	0.63	0.59	0.56	0.54	0.52	0.50	0.48
29	4.10	2.88	1.75	1.49	1.14	0.97	0.88	0.80	0.72	0.66	0.62	0.58	0.54	0.50	0.47	0.45	0.43	0.41	0.39
30	4.01	2.79	1.66	1.40	1.05	0.88	0.79	0.71	0.63	0.57	0.53	0.49	0.45	0.41	0.38	0.36	0.34	0.32	0.30
40	3.84	2.62	1.49	1.23	0.88	0.71	0.62	0.54	0.46	0.40	0.36	0.32	0.28	0.24	0.21	0.19	0.17	0.15	0.13
60	3.67	2.45	1.32	1.06	0.71	0.54	0.45	0.37	0.29	0.23	0.19	0.15	0.11	0.07	0.04	0.02	0.00	0.00	0.00

Tabela 4.10 (cont.)

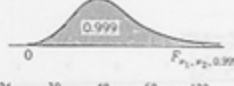
Values of $F_{r_1, r_2, p}$ such that $P = \frac{1}{B(r_1/2, r_2/2)} \int_0^{\frac{r_1 F_{r_1, r_2, p} / r_2}{1 + F_{r_1, r_2, p} / r_2}} g^{r_1/2-1} (1+g)^{-(r_1+r_2)/2} dg$

$P = 0.99$



$r_1 \backslash r_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4995.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6086	6117	6209	6225	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.44	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
3	24.12	20.82	20.46	20.31	20.24	20.21	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20	20.20
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.66	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.25	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.20	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.36	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.85	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.77	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.45	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.74	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.43
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.95	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.92	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.72	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.32	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.00
40	7.31	5.18	4.31	3.81	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.21	2.12	2.03	1.93	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.63	3.34	3.12	2.95	2.82	2.73	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.83	4.79	3.95	3.46	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.04	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

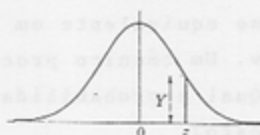
$P = 0.999$



$r_1 \backslash r_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4053*	5000*	5404*	5625*	5764*	5859*	5928*	5982*	6022*	6056*	6107*	6158*	6209*	6225*	6261*	6287*	6313*	6340*	6366*
2	998.5	999.3	999.2	999.2	999.3	999.3	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.4	999.5	999.5	999.5	999.5	999.5
3	167.0	148.5	141.1	137.1	134.6	132.8	131.5	130.6	129.9	129.2	128.3	127.4	126.4	125.9	125.4	125.0	124.5	124.0	123.5
4	74.14	61.25	56.18	53.44	51.71	50.53	49.66	49.00	48.47	48.05	47.41	46.76	46.10	45.77	45.43	45.09	44.75	44.40	44.05
5	47.18	37.12	33.20	31.09	29.75	28.84	28.16	27.64	27.24	26.92	26.42	25.91	25.39	25.14	24.87	24.60	24.33	24.06	23.79
6	35.51	27.00	23.70	21.92	20.81	20.03	19.46	19.03	18.69	18.41	17.99	17.56	17.12	16.89	16.67	16.44	16.21	15.99	15.75
7	29.25	21.69	18.77	17.19	16.21	15.52	15.02	14.63	14.33	14.08	13.71	13.32	12.93	12.73	12.53	12.33	12.12	11.91	11.70
8	25.42	18.49	15.83	14.39	13.49	12.86	12.40	12.04	11.77	11.54	11.19	10.84	10.48	10.30	10.11	9.92	9.73	9.53	9.33
9	22.86	16.39	13.90	12.56	11.71	11.13	10.70	10.37	10.11	9.89	9.57	9.24	8.90	8.72	8.55	8.37	8.19	8.00	7.81
10	21.04	14.91	12.55	11.28	10.48	9.92	9.52	9.20	8.96	8.75	8.45	8.13	7.80	7.64	7.47	7.30	7.12	6.94	6.76
11	19.89	13.81	11.56	10.35	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.63	7.32	7.01	6.85	6.68	6.52	6.35	6.17	6.00
12	18.64	12.97	10.80	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.00	6.71	6.40	6.25	6.09	5.93	5.76	5.59	5.42
13	17.81	12.31	10.21	9.07	8.35	7.86	7.49	7.21	6.98	6.80	6.52	6.23	5.93	5.78	5.63	5.47	5.30	5.14	4.97
14	17.14	11.78	9.73	8.62	7.92	7.43	7.06	6.80	6.58	6.40	6.13	5.85	5.56	5.41	5.25	5.10	4.94	4.77	4.60
15	16.59	11.34	9.34	8.25	7.57	7.09	6.74	6.47	6.26	6.08	5.81	5.54	5.25	5.10	4.95	4.80	4.64	4.47	4.31
16	16.12	10.97	9.00	7.94	7.27	6.81	6.46	6.19	5.98	5.81	5.55	5.27	4.99	4.85	4.70	4.54	4.39	4.23	4.06
17	15.72	10.66	8.73	7.68	7.02	6.56	6.22	5.96	5.75	5.58	5.32	5.05	4.78	4.64	4.48	4.33	4.18	4.02	3.85
18	15.38	10.39	8.49	7.46	6.81	6.35	6.02	5.76	5.56	5.39	5.13	4.87	4.59	4.45	4.30	4.15	4.00	3.84	3.67
19	15.06	10.16	8.28	7.26	6.62	6.18	5.85	5.59	5.39	5.22	4.97	4.70	4.43	4.29	4.14	3.99	3.84	3.68	3.51
20	14.82	9.95	8.10	7.10	6.46	6.02	5.69	5.44	5.24	5.08	4.82	4.56	4.29	4.15	4.00	3.86	3.70	3.54	3.38
21	14.59	9.77	7.94	6.95	6.32	5.88	5.56	5.31	5.11	4.95	4.70	4.44	4.17	4.03	3.88	3.74	3.58	3.42	3.26
22	14.38	9.61	7.80	6.81	6.19	5.76	5.44	5.19	4.99	4.83	4.58	4.33	4.06	3.92	3.78	3.63	3.48	3.32	3.15
23	14.19	9.47	7.67	6.69	6.08	5.65	5.33	5.09	4.89	4.73	4.48	4.23	3.96	3.82	3.68	3.53	3.38	3.22	3.05
24	14.03	9.34	7.55	6.59	5.98	5.55	5.23	4.99	4.80	4.64	4.39	4.14	3.87	3.74	3.59	3.45	3.29	3.14	2.97
25	13.88	9.22	7.45	6.49	5.88	5.46	5.15	4.91	4.71	4.56	4.31	4.06	3.79	3.66	3.52	3.37	3.22	3.06	2.90
26	13.74	9.12	7.36	6.41	5.80	5.38	5.07	4.83	4.64	4.48	4.24	3.99	3.72	3.59	3.44	3.30	3.15	2.99	2.82
27	13.61	9.02	7.27	6.33	5.73	5.31	5.00	4.76	4.57	4.41	4.17	3.92	3.66	3.52	3.38	3.23	3.08	2.92	2.75
28	13.50	8.93	7.19	6.25	5.66	5.25	4.94	4.69	4.50	4.35	4.11	3.86	3.60	3.46	3.32	3.18	3.02	2.86	2.

Tabela 4.11

ORDENADAS (Y)
DA
CURVA NORMAL
REDUZIDA
em z



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3788	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2907	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.9899	0.9773	0.9657
1.7	0.9540	0.9525	0.9509	0.9493	0.9478	0.9463	0.9448	0.9433	0.9418	0.9404
1.8	0.9390	0.9375	0.9361	0.9346	0.9334	0.9321	0.9307	0.9294	0.9281	0.9269
1.9	0.9256	0.9244	0.9232	0.9220	0.9208	0.9196	0.9184	0.9172	0.9160	0.9149
2.0	0.9138	0.9129	0.9120	0.9111	0.9102	0.9093	0.9084	0.9075	0.9066	0.9057
2.1	0.9048	0.9039	0.9031	0.9022	0.9013	0.9004	0.8995	0.8986	0.8977	0.8968
2.2	0.8959	0.8950	0.8941	0.8932	0.8923	0.8914	0.8905	0.8896	0.8887	0.8878
2.3	0.8869	0.8860	0.8851	0.8842	0.8833	0.8824	0.8815	0.8806	0.8797	0.8788
2.4	0.8779	0.8770	0.8761	0.8752	0.8743	0.8734	0.8725	0.8716	0.8707	0.8698
2.5	0.8689	0.8680	0.8671	0.8662	0.8653	0.8644	0.8635	0.8626	0.8617	0.8608
2.6	0.8599	0.8590	0.8581	0.8572	0.8563	0.8554	0.8545	0.8536	0.8527	0.8518
2.7	0.8509	0.8500	0.8491	0.8482	0.8473	0.8464	0.8455	0.8446	0.8437	0.8428
2.8	0.8419	0.8410	0.8401	0.8392	0.8383	0.8374	0.8365	0.8356	0.8347	0.8338
2.9	0.8329	0.8320	0.8311	0.8302	0.8293	0.8284	0.8275	0.8266	0.8257	0.8248
3.0	0.8239	0.8230	0.8221	0.8212	0.8203	0.8194	0.8185	0.8176	0.8167	0.8158
3.1	0.8149	0.8140	0.8131	0.8122	0.8113	0.8104	0.8095	0.8086	0.8077	0.8068
3.2	0.8059	0.8050	0.8041	0.8032	0.8023	0.8014	0.8005	0.7996	0.7987	0.7978
3.3	0.7969	0.7960	0.7951	0.7942	0.7933	0.7924	0.7915	0.7906	0.7897	0.7888
3.4	0.7879	0.7870	0.7861	0.7852	0.7843	0.7834	0.7825	0.7816	0.7807	0.7798
3.5	0.7789	0.7780	0.7771	0.7762	0.7753	0.7744	0.7735	0.7726	0.7717	0.7708
3.6	0.7699	0.7690	0.7681	0.7672	0.7663	0.7654	0.7645	0.7636	0.7627	0.7618
3.7	0.7609	0.7600	0.7591	0.7582	0.7573	0.7564	0.7555	0.7546	0.7537	0.7528
3.8	0.7519	0.7510	0.7501	0.7492	0.7483	0.7474	0.7465	0.7456	0.7447	0.7438
3.9	0.7429	0.7420	0.7411	0.7402	0.7393	0.7384	0.7375	0.7366	0.7357	0.7348

EXERCÍCIO 4.1 - DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

50 pessoas foram expostas a uma fonte radioativa numa acidente. Pela estimativa do Supervisor de Radioproteção, 40 pessoas devem ter recebido dose equivalente em torno de 5 mSv e 10 pessoas, em torno de 30 mSv. Um técnico processa 20 dos 50 filmes dosimétricos utilizados. Qual a probabilidade para que 5 deles pertençam ao grupo mais exposto?

EXERCÍCIO 4.2 - DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Num lote de 1000 dosímetros termoluminescentes, especificados como de 1% de reprodutibilidade, existem 200 com reprodutibilidade de 2%. Um técnico retira, aleatoriamente, da caixa 100 dosímetros. Qual a probabilidade para que 10 deles sejam de 2%?

EXERCÍCIO 4.3 - DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Uma variável X é distribuída binomialmente, com $p=0,25$ e $n=30$. Determinar:

- a) a média aritmética, utilizando a expressão, $\mu = n.p$;
- b) a variância e o desvio padrão, sabendo-se que: $\sigma^2 = n.p.q$ sendo,

p = probabilidade de sucesso do evento;

q = probabilidade de insucesso do evento = $(1-p)$

EXERCÍCIO 4.4 - DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Um detector de radiação registra a taxa de contagem de uma fonte radioativa como sendo 20 cpm. Qual a probabilidade para que, na próxima contagem, registre 18 cpm? Em 100 medições, quantas vezes acontecerá o evento?

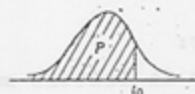
EXERCICIO 4.6 - DISTRIBUIÇÃO DE STUDENT

Em 10 medidas da atividade específica de uma amostra radioativa, obteve-se um valor médio de 5,53 pCi/l e um desvio padrão de 0,06pCi/l. Determinar os limites do intervalo de confiança para o resultado das medições da atividade específica, com:

a) 95%;

b) 99%.

$$P = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dt$$



P	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

EXERCÍCIO 4.6 - DISTRIBUIÇÃO χ^2

Num lote de 500 dosímetros termoluminescentes irradiados, o desvio padrão de 20 deles, retirados aleatoriamente do lote, foi de 0,8 mSv. Determinar os limites, para efeito de controle de qualidade, do desvio padrão, para os níveis de confiança:

a) 95%

b) 99%

SOLUÇÃO

Como se busca determinar os limites dos intervalos de confiança para o desvio padrão das leituras (e não para o valor médio), a distribuição a ser utilizada é a χ^2 .

A relação que define o intervalo é dada por:

$$a) \quad \chi^2_{0,025} < \frac{N \cdot s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{0,975}$$

$$b) \quad \chi^2_{0,005} < \frac{N \cdot s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{0,995}$$

Sabendo-se que o número de graus de liberdade $\nu = N-1 = 20-1 = 19$, pela Tabela 4.9 (pag.59) tem-se:

$$\chi^2_{0,025} = 8,907$$

$$\chi_{0,025} = 2,98$$

$$\chi^2_{0,975} = 32,85$$

$$\chi_{0,975} = 5,73$$

ou seja:

$$\chi^2_{0,005} = 6,844$$

$$\chi_{0,005} = 2,62$$

$$\chi^2_{0,995} = 38,58$$

$$\chi_{0,995} = 6,21$$

Invertendo a expressão e extraíndo a raiz quadrada, tem-se:

$$a) \quad 0,61 < \sigma < 1,17 \quad (\text{mSv})$$

$$b) \quad 0,56 < \sigma < 1,33 \quad (\text{mSv})$$

EXERCÍCIO 4.7 - DISTRIBUIÇÃO LOG-NORMAL

As medidas da concentração de zinco presente em amostras de sedimento do complexo lagunar de Jacarepaguá, feitas por Absorção Atômica, deram, para o "background" os seguintes resultados, em ppm:

41, 78, 79, 43, 90, 110, 137, 55, 26, 194, 175, 110, 113,

71, 53, 64, 148.

Determinar:

- a) a média aritmética da concentração;
- b) o desvio padrão;
- c) a média geométrica, obtida do gráfico de Frequência Acumulada versus Valores de concentração;
- d) o desvio padrão geométrico;
- e) verificar se a relação entre as médias aritmética e geométrica obedecem a relação prevista na pag.53.
- f) verificar se os 4 maiores valores da concentração estão compatíveis com os demais valores obtidos nas outras amostras, ou se são valores anômalos.

O procedimento para a obtenção da curva de percentual cumulativo é o seguinte:

- 1) Colocar, em ordem crescente (ranking), os n valores observados, registrando numa tabela a ordem i de cada valor;
- 2) Calcular o Percentual Cumulativo, utilizando a expressão de Hahn e Shapiro, dada por:

$$PC = \frac{i - 0,5}{n} \cdot 100\%$$

onde,

i = posição em o valor x_i aparece no ranking;

n = número de valores medidos.

- 3) Representar os PC's versus x_i em papel probabilístico logarítmico;
- 4) Obter a Média Geométrica $\bar{x}_g$, para x_i , correspondente a PC = 50%;
- 5) Obter o Desvio Padrão Geométrico, s_g , utilizando a expressão:

$$s_g = \frac{x_{PC(84,1\%)} }{x_{PC(50\%)}}$$

onde,

$x_{PC(84,1\%)} =$ valor de x_i correspondente a PC = 84,1%

$x_{PC(50\%)} =$ valor de x_i correspondente a PC = 50%

- 6) Obter a Média Aritmética $\bar{X}$ dada por:

$$\bar{X} = \bar{x}_g \cdot \exp \left(\frac{(\ln s_g)^2}{2} \right)$$

EXERCICIO 4.8 : CALCULOS DE MÉDIAS COM VALORES MENORES QUE MDL

Os valores encontrados num programa de monitoração ambiental para a concentração de ^{131}I no ar, em pCi/m³, foram os seguintes:

MEDIDA	CONCENTRAÇÃO	MEDIDA	CONCENTRAÇÃO
1	< 0,066	11	< 0,066
2	< 0,066	12	0,070
3	< 0,066	13	0,074
4	< 0,066	14	0,093
5	< 0,066	15	0,100
6	< 0,066	16	0,110
7	< 0,066	17	0,130
8	< 0,066	18	0,154
9	< 0,066	19	0,170
10	< 0,066	20	0,210

Determinar :

- O valor médio tomando todos os valores menores que o Limite Mínimo Detectável (MDL = minimum analytical detectable level)
 - iguais ao valor do MDL;
 - iguais a zero;
 - iguais a MDL/2;
- o valor da média geométrica e do desvio padrão geométrico, utilizando o gráfico em papel probabilístico log;
- o valor da média aritmética utilizando os valores anteriores;
- interpretar os resultados.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

EXERCÍCIO 4.5 : CÁLCULO DE MÉDIA E DESVIO PADRÃO PARA VALORES MENORES QUE MDL

MÉDIA	CONCENTRAÇÃO	MÉDIA	CONCENTRAÇÃO
1	< 0,085	11	< 0,085
2	< 0,085	12	< 0,085
3	< 0,085	13	< 0,085
4	< 0,085	14	< 0,085
5	< 0,085	15	< 0,085
6	< 0,085	16	< 0,085
7	< 0,085	17	< 0,085
8	< 0,085	18	< 0,085
9	< 0,085	19	< 0,085
10	< 0,085	20	< 0,085

V. - TEORIA DE ERROS

"Statistic is man's going forward from cocksure ignorance to thoughtful uncertainty".

- Don Clark's Scrapbook -

V.1 - INTRODUÇÃO

Qualquer atividade de medida, utilizando a quantificação de indicadores ou sistemas instrumentais, visa a obtenção de valores exatos e precisos, ou seja, o "Valor Verdadeiro" das grandezas. Obviamente que o valor verdadeiro não é conhecido. Se o fosse, não haveria razão para qualquer medida.

Convencionalmente, existem estimativas aceitas, dentro de uma margem de incerteza, como valor verdadeiro, real ou de referência. Estes valores são estabelecidos com a assintótica convergência dos valores obtidos, após sucessivos refinamentos de técnica e metodologia.

Com a repetição das experiências, os resultados podem diferir dos encontrados inicialmente. Essa diferença pode ser expressa como uma "Discrepância" entre os resultados. O fato dela existir se deve a somente ser possível determinar resultados com uma dada "Incerteza".

A diferença entre um valor observado ou calculado e o valor verdadeiro, é denominado de "Erro Absoluto". Ele independe do valor da variável. Por exemplo, um erro de leitura de 0,2 mGy num dosímetro representa um erro com este valor, independente se a leitura é 5 ou 100 mGy. Quando este erro é referido ao valor da medida, denomina-se "Erro Relativo". Se expresso percentualmente, "Erro Percentual".

Afora os erros grosseiros, de falha técnica ou de operação, existem aqueles que podem ser determinados e corrigidos e outros que sobre

vivem a qualquer melhoria dos métodos e equipamentos de medida. São os erros "Sistemáticos" e "Randômicos".

V.2 - ERRO SISTEMÁTICO

Como o próprio termo indica, faz a medida ser incorreta de alguma forma sistemática. Se observações são realizadas numa amostra escolhida do universo estatístico, o erro sistemático persiste ainda quando o tamanho da amostra é aumentado. Essa espécie de erro está envolvida no processo de uma investigação e pode ocorrer no estágio de planejamento, ou durante ou após o processo de coleta de dados.

Um outro termo convencionalmente empregado para o erro sistemático é "Tendência" (bias), proveniente da não representatividade da amostra, ou falta de calibração de um aparelho.

Os erros sistemáticos decorrem preferencialmente dos instrumentos de medida, dos vícios e deficiência dos operadores. São erros que aparecem nas medidas com certa constância e sempre num mesmo sentido.

O operador, antes de usar os instrumentos, deverá se certificar de suas condições de operação, aferi-los corretamente, fazer teste de reprodutibilidade, e se isso não for possível, substituir os instrumentos ou eliminar esses erros nos resultados, após sua determinação. São erros indesejáveis na ciência e devem ser evitados nos trabalhos experimentais.

Frequentemente os erros sistemáticos podem ser descobertos através do uso de um instrumento de medida independente, para comparação. Mesmo se o instrumento de medida independente estiver incorreto, uma comparação dos 2 instrumentos pode dar indícios de onde começa a fonte da tendência. Na comparação, por exemplo, da medida fornecida por um dosímetro comum e por um dosímetro padrão, pode-se definir um fator de calibração, que sistematicamente corrige as leituras, numa dada região de energia e condições de medida.

V.3 - ERRO RANDÔMICO

São erros devidos a causas diversas, conhecidas ou não, que fogem à ação do operador, e ocorrem inevitavelmente ora num sentido ora noutro. Embora obras do "acaso", os erros randômicos se distribuem de acordo com certas leis e seu estudo é feito com o auxílio do cálculo das probabilidades.

Como este tipo de erro não pode ser eliminado, a ciência se conforma em estimá-los e procurar atenuá-los, dando ao resultado experimental, não o seu valor verdadeiro (pois isso é impossível) mas o valor mais provável, seguido de 2 limites que fixam a faixa de flutuação. São denominados "Limites de Erro". Sua determinação constitui o principal estudo da teoria dos erros, e não fosse isso, os experimentadores seriam conduzidos a valores irreais como estimativa de certas grandezas.

O aparecimento de um erro randômico é observado quando da diferença entre resultados da experiência (ou amostras) e os correspondentes valores buscados, usando-se os mesmos procedimentos e instrumentos de medida. À medida que o tamanho da amostra aumenta ou o número de repetições da experiência, o erro randômico diminui. Se eles resultam de incertezas instrumentais, podem ser reduzidos também pelo uso de outros mais precisos.

Alguns erros estão acoplados à natureza aleatória do objeto de medida, como por exemplo, a atividade de uma fonte radioativa. Por mais calibrada que seja uma fonte radioativa padrão, ela nunca deixará de apresentar uma flutuação, devido ao fato do decaimento radioativo ser intrinsecamente randômico. Se a fonte for de baixa atividade, a flutuação relativa será muito mais sensível. A atenuação deste tipo de erro, numa medida, se faz fazendo-se contagens por um tempo longo, de tal forma que sua estatística de contagem seja elevada. O erro, determinado como a raiz quadrada da contagem diminuirá à medida que ela aumenta. Esta flutuação existirá mesmo quando se supõe uma instrumentação ideal.

Um tipo de erro de origem randômica importante é o associado a flutuações de desempenho de equipamentos durante o processo de medida, sendo muitas vezes denominado de "Erro Instrumental". Com esta de nominação, ele parece possuir um valor fixo ou bem definido para cada aparelho ou componente, mas, na realidade, isto significa sômente um valor limite inferior para atestar sua qualidade. Por exemplo, se o erro instrumental associado à medida da exposição por uma câmara de ionização a ar for de 1%, isto significa somente que, por este tipo de aparelho, a precisão da medida não consegue ser melhor que 1%. Este valor da flutuação está acoplado à construção do aparelho e possui uma explicação para a contribuição de cada componente. É bom salientar aqui que, o erro de medida proveniente da dependência energética e angular do aparelho constitui um erro do tipo sistemático, devendo, portanto, ser computado quando de sua calibração.

Um exemplo típico de erro instrumental de origem randômica é a resolução de um detector de radiação gama de NaI(Tl). Nele, a dispersão total dos pontos, em relação ao valor máximo de pico num espectro gama obtido num analisador multicanal, é proveniente de:

- a. flutuação estatística na produção de luz no cintilador pelas interações aleatórias da radiação gama;
- b. flutuação na coleta de luz;
- c. flutuação na multiplicação dos elétrons pela fotomultiplicadora;
- d. flutuação no sistema de processamento e análise do pulso eletrônico.

A primeira flutuação é intrínseca ao mecanismo de operação do cintilador. Não pode ser eliminada. Por estar associada ao processo de transferência de energia para o cristal, ou seja, às secções de choque Compton, fotoelétrico e de formação de pares, sua natureza é randômica.

A segunda, está associada à transferência da luz, do ponto de interação, até o fotocatodo. Inclui escape e atenuação da luz no cinti

lador, reflexões múltiplas nas paredes, transparência do cintilador à própria luz, posição de incidência da luz no fotocatodo, variação de sensibilidade do fotocatodo com a posição, qualidade do acoplamento óptico. Esta flutuação pode ser reduzida, utilizando uma geometria adequada de cristal cintilador, material refletor de boa qualidade, bom acoplamento óptico, dimensões do cristal adequadas à energia da radiação gama a medir.

A terceira flutuação depende da qualidade da fotomultiplicadora, da tensão de operação, polarização dos dinodos, corrente de fuga, idade da fotomultiplicadora. Tal flutuação pode ser somente minimizada, buscando-se as condições ótimas de operação.

A quarta contribuição se deve ao desempenho do sistema de processamento e análise do pulso eletrônico. Seu valor mínimo corresponde às suas características, no ponto de operação. Só pode ser reduzido com melhores aparelhos.

Tais contribuições resultam, no final, em amplitudes diferentes de pulso eletrônico, para a mesma energia da radiação incidente. O Valor de 7% a 8% para a resolução do sistema detector, sintetiza todas estas contribuições, e introduz, na determinação da posição correta do pico fotoelétrico, uma incerteza associada a este valor. Se todas as contribuições forem estáveis, o canal do pico de contagem máxima poderá ser determinado com melhor precisão, fazendo-se várias medidas com boa estatística e estimando-o pelo valor médio, e sua dispersão, pelo desvio padrão da média. É óbvio que, por maiores que sejam os cuidados ou número de medidas, a precisão nas medidas nunca atingirá a de um detector do tipo Ge-Li ou Ge intrínseco. O erro instrumental deste é muito menor do que do primeiro detector. Apesar de constante, nas mesmas condições de operação, o erro instrumental é do tipo randômico.

Um modo de se distinguir os erros sistemático e randômico é por intermédio da exatidão e da precisão das medidas. Embora parecidos, estes conceitos não devem ser confundidos.

V.4 - EXATIDÃO

A "Exatidão" de uma experiência é a medida de quão próximo o resultado fica do valor verdadeiro. É uma medida de quanto o resultado é correto. Por exemplo, a diferença entre valores fornecidos por um dosímetro secundário e um primário, dá a medida da exatidão da quele, deste que se aceita o valor do dosímetro primário como referência da verdade.

A exatidão geralmente depende da capacidade técnica de controlar ou compensar os erros sistemáticos, uma vez que existem erros que fazem os resultados diferirem dos valores verdadeiros com discrepâncias reproduzíveis. Esta tendência representa uma manifestação da causa do erro, um caminho a ser pesquisado no sentido de sua minimização ou eliminação. É importante observar que, o grande valor na pesquisa do erro não tem como objetivo o seu simples conhecimento, mas sim a consciência da limitação da verdade.

V.5 - PRECISÃO

É uma medida de quão exatamente o resultado é determinado, sem referência ao que o resultado significa. É uma medida de quão reproduzível o resultado é. Ela depende da capacidade de superar ou analisar os erros randômicos e varia com o número de repetições da medida.

Considerando a repetição de várias medidas, os resultados se distribuem como uma distribuição normal, desde que os erros sejam provenientes de variáveis randômicas. Neste caso, a precisão da medida está associada ao desvio padrão e, a exatidão, ao quanto o resultado está afastado do valor verdadeiro, conforme mostra a Fig. 5.1.

É óbvio que, quando se fala em precisão, subentende-se também um intervalo de confiança que define o limite, dentro do qual os valores se aproximam do valor médio, de referência. Isto significa que o grau de precisão pode ser avaliado em quantos desvios padrões se

consideram para a medida da dispersão. Quando esta é expressa em relação ao valor medido, tem-se a "Precisão Relativa". A "Precisão Absoluta" indica o valor da dispersão nas mesmas unidades que o resultado.



Fig. 5.1

Na Fig. 5.2 tem-se uma ilustração das várias alternativas entre precisão, exatidão e tendência. A tendência corresponde a erro sistemático. Nesta figura, os raios dos círculos correspondem, por exemplo, a limites de exatidão "aceitos", para o valor verdadeiro situado no centro.



Fig. 5.2

Na prática a situação assinalada com um (*) só ocorre por mera casualidade, pois se um instrumento é impreciso carece de reprodutibilidade.

V.6 - ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Quando n medidas x_i são feitas, a melhor estimativa é expressa pelo valor médio $\bar{x}$ da amostra, e sua dispersão, pelo desvio padrão s_x ou pelo desvio padrão da média $s_{\bar{x}}$.

O resultado, expresso, por exemplo, por:

$$\bar{x} \pm z s_{\bar{x}} \quad (5.1)$$

necessita de um critério adicional para fixar com quantos algarismos significativos $\bar{x}$ e $s_{\bar{x}}$ devem ser escritos.

Um critério é conhecer em que casa decimal o desvio padrão da média $s_{\bar{x}}$ é sensível a uma variação, ou seja, a partir dela algarismo algum expressa alguma coisa.

Como o desvio padrão da média $s_{\bar{x}}$ avalia a dispersão em 1a. ordem, o termo de 2a. ordem constitui, então, o critério de corte. Assim, calculando-se o "desvio padrão do desvio padrão da média" se obtém, através de técnicas de propagação de erros,

$$\sigma(s_{\bar{x}}) = \frac{s_{\bar{x}}}{\sqrt{n-2}} \quad (5.2)$$

Assim, por exemplo, se o resultado do processamento de 100 medidas for:

$$\bar{x} = 17,5865$$

$$s_{\bar{x}} = 0,1226$$

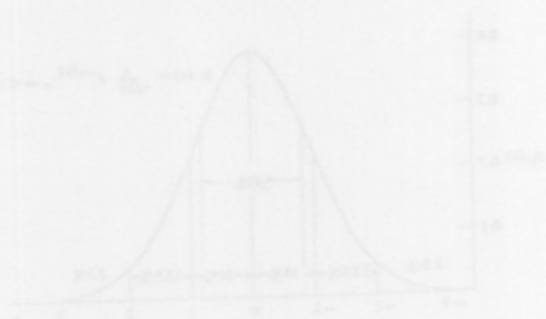
tem-se, utilizando (5.2),

$$\sigma(s_{\bar{x}}) = \frac{0,1226}{\sqrt{100-2}} \approx 0,01226...$$

Isto significa que a partir da segunda casa decimal, começa a variação no desvio padrão da média, ou seja, que a partir da 3a. não tem mais significado. O resultado final fica: $\bar{x} \pm s_{\bar{x}} = 17,59 \pm 0,12$.

Existem algumas limitações, quanto ao número de algarismos significativos, provenientes dos sistemas de medição que deram origem aos resultados numéricos, que a média e o desvio padrão buscam representar. Assim, por exemplo, a precisão e a resolução do sistema de medida, estabelecem um limite natural de significado físico dos resultados. Para um sistema com precisão de 1%, o significado físico está incluído até a segunda casa decimal.

Outra condição importante a ser obedecida é a precisão e exatidão da técnica ou metodologia utilizada. Por exemplo, em monitoração individual, pode-se utilizar dosímetros termoluminescentes (TLD), que apresentam precisão de até 1%, para se obter o valor da dose absorvida por um trabalhador durante um mês. Como o dosímetro está posicionado no tronco do trabalhador e este se move constantemente no campo de radiação, também variável, o resultado é que, no final de um mês, a dose "realmente" absorvida pelo trabalhador pode diferir de 20 a 30% do valor registrado no dosímetro. Assim, no procedimento de interpretação dos resultados numéricos, em termos de Proteção Radiológica, diferenças na primeira ou segunda casa decimais, nada significam, embora os resultados devam ser registrados com duas casas decimais.



VI - PROPAGAÇÃO DAS INCERTEZAS EXPERIMENTAIS

"Random variables are neither random nor variables. They are like alligator pears, or avocados, which are neither alligators nor pears."

- J.E.Freund.

VI.1 - INCERTEZAS NO PROCESSO DE MEDIDA

Na discussão abaixo, se suporá que o erro associado com uma medida de laboratório é randômico em natureza, não importando saber se a fonte de erro randômico reside no processo de medida ou no próprio fenômeno que estará sendo examinado.

Considere o problema da determinação da meia-vida ($T_{1/2}$) de um específico radioisótopo. Esse problema inclui a suposição que existe um valor "verdadeiro", embora desconhecido, para a meia-vida. Entretanto, devido às várias fontes de erro randômico, qualquer medida sofrerá um desvio desse valor verdadeiro, e assim o objetivo é obter a "melhor estimativa" do valor verdadeiro e o tamanho do erro potencial.

Qualquer medida individual da meia-vida de um número virtualmente infinito de medidas potenciais, fornecerá resultado que estará distribuído ao redor do valor verdadeiro da meia-vida, como mostrado na Fig.VI.1.

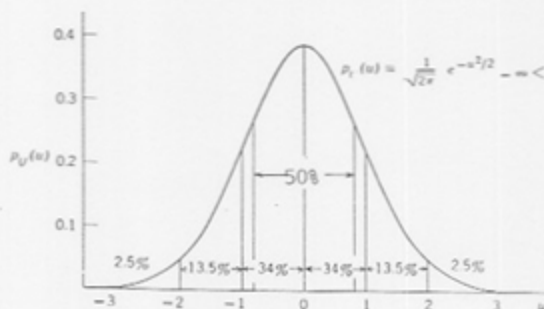


Figura VI.1 - Distribuição normal de resultados.

Esta distribuição é caracterizada grosseiramente pela especificação de sua "média" μ , e de sua "variância", σ^2 . A média sendo uma medida da tendência central da distribuição, é definida como:

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{VI.1})$$

onde x_i é o resultado de uma medida individual da meia-vida, e N é o número de medidas possíveis. Se as fontes de erro que geram essa distribuição são puramente randômicas, isto é, não existem erros sistemáticos, é razoável identificar a média μ com o valor verdadeiro da meia-vida $T_{1/2}$.

A variância σ^2 , sendo uma medida da dispersão da distribuição sobre a média μ , é definida pela relação

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2, \quad \text{com } \sigma_\mu^2 = \frac{\sigma^2}{N} \quad (\text{VI.2})$$

sendo σ_μ o erro padrão da média, que representa o erro associado à média μ .

Portanto, a tarefa de se obter uma melhor estimativa de $T_{1/2}$, o procurado valor verdadeiro da meia-vida, é realizada pela determinação da melhor estimativa de μ , a média da população de todas as medidas potenciais de meias-vidas. Além do mais, para se garantir uma medida da confiabilidade na estimativa da média, deve-se ter a melhor estimativa de σ^2 , a variância da população.

Determinar μ e σ^2 diretamente do uso das equações (VI.1) e (VI.2) é obviamente impraticável, desde que elas requerem um número ∞ de medidas. O artifício é então determinar a estimativa de μ e σ^2 a partir de um número limitado de medidas, tal como os resultados apresentados na Tabela VI.1.

Tal coleção é chamada de "amostra", e as estimativas obtidas dela são uma "amostra estatística". Para uma amostra de tama-

TABELA VI.1 - Amostra das Meias-Vidas Medidas

Número da Medida	$T_{1/2}$ (anos)
1	5,26
2	5,24
3	5,20
4	5,21
5	5,27

ção n , a teoria estatística indica que a melhor "média da amostra" $\bar{x}$, e "variância da amostra", s^2 , são definidas como:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{VI.3})$$

e

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \text{com} \quad s_{\bar{x}}^2 = \frac{s^2}{n} \quad (\text{VI.4})$$

onde x_i é uma medida individual da amostra, s é o desvio padrão da média, e n o tamanho da amostra. Portanto, para os dados da Tabela VI.1, tem-se:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (T_{1/2})_i = 5,236 \text{ anos}$$

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n [(T_{1/2})_i - \bar{x}]^2 = 0,00093 \text{ (anos)}^2$$

$$s = \sqrt{s^2} = 0,031 \text{ anos}$$

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,014 \text{ anos}$$

Dada uma amostra limitada de n medidas, cada uma delas contendo algum erro randômico, a média da amostra $\bar{x}$ é a melhor esti-

mativa possível do valor verdadeiro da meia-vida $T_{1/2}$.

Portanto, para dar o resultado de uma experiência realizada com muitas medidas similares, se calcula (usando as equações (VI.3) e (VI.4)) a média M , e o desvio padrão S_M , para a amostra, e o resultado será $M \pm S_M$.

Esse método é correto se aplicado a somente 1 medida. Entre - tanto, quando uma experiência compreende medidas individuais, como geralmente acontece, é mais apropriado aplicar o método para cada medida individual e determinar o erro final pela técnica da propagação de erro, que será apresentada agora. Tal procedimento maximiza a informação obtida dos dados brutos.

VI.2 - PROPAGAÇÃO DAS INCERTEZAS EXPERIMENTAIS

Partindo-se da hipótese de que quando se mede uma grandeza não se conhece seu valor exato, as experiências realizadas, além das limitações de método, estão sujeitas a erros provenientes do equipamento, das flutuações aleatórias no decurso da experiência e das falhas de operação. Os erros acidentais e grosseiros podem ser convenientemente minimizados, sendo que os sistemáticos podem ser diminuídos com o uso de equipamentos precisos e, principalmente, ser estimados no tratamento dos dados experimentais.

São poucas as vezes que uma grandeza pode ser medida diretamente com um instrumento. Quase sempre as medições são efetuadas sobre outras grandezas ligadas àquela que se deseja medir. Assim, por exemplo, para se medir com precisão o volume de um cilindro reto, há necessidade de se medir o diâmetro da base e a altura do cilindro; para se medir a velocidade de um corpo, há necessidade de se medir o tempo e o espaço. Há processos que permitem calcular o erro da grandeza que se deseja medir em consequência dos erros propagados de outras grandezas medidas diretamente pelo instrumento, ou seja, calcular como um erro associado a uma variável atua como fonte de ou-

tros desvios de valores que dela dependem.

Um dos processos para a determinação dos erros utiliza as propriedades do método dos mínimos quadrados, e permite calcular os limites do erro com maior precisão, sem prejuízo da confiança, apesar de, no caso geral, ser muito trabalhoso. Este processo também chamado de processo das derivadas parciais.

Seja uma grandeza F ligada a outras grandezas x e y , que podem ser medidas diretamente. Se a variável y se relaciona com uma outra variável x através da lei matemática $F = F(x,y)$ obtida por ajuste de dados experimentais e de raciocínios teóricos, os erros que ocorrem na determinação dos valores de x e y vão influenciar o valor de $F(x,y)$. Por exemplo, F representa a razão de contagem de uma dada fonte, enquanto x e y são as contagens num intervalo de tempo cada uma delas uma quantidade medida, e consequentemente sujeita a erro.

Chamando-se de δF o acréscimo da função F , e δx e δy os acréscimos correspondentes às variáveis independentes x e y , tem-se:

$$F \pm \delta F = F(x \pm \delta x, y \pm \delta y) \quad .$$

Do cálculo diferencial sabe-se que a diferencial total de uma função contendo variáveis permite uma boa aproximação do acréscimo total da função, quando os acréscimos das variáveis são pequenos. Assim, pode-se escrever, com base no cálculo diferencial:

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) \delta y \quad . \quad (VI.5)$$

δF é o maior erro plausível a temer na grandeza F , ou seja:

$$\delta F = (F - \bar{F}) = \text{desvio da função } F$$

e δx e δy são:

$$\delta x = (x - \bar{x}) = \text{desvio da variável } x$$

$$\delta y = (y - \bar{y}) = \text{desvio da variável } y$$

A expressão (VI.5), entretanto, serve apenas como primeira aproximação do erro, e é somente utilizada quando o experimenter deseja ter uma simples estimativa do erro da grandeza. Desejando-se obter o menor erro possível a temer da grandeza F , aplica-se o método dos mínimos quadrados nessa relação.

Elevando-se ao quadrado a expressão (VI.5) obtém-se:

$$(\delta F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 (\delta x)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (\delta y)^2 + 2 \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \delta x \delta y$$

O termo misto apresenta valor médio nulo uma vez que as variáveis x e y são independentes. Então:

$$\delta F = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \delta x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \delta y^2 \right]^{1/2}$$

ou

$$\sigma_F = \pm \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 \right]^{1/2} \quad (VI.6)$$

sendo que σ_x e σ_y são os erros médios das medidas efetuadas sobre as grandezas x e y , diretamente.

Assim, para uma função que depende de m variáveis independentes $F(x, y, z, \dots, \alpha_j, \dots)$ pode-se escrever genericamente:

$$\sigma_F = \pm \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha_j}\right)^2 \sigma_{\alpha_j}^2 \right]^{1/2} \quad (VI.7)$$

sendo que: