Pós-Graduação em Geofísica Espacial
Exame de Matemática para Ingresso

Nome do Candidato:	
Data:	
Duração máxima:	90 minutos

Todas as folhas utilizadas para resolver as questões deverão ser identificadas

Leia atentamente as instruções

Neste conjunto de problemas apresentados adota-se a notação a seguir:

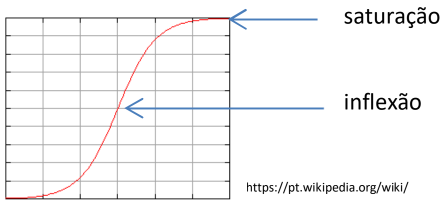
$\mathbf{A}$ vetor ou matriz "**A**";
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ produto escalar entre os vetores "**A**" e "**B**";
$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ produto vetorial entre os vetores "**A**" e "**B**";
$\mathbf{x} \triangleq (x,y,z)$ vetor posição no espaço real euclidiano $\mathbb{R}^3$;
$|x|$ módulo da variável real x;
$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$ norma do vetor posição no espaço real euclidiano $\mathbb{R}^3$;
i unidade imaginária e satisfaz a equação $i\,i = i^2 = -1$;
$\overline{z}$ complexo conjugado da variável complexa $(z \in \mathbb{C})$;
$|z| = \sqrt{z\,\overline{z}}$ módulo da variável complexa $(z \in \mathbb{C})$.

Além disto, ressalta-se que todas as regras para derivadas, derivadas parciais, gradiente, divergente, rotacional, operações matriciais, operações complexas, funções elementares e transcendentes, entre outras, seguem as notações usuais de representação matemática.

Questão 1. [Funções, Curvas] (25 pontos)

O matemático Pierre Verhurst propôs em 1837 um modelo de crescimento populacional que supõe um crescimento até um limite máximo (ponto de inflexão), a partir do qual tende a saturar. O modelo proposto atende, basicamente, a uma condição em que a taxa de crescimento efetiva de uma população varia ao longo do tempo. A representação matemática deste modelo, por intermédio da denominada equação logística (curva sigmoide, vide gráfico abaixo), é da forma:

$$y(t) = \frac{C}{(1 + a\,e^{-k\,t})}, \quad \text{sendo } a, C, k \text{ parâmetros do modelo.}$$



(a) Sejam os valores limites $y_0 = \lim_{t \to 0} y(t)$ e $y_\infty = \lim_{t \to \infty} y(t)$. Determine, em função destes valores limites, os parâmetros a e C.

(b) Conhecendo-se o ponto de inflexão, $t = t_*$, determine o parâmetro *k*.

(c) Mostre a simetria da curva sigmóide, ou seja, no ponto de inflexão, $y(t_*) = y_* = C/2$.

Questão 2. [Álgebra Vetorial] (15 pontos)

Considere três vetores do espaço Euclidiano definidos por intermédio dos vetores unitários da base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$ sendo $\alpha \in \mathbb{R}.$ Determine o valor de α na condição em que os vetores dados sejam coplanares (pertencem ao mesmo plano). [Sugestão: Use a regra do determinante nulo.]

Questão 3. [Álgebra Complexa] (20 pontos)

Seja α um número real e $z \in \mathbb{C}, \ z \neq 0,$ e seja a expressão

$$\left| z + \frac{1}{z} \right| = \alpha.$$

(a) Fazendo uso das propriedades da conjugação complexa, mostre que os valores de $|z|^2$ podem ser obtidos por intermédio da resolução da seguinte equação:

$$\left(|z|^2\right)^2 - |z|^2 (\alpha^2 + 2) + 1 = -(z + \overline{z})^2 .$$

(b) Discutir a condição que deve ser satisfeita por z, em termos de suas partes Real e Imaginária, para a existência de valores de $|z|^2$.

Questão 4. [Pontos Críticos-Otimização] (20 pontos)

Um fabricante de enlatados tem como objetivo minimizar o custo do metal utilizado para fabricar recipientes cilíndricos (dimensões: raio r e altura h), que comporte uma massa definida de um líquido homogêneo. Em função da massa (m) e da densidade volumétrica (ρ) deste líquido, determine quais seriam as dimensões ótimas para estes recipientes.
[Sugestão: Desenvolva o problema equacionando a área total do cilindro.]

Questão 5. [Álgebra Matricial] (20 pontos)

Dada as matrizes,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta \end{bmatrix},$$

sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}.$ Em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ discutir, em termos de α e β, as soluções (única, indeterminada, impossível) do sistema linear,

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b} .$$