Pós-Graduação em Geofísica Espacial
Exame de Matemática para Ingresso

Nome do Candidato:	
Data:	
Duração máxima:	90 minutos

Todas as folhas utilizadas para resolver as questões deverão ser identificadas

Leia atentamente as instruções

Neste conjunto de problemas apresentados adota-se a notação a seguir:

$\mathbf{A}$ vetor ou matriz "**A**";
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ produto escalar entre os vetores "**A**" e "**B**";
$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ produto vetorial entre os vetores "**A**" e "**B**";
$\mathbf{x}\equiv(x,y,z)$ vetor posição no espaço real euclidiano $\mathbb{R}^3$;
$|x|$ módulo da variável real *x*;
$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}$ norma do vetor posição no espaço real euclidiano $\mathbb{R}^3$;
i unidade imaginária e satisfaz a equação $i\,i=i^2=-1$;
$\bar{z}$ complexo conjugado da variável complexa z $(z\in\mathbb{C})$, $\bar{z}=\mathrm{Re}(z)-i\,\mathrm{Im}(z)$;
$|z|=\sqrt{z\,\bar{z}}$ módulo da variável complexa $(z\in\mathbb{C})$.

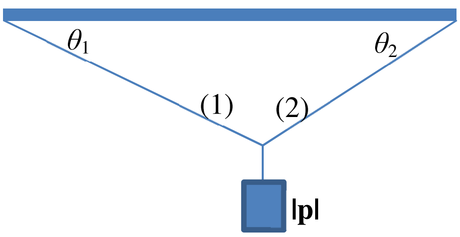
Além disto, ressalta-se que todas as regras para derivadas, derivadas parciais, gradiente, divergente, rotacional, operações matriciais, operações complexas, funções elementares e transcendentes, entre outras, seguem as notações usuais de representação matemática.

Questão 1. [Vetores] (25 pontos)
Uma partícula cinemática em movimento é descrita pelo seguinte vetor posição (hélice):

$$\mathbf{r}(t)=(a\cos\omega t,\, b\sin\omega t,\, c\,t).$$

Determine a condição, em termos dos valores de (a,b,c), de modo que o vetor aceleração do movimento seja normal ao vetor velocidade.

Questão 2. [Álgebra Vetorial] (25 pontos)
O material de peso $|\mathbf{p}|$ (magnitude da força peso) é mantido suspenso por dois fios ideais (1) e (2), em equilíbrio estático, conforme mostra o desenho abaixo.



De modo a manter o equilíbrio estático, mostre que a relação entre os ângulos é dada por $\cos\theta_2=\varepsilon\cos\theta_1$, sendo ε a razão entre as trações dos fios (1) e (2).

Questão 3. [Álgebra Complexa] (25 pontos)

Seja $z \in \mathbb{C}$ (número complexo), definido por:

$$z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \alpha \in (0, \pi).$$

Mostre que a sua representação polar é $z = 2\cos(\tfrac{1}{2}\alpha)\mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\alpha}$.

[Use: as equações $2\cos^2(\tfrac{1}{2}\alpha) = 1 + \cos\alpha$; $2\sin^2(\tfrac{1}{2}\alpha) = 1 - \cos\alpha$.]

Questão 4. [Pontos Críticos-Otimização] (25 pontos)

Considere uma função positiva (> 0) de duas variáveis x e y,

$$C(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2,$$

sujeitas à seguinte restrição, $x + y = A$ (= constante). Identificar que a função assim definida é um problema típico de funções de Custo ou de Perda, desde que $(\alpha + \beta) > 0$ e $\beta\alpha > 0$. Um problema de otimização procura minimizar uma função de Perda.