



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-13269-MAN/45 - versão 1

FUNDOS ESTOCÁSTICOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS PRIMORDIAIS

Márcio Eduardo da Silva Alves

Tese de Doutorado em Astrofísica,
orientada pelos Drs. Oswaldo Duarte Miranda e José Carlos Neves de Araujo
e financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

INPE
São José dos Campos
2009

00.000.00(000.0)

Márcio Eduardo da Silva Alves. M. E. S. Alves.
Fundos Estocásticos de Ondas Gravitacionais
Primordiais/ Márcio Eduardo da Silva Alves. M. E. S. Alves.
– São José dos Campos: INPE, 2009.
118p.; (INPE-13269-MAN/45 - versão 1)

1. Cosmologia. 2. Ondas Gravitacionais Primordiais. 3.
Teorias Alternativas de Gravitação. 4. Polarização de Ondas
Gravitacionais. 5. Espectros de Ondas Gravitacionais.

1. Cosmology. 2. Primordial Gravitational
Waves. 3. Alternative theories of Gravity. 4. Polarizations of
Gravitational Waves. 5. Gravitational Waves Spectra

**Aprovada
pela Banca Examinadora em
cumprimento a requisito exigido
para a obtenção do Título de
Doutor em Astrofísica. .**

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza

Presidente

Dr. Oswaldo Duarte Miranda

Orientador

Dr. José Carlos Neves de Araujo

Orientador

Dr. José Ademir Sales de Lima

Membro da Banca

Dr. Jailson Souza de Alcaniz

Membro da Banca

Dr. Massimo Tinto

Membro da Banca

“...a alma dela, levada aos ares, voava na direção de uma bela estrela dupla...Então uma voz surgiu do abismo, com palavras que ela não entendeu: – É a tua pena, alma curiosa de perfeição; a tua pena é oscilar por toda a eternidade entre dous astros incompletos, ao som desta velha sonata do absoluto: lá, lá, lá...”

MACHADO DE ASSIS
em “Várias Histórias”, 1995

A meus pais Maria e Benedito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus orientadores, os professores Oswaldo e José Carlos, por me chamarem a atenção para esse tema de pesquisa. Além de serem sempre meus amigos, agradeço por todo o apoio e força para chegar até aqui e pela disponibilidade com a qual sempre receberam minhas questões. Muito do que sou hoje profissionalmente devo à confiança que depositaram em mim desde o início, a qual foi essencial para o exercício de minha liberdade de pensamento.

Gostaria de deixar aqui meus agradecimentos a minha querida mãe Maria e a meu querido pai Benedito por todo o apoio e torcida, mas principalmente pela forma de amar que com eles aprendi. Se hoje olho o mundo com simplicidade e carinho devo a vocês. Agradeço ainda a meus irmãos Bruno, Letícia e Vanessa, pelo amor e alegria com os quais sempre me receberam. Eles sempre foram uma fonte de luz para a restauração de minhas forças durante essa caminhada.

Como sou grato a minha amada namorada e futura esposa Lívia, por caminhar sempre a meu lado, ter sempre um olhar atento e carinhoso, por sempre procurar meios de ajudar em meu trabalho e pelas incontáveis discussões acerca da realidade física que procuramos representar. Seu sorriso levantou-me do desânimo e segurou minhas lágrimas, sua paciência deixou-me seguro e sua presença insubstituível contribuiu para me manter forte até o fim.

Registro aqui minha gratidão a meu grande e nobre amigo Cláudio. Não obstante sua vivacidade contagiante, sempre nos motivou com suas questões instigantes e pensamentos únicos. Além disso, seu auxílio nas soluções numéricas foi de extrema importância para a adequada realização do presente trabalho. De igual calibre, meu amigo Dennis sempre me motivou com ricas discussões e dicas esclarecedoras, principalmente no que tange ao esquema de decomposição. Foi ótimo sempre poder contar com sua presença sempre brilhante em nosso meio. Muito obrigado meu caro. Agradeço ainda a meu amigo César Costa e sua esposa Cris, pela amizade sempre presente e pelas inúmeras vezes que os dois gentilmente sempre me ajudaram.

Não poderia deixar de agradecer a meu caro amigo Eduardo que sempre trouxe interessantes questões a serem discutidas em nosso grupo. Além de cultivar, com sua amizade, juntamente com sua esposa Regla, um ambiente sempre agradável neste instituto.

Pelas várias discussões e esclarecimentos agradeço ao Fábio Carvalho que despertou em mim o interesse por modificações da gravidade na forma apresentada pelas teorias $f(R)$. Muito do que aprendi sobre o tema devo a esse amigo. Agradeço ainda a meu amigo Antônio Faria que, com suas características únicas, sempre esteve disposto a discutir e

auxiliar em minhas questões abrindo minha mente para uma nova forma de encarar certos problemas.

Agradeço ao German pelas várias vezes que me auxiliou com minhas dúvidas de programação. A Todos os meus amigos da Divisão de Astrofísica que ajudaram a fazer deste um lugar melhor não somente para trabalhar, mas também para compartilhar os momentos importantes do dia a dia. Sou muito grato à Valdirene e a Valéria, pela torcida, atenção e carinho com o qual sempre trataram minhas solicitações e necessidades.

Sou muito grato aos grandes amigos que fiz no ITA, particularmente ao Jaziel, à Kenya, ao Ronaldo e a Fernanda que, não só fizeram parte da minha caminhada e estiveram na torcida, como também foram peças fundamentais no grande quebra-cabeça da vida.

Agradeço ao professor Márcio Maia por ceder-me gentilmente uma cópia de sua tese de doutoramento, a qual muito me auxiliou em minha caminhada.

Por todas as discussões e esclarecimentos ligados à detecção de ondas gravitacionais, gostaria de deixar meu agradecimento ao professor Massimo Tinto. Foi formidável partilhar de seu entusiasmo ímpar com a ciência e a busca de novas fronteiras para a compreensão do Universo.

Gostaria de agradecer ainda a todos os membros da banca, por terem aceitado tão gentilmente o convite de participar de um momento tão especial para mim.

Agradeço à FAPESP, a agência que financiou este projeto, sem seu apoio a realização do presente trabalho seria simplesmente inviabilizada.

Finalmente, deixo aqui uma centelha de palavras do que é indizível. Agradeço imensamente ao Bom Deus por guiar meus passos e indicar meus caminhos. Sua presença misteriosa e transcendente me norteou em todos os momentos, mesmo quando eu próprio não sabia por onde caminhar. Sem eu nem mesmo merecer, Ele me surpreendeu e atualizou Sua obra na pequenez de minha pessoa. A Ele, meu Mestre por excelência, a Ele “que criou as Plêiades e o Órion”, meu eterno muito obrigado.

RESUMO

A detecção de ondas gravitacionais geradas no Universo jovem trará informações únicas da física nas escalas de energia extremamente elevadas que foram dominantes alguns tempos de Planck após o Big Bang. O espectro de potência de tais ondas carregam não somente a “memória” do mecanismo responsável pela inflação, mas também dos subsequentes estágios de evolução do Universo. O espectro primordial também pode permitir decidir entre as várias teorias de gravidade? Essa é uma das principais questões do presente trabalho. No contexto de uma dada teoria alternativa de gravitação, ondas gravitacionais podem exibir até seis estados de polarização, ao contrário da Relatividade Geral que apresenta apenas dois. Então a detecção direta de ondas gravitacionais, e a correspondente determinação do número de polarizações independentes, são ferramentas poderosas para testar a Relatividade Geral e teorias alternativas. No presente trabalho utilizamos o formalismo Newman-Penrose para caracterizar ondas gravitacionais no contexto de algumas teorias de gravitação, sendo elas a Relatividade Geral, teorias escalares-tensoriais, gravidade $f(R)$ e uma teoria bimétrica com grávitons massivos. Uma vez que o número de estados de polarização é determinado de forma inequívoca, descrevemos um esquema de decomposição particularmente adequado para tratar da evolução dos modos de ondas gravitacionais cosmológicas para qualquer teoria métrica. Aplicamos a decomposição para uma teoria escalar-tensorial geral, para a qual as ondas gravitacionais apresentam quatro estados de polarização, e para a teoria bimétrica que apresenta seis polarizações. Das equações resultantes emergem características ausentes na teoria de Einstein. Os modos de ondas gravitacionais são agora “acoplados” às perturbações vetoriais e escalares do fluido perfeito, no sentido que as perturbações de densidade e velocidade entram como fonte para as equações evolutivas das ondas. Finalmente, avaliamos o espectro para os modos livres de ondas gravitacionais para a Relatividade Geral no contexto do modelo Λ CDM, e para a teoria bimétrica para a qual grávitons massivos mimetizam os efeitos da energia escura. Uma comparação entre os dois espectros mostra que a possibilidade de distinguir entre os dois modelos através de observações com detectores espaciais de ondas gravitacionais como o LISA e o BBO dependem do valor do índice espectral escalar. Se o valor for aquele dado pelo satélite WMAP, então não será possível detectar o sinal por esses experimentos, mas experimentos com sensibilidade mais elevada serão necessários. A futura determinação do espectro primordial para os modos acoplados é de suma importância para compreender as implicações de teorias alternativas na física das perturbações cosmológicas.

THE STOCHASTIC BACKGROUND OF PRIMORDIAL GRAVITATIONAL WAVES

ABSTRACT

The detection of gravitational waves generated in the very early Universe will provide us with a unique information on the physics at extremely high energy scales which took place at several Planck times after the Big Bang. The power spectrum of such waves carries the “memory” of the mechanism which drove the inflation, and also of the subsequent stages of evolution of the Universe. Could the primordial spectrum allow us to decide between different alternative theories of gravity? This is one of the main goals of the present work. In the context of a generic theory of gravity, gravitational waves can exhibit up to six polarization states, while General Relativity theory presents only two. In this way the direct detection of gravitational waves, and the correspondent determination of the number of independent polarizations, are powerful tools to test General Relativity and also the alternative theories of gravity. In the present work we use the Newman-Penrose formalism to characterize gravitational waves for some theories, namely, General Relativity, scalar-tensors theories, $f(R)$ gravity and a bimetric theory with massive gravitons. Once the number of polarization states is determined in an unambiguous way, we describe a decomposition scheme particularly suitable for treating the evolution of cosmological gravitational wave modes for any theory. Then, we apply the decomposition scheme for a general scalar-tensor theory, for which gravitational waves present four polarization states, and for the bimetric theory which has six polarizations. The resulting equations bring us new features which do not appear in the Einstein’s theory. The gravitational wave modes are now coupled to the vector and scalar metric perturbations of the cosmological perfect fluid. Finally, we evaluate the spectra of the free modes of primordial gravitational waves for General Relativity in the context of the Λ CDM model, and for the bimetric theory in which massive gravitons mimic the dark energy effects. The comparison between the two spectra tells us that the possibility of distinguishing between the two models by observations with the future spatial gravitational wave detectors, such as LISA and BBO, depends on the value of the scalar spectral index. If the value is that quoted by the WMAP satellite then, it will not be possible to detect the signal in such experiments, and so experiments with higher sensitivity will be needed. Finally, we argue that the future determination of the primordial spectra from the coupled modes will be of great importance to the study cosmological perturbations in the context of alternative theories of gravity.

SUMÁRIO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO	23
2	POLARIZAÇÕES DE ONDAS GRAVITACIONAIS EM TEORIAS MÉTRICAS DE GRAVITAÇÃO	33
2.1	Formalismo Newman-Penrose	33
2.2	Esquema de classificação de teorias métricas de gravitação	36
2.3	Classificação de Campos Eletromagnéticos	38
2.4	Relatividade Geral	41
2.5	Teorias escalares-tensoriais	41
2.6	Teoria bimétrica com grávitons massivos	44
2.7	Teorias $f(R)$	45
2.7.1	Formalismo métrico	46
2.7.2	A abordagem de Palatini	51
3	PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS EM TEORIAS ALTERNATIVAS DE GRAVITAÇÃO	53
3.1	Motivação e dificuldades com a decomposição mínima	53
3.2	A Equação de Palatini	55
3.3	Perturbações sobre uma geometria de fundo geral	56
3.4	Perturbações cosmológicas sem decomposição	59
3.5	Decomposição por simetria espacial	61
3.6	Modos de OGs cosmológicas em teorias escalares-tensoriais	66
3.7	Modos de OGs cosmológicas na teoria bimétrica com grávitons massivos	69
4	ESPECTROS DE ONDAS GRAVITACIONAIS PRIMORDIAIS	73
4.1	Equações fundamentais e o mecanismo de amplificação superadiabática	73
4.2	“Cosmologias” de fundo	76
4.3	Avaliação do espectro de OGs primordiais: análise analítica e numérica	81
4.4	Detecção de OGs primordiais	90

4.5	Espectro nas bandas de sensibilidade do LISA e do BBO	93
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	97
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103
A	EQUAÇÕES DE CAMPO LINEARIZADAS PARA A RELATIVIDADE GERAL E PARA A TEORIA DE VISSER	113

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Os seis modos de polarização de ondas gravitacionais permitidos em qualquer teoria métrica de gravitação	36
4.1 Evolução do potencial cosmológico.	77
4.2 Evolução do potencial cosmológico para o modelo Λ CDM e mCDM.	79
4.3 Método de solução para a evolução de OGs nos modelos Λ CDM e mCDM.	83
4.4 Comparação entre os espectros obtidos a partir do modelo Λ CDM e CDM.	85
4.5 Espectros de OGs primordiais para o modelo Λ CDM considerando alguns valores de β	86
4.6 Densidade de energia espectral $\Omega_{gw}(\nu)$ para o modelo Λ CDM.	86
4.7 Comparação entre os espectros obtidos a partir dos modelos Λ CDM e mCDM.	87
4.8 Comparação entre as densidades espectrais de energia para os modelos Λ CDM e mCDM.	87
4.9 Espectros de OGs primordiais obtidos no contexto do modelo mCDM.	88
4.10 Densidade de energia espectral $\Omega_{gw}(\nu)$ para o modelo mCDM.	88
4.11 Comparação entre diferentes limites para o fundo de OGs primordiais, curvas de sensibilidade e as densidades de energia espectrais dos fundos que estamos calculando.	91
4.12 Comparação entre a curva de sensibilidade do detector LISA e os espectros calculados para o modelo Λ CDM.	93
4.13 Comparação entre a curva de sensibilidade do detector LISA e os espectros calculados para o modelo mCDM.	94
4.14 Os modelos Λ CDM e mCDM seriam possivelmente distinguíveis na parte mais sensível da curva do LISA.	94
4.15 Comparação entre as curvas de sensibilidade do detector BBO e os espectros calculados para o modelo Λ CDM	95
4.16 Comparação entre as curvas de sensibilidade do detector BBO e os espectros calculados para o modelo mCDM.	96
4.17 Os modelos Λ CDM e mCDM poderiam, em princípio, ser distinguíveis pelas observações com o BBO.	96

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Amplitudes NP para diversas teorias	52
3.1 Equações de OGs cosmológicas para os modos + e × das teorias alternativas de gravitação que discutimos no presente trabalho.	72
4.1 Densidade de energia integrada para os modelos Λ CDM e mCDM.	90

LISTA DE SÍMBOLOS

$(-, +, +, +)$	– assinatura da métrica
índices gregos μ, ν, \dots	– correm sobre as quatro coordenadas espaço-temporais
índices latinos i, j, \dots	– indicam as coordenadas espaciais
índices $\mu = t, x, y, z$ ou $0, 1, 2, 3$	– indicam individualmente cada uma das coordenadas espaço-temporais
$_{,\nu}$ ou ∂_ν	– derivada ordinária
$_{;\nu}$ ou ∇_ν	– derivada covariante
$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\sigma} - \Gamma^\sigma_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}$	– convenção do tensor de Riemann
$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$	– tensor de Ricci
$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$	– escalar de curvatura
$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2$	– tensor de Einstein
$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$	– equações de Einstein
$c = \hbar = 1$	– unidades utilizadas a menos onde for indicado o contrário

1 INTRODUÇÃO

A física que se desenvolveu a partir da primeira metade do século XX transcendeu (e ainda transcende) a aplicabilidade científica decorrente das novas descobertas, colocando o homem, antes mero espectador da variedade de fenômenos que o cerca, na posição de partícipe inseparável da realidade mensurável da natureza.

Essa visão foi apresentada e amadurecida como consequência dos novos desafios impostos, por um lado, pela “física dos *quanta*”, a Mecânica Quântica e, por outro, pelas teorias da Relatividade Restrita e Generalizada de Albert Einstein.

No contexto da Mecânica Quântica, a quebra de paradigmas ocorre com a união de observador e observado, demonstrando que as quantidades medidas são, de certa forma, inseparáveis daquele que realiza o experimento. Essa relação estabelece, por fim, um limite para o que se deseja conhecer. Tal limite não pode ser transposto de nenhuma forma mas nos mostra, outrossim, uma característica intrínseca da natureza cognoscível.

De forma distinta, porém não menos contundente, a teoria da Relatividade Restrita, ao destronar o espaço e o tempo absolutos Newtonianos, mostra como observadores que apresentam movimento relativo podem não concordar com medidas realizadas a cerca de um mesmo fenômeno. Essa visão, aparentemente paradoxal é, na realidade, consequência inevitável do pilar fundamental da teoria da Relatividade: existe uma velocidade máxima finita para a transmissão de informação que é a velocidade da luz no vácuo.

É essa descoberta crucial que permite derivar relações entre as coordenadas de observadores inerciais em movimento relativo. Mais ainda, espaço e tempo unem-se para formar uma única entidade: o espaço-tempo. Possibilitando o estudo de fenômenos antes nunca imaginados como, por exemplo, a contração espacial e a dilatação temporal.

Foi somente dez anos após a publicação da Relatividade Restrita, que Einstein apresentou sua belíssima extensão dos conceitos de simultaneidade e movimento relativo para observadores ditos “não inerciais”. Nasce, então, a teoria da Relatividade Geral (doravante denominada como RG) exibindo a concepção Einsteiniana de gravidade numa linguagem totalmente geométrica.

Desde o início, um dos fatos que mais impressionava Einstein era a igualdade entre a massa inercial e a massa gravitacional. Essa constatação levaria a um dos cerne da RG: o princípio da equivalência. O qual pode ser enunciado da seguinte forma: “em cada ponto do espaço-tempo na presença de um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um ‘sistema de coordenadas localmente inercial’ tal que, no interior de uma região

suficientemente pequena no entorno do ponto em questão, as leis da natureza tomam a mesma forma daquelas num sistema de coordenadas Cartesiano na ausência da gravidade” (WEINBERG, 1972).

Assim, mais uma vez, o observador exerce um papel central. Mas a linguagem utilizada por Einstein em sua teoria permite demonstrar que uma equação física será verdadeira num campo gravitacional se ela for verdadeira na ausência da gravidade. A esse princípio damos o nome de covariância geral.

Foi desse novo olhar sobre o mundo, particularmente expressos pelas teorias da RG e da Mecânica Quântica, que nasceu a cosmologia moderna.

No entanto, a RG não pode prever a evolução do Universo a menos que observações concernentes à dinâmica e à cinemática cósmicas sejam levadas a cabo. Como demonstração dessa idéia, as observações de Edwin Hubble em 1929 indicaram que outras galáxias estavam se afastando da nossa, inviabilizando o modelo de Universo estático anteriormente proposto pelo próprio Einstein, e corroborando modelos de Universo em expansão como o de Alexander Friedmann e do padre Georges Lemaître.

Todavia, a intuição nem sempre é traiçoeira, e, pelo contrário, pode indicar como a natureza se comporta de fato. Foi dessa forma que, em 1965, Robert W. Wilson e Arno Penzias descobriram acidentalmente a Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (RCFM) prevista por Gamow e colaboradores no final da década de 1940, como consequência do modelo padrão.

Mais recentemente, em 1992, um grupo de cientistas americanos anunciou que haviam sido encontradas as sementes primordiais das estruturas. As anisotropias da RCFM haviam sido identificadas nos dados do satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) colocado em órbita pela agência espacial americana (NASA) em 1989. Verificou também que essas anisotropias correspondem a desvios na temperatura da ordem de 10^{-5} , favorecendo a hipótese de isotropia e homogeneidade do Universo em grande escala (princípio cosmológico).

Embora a estrutura do Universo como um todo seja homogênea e isotrópica, ele é obviamente inhomogêneo e anisotrópico nas escalas características de galáxias e aglomerados de galáxias. Acredita-se que essas inhomogeneidades foram formadas como o resultado do crescimento de pequenas perturbações primordiais que teriam tido amplitudes específicas e um espectro característico. Há argumentos teóricos e observacionais que suportam o, assim chamado, espectro “plano” de Zeldovich (ZELDOVICH, 1972) para as flutuações iniciais.

Dessa forma, as características dinâmicas da distribuição média da matéria, o crescimento e a formação de pequenas inomogeneidades, a abundância de vários elementos químicos, assim como outras características do Universo atual são explicadas com sucesso pela teoria clássica “padrão”.

No entanto, a cosmologia clássica não fornece explicações satisfatórias para as condições iniciais. Elas são simplesmente selecionadas de tal forma que as predições teóricas sejam compatíveis com as observações atuais. Por exemplo, o fato observacional da uniformidade angular da temperatura da RCFM sobre o céu não tem uma explicação bem fundamentada a não ser que a consideremos como mera consequência do princípio cosmológico.

Uma explicação mais natural para um grande conjunto de fatos observacionais pode ser fornecida pela hipótese inflacionária (GUTH, 1981; LINDE, 1984).

Se por um lado, considerando o modelo padrão, regiões com temperatura aproximadamente igual nunca estiveram causalmente conectadas. Por outro, na inflação, o volume espacial atualmente confinado no raio de Hubble $\ell_H = c/H \approx 10^{28}\text{cm}$ teria se desenvolvido a partir de uma pequena região a qual esteve causalmente conectada no passado distante. Assim, se a inflação realmente ocorreu, a atual isotropia e homogeneidade, assim como a planura do Universo podem ser explicados naturalmente.

Curiosamente, o mesmo mecanismo inflacionário que responde a essas questões, explica também o crescimento das perturbações primordiais, fornecendo o espectro inicial necessário ao modelo padrão, ou seja, um espectro aproximadamente plano.

Neste ponto, cabe ressaltar que o mesmo formalismo, derivado das equações de campo de Einstein, que prevê a dinâmica das perturbações de densidade do fluido cosmológico, prevê também a existência de um campo propagante de spin 2: as ondas gravitacionais (OGs).

As OGs de origem cosmológica são uma consequência direta da RG e da Mecânica Quântica. Para compreender como os aspectos da teoria quântica são relevantes nesse contexto, consideremos uma analogia com o caso do oscilador harmônico com frequência variável apresentada, por exemplo, por Grishchuk (2000).

A variação temporal da amplitude q das oscilações de um pêndulo na presença de um campo gravitacional, é descrita por:

$$\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0, \tag{1.1}$$

onde $\omega(t) = \sqrt{g/L(t)}$, g é a aceleração da gravidade local e $L(t)$ é o comprimento do pêndulo. Assim, a frequência das oscilações pode ser alterada parametricamente através da variação temporal de L por um agente externo.

No regime adiabático de variações lentas, a energia do oscilador E e sua frequência ω mudam vagarosamente, mas E/ω permanece constante. Assim, a quantidade $E/\hbar\omega$ é chamada de “invariante adiabático”. Para que ocorra a criação de novas “partículas - excitações”, o tempo característico da variação deve ser comparável com o período do oscilador e o comportamento adiabático deve ser violado.

Um oscilador clássico deve ter uma amplitude inicial não-nula para que o mecanismo de amplificação funcione. Pois se a amplitude inicial for zero, a amplitude final também será. Imagine um pêndulo em repouso, seja qual for a variação no comprimento ela não fará o pêndulo oscilar. Em contraste, um oscilador quântico não precisa estar excitado desde o início, pois sabemos que o estado fundamental do oscilador quântico possui energia não-nula igual a $\hbar\omega/2$, essa é uma consequência do princípio da incerteza de Heisenberg. Portanto, a amplificação paramétrica pode ocorrer e a intervenção externa é capaz de gerar quanta de energia a partir do “vácuo quântico”.

Outro aspecto que podemos compreender com esse exemplo simples, é que a intervenção paramétrica pode ocorrer através da variação do campo gravitacional externo. Agora, a dependência temporal da frequência é ditada pela variação de $g = g(t)$, assim $\omega(t) = \sqrt{g(t)/L}$. Como veremos, esse é justamente o caso das OGs primordiais. O campo externo, no caso das OGs, corresponde à variação do fator de escala, denotado por $a(t)$, que dita a expansão do Universo.

Assim, para haver geração de quanta de energia nesse caso, basta considerarmos que as ondas estão inicialmente em seu estado fundamental. Então, o papel da inflação é variar o fator de escala rapidamente num curto intervalo de tempo, gerando quanta, e portanto inibindo que as ondas decaiam adiabaticamente com a expansão do Universo (ver, e.g., [Grishchuk \(2007\)](#)). Esse é, essencialmente, o processo descrito formalmente como “amplificação superadiabática (paramétrica)” ([GRISHCHUK, 1974](#)).

O espectro presente terá, portanto, uma amplitude significativa dependendo do modelo inflacionário e trará características intrínsecas relativas à história evolutiva do Universo mapeada pela evolução de $a(t)$.

Por conseguinte, não é somente a inflação que afeta o espectro primordial observado no tempo presente, mas também processos astrofísicos subsequentes. Dentre esses processos, encontram-se, por exemplo, transições de fase quark-hadron, aniquilação de pares elétron-

pósitron, espalhamento livre de neutrinos e até mesmo processos mais recentes como a atual aceleração do Universo (WANG et al., 2008; MIAO; ZHANG, 2007).

Com avanços constantes, seja no domínio teórico ou experimental, poderíamos dizer, assim, que a cosmologia encontra-se em sua “época de ouro”. No entanto, os cosmólogos encontram-se atualmente imersos num grande enigma que exhibe duas facetas: a matéria escura e a energia escura.

O conhecimento do conteúdo energético atual do Universo é consequência da convergência de resultados observacionais independentes que levam à conclusão de que cerca de 4% da energia corresponde a matéria bariônica, legando quase a totalidade da densidade de energia a componentes desconhecidas, 23% de matéria escura e 73% de energia escura (KOMATSU et al., 2009).

Os resultados observacionais mais importantes que corroboram esse cenário são: medidas da distância de luminosidade como função do redshift de supernovas distantes (PERLMUTTER et al., 1999; RIESS et al., 1998; RIESS et al., 2007), medidas das anisotropias na RCFM pelo satélite Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP)(KOMATSU et al., 2009) e as medidas das estruturas em larga escala inferidas de levantamentos de redshifts de galáxias realizados, por exemplo, pelo Sloan Digital Sky Survey (SDSS) (TEGMARK et al., 2004) e 2dF Galaxy Redshift Survey (2dFGRS) (COLE et al., 2005).

Nesse contexto, a energia escura é a responsável pela recente fase de aceleração da expansão do Universo, o que a torna um dos maiores desafios da cosmologia atual. De fato, a natureza física da energia escura é uma questão particularmente complicada no âmbito do modelo Λ CDM (constante cosmológica mais matéria escura fria) devido a suas propriedades não usuais, comportando-se como um fluido ideal com pressão negativa distribuído pelo espaço.

Poderíamos questionar, todavia, se a aceleração da expansão cósmica não é um indicativo de que a teoria da gravidade de Einstein é uma teoria incompleta, ou seja, uma teoria alternativa de gravidade poderia explicar a aceleração tardia da expansão sem recorrer à energia escura?

De fato, teorias alternativas de gravitação têm sido propostas desde o surgimento da RG, uma vez que as características físicas da gravidade diferenciam-se significativamente da lei Newtoniana para campos mais intensos, para os quais torna-se mais difícil obter medidas. No entanto, para campos fracos, correções pós-Newtonianas podem levar à distinção entre as teorias pelo experimento ou, pelo menos, pode impor limites em seus parâmetros (para uma revisão de testes em teorias alternativas ver (WILL, 1993; WILL, 2008)).

Com o surgimento das medidas indicando a expansão acelerada, o interesse pelas teorias alternativas ganhou, portanto, um novo sentido. Uma das classes de teorias alternativas mais estudadas recentemente é a, assim chamada, gravidade $f(R)$, cuja idéia básica é adicionar termos que sejam potências do escalar de Ricci R à Lagrangiana de Einstein-Hilbert (CARROLL et al., 2004; NOJIRI; ODINTSOV, 2004; SANTOS et al., 2008, entre outros).

Outra classe de teorias de grande interesse, são as teorias escalares-tensoriais. Elas foram propostas inicialmente em sua forma mais simples por Brans e Dicke (BRANS; DICKE, 1961) no intuito de compatibilizar a gravidade com o princípio de Mach. Nessa abordagem, um campo escalar auxiliar entra nas equações de campo e a “constante” Newtoniana pode ser interpretada agora como o resultado da ação desse novo campo do qual é uma função explícita.

Por outro lado, uma das formas mais intuitivas de se analisar correções de largas escalas na teoria de gravitação, assim como no eletromagnetismo, é parametrizar o alcance da interação através de um comprimento característico, o comprimento de onda Compton. Do ponto de vista Newtoniano, isso significa introduzir uma modificação no potencial $\phi(r) \propto 1/r$ na forma:

$$\phi(r) \propto \frac{\exp(-r/\lambda_g)}{r}, \quad (1.2)$$

onde λ_g é o comprimento de onda Compton que, no contexto da física de partículas, estaria associado à massa do bóson responsável pela interação gravitacional: o gráviton.

Sabendo que o comprimento de onda Compton relaciona-se à massa do gráviton m_g na forma: $\lambda_g = \hbar/m_g c$ podemos estabelecer limites observacionais para desvios da lei do inverso do quadrado através de limites para m_g . Uma das restrições mais robustas para esse parâmetro provém de observações do movimento planetário no sistema solar. Variações na terceira lei de Kepler quando comparadas as órbitas da Terra e de Marte levam a $m_g < 7,68 \times 10^{-55}g$ (TALMADGE et al., 1988). Outro limite para m_g foi obtido através da análise do movimento das galáxias em aglomerados ligados que leva a $m_g < 2 \times 10^{-62}g$ (GOLDHABER; NIETO, 1974). Embora esse segundo limite seja algumas ordens de magnitude mais restritivo, ele é em geral considerado menos robusto devido à incertezas a respeito do conteúdo do Universo em grandes escalas.

A inserção de um termo de massa nas equações de campo da RG foi realizada pela primeira vez por M. Fierz e W. Pauli em 1939 (FIERZ; PAULI, 1939). No entanto, a consideração de um termo do tipo Fierz-Pauli (FP) na Lagrangiana do campo gravitacional produz diversos problemas na teoria. Além de gerar instabilidades na geometria de fundo (GABADADZE; GRUZINOV, 2005), não recuperamos as previsões da RG quando realizamos

o limite $m_g \rightarrow 0$, esse problema é conhecido como descontinuidade van Dam-Veltman-Zakharov ([van DAM](#); [VELTMAN, 1970](#)).

Contudo, não há nenhum motivo para preferir um termo do tipo FP a qualquer outro termo de massa. Embora eles ainda possam apresentar problemas formais, existe um particular termo não-FP que pode ser escolhido de tal forma à teoria não ser descontínua no limite $m_g \rightarrow 0$. Foi utilizando esse termo que em 2002 tivemos o primeiro limite para a massa do gráviton que não era baseado em campos estáticos ([FINN](#); [SUTTON, 2002](#)). O método empregado por Finn e Sutton foi calcular qual seria o decaimento no período orbital dos pulsares binários PSR B1913+16 (o pulsar binário de Hulse-Taylor) e PSR B1534+12 e comparar com os parâmetros físicos medidos. É bem sabido que as medidas do pulsar binário de Hulse-Taylor possuem um acordo magnífico com as previsões da RG no que diz respeito a emissão de radiação gravitacional ([TAYLOR, 1993](#); [WEISBERG](#); [TAYLOR, 1993](#)) e que, conseqüentemente, serviram de prova indireta da existência das OGs. O limite encontrado por Finn e Sutton foi de $m_g < 1,4 \times 10^{-52}g$, cerca de duas ordens de grandeza menos restritivo que o limite imposto pelo movimento planetário no sistema solar. O resultado acima indica que um termo massivo pode ser acrescentado nas equações de campo fraco da RG sem contradição com os dados observacionais desde que m_g respeite os limites impostos.

Se o gráviton de fato possuir massa, efeitos interessantes surgirão, como, por exemplo, a velocidade de propagação das ondas gravitacionais seria dependente da frequência $v_{og}(\omega) = c\sqrt{1 - (mc/\omega)^2}$, onde $m = \lambda_g^{-1}$, ou seja, $v_{og} < c$. Assim, sinais gravitacionais e eletromagnéticos emitidos por um mesmo sistema apresentariam uma diferença de fase para um observador distante. Portanto, quando da detecção direta de OGs poderíamos, dessa forma, mensurar essa diferença para sistemas estelares IBWD (Interacting Binary White Dwarf), por exemplo, e observações com o LISA (Laser Interferometer Space Antenna) desse tipo de fontes teriam precisão para estabelecer um limite tão restritivo quanto $m_g < 4 \times 10^{-58}g$ ([LARSON](#); [HISCOCK, 2000](#)).

Embora saibamos como adicionar um termo de massa nas equações de Einstein no regime linearizado devido à analogia com o que é usualmente feito em teoria de campos, não é evidente como devem ser as equações para campos arbitrariamente fortes, ou seja, como ficariam as equações de Einstein em sua forma covariante geral (no limite de campo fraco as equações são apenas invariantes perante transformações de Lorentz). Em geral, incluir a não linearidade da gravidade partindo das equações no regime linear de um campo massivo de spin 2 leva a problemas ([BOULWARE](#); [DESER, 1972](#)).

Uma das formas (mas não a única) de escrever as equações em sua completeza de maneira

consistente foi proposta por M. Visser ([VISSER, 1998](#)). Em sua abordagem, o termo massivo é extrapolado para uma Lagrangiana bimétrica, ou seja, que contém a métrica física usual da RG além de uma métrica não dinâmica adicional estabelecida *a priori*. Assim, o termo de massa obtido a partir da linearização das equações de campo massivas, tal qual consideradas por Visser, leva a um termo não-FP, o mesmo que foi utilizado posteriormente por Finn e Sutton em suas análises do pulsar binário.

Portanto, a teoria massiva proposta por Visser fornece uma alternativa interessante para o estudo da evolução e estrutura do Universo, um cenário no qual as escalas são comparáveis a λ_g . De fato, como ficou claro para nós, os efeitos cosmológicos de m_g são drásticos e podem nos ajudar a responder o problema da energia escura ([ALVES, 2006](#); [ALVES et al., 2009a](#); [ALVES et al., 2008](#); [ALVES et al., 2009](#)).

Havendo, no entanto, uma pletera de teorias correntemente viáveis para uma explicação alternativa à energia escura cabe-nos perguntar como distingui-las observacionalmente. Aqui retornamos à nossa discussão a respeito de OGs primordiais. Trarão essas ondas, produzidas nas primeiras frações de segundo de vida do Universo, assinaturas características da teoria de gravidade subjacente?

Para responder a essa pergunta é necessário, primeiramente, derivar as equações que regem a evolução das OGs primordiais para as diferentes teorias. A abordagem mais usual para o tratamento de perturbações cosmológicas consiste em decompô-las de acordo com sua simetria espacial, isto é, em componentes escalares, vetoriais e tensoriais, construindo quantidades invariantes de calibre no intuito de evitar ambiguidades provenientes de transformações infinitesimais de coordenadas. Nesse contexto, OGs são usualmente associadas às componentes tensoriais as quais são a parte transversa e sem traço (TT) das perturbações métricas.

Embora o mesmo procedimento possa ser aplicado para qualquer teoria alternativa de gravidade, há casos para os quais as OGs apresentam até seis estados de polarização ao invés das duas polarizações usuais que aparecem na RG. Em geral, na literatura, as polarizações adicionais no contexto dessas teorias não são escritas explicitamente como no caso das perturbações TT.

Para encontrar o número de estados independentes de polarização de uma teoria específica, lembremo-nos que as OGs numa teoria métrica de gravitação envolvem a métrica $g_{\mu\nu}$ e outros campos auxiliares que possam existir. Mas o tensor de Riemann resultante é o único campo mensurável. Esse fato nos permite classificar uma dada teoria, no regime linearizado, pelo número de componentes não nulas do tensor de Riemann que

geram acelerações relativas entre partículas teste. Isso pode ser feito por um método muito elegante o qual consiste na avaliação das quantidades Newman-Penrose ([NEWMAN; PENROSE, 1962](#); [EARDLEY et al., 1973](#)) da teoria. Essas quantidades são as componentes irreduzíveis do tensor de Riemann escritas numa base complexa.

Uma vez que o número de polarizações das OGs seja determinado de forma inequívoca pelo método acima, as observações podem estabelecer importantes limites de validade para as teorias.

Com isso em mente, o primeiro objetivo do presente trabalho é demonstrar como escrever explicitamente as equações para as perturbações cosmológicas em termos dos modos correspondentes ao número máximo de polarizações independentes que podem aparecer.

Aplicaremos o método de decomposição para duas teorias alternativas, sendo elas a teoria bimétrica com grávitons massivos de Visser e para uma teoria escalar-tensorial geral.

A teoria bimétrica está incluída no caso mais geral apresentando seis estados de polarização ([de PAULA et al., 2004](#)). No caso das teorias escalares-tensoriais, OGs possuem dois estados de polarização além do modos TT da RG, totalizando, portanto, quatro estados de polarização. Enquanto no caso particular da teoria de Brans-Dicke existem apenas três polarizações.

Ainda mais, é importante destacar que as teorias $f(R)$ são conformalmente equivalentes à teoria de Einstein adicionando-se um campo escalar ([CAPOZZIELLO; FRANCAVIGLIA, 2008](#)). Nesse sentido, o presente estudo pode ser estendido a teorias $f(R)$.

Analisamos também as polarizações de OGs para as teorias $f(R)$ usando o formalismo Newman-Penrose ([ALVES et al., 2009c](#)) e demonstramos que há quatro estados de polarização assim como no caso das teorias escalares-tensoriais. Porém, se o formalismo de Palatini for utilizado, a teoria apresenta apenas dois estados de polarização. Tal fato poderia, em princípio, permitir uma distinção entre o formalismo mais adequado através de futuras observações

Embora exemplifiquemos a decomposição para dois casos particulares, o formalismo é bastante geral e pode ser utilizado para o estudo de OGs cosmológicas em outras teorias de gravitação.

Num segundo momento, realizamos o cálculo do espectro do fundo de OGs primordiais para os modos que se desacoplam do fluido cósmico, os modos TT. Esses são os modos que trazem de fato informações diretas da época inflacionária sem interagir com o

fluido cósmico (isso não será verdade se uma componente de tensão anisotrópica estiver presente). Avaliamos o espectro de potência, assim como o espectro de energia das OGs para a RG e para a teoria bimétrica. Estudamos as principais características que diferenciam as OGs cosmológicas decorrentes das duas teorias.

Por fim, comparamos os sinais gravitacionais obtidos com as curvas de sensibilidade de detectores espaciais de ondas gravitacionais como o LISA e o BBO (*Big Bang Observer*). Esses detectores são particularmente interessantes para os fundos cosmológicos devido as altas sensibilidades que atingirão em diferentes bandas de frequências. Na comparação dos sinais obtidos com a curva de sensibilidade do LISA consideramos também o fundo de ondas gravitacionais proveniente dos sistemas binários da Galáxia. Tal sinal, limita a detecção para a parte baixa da banda de atuação desse detector. Essa limitação desaparece para o caso da curva de sensibilidade do BBO, uma vez que esse atuará numa faixa de frequências superior.

As análises realizadas no presente trabalho podem indicar um caminho interessante para a pesquisa de ondas gravitacionais cosmológicas no contexto de teorias alternativas de gravitação. Um caminho que consideramos indispensável para se estabelecer limites, validar ou descartar teorias e, acima de tudo, nos levar a uma compreensão mais profunda das reais implicações de teorias modificadas da gravidade, tão comuns nos dias que correm.

O presente texto está distribuído da seguinte forma: no Capítulo 2, após fazer uma revisão do formalismo Newman-Penrose e do esquema de classificação de teorias métricas de gravitação, aplicamos o formalismo para o caso da teoria da Relatividade Geral, teorias escalares-tensoriais, teoria bimétrica com grávitons massivos e para as teorias $f(R)$. Consideramos para essa última tanto o formalismo métrico quanto o formalismo de Palatini. No Capítulo 3 discutimos uma forma mais geral de se considerar outros modos de polarização de ondas gravitacionais ao realizar a decomposição das perturbações métricas em teorias alternativas de gravitação. Após fornecer as equações para a evolução das perturbações cosmológicas sem decomposição, aplicamos o esquema de decomposição para teorias escalares-tensoriais e para a teoria bimétrica de Visser. No Capítulo 4 solucionamos as equações de evolução para os modos livres (modos TT) no caso da Relatividade Geral considerando o modelo Λ CDM, e no caso da teoria bimétrica na qual são os grávitons massivos que fazem o papel da energia escura. Encontramos os espectros de potência em ambos os casos e os comparamos com as curvas de sensibilidade dos futuros detectores espaciais LISA e BBO. Por fim, apresentamos nossas conclusões e perspectivas para a continuidade do presente tema no Capítulo 5.

2 POLARIZAÇÕES DE ONDAS GRAVITACIONAIS EM TEORIAS MÉTRICAS DE GRAVITAÇÃO

2.1 Formalismo Newman-Penrose

No contexto de uma teoria métrica de gravitação, a física de OGs envolve a métrica $g_{\mu\nu}$ além de campos auxiliares que possam existir. Mas o tensor de Riemann resultante é o único campo mensurável. Eardley e colaboradores ([EARDLEY et al., 1973](#)) utilizaram uma base tetrada nula para calcular as quantidades Newman-Penrose (NP) ([NEWMAN; PENROSE, 1962](#)) em termos das partes irredutíveis de $R_{\lambda\mu\kappa\nu}$, sendo elas, o tensor de Weyl, a componente sem traço do tensor de Ricci e o escalar de Ricci. Essa análise mostrou que existem seis modos possíveis de polarização para as ondas gravitacionais, dependendo da teoria, que podem, em princípio, ser completamente resolvidos através da experimentação. É possível, portanto, classificar uma dada teoria pelo número de quantidades NP não nulas.

Para um dado ponto P , a tetrada complexa $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ relaciona-se com a tetrada cartesiana $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ da seguinte forma (para uma revisão sobre o formalismo de tetradas ver, e.g., ([CHANDRASEKHAR, 1992](#); [STEPHANI, 1993](#))):

$$\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_t + \mathbf{e}_z), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_t - \mathbf{e}_z), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y), \quad (2.3)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y). \quad (2.4)$$

É fácil verificar que os vetores tetrada obedecem as relações:

$$-\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 1 \quad (2.5)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0. \quad (2.6)$$

As componentes de um tensor \mathbf{T} na base da tetrada nula podem ser escritas de acordo com a seguinte notação:

$$T_{abc\dots} = T_{\mu\nu\lambda\dots} a^\mu b^\nu c^\lambda \dots, \quad (2.7)$$

onde o conjunto com letras latinas (a, b, c, \dots) varia sobre $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ enquanto o conjunto com letras gregas $(\mu, \nu, \lambda, \dots)$ varia sobre (t, x, y, z) , uma vez que estamos trabalhando

com coordenadas cartesianas.

Em geral, as quantidades NP, dadas pelos dez Ψ 's, nove Φ 's, e Λ , que representam todas as componentes irreduzíveis do tensor de Riemann $R_{\lambda\mu\kappa\nu}$, são todas algebricamente independentes. Quando restringimos nosso estudo para o caso de ondas aproximadamente planas, no entanto, encontramos que as propriedades diferenciais e de simetria de $R_{\lambda\mu\kappa\nu}$ reduzem o número de componentes independentes, não nulas, para seis. Então, podemos escolher o conjunto $\{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Phi_{22}\}$ para descrever, em um dado sistema de coordenadas, as seis componentes independentes de uma onda na teoria em questão. Assim, na base tetrada, as quantidades NP do tensor de Riemann são dadas por:

$$\Psi_2 = -\frac{1}{6}R_{lk}{}_{lk}, \quad (2.8)$$

$$\Psi_3 = -\frac{1}{2}R_{lkl\bar{m}}, \quad (2.9)$$

$$\Psi_4 = -R_{l\bar{m}l\bar{m}}, \quad (2.10)$$

$$\Phi_{22} = -R_{lml\bar{m}}. \quad (2.11)$$

Note que Ψ_3 e Ψ_4 são complexos, então cada um representa duas polarizações independentes. Uma polarização representada pela parte real e outra pela parte imaginária, totalizando seis componentes (ver figura 2.1).

Temos ainda, as seguintes relações para o tensor de Ricci:

$$R_{lk} = R_{lklk}, \quad (2.12)$$

$$R_{ll} = R_{lml\bar{m}}, \quad (2.13)$$

$$R_{lm} = R_{lklm}, \quad (2.14)$$

$$R_{l\bar{m}} = R_{lkl\bar{m}}, \quad (2.15)$$

e para o escalar de Ricci:

$$R = -2R_{lk} = -2R_{lklk}. \quad (2.16)$$

As acelerações relativas em uma esfera de partículas teste podem ser expressas em termos da matriz de força \mathbf{S} (*driving-force matrix*) definida como:

$$S_{ij} \equiv R_{i0j0}, \quad (2.17)$$

onde i e j são índices que representam as componentes espaciais, i.e., $i, j = x, y, z$. As

amplitudes NP podem, assim, ser condensadas na matriz de força:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(\text{Re}\Psi_4 + \Phi_{22}) & \frac{1}{2}\text{Im}\Psi_4 & -2\text{Re}\Psi_3 \\ \frac{1}{2}\text{Im}\Psi_4 & \frac{1}{2}(\text{Re}\Psi_4 - \Phi_{22}) & 2\text{Im}\Psi_3 \\ -2\text{Re}\Psi_3 & 2\text{Im}\Psi_3 & -6\Psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

As componentes de S_{ij} podem ainda ser expandidas de acordo com a expressão:

$$S_{ij} = \sum_{r=1}^6 p_{(r)} E_{ij}^{(r)}, \quad (2.19)$$

onde renomeamos as quantidades NP da seguinte forma ([EARDLEY et al., 1973](#)):

$$p_{(1)} \equiv \Psi_2, \quad (2.20)$$

$$p_{(2)} \equiv \text{Re}\Psi_3, \quad (2.21)$$

$$p_{(3)} \equiv \text{Im}\Psi_3, \quad (2.22)$$

$$p_{(4)} \equiv \text{Re}\Psi_4, \quad (2.23)$$

$$p_{(5)} \equiv \text{Im}\Psi_4, \quad (2.24)$$

$$p_{(6)} \equiv \Phi_{22}. \quad (2.25)$$

O tensor $E_{ij}^{(r)}$ são as componentes da base formada pelas “matrizes de polarização” que são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(1)} &= -6 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{E}_{(2)} &= -2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}_{(3)} &= 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{E}_{(4)} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}_{(5)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{E}_{(6)} &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.2 Esquema de classificação de teorias métricas de gravitação

As seis amplitudes $\{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Phi_{22}\}$ de uma OG são, de forma geral, dependentes do observador. No entanto, existem certas afirmações invariantes sobre elas, que serão verdadeiras para todos os observadores padrão se forem verdadeiras para algum deles. Essas afirmações caracterizam as chamadas classes invariantes $E(2)$ de ondas. $E(n)$, também chamado de $ISO(n)$, é o grupo de simetria do espaço Euclidiano n -dimensional.

Nós podemos compreender o esquema de classificação $E(2)$ através da análise do comportamento das amplitudes NP $\{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Phi_{22}\}$ sob transformações de Lorentz da base tetrada complexa. Esse ponto está detalhadamente explicado na referência (EARDLEY et al., 1973). Aqui nós resumiremos a idéia essencial.

Gravitational-Wave Polarization

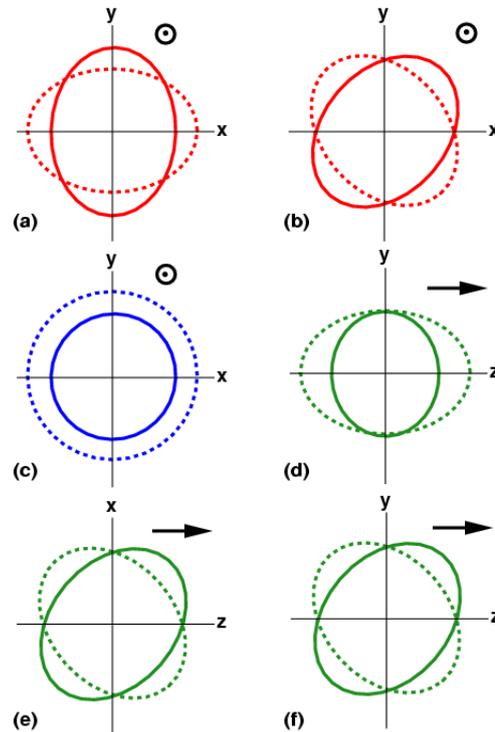


Figura 2.1 - Os seis modos de polarização de ondas gravitacionais permitidos em qualquer teoria métrica de gravitação. Aqui mostramos a deformação que cada modo induz em um anel de partículas teste. A onda gravitacional propaga-se para fora do plano em (a), (b) e (c), e propaga-se no plano em (d), (e) e (f). Em termos das quantidades Newman-Penrose, as figuras (a) e (b) correspondem ao modo complexo Ψ_4 (respectivamente parte real e imaginária), (c) e (d) correspondem aos modos reais Φ_{22} e Ψ_2 , (e) e (f) correspondem ao modo complexo Ψ_3 (parte real e imaginária).
 Fonte: Will (1993).

Considere dois observadores O e O' com tetradas $(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}, \bar{\mathbf{m}})$ e $(\mathbf{k}', \mathbf{l}', \mathbf{m}', \bar{\mathbf{m}}')$ respectivamente. Se escolhermos \mathbf{k} proporcional ao vetor de onda (segundo a convenção de Eardley e colaboradores), então teremos $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$. A transformação de Lorentz mais geral relacionando as tetradas que mantém \mathbf{k} fixo é:

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k}, \quad (2.27)$$

$$\mathbf{m}' = e^{i\varphi}(\mathbf{m} + \sigma\mathbf{k}), \quad (2.28)$$

$$\bar{\mathbf{m}}' = e^{-i\varphi}(\bar{\mathbf{m}} + \bar{\sigma}\mathbf{k}), \quad (2.29)$$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{l} + \bar{\sigma}\mathbf{m} + \sigma\bar{\mathbf{m}} + \sigma\bar{\sigma}\mathbf{k}, \quad (2.30)$$

onde σ é um número complexo arbitrário que representa translações, enquanto φ , que vai de 0 a 2π , é uma fase real arbitrária que produz rotações em torno de \mathbf{e}_z .

As transformações induzidas nas amplitudes da onda devido a (φ, σ) são:

$$\Psi'_2 = \Psi_2, \quad (2.31)$$

$$\Psi'_3 = e^{-i\varphi}(\Psi_3 + 3\bar{\sigma}\Psi_2), \quad (2.32)$$

$$\Psi'_4 = e^{-2i\varphi}(\Psi_4 + 4\bar{\sigma}\Psi_3 + 6\bar{\sigma}^2\Psi_2), \quad (2.33)$$

$$\Phi'_{22} = \Phi_{22} + 2\sigma\Psi_3 + 2\bar{\sigma}\bar{\Psi}_3 + 6\sigma\bar{\sigma}\Psi_2. \quad (2.34)$$

Agora, é evidente desse conjunto de relações que as amplitudes $\{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Phi_{22}\}$ não podem ser especificadas de forma independente de observador. Por exemplo, suponhamos que o observador O mede que uma dada onda tem somente Ψ_2 como amplitude não nula. O observador O' , em movimento relativo com respeito a O , por outro lado, concluirá que a onda possui não somente Ψ_2 como amplitude não nula, mas também Ψ_3 , Ψ_4 e Φ_{22} .

Todavia, há um conjunto de afirmações que definem o esquema de classificação $E(2)$. Cada caso, no qual uma ou mais amplitudes NP anulam-se identicamente, forma uma classe invariante distinta. O nome de cada classe é composto pela classe de Petrov do tensor de Weyl não nulo correspondente e pelo número de amplitudes não nulas (chamado de “dimensão de representação”) vistas por todos os observadores. Ambos, a classe de Petrov (para uma revisão sobre a classificação de Petrov ver, e.g., (CHANDRASEKHAR, 1992; STEPHANI, 1993)) e a dimensão de representação são independentes do observador. Considerando observadores padrão tais que: (a) cada observador vê a onda viajando na direção $+z$, e (b) cada observador mede a mesma frequência para uma onda monocromática, então as classes $E(2)$ em ordem de generalidade decrescente são:

- **Classe II_6 :** $\Psi_2 \neq 0$. Todos os observadores medem a mesma amplitude não-nula no modo Ψ_2 . Mas a presença ou ausência de todos os outros modos é dependente do observador;
- **Classe III_5 :** $\Psi_2 = 0$, $\Psi_3 \neq 0$. Todos os observadores medem a ausência de Ψ_2 e a presença de Ψ_3 . Mas a presença ou ausência de Ψ_4 e Φ_{22} é dependente do observador;
- **Classe N_3 :** $\Psi_2 = \Psi_3 = 0$, $\Psi_4 \neq 0$, $\Phi_{22} \neq 0$. A presença ou ausência de todos os modos é independente do observador;
- **Classe N_2 :** $\Psi_2 = \Psi_3 = \Phi_{22} = 0$; $\Psi_4 \neq 0$. Independente do observador;
- **Classe O_1 :** $\Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$; $\Phi_{22} \neq 0$. Independente do observador;
- **Classe O_0 :** $\Psi_2 = \Psi_3 = \Psi_4 = \Phi_{22} = 0$. Independente do observador. Nenhum observador mede OG.

Outra propriedade interessante das diferentes polarizações de OGs que podemos extrair das transformações (2.31)–(2.34) são os valores de “helicidade” das OGs. Considere um grupo de observadores relacionados um ao outro por rotações em torno do eixo z ($\varphi, 0$). Diz-se que uma quantidade M que se transforma sob rotações pela relação $M' = \exp(is\varphi)M$ tem helicidade s tal qual vista por tais observadores. Vemos das equações (2.31)–(2.34) que as amplitudes $\{\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Phi_{22}\}$ são auto-estados de helicidade. Podemos extrair seus valores de helicidade facilmente a partir das equações (2.31)–(2.34) fazendo $\sigma = \bar{\sigma} = 0$:

$$\begin{aligned}
\Psi_2 &\rightarrow s = 0, \\
\Psi_3 &\rightarrow s = -1, \quad \bar{\Psi}_3 \rightarrow s = +1 \\
\Psi_4 &\rightarrow s = -2, \quad \bar{\Psi}_4 \rightarrow s = +2 \\
\Phi_{22} &\rightarrow s = 0.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Nas seções que seguem, após uma analogia com o eletromagnetismo, analisaremos a classificação $E(2)$ de algumas teorias de gravitação. Iniciaremos pela RG, passaremos pelas teorias escalares-tensoriais, pela teoria bimétrica de Visser e finalizaremos analisando as possíveis polarizações de OGs em teorias $f(R)$. A importância dessa avaliação para o estudo das OGs cosmológicas se tornará então evidente do capítulo seguinte que tratará das equações dinâmicas para as perturbações cosmológicas que de fato representam OGs.

2.3 Classificação de Campos Eletromagnéticos

O formalismo NP pode ser utilizado para realizar a classificação algébrica de campos eletromagnéticos. O procedimento é consideravelmente mais simples, embora análogo, à

classificação de OGs que realizamos anteriormente e, sendo assim, pode nos auxiliar a ganhar um pouco de intuição física sobre o método.

Primeiramente, lembre-se que para o espaço-tempo de Minkowski, o tensor antissimétrico de Maxwell $F_{\mu\nu}$ tem as componentes:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

onde, E_x , E_y e E_z e H_x , H_y e H_z denotam as componentes do campo elétrico e magnético respectivamente, tal qual medidas por um observador inercial.

No formalismo NP, as componentes de $F_{\mu\nu}$ são escritas em termos de três escalares complexos (CHANDRASEKHAR, 1992; STEPHANI, 1993):

$$\phi_0 = F_{km}, \quad (2.37)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(F_{kl} + F_{\bar{m}m}) \quad (2.38)$$

$$\phi_2 = F_{\bar{m}l}. \quad (2.39)$$

Sob as transformações (2.27)-(2.30), essas quantidades mudam da seguinte forma:

$$\phi'_0 = e^{i\varphi} \phi_0, \quad (2.40)$$

$$\phi'_1 = \phi_1 + \bar{\sigma} \phi_0, \quad (2.41)$$

$$\phi'_2 = e^{-i\varphi} (\phi_2 + 2\bar{\sigma} \phi_1 + \bar{\sigma}^2 \phi_0). \quad (2.42)$$

Portanto, nós podemos fazer um dos coeficientes ϕ'_1 ou ϕ'_2 anular-se através de uma escolha adequada de σ , ou seja, por uma escolha de uma nova direção \mathbf{k}' . Escolhendo, por exemplo, que ϕ'_2 seja nulo, de (2.42) temos:

$$\phi_0 \bar{\sigma}^2 + 2\phi_1 \bar{\sigma} + \phi_2 = 0. \quad (2.43)$$

De acordo com o número de raízes $\bar{\sigma}$ dessa equação podemos dividir o campo eletromagnético em duas classes. Para ver isso, note que as soluções da equação acima

são:

$$\bar{\sigma} = -\frac{-\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 - \phi_0\phi_2}}{\phi_0}, \quad \text{e} \quad \bar{\sigma} = -\frac{-\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 - \phi_0\phi_2}}{\phi_0}, \quad (2.44)$$

então, para o caso:

$$\phi_1^2 - \phi_0\phi_2 \neq 0, \quad (2.45)$$

existem duas raízes distintas $\bar{\sigma}$ ou (para $\phi_2 = 0$) somente uma raiz. Assim, campos para os quais o tensor $F_{\mu\nu}$ satisfaz a desigualdade acima são chamados não-degenerados. Eles possuem duas direções diferentes \mathbf{k} para as quais ϕ_2' cancela-se.

Campos para os quais, o tensor de Maxwell satisfaz:

$$\phi_1^2 - \phi_0\phi_2 = 0, \quad (2.46)$$

são chamados campos degenerados ou campos nulos. Eles possuem apenas uma direção nula \mathbf{k} com $\phi_2' = 0$. Se fizermos $\phi_2 = 0$, então devido a (2.46), ϕ_1 também anula-se.

Que a classificação de campos eletromagnéticos é independente da escolha da tetrada nula, pode ser visto pela relação:

$$\phi_1^2 - \phi_0\phi_2 = -2(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + iF_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu}). \quad (2.47)$$

Essa equação implica numa simples prescrição para estabelecer o tipo do campo eletromagnético: um campo de Maxwell é degenerado ou um campo nulo se e somente se seus dois invariantes anulam-se, isto é:

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.48)$$

onde $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ é o pseudo tensor dual do tensor $F_{\mu\nu}$. Utilizando (2.36) deduzimos que (2.48) leva para (LANDAU; LIFSHITZ, 1973):

$$H^2 - E^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.49)$$

ou seja, se num referencial qualquer os campos elétrico e magnético são ortogonais eles também serão ortogonais em qualquer referencial inercial; se num certo referencial os valores absolutos de \mathbf{E} e \mathbf{H} são idênticos, eles serão idênticos em todos os outros referenciais inerciais.

2.4 Relatividade Geral

O processo de classificação consiste em analisar as equações de campo linearizadas, no vácuo, quando o observador está distante da fonte do campo.

No caso da RG, as equações de campo podem ser obtidas a partir da ação de Einstein-Hilbert:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x + I_M, \quad (2.50)$$

onde I_M é a ação que descreve os campos de matéria e energia. Aplicando o princípio de mínima ação $\delta I = 0$ encontramos:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.51)$$

que são as equações de Einstein.

Para o vácuo, elas ficam simplesmente:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.52)$$

Portanto, das relações (2.12)–(2.16) encontramos:

$$R_{lklk} = R_{lkl\bar{m}} = R_{lml\bar{m}} = 0, \quad (2.53)$$

ou equivalentemente:

$$\Psi_2 = \Psi_3 = \Phi_{22} = 0, \quad (2.54)$$

e como não existem restrições adicionais sobre $R_{l\bar{m}l\bar{m}}$ concluímos que:

$$\Psi_4 \neq 0. \quad (2.55)$$

Assim, a classificação $E(2)$ da RG é N_2 , ou seja, as OGs apresentam dois modos de polarização que são medidos por qualquer observador.

2.5 Teorias escalares-tensoriais

As teorias escalares-tensoriais, foram primeiramente estudadas por Brans e Dicke (BRANS; DICKE, 1961) no intuito de compatibilizar a teoria de gravitação com o princípio de Mach.

Consideraremos uma classe de teorias discutida por Wagoner (1970) e Nordtvedt (1970)

e utilizaremos a ação na forma assumida por [Maggiore e Nicolis \(2000\)](#):

$$I = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} d^4x [-\varphi R + \varphi^{-1} \omega(\varphi) \nabla_\alpha \varphi \nabla^\alpha \varphi - U(\varphi)] + I_M, \quad (2.56)$$

onde φ é um campo escalar, $\omega(\varphi)$ é um parâmetro de acoplamento e $U(\varphi)$ é um potencial associado ao campo escalar. A teoria de Brans-Dicke surge no caso especial para o qual ω é uma constante e $U(\varphi) = 0$.

Aplicando o princípio de mínima ação em (2.56), variando com respeito à métrica e com respeito ao campo escalar, obtemos:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi}{\varphi} T_{\mu\nu} - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi^2} \left(\varphi_{;\mu} \varphi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varphi_{;\alpha} \varphi^{;\alpha} \right) - \frac{1}{\varphi} (\varphi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu} \square \varphi) - g_{\mu\nu} U(\varphi), \quad (2.57)$$

$$[3 + 2\omega(\varphi)] \square \varphi - \varphi \frac{dU(\varphi)}{d\varphi} = 8\pi T - \frac{d\omega(\varphi)}{d\varphi} \varphi_{;\alpha} \varphi^{;\alpha}, \quad (2.58)$$

$$T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.59)$$

Nas equações acima $\square f = f_{;\nu}{}^{\nu}$ para uma quantidade qualquer f . Note que agora a equação de conservação (2.59) tem que ser imposta separadamente, uma vez que ela não é consequência direta das equações de campo como no caso da RG.

Considerando o vácuo $T_{\mu\nu} = 0$, as equações (2.57) ficam:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\omega(\varphi)}{\varphi^2} \varphi_{;\mu} \varphi_{;\nu} - \frac{1}{\varphi} \left(\varphi_{;\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square \varphi \right) + g_{\mu\nu} U(\varphi), \quad (2.60)$$

e

$$R = -\frac{\omega}{\varphi^2} \varphi_{;\alpha} \varphi^{;\alpha} - 3 \frac{\square \varphi}{\varphi} + 4U. \quad (2.61)$$

Para o caso Brans-Dicke, a equação (2.58) torna-se:

$$\square \varphi = 0; \quad (2.62)$$

com solução para o regime linearizado dada por:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 e^{iq_\alpha x^\alpha}, \quad (2.63)$$

onde φ_0 é uma constante obtida a partir de condições de contorno cosmológicas sobre o campo escalar ([EARDLEY et al., 1973](#)), φ_1 , também constante, é a pequena amplitude da onda de tal forma que podemos considerar apenas primeira ordem em φ_1 , q_α é o vetor de onda que para esse caso é nulo, i.e., $q_\alpha q^\alpha = 0$.

Automaticamente vemos que o escalar de Ricci anula-se:

$$R = 0 \Rightarrow R_{lklk} = 0. \quad (2.64)$$

O tensor de Ricci fica:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_0} e^{iq_\alpha x^\alpha} q_\mu q_\nu, \quad (2.65)$$

e se a onda propaga-se na direção z então as únicas componentes não nulas são R_{zz} , R_{zt} , e R_{tt} . Assim concluímos que:

$$R_{lkl\bar{m}} = 0 \text{ e } R_{lm\bar{l}\bar{m}} \neq 0, \quad (2.66)$$

e portanto:

$$\Psi_2 = \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 \text{ e } \Phi_{22} \neq 0. \quad (2.67)$$

Assim, a classificação $E(2)$ da teoria de Brans-Dicke é N_3 . Ou seja, além dos dois modos $s = \pm 2$ da RG, nessa teoria existe também um modo escalar que provoca acelerações relativas perpendiculares à direção de propagação e radiais.

Por outro lado, se o potencial $U(\varphi)$ não for nulo, estaremos no contexto de uma teoria escalar-tensorial mais geral. Agora, $\square\varphi$ não se anula de forma geral, mas sim obedece a seguinte relação para o regime linearizado (MAGGIORE; NICOLIS, 2000):

$$\square\varphi - m_0^2\varphi = 0, \quad (2.68)$$

onde:

$$m_0^2 \equiv \frac{\varphi_0 (dU/d\varphi)_{\varphi=\varphi_0}}{3 + 2\omega(\varphi_0)}, \quad (2.69)$$

e φ_0 é o mínimo do potencial. A solução de (2.68) é dada por (2.63), mas agora o vetor de onda satisfaz:

$$q_\alpha q^\alpha = m_0^2. \quad (2.70)$$

E o escalar de Ricci fica:

$$R = -3m_0^2 \frac{\varphi_1}{\varphi_0} e^{iq_\alpha x^\alpha}, \quad (2.71)$$

para primeira ordem em φ_1 . O tensor de Ricci, por sua vez, nos fornece:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_0} e^{iq_\alpha x^\alpha} \left[q_\mu q_\nu + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} m_0^2 \right]. \quad (2.72)$$

Assim, além de $R \neq 0$, também temos R_{tt} , R_{zt} e $R_{zz} \neq 0$. Concluimos, assim, que para uma teoria escalar-tensorial geral:

$$\Psi_3 = 0; \Psi_2, \Psi_4 \text{ e } \Phi_{22} \neq 0, \quad (2.73)$$

o que nos leva a classificá-la como II_6 . Então, surge um novo modo escalar, porém, este é longitudinal. Assim, considerando esse observador, para o qual o vetor de onda está orientado na direção z , a teoria exhibe quatro modos de polarização. No entanto, as propriedades de simetria das amplitudes NP indicam que outros observadores podem discordar quanto ao número de estados de polarização da teoria que pode apresentar até seis modos como especificado por sua classificação.

2.6 Teoria bimétrica com grávitons massivos

Trabalharemos com uma teoria alternativa de gravitação que considera grávitons massivos através da ação (VISSEER, 1998):

$$I = \int d^4x \left[\frac{\sqrt{-g}R}{16\pi G} + m^2 \mathcal{L}_{mass}(g, g_0) \right] + I_M, \quad (2.74)$$

onde m é a massa do gráviton em unidades naturais e a Lagrangiana \mathcal{L}_{mass} é função da métrica física $g_{\mu\nu}$ e de uma métrica não dinâmica $(g_0)_{\mu\nu}$ definida *a priori*. A Lagrangiana massiva proposta por Visser é:

$$\mathcal{L}_{mass}(g, g_0) = \frac{1}{2} \sqrt{-g_0} \left\{ (g_0^{-1})^{\mu\nu} (g - g_0)_{\mu\sigma} (g_0^{-1})^{\sigma\rho} (g - g_0)_{\rho\nu} - \frac{1}{2} [(g_0^{-1})^{\mu\nu} (g - g_0)_{\mu\nu}]^2 \right\}, \quad (2.75)$$

onde mantivemos a notação original de Visser ao fazer $(g - g_0)_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - (g_0)_{\mu\nu}$.

As equações de campo com grávitons massivos são obtidas considerando a ação (2.74) estacionária quando se considera variações com respeito à métrica física. As equações obtidas são ¹:

$$G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 M^{\mu\nu} = -8\pi G T^{\mu\nu}, \quad (2.76)$$

onde o tensor massivo é dado por:

$$M^{\mu\nu} = (g_0^{-1})^{\mu\sigma} \left[(g - g_0)_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} (g_0)_{\sigma\rho} (g_0^{-1})^{\alpha\beta} (g - g_0)_{\alpha\beta} \right] (g_0^{-1})^{\rho\nu}. \quad (2.77)$$

Foi demonstrado que para que tenhamos soluções cosmológicas consistentes, a conservação

¹Note que todas as operações como levantamento e abaixamento de índices, derivadas variacionais e derivadas covariantes continuam sendo realizadas com a utilização da métrica física $g_{\mu\nu}$

de energia, agora, deve ser escrita da forma efetiva (ALVES et al., 2008):

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = \frac{m^2}{16\pi G} \nabla_\nu M^{\mu\nu}. \quad (2.78)$$

No entanto, essa nova relação não afeta as equações de movimento de partículas teste em queda livre sob a ação de campos gravitacionais, isto é, elas continuam seguindo geodésicas definidas pela métrica $g_{\mu\nu}$. Esse é um fato muito importante, pois implica na não violação do princípio da equivalência (ALVES et al., 2008).

As equações para o vácuo, na presença de um campo gravitacional fraco ficam:

$$R^{\mu\nu} = m^2 \left(M^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} M \right). \quad (2.79)$$

Para o regime linearizado, o lado direito de (2.79) fica simplesmente $m^2 h^{\mu\nu}$, onde $h_{\mu\nu}$ é a perturbação métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Assim, uma vez que não existem restrições adicionais sobre $R^{\mu\nu}$, concluímos que todas as suas componentes são não nulas e portanto:

$$R_{lklk}, R_{lm\bar{l}\bar{m}}, R_{klm} \text{ e } R_{kl\bar{m}} \neq 0, \quad (2.80)$$

o que implica em:

$$\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4 \text{ e } \Phi_{22} \neq 0. \quad (2.81)$$

Assim, a teoria bimétrica de Visser é classificada como II_6 . Esse resultado foi obtido primeiramente, de forma diversa embora equivalente, na referência (de PAULA et al., 2004). Note que, apesar da presença de uma segunda métrica $(g_0)_{\mu\nu}$, é a massa m a responsável pelo aparecimento dos modos Ψ_2 , Ψ_3 e Φ_{22} . No limite $m \rightarrow 0$, recuperamos a RG e ficamos somente com o modo Ψ_4 .

No apêndice A apresentamos a derivação das equações de campo linearizadas tanto para a RG quanto para a teoria bimétrica com grávitons massivos. Para essa última verificamos que o número de graus de liberdade é igual ao número de estados de polarização.

2.7 Teorias $f(R)$

Lagrangianas que consideram ordens mais elevadas do escalar de Ricci R e do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ têm sido propostas como extensões da RG há muito tempo (WEYL, 1922). O tratamento semiclássico considera a ação (*backreaction*) de campos quânticos na geometria de fundo clássica (de WITT, 1965; HU; VERDAGUER, 2008). Tais Lagrangianas prevêm

equações de campo com derivadas da métrica de ordem quarta, ao contrário da RG na qual as derivadas da métrica são no máximo de segunda ordem (de WITT, 1965; BIRREL; DAVIES, 1982). Lagrangianas quadráticas também têm sido utilizadas na obtenção de teorias de gravitação renormalizáveis, acopladas à matéria (STELLE, 1977). Além disso, teorias com derivadas de ordem superior emergem como o limite de baixa energia da teoria de cordas (ZWIEBACH, 1985; TSEYTLIN, 1986).

Starobinsky (STAROBINSKY, 1980) argumenta que termos de ordem superior podem imitar o efeito da constante cosmológica. Recentemente, essa idéia tem sido amplamente estudada como uma possível forma de tratar o problema da energia escura. Nesse contexto, muitos tipos de Lagrangianas modificadas foram considerados constituindo uma classe de teorias, as, assim chamadas, teorias $f(R)$ (CAPOZZIELLO; FRANCAVIGLIA, 2008, e referências).

A seguir, consideraremos separadamente o formalismo métrico e o formalismo de Palatini. No formalismo métrico a conexão Γ é considerada como uma função da métrica g na derivação das equações de campo. Já na abordagem de Palatini, Γ e g são variáveis independentes cuja relação é obtida posteriormente. Os resultados que encontramos foram publicados em (ALVES et al., 2009c).

2.7.1 Formalismo métrico

Seja a ação do campo gravitacional uma função arbitrária do escalar de Ricci:

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (2.82)$$

Aplicando o princípio variacional sobre essa ação, considerando $g_{\mu\nu}$ como a variável dinâmica teremos as equações de campo para o vácuo dadas por:

$$f' R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu f' + g_{\mu\nu} \square f' = 0, \quad (2.83)$$

onde “ ’ ” representa a diferenciação com respeito a R .

No que segue, nos restringiremos à seguinte classe de teorias $f(R)$:

$$f(R) = R - \alpha R^{-\beta}, \quad (2.84)$$

onde α e β são duas constantes que parametrizam as possíveis Lagrangianas dessa classe.

Substituindo (2.84) nas equações de campo (2.83) obtemos a seguinte relação entre $R_{\mu\nu}$ e

o escalar de Ricci R :

$$R_{\mu\nu} = \frac{(R - \alpha R^{-\beta})g_{\mu\nu} + 2\alpha\beta\nabla_\mu\nabla_\nu R^{-(1+\beta)} - 2\alpha\beta g_{\mu\nu}\square R^{-(1+\beta)}}{2[1 + \alpha\beta R^{-(1+\beta)}]}. \quad (2.85)$$

Contraindo essa expressão, temos uma equação dinâmica para R :

$$R = \alpha [(\beta + 2)R^{-\beta} + 3\beta\square R^{-(1+\beta)}]. \quad (2.86)$$

A seguir analisaremos diferentes casos para os possíveis valores de α e β . Como já fizemos nas seções anteriores para outras teorias, consideraremos as equações de campo linearizadas distantes da fonte do campo. Devido à complexa estrutura das equações que emergem das teorias $f(R)$, derivar a física das OGs diretamente pela perturbação métrica $h_{\mu\nu}$ pode ser muito complicado. Mas, como veremos, a robustez do formalismo NP permite encontrar propriedades das OGs de forma inequívoca sem a necessidade de explicitar as equações de campo fraco em termos de $h_{\mu\nu}$. Para cada caso, nosso procedimento consiste em encontrar R a partir de (2.86) e então computar $R_{\mu\nu}$ a partir de (2.85), para, enfim, encontrar as amplitudes NP.

• **Caso** $\alpha = 0$

Esse é o caso trivial, para o qual a teoria reduz-se à RG. Das equações (2.86) e (2.85) nós encontramos $R = 0$ e $R_{\mu\nu} = 0$. Consequentemente, como vimos na seção 2.4, somente o modo Ψ_4 é não nulo e a classificação da teoria é N_2 .

• **Caso** $\alpha \neq 0, \beta \geq 1$

Para $\alpha \neq 0$, a equação (2.86) pode ser escrita como:

$$\square R^{-(1+\beta)} + \frac{\beta + 2}{3\beta} R^{-\beta} - \frac{1}{3\alpha\beta} R = 0. \quad (2.87)$$

Trabalhando no regime de campo fraco, se $\beta \geq 1$ temos $R^{-\beta} \gg R$ e a equação (2.87) fica:

$$\square\phi + \frac{\beta + 2}{3\beta}\phi^{\frac{\beta}{1+\beta}} = 0, \quad (2.88)$$

onde definimos $\phi \equiv R^{-(1+\beta)}$. Mas essa equação é da forma:

$$\square\phi - \frac{\partial U}{\partial\phi} = 0. \quad (2.89)$$

Comparando (2.88) e (2.89), vemos que o potencial $U(\phi)$ é dado por:

$$U(\phi) = - \left[\frac{(\beta + 2)(\beta + 1)}{3\beta(2\beta + 1)} \right] \phi^{\frac{2\beta+1}{\beta+1}}. \quad (2.90)$$

Uma vez que ϕ é invariante de Lorentz, podemos resolver (2.89) por um método muito conhecido (RAJARAMAN, 1982). Primeiramente, considere a solução estática de (2.89), i.e., a solução da equação:

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} = \frac{\partial U}{\partial\phi}, \quad (2.91)$$

que ainda pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 = U(\phi). \quad (2.92)$$

Substituindo o potencial (2.90) em (2.92) e integrando temos:

$$\phi(z) = \left[i\xi(z - z_0) + \phi_0^{1/2(\beta+1)} \right]^{2(\beta+1)}, \quad (2.93)$$

onde:

$$\xi = \frac{1}{2(\beta + 1)} \left[\frac{2(\beta + 2)(\beta + 1)}{3\beta(2\beta + 1)} \right]^{1/2} \quad (2.94)$$

e $\phi_0 = \phi(z_0)$ é o valor do campo ϕ em alguma posição inicial z_0 . Agora, como o sistema é invariante de Lorentz, dada a solução estática (2.93), podemos realizar uma transformação de Lorentz para obter a solução dependente do tempo:

$$\phi(z, t) = \left[i\xi \frac{(z - z_0) - vt}{\sqrt{1 - v^2}} + \phi_0^{1/2(\beta+1)} \right]^{2(\beta+1)}. \quad (2.95)$$

E, portanto, o escalar de Ricci fica:

$$R(z, t) = \left[i\xi \frac{(z - z_0) - vt}{\sqrt{1 - v^2}} + R_0^{-1/2} \right]^{-2}, \quad (2.96)$$

onde v é a velocidade de propagação da onda. Essa é a solução da equação (2.88) como pode ser verificado por substituição direta.

Substituindo a solução (2.96) em (2.85) encontramos as componentes não nulas do tensor

de Ricci para primeira ordem em R :

$$R_{tt} = \frac{1}{6\beta} \left[(1 - 2\beta) - \frac{2(\beta + 2)v^2}{1 - v^2} \right] R, \quad (2.97)$$

$$R_{tz} = \frac{(\beta + 2)v}{3\beta(1 - v^2)} R, \quad (2.98)$$

$$R_{zz} = \frac{1}{6\beta} \left[(2\beta - 1) - \frac{2(\beta + 2)}{1 - v^2} \right] R. \quad (2.99)$$

Portanto, calculando as componentes na base tetrada do tensor de Ricci, suas relações com as componentes do tensor de Riemann levam a:

$$R_{klm} = R_{kl\bar{m}}, \quad R_{lklk} \text{ e } R_{lm\bar{l}\bar{m}} \neq 0, \quad (2.100)$$

e portanto:

$$\Psi_3 = 0; \quad \Psi_2, \Psi_4 \text{ e } \Phi_{22} \neq 0, \quad (2.101)$$

e a classificação $E(2)$ para esse caso é II_6 .

• **Caso** $\alpha \neq 0, \beta < -2$

Considerando agora $\beta < -2$ temos $R^{-\beta} \ll R$ e a equação (2.87) fica:

$$\square\phi - \frac{1}{3\alpha\beta}\phi^{-1/(1+\beta)} = 0, \quad (2.102)$$

onde ϕ tem a mesma definição apresentada acima. No entanto, o potencial agora é dado por:

$$U(\phi) = \frac{1}{3\alpha\beta}\phi^{\frac{\beta}{\beta+1}}, \quad (2.103)$$

para o qual obtemos a solução estática:

$$\phi(z) = \left[\zeta(z - z_0) + \phi_0^{\frac{\beta+2}{2(\beta+1)}} \right]^{\frac{2(\beta+1)}{\beta+2}}, \quad (2.104)$$

onde:

$$\zeta = \frac{\beta + 2}{(\beta + 1)\sqrt{6\alpha\beta}}. \quad (2.105)$$

Após uma transformação de Lorentz nós encontramos a solução completa:

$$\phi(z, t) = \left[\zeta \frac{(z - z_0) - vt}{\sqrt{1 - v^2}} + \phi_0^{\frac{\beta+2}{2(\beta+1)}} \right]^{\frac{2(\beta+1)}{\beta+2}}. \quad (2.106)$$

Então, a solução para o escalar de Ricci para o presente caso é:

$$R(z, t) = \left[\zeta \frac{(z - z_0) - vt}{\sqrt{1 - v^2}} + R_0^{-\frac{\beta+2}{2}} \right]^{-\frac{2}{\beta+2}}. \quad (2.107)$$

E as componentes do tensor de Ricci ficam:

$$R_{tt} = \frac{1}{3} \left[\frac{\beta}{(\beta + 1)} \frac{v^2}{(1 - v^2)} - \frac{1}{2} \right] R, \quad (2.108)$$

$$R_{tz} = -\frac{\beta}{3(\beta + 1)} \frac{v}{(1 - v^2)} R, \quad (2.109)$$

$$R_{zz} = \frac{1}{3} \left[\frac{\beta}{(\beta + 1)} \frac{1}{(1 - v^2)} + \frac{1}{2} \right] R, \quad (2.110)$$

enquanto todas as outras componentes são nulas.

Assim, deduzimos que:

$$\Psi_3 = 0; \quad \Psi_2, \Psi_4 \text{ e } \Phi_{22} \neq 0, \quad (2.111)$$

e somos levados a classificar as OGs nas teorias com $\beta < -2$ na classe II_6 .

• **Caso** $\alpha \neq 0, \beta = -2$

Este é um caso particular para o qual o comportamento do escalar de Ricci e do tensor de Ricci são oscilatórios. Podemos verificar isso substituindo $\beta = -2$ na equação (2.87) obtendo:

$$\square R - \frac{1}{6\alpha} R = 0, \quad (2.112)$$

que tem como solução:

$$R = R_0 \exp(ik_\alpha x^\alpha), \quad k_\alpha k^\alpha = \frac{1}{6\alpha}. \quad (2.113)$$

Considerando essa solução na equação (2.85) com $R \ll 1$ encontramos as componentes não nulas do tensor de Ricci:

$$R_{tt} = \frac{1}{2}(4\alpha k^2 - 1)R \quad (2.114)$$

$$R_{tz} = -2\alpha k \sqrt{k^2 - \frac{1}{6\alpha}} R \quad (2.115)$$

$$R_{zz} = \frac{1}{6}(12\alpha k^2 + 1)R. \quad (2.116)$$

Então, mais uma vez, obtemos:

$$\Psi_3 = 0; \quad \Psi_2, \Psi_4 \text{ e } \Phi_{22} \neq 0, \quad (2.117)$$

e as OGs nessa teoria são classificadas novamente como II_6 .

Como ficou claro, para todos os casos estudados (exceto o caso $\alpha = 0$), a teoria dada pela equação (2.84) é classificada na classe II_6 , i.e., a classe mais geral para a qual todas os seis modos de polarização podem aparecer para algum observador Lorentziano específico, mas a amplitude Ψ_2 é independente de observador.

2.7.2 A abordagem de Palatini

Na abordagem de Palatini, a métrica g e a conexão Γ (usualmente livre de torção) são consideradas como variáveis independentes que entram na definição do tensor de Ricci. Nesse contexto, as equações de campo para o vácuo, derivadas a partir do princípio variacional aplicado sobre a ação (2.82) são:

$$f' R_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} f g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.118)$$

$$\nabla_\alpha^\Gamma (\sqrt{-g} f' g^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.119)$$

onde ∇_α^Γ é a derivada covariante com respeito a Γ . Utilizamos também a notação padrão denotando por $R_{(\mu\nu)}$ a parte simétrica de $R_{\mu\nu}$, i.e., $R_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2} (R_{\mu\nu} + R_{\nu\mu})$. Foi demonstrado que as equações para o vácuo (2.118) levam a equações “universais” para uma grande variedade de funções $f(R)$ (FERRARIS et al., 1994). Tais equações universais são simplesmente as equações de Einstein com a constante cosmológica Λ .

Então, as propriedades das OGs no contexto da gravidade $f(R)$ usando a abordagem de Palatini são as mesmas que para o problema de OGs nas equações de Einstein considerando o termo cosmológico. Um trabalho recente de Näf e colaboradores (NÄF et al., 2009) analisou esse caso. Eles expandiram as perturbações num espaço de fundo de Sitter e também anti-de Sitter. Uma vez que a métrica de Minkowski não é uma solução das equações de campo para o vácuo, essa abordagem deve ser a mais adequada. Considerando termos até ordem linear em Λ eles calcularam as componentes não nulas do tensor de Riemann e encontraram que Λ não introduz estados de polarização adicionais aos estados Ψ_4 da RG. Ainda mais, eles mostraram que o termo cosmológico introduz modificações muito pequenas na amplitude das OGs que estão muito abaixo da detectabilidade dos atuais detectores.

Portanto, podemos concluir que OGs na gravidade $f(R)$ utilizando a abordagem de Palatini tem somente as duas polarizações usuais da RG, ou seja, as polarizações $+$ e \times .

Na tabela 2.1 apresentamos de forma condensada o número de amplitudes NP não nulas para cada teoria que estudamos nesse capítulo.

	Ψ_4	Φ_{22}	Ψ_2	Ψ_3
Relatividade Geral	✓			
Brans-Dicke	✓	✓		
Escalar-tensorial geral	✓	✓	✓	
$f(R)$ (lei de potência no form. métrico)	✓	✓	✓	
$f(R)$ (form. Palatini)	✓			
Gravidade quadrática	✓	✓	✓	✓
Bimétrica com grávitons massivos	✓	✓	✓	✓

Tabela 2.1 - Acima, assinalamos quais amplitudes NP são não nulas para cada teoria de gravitação. Ao construir essa tabela, assim como no texto, fixamos um mesmo observador que chamamos de observador padrão, a saber, aquele que mede o vetor de onda da OG orientado na direção $+z$ do eixo de coordenadas cartesianas. Resultados para a gravidade quadrática podem ser encontrados em (ALVES et al., 2009c)

3 PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS EM TEORIAS ALTERNATIVAS DE GRAVITAÇÃO

3.1 Motivação e dificuldades com a decomposição mínima

A teoria de perturbações cosmológicas tem sido estudada amplamente na literatura. Desde o trabalho pioneiro de Lifshitz (1946), muitos avanços foram alcançados. Alguns exemplos são os trabalhos de Bardeen (1980), Peebles (1993) e Mukhanov et al. (1992). Para uma revisão com as referências mais relevantes sobre o tema veja, por exemplo, Bertschinger (1995).

Essa é uma das áreas mais interessantes e ativas em cosmologia atualmente. É nesse contexto que importantes questões podem ser colocadas, entre elas podemos destacar: como as estruturas se formaram? Elas podem se formar a partir de instabilidades de origem gravitacional? Quais são as condições iniciais para a formação de estruturas? Qual a natureza e a quantidade de matéria escura?

Nas palavras de Bardeen (1980), ao trabalhar com perturbações cosmológicas, estamos lidando com dois espaço-tempos, a saber, o espaço-tempo físico perturbado, e um espaço-tempo fictício de fundo, que será aqui descrito pela métrica de Robertson-Walker.

Nesse espírito, as equações que descrevem a evolução dinâmica das perturbações num Universo em expansão podem então ser obtidas.

O procedimento mais usual nessa etapa consiste em decompor as perturbações de acordo com a simetria espacial, isto é, em componentes escalares, vetoriais e tensoriais. A seguir, combinações dentro de um mesmo grupo de simetria são realizadas para encontrar quantidades que sejam invariantes de calibre, afim de evitar ambiguidades advindas de transformações infinitesimais de coordenadas.

Nesse contexto, OGs cosmológicas são normalmente associadas com as componentes tensoriais (no sentido de transformações espaciais de coordenadas), as quais são a parte transversa e sem traço (TT) das perturbações métricas.

Assim, OGs são totalmente desacopladas do fluido cósmico, desde sua origem, a menos que uma componente não nula de tensão anisotrópica esteja presente.

A condição para o desacoplamento de uma partícula no Universo em expansão é que a taxa dos processos que mantém o equilíbrio Γ_p seja inferior à taxa característica de expansão, que é dada pelo parâmetro de Hubble H . Calculando a razão Γ_p/H para os grávitons

chegamos a (MAGGIORE, 2000):

$$\frac{\Gamma_p}{H} = \left(\frac{T}{M_{Pl}} \right)^3. \quad (3.1)$$

Assim, os grávitons desacoplam abaixo da escala de Planck $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV, ou seja, num tempo t da ordem do tempo de Planck $t_{Pl} \simeq 10^{-43}$ s após o Big Bang.

Para comparação, os fótons da RCFM desacoplaram do plasma primordial quando o Universo tinha uma temperatura de $T \simeq 0,2$ eV que corresponde a uma idade de cerca de 3×10^5 anos. Mas é claro que muitas informações podem ser extraídas da RCFM, mesmo de uma época muito anterior ao desacoplamento. No entanto, o espectro de OGs primordiais fornecerá informações únicas dos processos físicos que regeram aquela era, mapeados pelo comportamento do fator de escala. As OGs são as relíquias mais antigas de nossa história cósmica podendo, em uma análise conjunta com os mapas da RCFM, nos fornecer um quadro mais preciso do modelo cosmológico mais adequado do Universo primitivo.

No entanto, embora o procedimento de decomposição mínima possa ser aplicado para qualquer teoria de gravidade; como vimos, há casos para os quais OGs podem apresentar até seis estados de polarização ao invés dos dois modos usuais que aparecem na RG. Em geral, no estudo de perturbações cosmológicas, as polarizações adicionais não são escritas explicitamente como no caso das perturbações TT.

Na continuidade do capítulo, nosso intuito é tornar mais claro o procedimento de decomposição das perturbações métricas em teorias alternativas de gravidade, propondo um esquema perturbativo mais geral que possa abranger outros modos de polarização.

Como exemplo de aplicação, avaliaremos as equações de campo para perturbações que representam OGs em duas teorias alternativas além da RG, sendo elas a teoria bimétrica com grávitons massivos proposta por Visser (1998) e para uma classe de teorias escalares-tensoriais.

Como vimos, com relação a um observador padrão (que mede o vetor de onda orientado no eixo z), a teoria bimétrica apresenta seis estados de polarização. No trabalho de Corda (2007), a detectabilidade de uma polarização particular dessa teoria é discutida, a saber, a componente escalar longitudinal. Foi demonstrado que a dependência angular desse modo poderia, em princípio, permitir sua discriminação com relação aos modos da RG.

No caso das teorias escalares-tensoriais, OGs possuem quatro modos de polarização em relação ao observador padrão. A produção de OGs escalares primordiais que emergem

desse tipo de teorias foi discutida por [Capozziello et al. \(2007\)](#), e um limite superior foi estabelecido a partir das amplitudes de perturbações escalares obtidas a partir dos dados do WMAP. Todavia, nenhum tipo de acoplamento com o fluido perfeito foi considerado. Por outro lado, a amplificação dos modos TT nessas teorias foi estudada considerando-se uma diversidade de modelos na referência ([BARROW et al., 1993](#)).

Também é importante lembrar que as teorias $f(R)$ são conformalmente equivalentes à RG adicionando-se um campo escalar. Para um tratamento mais detalhado nesse ponto ver, e.g., ([CAPOZZIELLO; FRANCAVIGLIA, 2008](#)) e referências.

No capítulo anterior demonstramos que, assim como no caso mais geral das teorias escalares-tensoriais, as teorias $f(R)$ apresentam quatro estados de polarização para um observador padrão. Mas quando a abordagem de Palatini é utilizada, a teoria apresenta apenas as polarizações TT usuais ([ALVES et al., 2009c](#)). Também foi encontrado que o modo escalar longitudinal que aparece nas teorias $f(R)$ é um modo massivo potencialmente detectável pelo futuro interferômetro espacial LISA ([CAPOZZIELLO et al., 2008](#)). A produção de OGs livres desses modos também foi considerada e limites utilizando os dados do WMAP foram estabelecidos ([CORDA, 2008](#)).

Dessa forma, devido a proximidade entre as abordagens das teorias escalares-tensoriais e $f(R)$, uma vez que o estudo de perturbações seja realizado naquela, podemos estendê-lo a essa.

Finalmente, embora exemplifiquemos o esquema de decomposição para a teoria bimétrica de Visser e para teorias escalares-tensoriais, enfatizamos que esta é uma abordagem geral e, portanto, pode ser aplicada ao estudo de OGs cosmológicas no contexto de outras teorias alternativas de gravitação.

3.2 A Equação de Palatini

Iniciaremos considerando perturbações tensoriais sobre um espaço-tempo de fundo geral.

Por simplicidade, definiremos um particular sistema de coordenadas chamado “sistema de coordenadas geodésicas”. Nesse sistema tomamos um ponto P arbitrário do espaço-tempo no qual ([d’ INVERNO, 1992](#)):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \doteq 0, \quad (3.2)$$

mas em geral:

$$\partial_{\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \neq 0. \quad (3.3)$$

O símbolo “ \doteq ” indica que a igualdade só é válida nesse sistema de coordenadas. Assim, o

tensor de Riemann fica:

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} \doteq \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}. \quad (3.4)$$

Consideremos, agora, uma variação da conexão $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ para uma nova conexão $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

Essa variação introduz uma modificação no tensor de Riemann da seguinte forma:

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} \rightarrow \tilde{R}^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} + \delta R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa}, \quad (3.6)$$

onde:

$$\delta R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} \doteq \partial_\kappa \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\kappa}, \quad (3.7)$$

ou ainda:

$$\delta R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} \doteq \nabla_\kappa \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\kappa}. \quad (3.8)$$

A última passagem que nos levou a (3.8) foi possível porque no sistema de coordenadas geodésicas a diferenciação ordinária é equivalente à diferenciação covariante. Essa é uma equação tensorial, portanto, se ela é válida em um sistema de coordenadas, então também o será em qualquer outro, o que nos permite escrever:

$$\delta R^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} = \nabla_\kappa \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\lambda_{\mu\kappa}. \quad (3.9)$$

E contraindo on índices λ e ν temos:

$$\delta R_{\mu\kappa} = \nabla_\kappa \delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \delta\Gamma^\sigma_{\mu\kappa}. \quad (3.10)$$

Esta relação tensorial para a variação no tensor de Riemann é a equação de Palatini.

3.3 Perturbações sobre uma geometria de fundo geral

Consideraremos na presente seção que as variações no tensor de Riemann são ocasionadas por pequenas perturbações sobre a métrica. A nova métrica, dita perturbada, assume a forma:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}, \quad |\delta g_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (3.11)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica de um espaço-tempo de fundo qualquer.

Utilizando (3.11) na definição da conexão métrica:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\lambda\rho}(\partial_{\nu}\tilde{g}_{\rho\mu} + \partial_{\mu}\tilde{g}_{\rho\nu} - \partial_{\rho}\tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (3.12)$$

e considerando apenas termos de primeira ordem na perturbação, a nova conexão fica:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + g^{\lambda\kappa}\gamma_{\mu\kappa\nu} - \delta g^{\lambda\kappa}g_{\sigma\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}, \quad (3.13)$$

onde:

$$\gamma_{\mu\kappa\nu} \equiv \frac{1}{2}(\partial_{\nu}\delta g_{\mu\kappa} + \partial_{\mu}\delta g_{\kappa\nu} - \partial_{\kappa}\delta g_{\mu\nu}), \quad (3.14)$$

e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é a conexão calculada a partir da métrica de fundo $g_{\mu\nu}$.

Comparando (3.5) e (3.13), vemos que a variação na conexão nesse caso corresponde a:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = g^{\lambda\kappa}\gamma_{\mu\kappa\nu} - \delta g^{\lambda\kappa}g_{\sigma\kappa}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}. \quad (3.15)$$

Utilizando a definição da diferenciação covariante de $\delta g_{\mu\nu}$, é possível reescrever (3.15) na forma:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_{\nu}\delta g_{\rho\mu} + \nabla_{\mu}\delta g_{\rho\nu} - \nabla_{\rho}\delta g_{\mu\nu}). \quad (3.16)$$

Como estamos assumindo apenas primeira ordem nas perturbações, as operações tensoriais que envolvem $\delta g_{\mu\nu}$ (tais como levantamento e abaixamento de índices, diferenciações covariantes, etc.) são realizadas utilizando-se a métrica de fundo $g_{\mu\nu}$. Assim, do ponto de vista operacional $\delta g_{\mu\nu}$ atua como um tensor qualquer definido sobre o espaço-tempo descrito por $g_{\mu\nu}$. Portanto, a relação (3.16) evidencia o caráter tensorial da perturbação da conexão, embora a conexão propriamente dita não seja um tensor.

Com (3.16) podemos encontrar o tensor de Ricci perturbado relacionando-o diretamente com as derivadas covariantes segundas de $\delta g_{\mu\nu}$. De (3.16) em (3.10) temos:

$$\delta R_{\mu\kappa} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\nabla_{\kappa}\nabla_{\mu}\delta g_{\rho\lambda} - \nabla_{\lambda}\nabla_{\kappa}\delta g_{\rho\mu} - \nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}\delta g_{\rho\kappa} + \nabla_{\lambda}\nabla_{\rho}\delta g_{\mu\kappa}). \quad (3.17)$$

O tensor de Einstein perturbado, por sua vez, relaciona-se com $\delta R_{\mu\nu}$ através de:

$$\delta G_{\mu}{}^{\nu} = g^{\kappa\nu}\delta R_{\mu\kappa} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\nu}\delta g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - R_{\mu\kappa}\delta g^{\kappa\nu}, \quad (3.18)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci calculado a partir da métrica não perturbada $g_{\mu\nu}$.

No decorrer de nossos cálculos utilizaremos as coordenadas harmônicas generalizadas (BICAK; KATZ, 2005). Para esse sistema de coordenadas, a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (3.19)$$

É fácil demonstrar que a condição (3.19) é equivalente a:

$$\nabla_\nu\delta\bar{g}^{\mu\nu} = 0, \quad (3.20)$$

onde definimos o tensor de perturbação traço-reverso:

$$\delta\bar{g}_{\mu\nu} \equiv \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\delta g, \quad (3.21)$$

com $\delta g \equiv g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$ e $\delta\bar{g} = -\delta g$.

De (3.17) em (3.18) encontramos o tensor de Einstein perturbado em termos de $\delta\bar{g}_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta G_\mu{}^\nu &= \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta\bar{g}_\mu{}^\nu + g^{\kappa\nu}R_{\sigma\kappa\mu\gamma}\delta\bar{g}^{\sigma\gamma} + \frac{1}{2}R_\sigma{}^\nu\delta\bar{g}^\sigma{}_\mu - \frac{1}{2}R_{\mu\sigma}\delta\bar{g}^{\sigma\nu} \\ &+ \frac{1}{2}R_\mu{}^\nu\delta\bar{g} + \frac{1}{2}\delta_\mu{}^\nu\delta\bar{g}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\delta_\mu{}^\nu\delta\bar{g}R. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como até o momento não especificamos a geometria de fundo, nem a teoria subjacente, a expressão (3.22) é uma relação válida para qualquer $g_{\mu\nu}$ e para qualquer teoria. Ela requer apenas que seja satisfeita a condição (3.20) para a perturbação.

Um caso particular, para o qual (3.22) simplifica-se consideravelmente, é o caso dos modos livres TT de OGs no contexto da RG. Além das condições (3.20) esses modos também satisfazem:

$$\delta\bar{g}_{0\nu}^{TT} = \delta\bar{g}^{TT} = 0, \quad (3.23)$$

e portanto $\delta\bar{g}_{\mu\nu}^{TT} = \delta g_{\mu\nu}^{TT}$. Para o vácuo, as equações de Einstein resultam em $R_{\mu\nu} = 0$ e $\delta G_{\mu\nu} = 0$ e de (3.22) ficamos com (GRISHCHUK, 1974):

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\delta g_{TTi}{}^j + 2g^{lj}R_{imnl}\delta g_{TT}^{mn} = 0, \quad (3.24)$$

onde os índices latinos indicam as componentes espaciais. Essa última, é uma equação geral da RG para o estudo de OGs compreendidas como perturbações sobre uma métrica de fundo qualquer.

3.4 Perturbações cosmológicas sem decomposição

Seja uma teoria geral de gravitação cujas equações de campo podem ser escritas na forma:

$$G_{\mu\nu} + F_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

onde além do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ e do tensor energia-momentum $T_{\mu\nu}$, consideramos um tensor geral $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(g^{\alpha\beta}, g_0^{\alpha\beta}, \varpi^\alpha, \varphi, \dots)$ que é dependente de teoria e pode ser uma função da métrica física $g^{\mu\nu}$, de alguma métrica definida *a priori* $g_0^{\mu\nu}$, de campos vetoriais ϖ^ν , de campos escalares φ e de derivadas dessas quantidades.

Supondo que exista uma solução cosmológica de tal teoria, podemos escrever as perturbações sobre uma métrica de fundo cosmológica. Adotaremos a métrica $g_{\mu\nu}$ como a métrica de Robertson-Walker escrita em coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\sigma^2, \quad (3.26)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e $d\sigma^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j$, onde:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \left[1 + \frac{1}{4}k(x^2 + y^2 + z^2) \right]^{-2}, \quad (3.27)$$

onde $k = 0, +1, -1$ dependendo se o espaço tridimensional correspondente à hipersuperfície $t = \text{const.}$ é plana, fechada ou aberta. Por simplicidade, desenvolveremos as perturbações apenas para o caso $k = 0$, portanto a métrica (3.26) fica:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.28)$$

ou ainda:

$$ds^2 = a^2(\eta) (-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j), \quad (3.29)$$

onde η é o tempo conforme definido por $d\eta = a^{-1}dt$.

Considerando essa métrica de fundo, a métrica perturbada é dada por:

$$ds^2 = (g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu, \quad (3.30)$$

com:

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2(\eta)h_{\mu\nu}(x^\alpha). \quad (3.31)$$

Utilizaremos também o tensor auxiliar:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (3.32)$$

onde $h = -\bar{h} = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ e $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. É possível demonstrar que $\delta\bar{g}_{\mu\nu} = a^2\bar{h}_{\mu\nu}$.

Com o elemento de linha (3.30) nas equações (3.25) é possível, então, obter as equações de campo perturbadas, que de forma geral podem se escritas como:

$$\delta G_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} = -8\pi [G\delta T_{\mu\nu} + \delta GT_{\mu\nu}], \quad (3.33)$$

onde $\delta G_{\mu\nu}$ para uma dada métrica foi calculado na seção anterior e $\delta T_{\mu\nu}$ é a perturbação no tensor energia-momentum do fluido perfeito. No intuito de levar em conta a variação da “constante” Newtoniana G que aparece em algumas teorias, incluímos a perturbação δG .

Assim, com essas considerações em (3.22) podemos encontrar as componentes do tensor de Einstein perturbado para primeira ordem em $h_{\mu\nu}$. Após um cálculo extenso somos levados a ¹ (ALVES et al., 2009b):

$$\delta G_0^0 = \frac{1}{2a^2} \left[-\bar{h}_0^{0''} + \nabla^2 \bar{h}_0^0 - 2\mathcal{H}\bar{h}_0^{0'} + 3(3\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\bar{h}_0^0 - (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\bar{h}_i^i + 4a\mathcal{H}\partial_i\bar{h}_0^i \right], \quad (3.34)$$

$$\delta G_0^i = \frac{1}{2a^2} \left[-\bar{h}_0^{i''} + \nabla^2 \bar{h}_0^i - 4\mathcal{H}\bar{h}_0^{i'} + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\bar{h}_0^i + 2a^{-1}\mathcal{H}\eta^{ij}(\partial_j\bar{h}_0^0 - \partial_k\bar{h}_j^k) \right], \quad (3.35)$$

$$\delta G_i^j = \frac{1}{2a^2} \left[-\bar{h}_i^{j''} + \nabla^2 \bar{h}_i^j - 2\mathcal{H}\bar{h}_i^{j'} + (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\bar{h}_k^k\delta_i^j - (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}')\bar{h}_0^0\delta_i^j - 4a\mathcal{H}\eta^{jk}\partial_{(k}\bar{h}_{i)0} \right]. \quad (3.36)$$

O “ ’ ” nas expressões anteriores denota diferenciação com respeito ao tempo conformal η , e definimos o parâmetro de Hubble para o tempo conforme como $\mathcal{H} \equiv a'/a$.

¹Todas as expressões que encontramos a partir deste ponto estão em termos do tempo conforme η . Para obtê-las, no entanto, primeiramente realizamos todos os cálculos tendo como variável temporal o tempo cósmico t e posteriormente fizemos a mudança de variável $a(\eta)d\eta = dt$.

O tensor energia-momentum para o fluido perfeito é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (3.37)$$

onde ρ é a densidade de energia, P é a pressão e $U_\nu = -U^\nu = (1, 0, 0, 0)$ é o quadrivetor de velocidade no referencial em repouso em relação ao fluido. Considerando perturbações de primeira ordem para cada uma dessas quantidades, o tensor energia -momentum altera-se para:

$$T_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}, \quad (3.38)$$

onde:

$$\delta T_{\mu}{}^{\nu} = (\rho + P)g^{\lambda\nu}(U_\mu \delta U_\lambda + \delta U_\mu U_\lambda) + (\delta\rho + \delta P)U_\mu U^\nu + \delta P \delta_{\mu}{}^{\nu} - (\rho + P)h^{\lambda\nu}U_\mu U_\lambda. \quad (3.39)$$

Utilizando a métrica perturbada tal qual dada anteriormente encontramos as componentes perturbadas de $T_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta T_0^0 &= -\delta\rho, & \delta T_0^i &= (\rho + P)(V^i + a^{-2}\bar{h}_0^i), \\ \delta T_i^0 &= (\rho + P)V_i, & \delta T_i^j &= \delta P \delta_i^j, \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $V_i = \delta U_i \ll 1$ é a parte espacial da quadrivelocidade perturbada.

Então, pelo cálculo das perturbações em primeira ordem do tensor $F_{\mu\nu}$ e utilizando o tensor de Einstein e o tensor energia-momentum perturbados dados acima, podemos escrever as equações de campo perturbadas para uma dada teoria.

Como veremos na seção que segue, devido à generalidade com que foram escritas, as equações acima estão na forma adequada para considerar estados extras de polarização de OGs em qualquer teoria alternativa de gravitação com equações de campo (3.25). Isso se deve ao fato de ainda não termos especificado qualquer informação a respeito da perturbação $h_{\mu\nu}$. Além disso, elas também são úteis para encontrar soluções sem qualquer decomposição, como uma extensão do trabalho de [Bicak et al. \(2007\)](#) realizado para a RG. Note que, a despeito da diferença de notação e do tensor adicional $F_{\mu\nu}$, um conjunto similar de equações pode ser encontrado nessa referência.

3.5 Decomposição por simetria espacial

Em cosmologia, é usual a caracterização das perturbações segundo sua simetria espacial, ou seja, perturbações escalares (ϕ , B , E e D), vetoriais (S_i e Q_i) e tensoriais (h_{ij}^{TT}). Cada qual seguindo sua lei de invariância perante transformações espaciais de coordenadas.

Esse tipo de caracterização é decorrente da, assim chamada, decomposição mínima (MUKHANOV et al., 1992):

$$\delta g_{\mu\nu} = a(\eta)^2 \begin{pmatrix} \phi & S_i + \partial_i B \\ S_i + \partial_i B & h_{ij}^{TT} + \partial_i Q_j + \partial_j Q_i + E\delta_{ij} + \partial_i \partial_j D \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Cada uma dessas perturbações, são funções dinâmicas que estão associadas, por exemplo, a perturbações de densidade e pressão no caso das escalares, de velocidade e vorticidade no caso das vetoriais e a tensão anisotrópica, quando presente, no caso das tensoriais. Quando a tensão anisotrópica não está presente, as perturbações tensoriais representam OGs livres. No presente trabalho estamos considerando apenas a presença do fluido perfeito e, portanto, a tensão anisotrópica pode ser desprezada.

No intuito de descrever outros modos de OGs, que não apenas os modos TT, utilizaremos a seguinte decomposição primeiramente apresentada por Bessada e Miranda (2009):

$$\delta \bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} \phi & S_i + \partial_i B \\ S_i + \partial_i B & \bar{h}_{ij} \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

onde a perturbação vetorial S^i é livre de divergência $\partial_i S^i = 0$. Note que estamos trabalhando de forma equivalente com o tensor perturbações traço reverso $\delta \bar{g}_{\mu\nu}$. Nessa abordagem, as quantidades ϕ , B e S_i são independentes da teoria considerada. Por outro lado, a decomposição da perturbação \bar{h}_{ij} depende do número de polarizações independentes de OGs que uma dada teoria apresenta.

Assumindo, por exemplo, que todas as amplitudes NP sejam não nulas, \bar{h}_{ij} pode ser escrito como uma soma das seis perturbações correspondentes a cada modo:

$$\bar{h}_{ij}(\mathbf{x}, \eta) = \sum_{r=1}^6 \epsilon_{ij}^{(r)} \bar{h}_{(r)}(\mathbf{x}, \eta), \quad (3.43)$$

onde $\epsilon_{ij}^{(r)}$ são os seis tensores de polarização.

Mais uma vez, sem perda de generalidade, assumiremos que o vetor de onda das OGs está orientado na direção $+z$. Então, é possível construir os seis $\epsilon_{ij}^{(r)}$ pela combinação de três vetores ortonormais:

$$\begin{aligned} \ell^i &= (1, 0, 0) \\ m^i &= (0, 1, 0) \\ n^i &= (0, 0, 1), \end{aligned} \quad (3.44)$$

da seguinte forma:

$$\epsilon_{(1)}^{ij} = n^i n^j, \quad (3.45)$$

$$\epsilon_{(2)}^{ij} = \ell^i n^j + \ell^j n^i, \quad (3.46)$$

$$\epsilon_{(3)}^{ij} = m^i n^j + m^j n^i, \quad (3.47)$$

$$\epsilon_{(4)}^{ij} = \ell^i \ell^j - m^i m^j, \quad (3.48)$$

$$\epsilon_{(5)}^{ij} = \ell^i m^j + \ell^j m^i, \quad (3.49)$$

$$\epsilon_{(6)}^{ij} = \ell^i \ell^j + m^i m^j. \quad (3.50)$$

Pode-se verificar que os tensores (3.45) – (3.50) são linearmente independentes e formam uma base ortogonal. Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{aligned} \epsilon_{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \epsilon_{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \epsilon_{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon_{(4)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \epsilon_{(5)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \epsilon_{(6)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Podemos ver que, a menos de uma constante, essas são justamente as matrizes de polarização que expandem as componentes da matriz de força \mathbf{S} , vistas no Capítulo 2

A expansão (3.43) pode ainda ser escrita numa forma mais intuitiva:

$$\bar{h}_{ij} = \pi_{ij} + \tau_{ij} + \chi_{ij} + \psi_{ij}, \quad (3.52)$$

onde quatro novos tensores foram definidos de acordo com seus valores de helicidade s e

as respectivas quantidades NP que eles geram:

$$\begin{aligned}
\pi_{ij} &\equiv \bar{h}_{ij}^{(1)} && \rightarrow && \Psi_2 \quad (s = 0) \\
\tau_{ij} &\equiv \bar{h}_{ij}^{(2)} + \bar{h}_{ij}^{(3)} && \rightarrow && \Psi_3 \quad (s = \pm 1) \\
\chi_{ij} &\equiv \bar{h}_{ij}^{(4)} + \bar{h}_{ij}^{(5)} && \rightarrow && \Psi_4 \quad (s = \pm 2) \\
\psi_{ij} &\equiv \bar{h}_{ij}^{(6)} && \rightarrow && \Phi_{22} \quad (s = 0)
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Como decorrência da definição dessas quantidades, temos as seguintes propriedades:

$$\chi_i^i = \tau_i^i = 0, \quad \partial_j \chi_i^j = \partial_j \psi_i^j = 0. \tag{3.54}$$

Das definições acima identificamos que as perturbações relacionadas a OGs que aparecem da RG são as componentes $\chi_{ij} = h_{ij}^{TT}$.

Uma vez que o número de estados de polarização de uma dada teoria sejam encontradas de forma inequívoca através do formalismo NP, lembrando que cada componente das OGs são linearmente independentes, podemos resumir o procedimento para calcular as equações de campo perturbadas de uma teoria geral com equações (3.25) da seguinte forma (ALVES et al., 2009b):

- ***Perturbações métricas escalares***

As perturbações métricas escalares, de forma geral, são:

$$\delta \bar{g}_{\mu\nu}^{(s)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} \phi & \partial_i B \\ \partial_i B & h_{ij}^{(e)} \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Se a teoria apresentar $\Psi_2 \neq 0$ e $\Phi_{22} \neq 0$, o termo $h_{ij}^{(e)}$ será escrito na forma:

$$h_{ij}^{(e)} = \pi_{ij} + \psi_{ij}, \tag{3.56}$$

com $\partial_j \psi_i^j = 0$.

Se a teoria apresentar $\Psi_2 = 0$ e $\Phi_{22} \neq 0$, uma componente dinâmica escalar, digamos D , deve ser adicionada e π_{ij} é suprimido:

$$h_{ij}^{(e)} = \partial_i \partial_j D + \psi_{ij}. \tag{3.57}$$

Por outro lado, se o cálculo das componentes NP resultar em $\Psi_2 = \Phi_{22} = 0$, as perturbações escalares serão decompostas da forma usual e não haverá OGs escalares ($s = 0$), isto é:

$$h_{ij}^{(e)} = \partial_i \partial_j D + E \delta_{ij}, \quad (3.58)$$

onde adicionamos a quantidade escalar E .

• ***Perturbações métricas vetoriais***

As perturbações métricas vetoriais podem ser escritas na forma geral:

$$\delta \bar{g}_{\mu\nu}^{(v)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & S_i \\ S_i & h_{ij}^{(v)} \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

onde $h_{ij}^{(v)}$ e o vetor S_i satisfazem:

$$\partial_i S^i = h_i^{i(v)} = 0 \quad (3.60)$$

Se a amplitude NP Ψ_3 for não-nula, as perturbações $h_{ij}^{(v)}$ serão dadas por:

$$h_{ij}^{(v)} = \tau_{ij}, \quad (3.61)$$

com $\tau_i^i = 0$.

De outra forma, se $\Psi_3 = 0$, não haverá OGs vetoriais ($s = \pm 1$) e teremos a representação usual em termos da quantidade vetorial Q_i :

$$h_{ij}^{(v)} = \partial_i Q_j + \partial_j Q_i, \quad (3.62)$$

onde, de (3.60) Q_i é livre de divergência $\partial_i Q^i = 0$.

• ***Perturbações métricas tensoriais***

Finalmente, as perturbações métricas tensoriais são construídas com a utilização do tensor simétrico χ_{ij} , o qual satisfaz as condições:

$$\chi_i^i = \partial_j \chi_i^j = 0. \quad (3.63)$$

Assim, as componentes tensoriais correspondentes a OGs com $s = \pm 2$ ficam escritas na

forma usual que é independente de teoria:

$$\delta\bar{g}_{\mu\nu}^{(t)} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \chi_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Contando o número de componentes que utilizamos na construção de $\delta\bar{g}_{\mu\nu}$ e o número de restrições, vemos que existem quatro funções para perturbações escalares, quatro funções para perturbações vetoriais e duas funções para perturbações tensoriais. Assim, como esperado, $\delta\bar{g}_{\mu\nu}$ apresenta dez componentes independentes.

Para a RG, como apenas $\Psi_4 \neq 0$, existem somente os modos tensoriais de OGs. Portanto, para esses modos teremos:

$$\delta T_i^{(t)j} = 0 \Rightarrow \delta G_i^{(t)j} = 0, \quad (3.65)$$

que, substituindo a matriz (3.64), resulta em:

$$\chi_i^{j'''} + 2\mathcal{H}\chi_i^{j''} - \nabla^2\chi_i^j = 0. \quad (3.66)$$

Essa expressão pode ser obtida alternativamente diretamente da relação para os modos TT dada pela equação (3.24).

3.6 Modos de OGs cosmológicas em teorias escalares-tensoriais

No caso das teorias escalares-tensoriais, vemos que as equações de campo (2.57) são da forma geral (3.25) fazendo a identificação $G = \varphi^{-1}$ e:

$$F_{\mu\nu}^\varphi = \frac{\omega(\varphi)}{\varphi^2} \left(\varphi_{;\mu}\varphi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi_{;\alpha}\varphi^{;\alpha} \right) + \frac{1}{\varphi}(\varphi_{;\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square\varphi). \quad (3.67)$$

Então as equações de campo perturbadas para esse caso ficam:

$$\delta G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi}{\varphi} \left(\delta T_{\mu\nu} - \frac{\delta\varphi}{\varphi} T_{\mu\nu} \right) - \delta F_{\mu\nu}^\varphi. \quad (3.68)$$

Para encontrar o tensor perturbado $\delta F_{\mu\nu}^\varphi$ precisamos levar em conta perturbações de primeira ordem do campo escalar $\tilde{\varphi} = \varphi + \delta\varphi$ e do parâmetro de acoplamento $\tilde{\omega} = \omega + \delta\omega$.

Assim encontramos:

$$\begin{aligned}
\delta F_\mu^{\varphi\nu} = & + \omega\varphi^{-2}[\varphi_{;\mu}\delta\varphi^{;\nu} + \delta\varphi_{;\mu}\varphi^{;\nu} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu(2\varphi_{;\lambda}\varphi^{;\lambda} - \delta g^{\lambda\rho}\varphi_{;\lambda}\varphi_{;\rho}) - \frac{1}{2}g^{\rho\nu}\delta g_{\mu\rho}\varphi_{;\lambda}\varphi^{;\lambda}] \\
& + \delta\omega\varphi^{-2}[\varphi_{;\mu}\varphi^{;\nu} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu\varphi_{;\lambda}\varphi^{;\lambda}] + \varphi^{-1}[\delta(\varphi_{;\mu\rho})g^{\rho\nu} - \delta_\mu^\nu\delta(\square\varphi) - g^{\rho\nu}\delta g_{\mu\rho}\square\varphi] \\
& - \varphi^{-2}\delta\varphi[2\omega\varphi^{-1}(\varphi_{;\mu}\varphi^{;\nu} - \frac{1}{2}\delta_\mu^\nu\varphi_{;\lambda}\varphi^{;\lambda}) + (\varphi_{;\mu}{}^\nu - \delta_\mu^\nu\square\varphi)] \\
& - \delta g^{\rho\nu}[\varphi^{-2}\omega(\varphi_{;\mu}\varphi_{;\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\rho}\varphi_{;\lambda}\varphi^{;\lambda}) + \varphi^{-1}(\varphi_{;\mu\rho} - g_{\mu\rho}\square\varphi)]. \tag{3.69}
\end{aligned}$$

Do Capítulo 2 sabemos que, para a forma geral da teoria, temos:

$$\Psi_2 \neq 0, \quad \Psi_3 = 0, \quad \Psi_4 \neq 0 \quad \text{e} \quad \Phi_{22} \neq 0, \tag{3.70}$$

então as perturbações devem ser escritas na forma:

$$\delta\bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} \phi & S_i + \partial_i B \\ S_i + \partial_i B & \pi_{ij} + \chi_{ij} + \psi_{ij} + \partial_i Q_j + \partial_j Q_i \end{pmatrix}. \tag{3.71}$$

Utilizando ainda o tensor de Einstein perturbado e o tensor energia-momentum previamente calculados da seção 3.4, podemos, enfim, avaliar as equações que descrevem OGs cosmológicas para teorias escalares-tensoriais descritas pela ação (2.56). Com todos esses ingredientes somos levados a (ALVES et al., 2009b):

Escalares

$$\begin{aligned}
\phi'' & + 2\mathcal{H}\phi' - (9\mathcal{H}^2 - 3\mathcal{H}')\phi - \nabla^2\phi - \left[\frac{\omega}{2}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + \frac{\varphi''}{\varphi}\right](\phi + \xi_i^i) \\
- \frac{1}{2}[(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)]\xi_i^i - 2a\mathcal{H}\nabla^2 B & = 16\pi a^2\varphi^{-1}\left(-\delta\rho + \frac{\delta\varphi}{\varphi}\rho\right) - 2\Delta_1, \tag{3.72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial^i B)'' & + 4\mathcal{H}(\partial^i B)' - \nabla^2(\partial^i B) + (\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\partial^i B + \left[\frac{\varphi''}{\varphi} + \omega\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2\right]\partial^i B \\
- 2\mathcal{H}a^{-1}(2\partial^i\phi + \partial_k\pi^{ik}) & = 16\pi G a^2(\rho + P)(V_{\parallel}^i + \partial^i B) + 2\Delta_2^i, \tag{3.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \xi_i^{j''} + 2\mathcal{H}\xi_i^{j'} - \nabla^2\xi_i^j + (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\xi_k^k\delta_i^j - 4\mathcal{H}a(\partial_i\partial^j B) \\
& + (\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)\phi\delta_i^j = \frac{16\pi a^2}{\varphi} \left[\delta P\delta_i^j - \frac{\delta\varphi}{\varphi}P\delta_i^j \right] + 2\Delta_{3i}{}^j \\
& + \frac{\varphi'}{\varphi} \left[\mathcal{H} \left(\bar{\xi}_i^j + \frac{1}{2}\delta_i^j\phi \right) + \frac{1}{4}\omega\frac{\varphi'}{\varphi}(\phi + \xi_k^k)\delta_i^j \right]
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Tensoriais

$$\chi_i^{j''} + \left(2\mathcal{H} + \frac{\varphi'}{\varphi} \right) \chi_i^{j'} + 2\mathcal{H}\frac{\varphi'}{\varphi}\chi_i^j - \nabla^2\chi_i^j = 0. \tag{3.75}$$

Nas equações acima, definimos $\xi_i^j = \pi_i^j + \psi_i^j$, e V_{\parallel}^i é a componente de V^i que é paralela à direção de propagação. As quantidades perturbadas Δ_1 , Δ_2^i and $\Delta_{3i}{}^j$ levam em conta perturbações do campo φ e de suas derivadas. Elas são definidas como segue:

$$\Delta_1 = \omega\frac{\varphi'}{\varphi} \left(\frac{\delta\varphi}{\varphi} \right)' + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 \delta\omega + 3\mathcal{H}\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{\delta\varphi}{\varphi} + a^2 \left[\frac{\delta(\varphi;_{00})}{\varphi} + \frac{\delta(\square\varphi)}{\varphi} \right], \tag{3.76}$$

$$\Delta_2^i = \omega\frac{\varphi'}{\varphi}\partial^i \left(\frac{\delta\varphi}{\varphi} \right) + \delta^{ij}\frac{\delta(\varphi;_{0j})}{\varphi}, \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{3i}{}^j &= \omega\frac{\varphi'}{\varphi} \left(\frac{\delta\varphi}{\varphi} \right)' \delta_i^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 \delta\omega\delta_i^j + \left(a^2\frac{\square\varphi}{\varphi} + \mathcal{H}\frac{\varphi'}{\varphi} \right) \frac{\delta\varphi}{\varphi}\delta_i^j \\
&+ \frac{1}{\varphi} \left[\delta(\varphi;_{il})\delta^{lj} - a^2\delta(\square\varphi)\delta_i^j \right].
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Para o caso Brans-Dicke basta substituir π_i^j por $\partial_i\partial_j D$ e $\xi_i^j = \partial_i\partial_j D + \psi_i^j$, além disso a perturbação da constante de acoplamento será nula $\delta\omega = 0$.

A equação para perturbações tensoriais (3.75) foi estudada por [Barrow et al. \(1993\)](#) e [de GARCIA MAIA e Barrow \(1994\)](#) para uma variedade de modelos. Ela representa a evolução de OGs livres com helicidade $s \pm 2$ nessas teorias. Como vemos, esses modos não se acoplam com perturbações do fluido perfeito e são geradas quantum-mecanicamente devido a perturbações do vácuo nas primeiras frações de segundo do Universo jovem. Elas são, então, amplificadas pela expansão do Universo devido ao processo conhecido como amplificação superadiabática ([GRISHCHUK, 1974](#)). Nesse caso, o campo escalar φ contribui

para o potencial cosmológico que gera a amplificação, além de influenciar a cosmologia de fundo alterando o comportamento do fator de escala $a(\eta)$.

Com relação às perturbações escalares, as equações que regem a dinâmica dos modos correspondentes às amplitudes Ψ_2 e Φ_{22} são dadas pela equação (3.74). Essa equação, consideravelmente mais complicada do que aquela para o caso tensorial, apresenta algumas novas características físicas. Primeiramente, note a presença do termo δP na equação de evolução, isso implica que OGs estão agora acopladas a perturbações do fluido perfeito. Elas também estão acopladas a perturbações do campo escalar φ devido à presença do termo $\delta\varphi$ e suas derivadas. Veja também que a presença das variáveis dinâmicas escalares B e ϕ fazem do sistema de três equações (3.72), (3.73) e (3.74), um sistema acoplado. Portanto, uma compreensão completa da evolução de OGs com helicidade $s = 0$ requer o conhecimento da evolução das perturbações escalares e, similarmente, esses modos de OGs afetam a evolução das perturbações escalares.

3.7 Modos de OGs cosmológicas na teoria bimétrica com grávitons massivos

Para o caso da teoria bimétrica, as equações de campo são dadas por (2.76) e identificando com as equações para a teoria geral (3.25) temos $F^{\mu\nu} = -m^2 M^{\mu\nu}$. Para calcular as componentes perturbadas do tensor massivo (2.77) lembremos que apenas a métrica dinâmica $g_{\mu\nu}$ sofre perturbações. A métrica plana não dinâmica $(g_0)_{\mu\nu}$, por definição, não pode gerar instabilidades gravitacionais que contribuam para a formação de estruturas ou para ondas gravitacionais de origem cosmológica. Isso se deve justamente ao seu caráter “não físico”, além disso, ela não entra de forma direta na equação da geodésica que governa o movimento de partículas teste sob a ação de campos gravitacionais.

Assim, perante uma pequena perturbação na métrica física $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, o tensor massivo perturbado fica:

$$\delta M^{\mu\nu} = (g_0^{-1})^{\mu\sigma} \left[\delta g_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} (g_0)_{\sigma\rho} (g_0^{-1})^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right] (g_0^{-1})^{\rho\nu}. \quad (3.79)$$

Para o cálculo das componentes de (3.79) consideremos a métrica $(g_0)_{\mu\nu}$ como sendo o métrica de Minkowski em coordenadas cartesianas, ou seja:

$$ds_0^2 = -dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.80)$$

De acordo com de PAULA et al. (2004) e com nossos cálculos do Capítulo 2, todas as

quantidades NP para essa teoria são não nulas:

$$\Psi_2 \neq 0, \quad \Psi_3 \neq 0, \quad \Psi_4 \neq 0 \quad \text{e} \quad \Phi_{22} \neq 0. \quad (3.81)$$

Portanto, as perturbações na teoria bimétrica de Visser devem ser escritas na forma:

$$\delta \bar{g}_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} \phi & S_i + \partial_i B \\ S_i + \partial_i B & \pi_{ij} + \tau_{ij} + \chi_{ij} + \psi_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Com (3.82) nas equações de campo perturbadas (3.33), calculando as componentes de $\delta F_{\mu\nu}$ e com a ajuda das componentes perturbadas do tensor de Einstein e do tensor energia-momentum calculados na seção 3.4, obtemos as equações de campo perturbadas para OGs no contexto da teoria de Visser considerando cada grupo de perturbações (ALVES et al., 2009b):

Escalares

$$\begin{aligned} \phi'' &+ 2\mathcal{H}\phi' - \nabla^2\phi - (9\mathcal{H}^2 - 3\mathcal{H}' - m^2a^2)\phi \\ &- [(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) - m^2a^2(a^2 - 1)]\xi_i^i - 4a\mathcal{H}\nabla^2 B = -16\pi Ga^2\delta\rho, \end{aligned} \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned} (\partial^i B)'' &+ 4\mathcal{H}(\partial^i B)' - \nabla^2(\partial^i B) + \frac{1}{2}[2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) + m^2a^4(3 - a^2)]\partial^i B \\ &- 2\mathcal{H}a^{-1}(2\partial^i\phi + \partial_k\pi^{ik}) = 16\pi Ga^2(\rho + P)(V_{\parallel}^i + \partial^i B), \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} \xi_i^{j''} &+ 2\mathcal{H}\xi_i^{j'} - \nabla^2\xi_i^j - (\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\xi\delta_i^j + \frac{1}{2}m^2a^4(a^2 + 1)\xi_i^j \\ &+ 4\mathcal{H}a(\partial_i\partial^j B) - \frac{1}{2}[2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) - m^2a^4(a^2 - 1)]\phi\delta_i^j = 16\pi Ga^2\delta P\delta_i^j. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Vetoriais

$$\begin{aligned} S^{i''} &+ 4\mathcal{H}S^{i'} - \nabla^2 S^i + \frac{1}{2}[2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) - m^2a^4(a^2 - 3)]S^i \\ &+ 2\mathcal{H}a^{-1}\partial_k\tau^{ik} = 16\pi Ga^2(\rho + P)(V_{\perp}^i + S^i), \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\tau_i^{j''} + 2\mathcal{H}\tau_i^{j'} - \nabla^2\tau_i^j + \frac{1}{2}m^2a^4(a^2 + 1)\tau_i^j + 4\mathcal{H}a\eta^{kj}\partial_{(i}S_{k)} = 0. \quad (3.87)$$

Tensoriais

$$\chi_i^{j''} + 2\mathcal{H}\chi_i^{j'} - \nabla^2\chi_i^j + \frac{1}{2}m^2a^4(a^2 + 1)\chi_i^j = 0. \quad (3.88)$$

Assim como no caso estudado na última seção, os modos correspondentes a amplitude NP Ψ_4 , agora descritos pela equação (3.88), são modos livres. Nesse caso, é o novo termo que contém m^2 que contribui para a amplificação de OGs. Estudaremos detalhadamente as soluções para essa equação no próximo Capítulo.

As equações para os modos escalares ($s = 0$) são agora descritos pelo conjunto (3.83), (3.84) e (3.85). Esse sistema é similar ao caso das teorias escalares-tensoriais, exceto pela perturbação do campo escalar $\delta\varphi$. Novamente, essas três equações devem ser resolvidas simultaneamente para encontrar a evolução de OGs cosmológicas de helicidade $s = 0$ e das perturbações escalares.

Todavia, ao contrário do que acontece com a teoria escalar-tensorial, também temos agora OGs com helicidade $s \pm 1$ que correspondem a amplitude Ψ_3 . A evolução das amplitudes de OGs para esses modos é descrita pela equação (3.87). Note que essa equação difere de (3.88) apenas pela presença do termo que contém S^i . A presença desse termo torna esse modo acoplado às perturbações vetoriais, uma vez que S^i está acoplado às perturbações vetoriais do fluido através da equação (3.86).

Na tabela 3.1 apresentamos as equações que regem a evolução dos modos livres (tensoriais) de OGs para algumas teorias alternativas de gravitação.

Relatividade Geral	$\chi_i^{j'''} + 2\mathcal{H}\chi_i^{j'} - \nabla^2\chi_i^j = 0$
Teorias escalares-tensoriais	$\chi_i^{j'''} + \left(2\mathcal{H} + \frac{\varphi'}{\varphi}\right)\chi_i^{j'} + 2\mathcal{H}\frac{\varphi'}{\varphi}\chi_i^j - \nabla^2\chi_i^j = 0$
Teorias $f(R)$ (form. métrico)	$\chi_i^{j'''} + \left[2\mathcal{H} + \frac{1}{df/dR} \left(\frac{df}{dR}\right)'\right]\chi_i^{j'} - \nabla^2\chi_i^j = 0$
Teoria de Visser	$\chi_i^{j'''} + 2\mathcal{H}\chi_i^{j'} + \frac{1}{2}m^2a^4(a^2 + 1)\chi_i^j - \nabla^2\chi_i^j = 0$

Tabela 3.1 - Equações de OGs cosmológicas para os modos $+$ e \times das teorias alternativas de gravitação que discutimos no presente trabalho. Esses modos não acoplam-se ao fluido cósmico exceto quando uma componente de tensão anisotrópica está presente. A equação para uma teoria $f(R)$ geral pode ser encontrada na referência (de GARCIA MAIA, 1994).

4 ESPECTROS DE ONDAS GRAVITACIONAIS PRIMORDIAIS

No presente capítulo nos concentraremos nas soluções de OGs primordiais “livres”. Ou seja, os modos TT correspondentes a amplitude Ψ_4 que, como vimos, não se acoplam com as perturbações do fluido perfeito e, portanto, trazem informações diretas da cosmologia de fundo tal qual mapeada pelo parâmetro de Hubble $\mathcal{H}(\eta)$. Como ficará claro, o modelo inflacionário subjacente é o principal agente de modificações no espectro do tempo presente. No entanto, nos ocuparemos também com as teorias alternativas de gravitação. Essas teorias podem deixar assinaturas no espectro de OGs primordiais? Os modos TT para o caso das teorias escalares-tensoriais e $f(R)$ já foram tratados nas referências (BARROW et al., 1993; de GARCIA MAIA; BARROW, 1994; de GARCIA MAIA, 1994). Assim, além de um tratamento detalhado no contexto da RG, solucionando a equação (3.66), nos concentraremos nas soluções da equação (3.88) para a teoria bimétrica de Visser. Como temos feito, trataremos apenas do caso de Universo plano ($k = 0$). No contexto da RG, o tratamento da criação cosmológica de grávitons para o caso de Universos com geometrias elípticas ($k = +1$) e hiperbólicas ($k = -1$) pode ser encontrado, por exemplo, na referência (de GARCIA MAIA; LIMA, 1996), onde os autores utilizam o método de cálculo dos coeficientes de Bogoliubov relacionados à transição entre as eras cósmicas.

4.1 Equações fundamentais e o mecanismo de amplificação superadiabática

As perturbações descritas pelas equações (3.66) e (3.88) podem ser expandidas em harmônicos espaciais de Fourier, da seguinte forma:

$$\chi_{ij}(\eta, \mathbf{x}) = \frac{\mathcal{C}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{n} \sum_{r=+, \times} \epsilon_{ij}^r(\mathbf{n}) \frac{1}{\sqrt{2n}} \left[h_n^r(\eta) e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} c_{\mathbf{n}}^r + h_n^{r*}(\eta) e^{-i\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}} c_{\mathbf{n}}^{r\dagger} \right], \quad (4.1)$$

onde para um campo gravitacional clássico, as quantidades $c_{\mathbf{n}}^r$ e $c_{\mathbf{n}}^{r\dagger}$ são números complexos arbitrários, $h_n^r(\eta)$ são as funções dos modos e \mathcal{C} é uma constante de normalização que para OGs é $\mathcal{C} = \sqrt{16\pi} \ell_{Pl}$ (BASKARAN et al., 2006, e.g.) onde ℓ_{Pl} é o comprimento de Planck.

Também nomeamos \mathbf{n} como o vetor de onda comóvel que se relaciona com o número de onda comóvel por $n = \sqrt{\delta_{ij} n^i n^j}$. O número de onda comóvel é aquele que permanece constante com a expansão do Universo, isto é, ele é independente do tempo. Sua relação com o número de onda “físico” k é dada por:

$$n = \frac{2\pi a}{\lambda} = ka, \quad (4.2)$$

onde λ é o comprimento de onda comóvel da OG. Utilizaremos sempre a convenção do fator de escala como sendo $a(\eta_H) = 1$ no tempo presente η_H . Assim, pela definição acima,

no tempo presente o número de onda comóvel iguala-se ao número de onda físico $n = k$.

Para ondas gravitacionais massivas, a relação mais adequada entre o número de onda n e a frequência ω é a seguinte relação de dispersão:

$$n = \sqrt{\omega^2 - m^2}a(\eta). \quad (4.3)$$

Veja que essa relação reduz-se àquela do caso de OGs massivas num fundo Minkowski (VISSER, 1998) que é equivalente a fazermos o fator de escala uma constante $a = 1$ (Veja derivação detalhada no Apêndice A). Além disso, a relação (4.3) é a mesma utilizada por Parker (1969) para um campo escalar massivo propagando-se num fundo Robertson-Walker. O caso da RG é recuperado quando a massa vai a zero e temos:

$$n = ka(\eta) = \omega a(\eta). \quad (4.4)$$

Quando consideramos perturbações quantizadas sobre um fundo clássico, $c_{\mathbf{n}}^r$ e $c_{\mathbf{n}}^{r\dagger}$ são operadores de aniquilação e criação, respectivamente, que satisfazem as condições:

$$\left[c_{\mathbf{n}}^{r'}, c_{\mathbf{m}}^{r\dagger} \right] = \delta_{r'r} \delta^3(\mathbf{n} - \mathbf{m}), \quad c_{\mathbf{n}}^r |0\rangle = 0, \quad (4.5)$$

onde $|0\rangle$ (para cada \mathbf{n} e r) é um estado de vácuo inicial fixado que é definido em algum tempo η_0 num passado remoto, antes do regime de amplificação superadiabática (que estudaremos mais adiante) para cada modo ter iniciado.

Utilizando (4.1) juntamente com essas propriedades podemos encontrar a variância das perturbações:

$$\langle 0 | \chi_{ij}(\eta, \mathbf{x}) \chi^{ij}(\eta, \mathbf{x}) | 0 \rangle = \frac{\mathcal{C}^2}{2\pi^2} \int_0^\infty n^2 \sum_{r=+,\times} |h_n^r(\eta)|^2 \frac{dn}{n}. \quad (4.6)$$

A quantidade adimensional:

$$h^2(n, \eta) = \frac{\mathcal{C}^2}{2\pi^2} n^2 \sum_{r=+,\times} |h_n^r(\eta)|^2, \quad (4.7)$$

dá o valor médio quadrático das perturbações num intervalo logarítmico de n e é chamado de espectro de potência das OGs. Assim, o espectro de potência para um dado tempo η pode ser escrito na forma:

$$h(n, \eta) = \frac{4\ell_{Pl}}{\sqrt{\pi}} n |h_n(\eta)|. \quad (4.8)$$

Portanto, com a expansão em modos de Fourier (4.1), reduzimos o problema à evolução dinâmica das funções dos modos $h_n^r(\eta)$ para cada modo \mathbf{n} . A partir de (3.88) encontramos para cada modo:

$$h'' + 2\mathcal{H}h' + \left[n^2 + \frac{1}{2}m^2a^4(a^2 + 1) \right] h = 0, \quad (4.9)$$

onde omitimos a nomenclatura dos modos e das polarizações. No que segue, por simplicidade, trabalharemos somente com o formalismo clássico.

A evolução das OGs pode ainda ser descrita alternativamente pela função $\mu(\eta) = h(\eta)a(\eta)$ que origina uma equação do tipo Schrödinger:

$$\mu'' + [n^2 - V(\eta)] \mu = 0, \quad (4.10)$$

onde o “potencial” $V(\eta)$ é dado por:

$$V(\eta) = \frac{a''}{a} - \frac{1}{2}m^2a^4(a^2 + 1). \quad (4.11)$$

A equação (4.10) foi encontrada primeiramente por Grishchuk (1974) no contexto da RG ($m = 0$) e será para nós a equação mestra no estudo de OGs geradas no Universo primitivo. O termo $V(\eta)$ atua como um potencial efetivo que, uma vez especificado, torna possível encontrar as soluções evolutivas para OGs em cada fase cosmológica. Note também que $V(\eta)$ encerra toda a informação que precisamos saber a respeito da cosmologia de fundo, além de trazer modificações provenientes do termo de massa. Na figura 4.1 ilustramos o comportamento típico desses potenciais.

Se para um certo intervalo de tempo tivermos a condição $n^2 \gg |V(\eta)|$ satisfeita, as soluções da equação (4.10) terão a forma $\mu = e^{\pm im\eta}$, então teremos ondas de altas frequências com amplitudes que decaem adiabaticamente:

$$h \propto \frac{1}{a} \sin(n\eta + \theta). \quad (4.12)$$

Assim, as amplitudes das ondas para as quais $n^2 \gg |V(\eta)|$ para todos os valores de η decaem adiabaticamente para todo η .

Por outro lado, se para um dado n houver um intervalo de tempo no qual $n^2 \ll |V(\eta)|$, as soluções da equação (4.10) não serão mais oscilatórias. Para o caso $m = 0$ por exemplo,

ou quando o termo massivo é desprezível, temos $V(\eta) = a''/a$ e de (4.10) vem:

$$\mu_1 \propto a, \quad \mu_2 \propto a \int a^{-2} d\eta. \quad (4.13)$$

Assim, ondas que satisfazem $n^2 \ll |V(\eta)|$ para algum η encontram a barreira de potencial e são governadas pelas soluções μ_1 e μ_2 . A amplitude μ_f da função $\mu(\eta)$ no instante imediato após a saída da onda depende da fase inicial θ . Tomando a média quadrática de μ_f sobre a fase inicial, ou seja, integrando de 0 a 2π , leva para a contribuição dominante da solução μ_1 . Isso significa que o fator adiabático $1/a$ é cancelado e a amplitude h permanece constante na região ocupada pela barreira, ao contrário das ondas que estão sobre a barreira que decaem adiabaticamente. Então, a amplitude de saída h_f é igual a amplitude de entrada h_i e é maior do que seria se a onda se comportasse adiabaticamente. Essa é a essência do mecanismo de amplificação superadiabática (GRISHCHUK, 1993a; GRISHCHUK, 1974).

4.2 “Cosmologias” de fundo

Consideremos inicialmente um Universo de três fases, sendo elas: inflação, domínio da radiação (fluido com equação de estado $P = \rho/3$) e domínio da matéria (fluido com equação de estado $P = 0$).

O fator de escala para cada uma dessas fases em termos do tempo conformal, obtido a partir das equações de campo de fundo para $m = 0$, pode ser escrito da seguinte forma¹:

$$a(\eta) = \begin{cases} a_\ell^{1+\beta} |\eta - \eta_\ell|^{1+\beta}, & \eta \leq \eta_i \\ H_0^2 \eta_{eq} (2\eta - \eta_{eq})/4, & \eta_i \leq \eta \leq \eta_{eq} \\ H_0^2 \eta^2/4, & \eta \geq \eta_{eq} \end{cases} \quad (4.14)$$

onde η_i é o tempo no qual a fase inflacionária termina e inicia-se a época de domínio da radiação e η_{eq} é o tempo de equivalência entre as densidades de energia da radiação e da matéria. Definimos também o parâmetro de Hubble para o tempo atual $H_0 = H(\eta_H)$, assim vemos que quando $\eta = \eta_H$ e $a(\eta_H) = 1$ temos $\eta_H = 2/H_0$.

A forma geral como escrevemos o fator de escala na era inflacionária é uma modelagem simples da inflação, onde β é um parâmetro tal que $1 + \beta < 0$. O caso especial $\beta = -2$ é

¹Ao contrário do que em geral aparece na literatura de OGs primordiais, convencionamos utilizar o fator de escala adimensional e o tempo conforme medido em segundos.

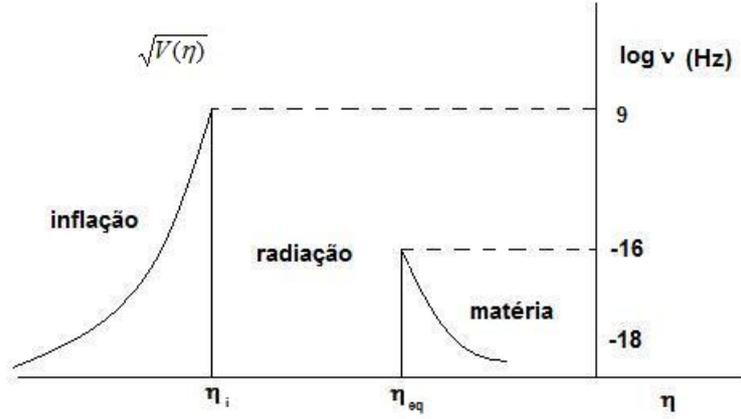


Figura 4.1 - Ilustração da evolução da raiz do potencial cosmológico $\sqrt{V(\eta)}$, para $m = 0$ que entra na equação (4.10) para um modelo de três fases: inflação, domínio da radiação e domínio da matéria. Os valores dados são aproximadamente os valores reais para os quais o espectro é influenciado numa certa faixa de frequências

a inflação com expansão do tipo de Sitter. Se a expansão inflacionária é ocasionada por um campo escalar, β está relacionado com os, assim chamados, parâmetros *slow-roll*, η e ϵ (LINDE, 2005), como segue: $\beta = -2 + (\eta - 3\epsilon)$. Nessa classe de modelos inflacionários, temos usualmente $\beta \leq -2$. Além disso, os resultados observacionais do WMAP também indicam que β deve ser ligeiramente menor que -2 (KOMATSU et al., 2009). Todavia, para mostrar como diferentes β podem influenciar o espectro, nós permitiremos que $\beta > -2$.

As constantes a_ℓ e η_ℓ podem ser encontradas a partir das condições de continuidade do fator de escala e de sua derivada no tempo η_i . Assim, podemos relacioná-las com o valor do parâmetro de Hubble \mathcal{H}_i e do fator de escala a_i naquele tempo e ficamos com:

$$a_\ell = \frac{\mathcal{H}_i a_i^{1/(1+\beta)}}{|1+\beta|}, \quad |\eta_i - \eta_\ell| = \frac{|1+\beta|}{\mathcal{H}_i}. \quad (4.15)$$

Como consequência de (4.14), temos o seguinte comportamento para o potencial cosmológico $V(\eta)$ para $m = 0$:

$$V(\eta) = \begin{cases} \beta(1+\beta)/|\eta - \eta_\ell|^2, & \eta \leq \eta_i \\ 0, & \eta_i \leq \eta \leq \eta_{eq} \\ 2/\eta^2, & \eta \geq \eta_{eq} \end{cases} \quad (4.16)$$

Na figura 4.1 ilustramos o comportamento de $\sqrt{V(\eta)}$ que tem unidades de frequência e nos mostra para que valores de frequência $V(\eta)$ pode ser relevante para as soluções de (4.10).

Outra informação importante que podemos extrair desse modelo simples são os valores dos tempos de transição η_i e η_{eq} em termos dos valores do redshift nesses tempos. Lembrando que $a = 1/(1+z)$, onde z é o redshift, e considerando o fator de escala na época da matéria temos:

$$\eta_{eq} = \frac{2}{H_0 \sqrt{1+z_{eq}}}. \quad (4.17)$$

Unindo esse resultado ao fator de escala da época da radiação, para $\eta = \eta_i$ temos:

$$\eta_i = \frac{1}{H_0} \left[\frac{2+z_i+z_{eq}}{(1+z_i)\sqrt{1+z_{eq}}} \right]. \quad (4.18)$$

Assim, uma vez conhecidos z_i e z_{eq} podemos encontrar os valores dos tempos conformes de transição.

Na maior parte dos casos, no entanto, não é possível encontrar expressões analíticas para o fator de escala e, conseqüentemente, para $V(\eta)$. Mesmo para esses casos, os valores de η_i e η_{eq} dados acima são uma boa aproximação.

Assumindo ainda $m = 0$, consideremos, por exemplo, o modelo Λ CDM para o qual as equações de campo de fundo fornecem o seguinte parâmetro de Hubble:

$$\mathcal{H}_{\Lambda CDM}^2 = H_0^2 a^2 \left[\frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \Omega_\Lambda \right], \quad \eta \geq \eta_i, \quad (4.19)$$

onde assumimos a presença simultânea de radiação, matéria e a componente de energia escura. Acima, definimos o parâmetro de densidade relativa $\Omega_i = \rho_i/\rho_c$ para cada componente i com densidade de energia ρ_i e $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ é a densidade de energia crítica necessária para que tenhamos um Universo plano. Nesse caso, o parâmetro de Hubble descrito acima é válido para tempos $\eta \geq \eta_i$, enquanto para tempos menores continuamos considerando o fator de escala inflacionário que descrevemos anteriormente.

Utilizando valores numéricos para cada um dos parâmetros em (4.19): $H_0 = 100h \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, $h = 0,71$, $\Omega_r = 5 \times 10^{-5}$, $\Omega_m = 0,27$ e $\Omega_\Lambda = 0,73$ (KOMATSU et al., 2009), encontramos a evolução do fator de escala numericamente solucionando (4.19). Adotando ainda $z_{eq} \sim 3.000$ e $z_i \sim 10^{29}$ encontramos $(\eta_i/\eta_H) \sim 5,3 \times 10^{-3}$, onde $\eta_H = 3,4/H_0$ é o valor atual do tempo conforme encontrado a partir da solução

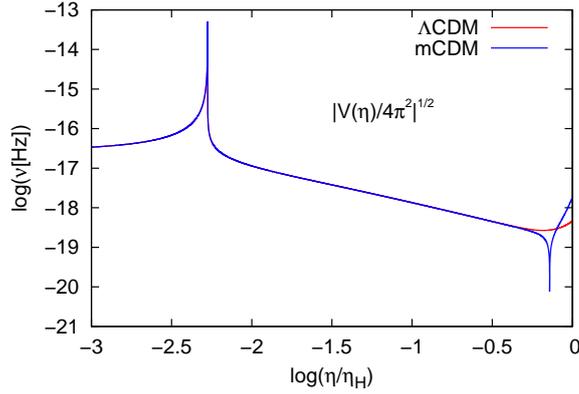


Figura 4.2 - Evolução do potencial cosmológico $\sqrt{|V(\eta)|}/2\pi$ (em Hz) para o modelo Λ CDM e mCDM. As frequências mostradas indicam a influência que o potencial tem numa dada época para uma determinada faixa do espectro. Aqui escolhemos as escalas de tal forma a mostrar os efeitos em baixas frequências. Se analisamos somente $V(\eta)$, vemos que só a inflação pode influenciar significativamente o espectro a frequências mais altas

numérica para o modelo Λ CDM fazendo $a = 1$. O tempo η_i é o tempo a partir do qual a solução para o modelo Λ CDM passa a ser válida.

Além disso, dado um parâmetro de Hubble qualquer, podemos encontrar o termo do potencial a''/a através da relação:

$$\frac{a''}{a} = \mathcal{H}^2(\eta) + \mathcal{H}'(\eta). \quad (4.20)$$

Substituindo (4.19) em (4.20) encontramos o potencial completo no modelo Λ CDM:

$$V_{\Lambda CDM}(\eta) = \frac{H_0^2}{2} \left(\frac{\Omega_m}{a} + 4\Omega_\Lambda a^2 \right), \quad (4.21)$$

ou seja, embora o termo de radiação não contribua para $V(\eta)$, a presença de matéria e energia escura, mesmo que comparativamente com menor densidade de energia, gera um potencial efetivo não nulo. Uma vez que já encontramos o fator de escala numericamente, podemos substituí-lo na expressão acima para obter o comportamento de V em função do tempo conforme.

No intuito de comparar n^2 com $V(\eta)$, o que nos permite compreender como encontrar as soluções de evolução de $h(\eta)$, apresentamos a evolução de $V(\eta)$ na figura 4.2. Ao construir esse gráfico extraímos a raiz de $V(\eta)$ e dividimos por 2π para compará-lo diretamente com a escala de frequência no tempo atual, e assim ficamos com unidades de $nc/2\pi$. Essa quantidade é particularmente interessante pois permite avaliar como cada etapa evolutiva influencia o espectro presente em termos da frequência observada. Veja que, na

prática, o efeito da cosmologia pós-inflação somente afeta significativamente a evolução de $h(\eta)$ para baixas frequências ($\lesssim 10^{-16}$ Hz). Contudo, o potencial correspondente à época inflacionária tem influência sobre uma ampla faixa espectral. No instante $\eta = \eta_i$, $V(\eta)$ atinge seu máximo que, em unidades de frequência, é dado por $\sqrt{V(\eta_i)} \sim 10^{10}$ Hz. Então, esperamos que a época inflacionária seja capaz de modificar o espectro até essa frequência máxima. Para modos n , com frequências correspondentes $nc > 10^{10}$ Hz, a amplitude das OGs decai adiabaticamente desde quando as ondas foram geradas e já não são importantes no tempo atual.

Voltando agora nossa atenção para a teoria bimétrica com grávitons massivos ($m \neq 0$), as equações de campo de fundo são (2.76). Utilizando a métrica de Robertson-Walker (3.26) como métrica física e (3.80) como a métrica não dinâmica obtemos o seguinte parâmetro de Hubble para um Universo plano: (ALVES, 2006; ALVES et al., 2009a):

$$\mathcal{H}_g^2 = H_0^2 a^2 \left[\frac{\Omega_r}{a^4} + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{1}{2} \Omega_g (7a^2 - 5a^4) \right], \quad \eta \geq \eta_i \quad (4.22)$$

onde:

$$\Omega_g = \frac{1}{35} \left(\frac{m_g}{m_H} \right)^2, \quad (4.23)$$

m_g é a massa do gráviton dada em gramas e $m_H = \hbar H_0 / c^2$ é uma constante com unidades de massa cujo comprimento de onda Compton associado é justamente o comprimento de Hubble $\ell_H = c / H_0$. Se tivermos $m_g \gtrsim m_H$ ($\lambda_g = \hbar / m_g c \lesssim \ell_H$), então grávitons massivos podem representar a energia escura, ao menos no contexto da teoria de Visser. Assim, é razoável supor que $\Omega_g = \Omega_\Lambda = 0,73$. Para fins de comparação utilizaremos essa suposição, embora uma análise estatística utilizando dados observacionais possam indicar um valor ligeiramente diferente (ALVES et al., 2009).

Assim, para $\Omega_g = 0,73$, o valor da massa do gráviton é $m_g \sim 10^{-65}$ g, valor que é três ordens inferior ao limite obtido através da análise do movimento de galáxias em aglomerados ligados (2×10^{-62} g) (GOLDHABER; NIETO, 1974) e várias ordens inferior aos limites que provém da dinâmica no sistema solar (TALMADGE et al., 1988) e da análise de emissão da radiação gravitacional em sistemas binários (FINN; SUTTON, 2002) ($7,68 \times 10^{-55}$ g e $1,4 \times 10^{-52}$ g respectivamente).

De (4.22) em (4.20) e desse em (4.11) obtemos o potencial $V(\eta)$ para essa teoria:

$$V_g(\eta) = \frac{H_0^2}{2} \left[\frac{\Omega_m}{a} - \Omega_g (14a^4 + 55a^6) \right]. \quad (4.24)$$

Note que para encontrar a expressão acima escrevemos m em (4.11) em unidades físicas, ou seja, ele é o inverso do comprimento de onda Compton do gráviton $m = m_g c / \hbar$, que por (4.23) pode ser escrito como:

$$m = \frac{\sqrt{35\Omega_g}}{\ell_H}. \quad (4.25)$$

Assim como para o caso Λ CDM, encontramos numericamente a evolução temporal $a(\eta)$ através de (4.22) e enfim a evolução de $V_g(\eta)$ que é mostrada na figura 4.2. Por brevidade nomeamos esse modelo de mCDM. Mais uma vez encontramos que o tempo conforme para o tempo presente é $\eta_H = 3,4/H_0$ que é o mesmo encontrado para o modelo Λ CDM. Ao fazer essa figura, novamente procuramos descrever V_g em unidades de $nc/2\pi$, assim a quantidade resultante é $\sqrt{|V_g(\eta)|}/2\pi$. Veja que V_g passa a ser diferente de $V_{\Lambda\text{CDM}}$ apenas numa época tardia, bem próxima do tempo atual. Se nos fixamos apenas nessa análise simples esperamos encontrar maiores influências espectrais para frequências muito baixas, menores que 10^{-17}Hz .

Essa análise em termos do potencial cosmológico $V(\eta)$ será muito útil na próxima seção na qual nos concentraremos nas soluções para a evolução das OGs e o espectro propriamente dito.

4.3 Avaliação do espectro de OGs primordiais: análise analítica e numérica

Para fins de comparação, primeiramente consideraremos o modelo descrito pelo fator de escala (4.14), ou seja, um modelo sem energia escura, no qual a matéria domina no tempo atual e $m = 0$.

Substituindo o potencial para a época inflacionária (4.16) em (4.10) temos a seguinte equação diferencial homogênea:

$$\mu'' + \left[n^2 - \frac{\beta(1+\beta)}{|\eta - \eta_\ell|^2} \right] \mu = 0, \quad (4.26)$$

cuja solução, em termos da amplitude $h(\eta)$, pode ser obtida como uma combinação linear das funções de Bessel:

$$h_n(\eta) = \frac{\sqrt{n}}{a_\ell^{\alpha+1/2} y^\alpha} A_0 [A_1 J_\alpha(ny) + A_2 J_{-\alpha}(ny)], \quad \eta \leq \eta_i, \quad (4.27)$$

onde $y = |\eta - \eta_\ell|$ e $\alpha = \beta + 1/2$. As constantes A_1 e A_2 são escolhidas de tal forma que o chamado “vácuo adiabático” seja atingido no limite de altas frequências, ou seja, para que tenhamos a solução assintótica $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\eta) \propto e^{-in\eta}$ (GRISHCHUK, 1993b). Assumindo

esse critério encontramos:

$$A_1 = -\frac{i}{\cos \beta\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\beta\pi/2}, \quad A_2 = \frac{1}{\cos \beta\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-i\beta\pi/2}. \quad (4.28)$$

A constante A_0 é independente de n e é determinada pela amplitude inicial do espectro.

Para a fase de radiação, o potencial $V(\eta)$ anula-se e (4.10) fica simplesmente:

$$\mu'' + n^2\mu = 0. \quad (4.29)$$

Então, para essa fase a amplitude das ondas gravitacionais decai adiabaticamente para todos os modos:

$$h_n(\eta) = \frac{2}{H_0^2 \eta_{eq} x} [B_1 e^{-inx} + B_2 e^{inx}], \quad \eta_i \leq \eta \leq \eta_{eq}, \quad (4.30)$$

onde $x = \eta - \eta_{eq}/2$. As constantes B_1 e B_2 são determinadas pelas condições de continuidade de $h_n(\eta)$ e $h'_n(\eta)$ em $\eta = \eta_i$. Assim, obtemos:

$$B_1 = -\frac{a_i e^{inx_i}}{2in} [h'_i + (\mathcal{H}_i - in)h_i], \quad (4.31)$$

e

$$B_2 = \frac{a_i e^{-inx_i}}{2in} [h'_i + (\mathcal{H}_i + in)h_i], \quad (4.32)$$

onde fizemos $h(\eta_i) = h_i$ e $\frac{dh(\eta)}{d\eta}|_{\eta=\eta_i} = h'_i$.

Partindo para a fase da matéria, a equação que temos que resolver é:

$$\mu'' + \left[n^2 - \frac{2}{\eta^2} \right] \mu = 0, \quad (4.33)$$

com solução:

$$h_n(\eta) = \frac{4\sqrt{n}}{H_0^2 \eta^{3/2}} [C_1 J_{3/2}(n\eta) + C_2 J_{-3/2}(n\eta)], \quad \eta \geq \eta_{eq}, \quad (4.34)$$

onde as constantes C_1 e C_2 são encontradas a partir das condições de continuidade de $h(\eta)$ e sua derivada primeira em $\eta = \eta_{eq}$. Então, obtemos:

$$C_1 = \frac{a_{eq}\pi}{2} \sqrt{\frac{\eta_{eq}}{n}} [-J_{-3/2}(n\eta_{eq})h'_{eq} + nJ_{-5/2}(n\eta_2)h_{eq}], \quad (4.35)$$

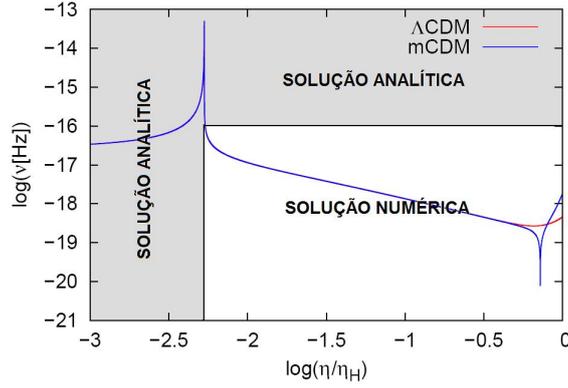


Figura 4.3 - Método de solução para a evolução de OGs nos modelos Λ CDM e mCDM. Para frequências $\lesssim 10^{-16}$ Hz obtivemos a solução analiticamente até o tempo $\eta = \eta_i$, nesse tempo tomamos o valor de h_i e h'_i como condições iniciais das equações diferenciais para o modelo Λ CDM e mCDM, que foram resolvidas numericamente em Fortran utilizando a subrotina dverk. Para frequências maiores obtivemos uma solução completamente analítica para os dois modelos (com exceção da evolução do fator de escala).

e

$$C_2 = \frac{a_{eq}\pi}{2} \sqrt{\frac{\eta_{eq}}{n}} [J_{3/2}(n\eta_{eq})h'_{eq} + nJ_{5/2}(n\eta_{eq})h_{eq}], \quad (4.36)$$

onde h_{eq} e h'_{eq} são os valores da amplitude e de sua derivada primeira no instante $\eta = \eta_{eq}$.

Todas as constantes relacionadas à cosmologia de fundo foram determinadas na seção anterior, enquanto todas as constantes relacionadas à evolução das perturbações, com exceção de A_0 , foram determinadas a partir das condições de continuidade nas épocas de transição entre cada época cosmológica.

Quando estamos tratando do modelo Λ CDM, no entanto, não há uma solução analítica completa para o fator de escala e para o potencial em função de η , mas sim uma solução numérica como obtida anteriormente. Assim, uma abordagem numérica também se faz necessária para encontrar a evolução das OGs nesse contexto.

No entanto, nossa análise anterior do comportamento do potencial $V(\eta)$ nos permite estabelecer um método de solução para diferentes faixas de frequência e para diferentes etapas de evolução. Na figura 4.3 resumimos o nosso procedimento. Para a época inflacionária, temos uma solução analítica para $h_n(\eta)$ que é válida para todo n que é dada por (4.27). Para $\eta > \eta_i$, há duas situações, na primeira, quando $n^2 \sim V(\eta)$, o potencial é importante para a solução evolutiva de $h_n(\eta)$, então resolvemos numericamente a equação de evolução (4.9) fazendo $m = 0$ e utilizando o parâmetro de Hubble (4.19) numérico como entrada. Na segunda situação temos $n^2 > V(\eta)$ e $V(\eta)$ deixa de ser importante para

a evolução de $h_n(\eta)$. Nesse caso, podemos obter uma solução analítica para a amplitude:

$$h_n^{\Lambda\text{CDM}}(\eta) = \frac{1}{a_{\Lambda\text{CDM}}(\eta)} [\mathcal{B}_1 e^{-in\eta} + \mathcal{B}_2 e^{in\eta}], \quad \eta \geq \eta_i, \quad (4.37)$$

onde $a_{\Lambda\text{CDM}}(\eta)$ é o fator de escala obtido numericamente a partir de (4.19) e as constantes \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 são dadas por:

$$\mathcal{B}_1 = -\frac{a_i e^{in\eta_i}}{2in} [h'_i + (\mathcal{H}_i - in)h_i], \quad (4.38)$$

e

$$\mathcal{B}_2 = \frac{a_i e^{-in\eta_i}}{2in} [h'_i + (\mathcal{H}_i + in)h_i]. \quad (4.39)$$

Para o modelo mCDM, o procedimento adotado é o mesmo, no entanto agora a solução numérica (4.9) é obtida considerando como entrada a solução numérica para a evolução do parâmetro de Hubble (4.22). Para $n^2 > V(\eta)$, todavia, temos a seguinte solução analítica:

$$h_n^g(\eta) = \frac{1}{a_g(\eta)} [\mathcal{B}_1 e^{-in\eta} + \mathcal{B}_2 e^{in\eta}], \quad \eta \geq \eta_i, \quad (4.40)$$

onde $a_g(\eta)$ dá a evolução do fator de escala obtida numericamente a partir de (4.22).

Todas as soluções numéricas foram obtidas a partir de um programa escrito em Fortran. As equações diferenciais foram resolvidas utilizando uma subrotina IMSL (*The International Mathematical and Statistical Libraries*) chamada dverk que integra as equações pelo método de Runge-Kutta de 6º ordem. Além disso, todas as funções de Bessel que entram nas soluções foram calculadas a partir de subrotinas retiradas de (PRESS et al., 1992).

Finalmente, tomando o valor final das amplitudes das OGs para o tempo presente $\eta = \eta_H$ podemos obter o espectro atual a partir de (4.8):

$$h(n, \eta_H) = \frac{4\ell_{Pl}}{\sqrt{\pi}} n |h_n(\eta_H)|. \quad (4.41)$$

Uma das propriedades mais importantes da inflação é que o espectro das OGs primordiais no tempo η_i (que corresponde à época na qual as ondas “entram” no horizonte) é aproximadamente invariante de escala (GRISHCHUK, 2006):

$$h(n, \eta_i) \propto n^{2+\beta}, \quad (4.42)$$

com $2 + \beta \simeq 0$. Essa expressão é obtida tomando o limite assintótico $y \ll 1$ em (4.27) e substituindo o h_n correspondente em (4.41). Normalmente, as observações lidam com vínculos para o índice espectral escalar n_s . Levando em conta a forma como n_s é definido,

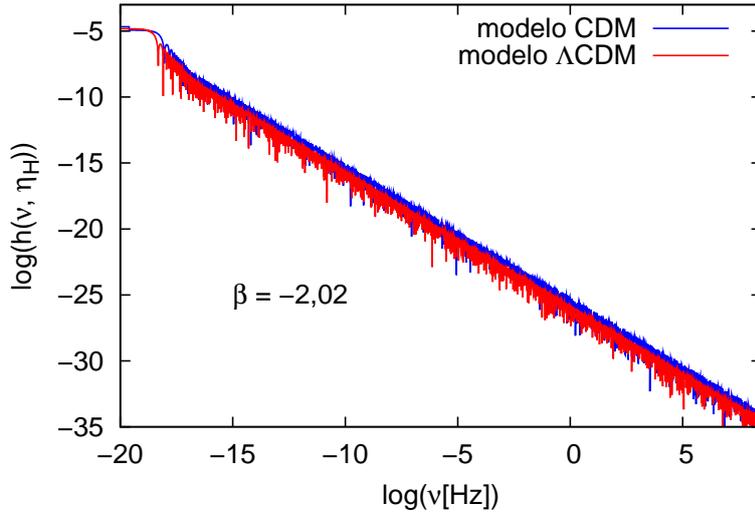


Figura 4.4 - Comparação entre os espectros obtidos a partir do modelo Λ CDM e CDM para o índice inflacionário $\beta = -2,02$. Note a ampla faixa de frequência coberta pelo espectro primordial.

podemos relacioná-lo com β da seguinte forma: $n_s = 2\beta + 5$ (GRISHCHUK, 2000; MIAO; ZHANG, 2007). Essa relação é válida independentemente da natureza das perturbações cosmológicas. As OGs primordiais e as perturbações primordiais de densidade com o mesmo índice espectral produzem aproximadamente a mesma distribuição de multipolos de baixa ordem das anisotropias de larga escala. O quinto ano do WMAP fornece $n_s = 0,960 \pm 0,013$ (KOMATSU et al., 2009), o qual nos leva a $\beta = -2,02$.

A anisotropia de quadrupolo da radiação cósmica de fundo em microondas é da ordem de $\Delta T/T \sim 10^{-5}$, que corresponde a anisotropias da ordem do raio de Hubble ℓ_H . De acordo com cálculos detalhados (GRISHCHUK, 2000), as amplitudes de OGs com grandes comprimentos de onda e de perturbações de densidade geradas pelo mecanismo de amplificação são aproximadamente da mesma ordem de magnitude. Portanto, elas contribuem grosseiramente de forma igual para a anisotropia de baixos multipolos. Com isso, temos uma estimativa de que a amplitude das OGs é cerca de 10^{-5} para comprimentos de onda da ordem do raio de Hubble, o que corresponde a uma frequência de $\nu_H \sim 10^{-18}$ Hz. Essa será a normalização que utilizaremos ao construir nossos espectros.

Na figura 4.4, fazemos uma comparação entre os espectros obtidos a partir do modelo CDM e do modelo Λ CDM. Para testar o método de solução que descrevemos acima, também encontramos o espectro para o modelo CDM numericamente e comparamos com o resultado analítico. O resultado foi que os dois espectros coincidiram exatamente, o que corrobora a nossa metodologia.

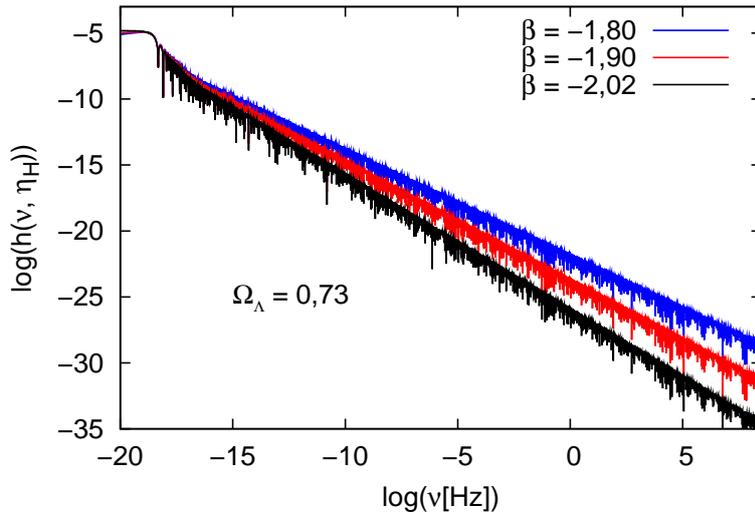


Figura 4.5 - Espectros de OGs primordiais para o modelo Λ CDM considerando alguns valores do parâmetro β . Note como o espectro é sensível ao valor do parâmetro inflacionário.

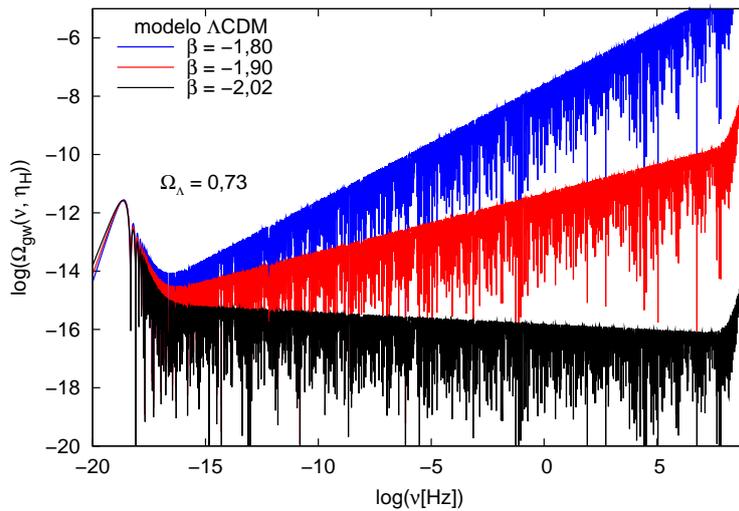


Figura 4.6 - Densidade de energia espectral $\Omega_{gw}(\nu)$ para o modelo Λ CDM, obtida para alguns valores do parâmetro β .

Como esperado, o modelo Λ CDM prevê uma amplitude menor para as OGs primordiais que o modelo CDM. Esse resultado está de acordo com o que foi encontrado por [Miao e Zhang \(2007\)](#). Isso está ligado ao fato de que o modelo CDM prevê um Universo mais jovem e, portanto, as OGs ainda não tiveram tempo de decair na mesma intensidade que no modelo Λ CDM.

Na figura 4.5 demonstramos como o espectro é sensível a variações no índice inflacionário β . Verificamos o mesmo efeito no espectro de energia mostrado na figura 4.6. A densidade

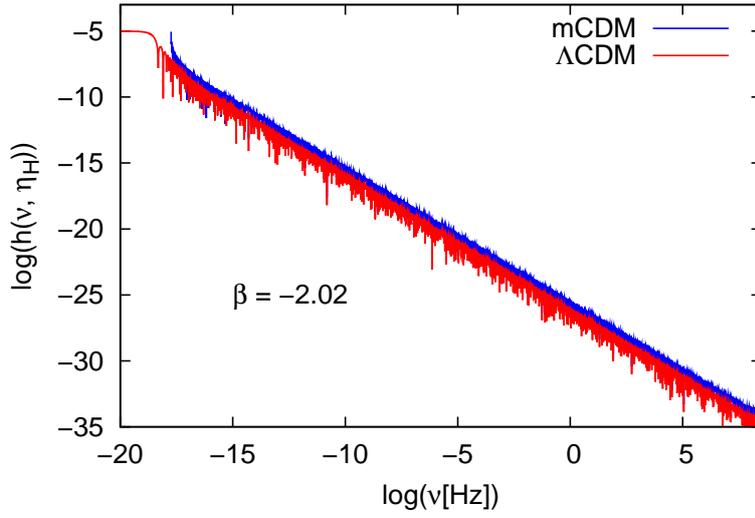


Figura 4.7 - Comparação entre os espectros obtidos a partir do modelo Λ CDM e mCDM.

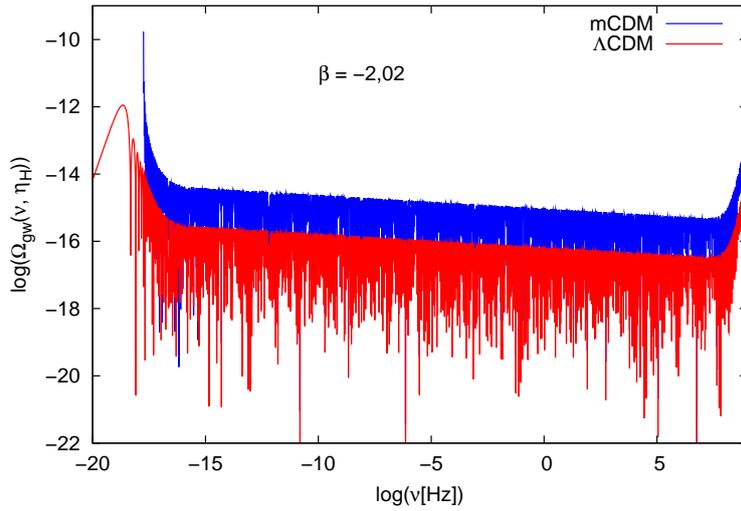


Figura 4.8 - Comparação entre as densidades espectrais de energia para os modelos Λ CDM e mCDM.

de energia espectral $\Omega_{gw}(\nu)$ é definida pela expressão:

$$\Omega_{gw}(\nu_1, \nu_2) = \frac{\rho_{gw}(\nu_1, \nu_2)}{\rho_c} = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \Omega_{gw}(\nu) \frac{d\nu}{\nu}, \quad (4.43)$$

ou seja:

$$\Omega_{gw}(\nu) = \frac{\rho(\nu)}{\rho_c}. \quad (4.44)$$

Então, a densidade de energia relativa total em OGs $\Omega_{gw}(\nu_1, \nu_2)$ é a integral logarítmica

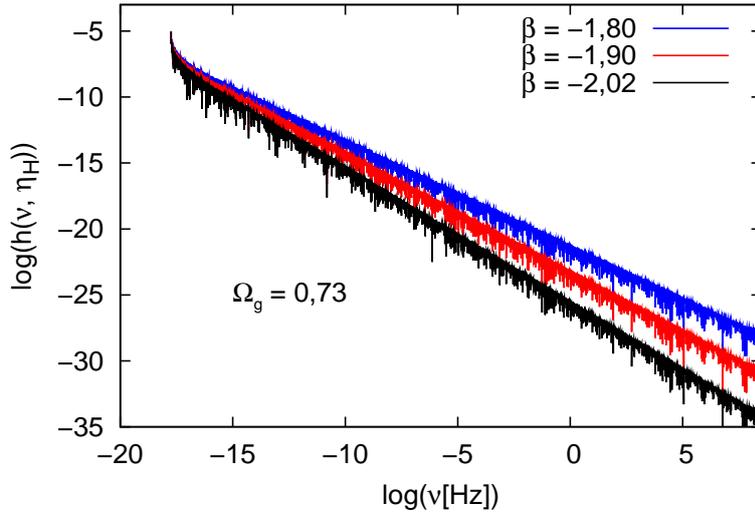


Figura 4.9 - Espectros de OGs primordiais obtidos no contexto do modelo mCDM. Note o corte do espectro para baixas frequências decorrente da relação de dispersão (4.46).

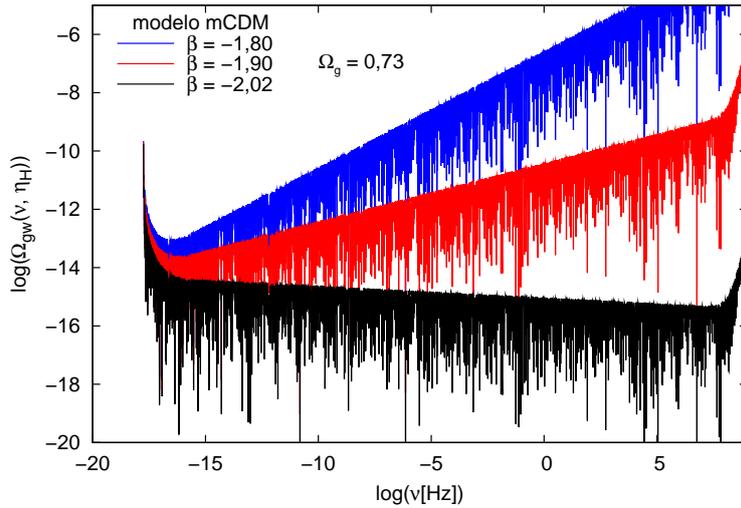


Figura 4.10 - Densidade de energia espectral $\Omega_{gw}(\nu)$ para o modelo mCDM.

da densidade de energia espectral $\Omega_{gw}(\nu)$. Finalmente, utilizando a definição da densidade de energia de OGs, válida para comprimentos de onda menores que o horizonte de Hubble, encontramos:

$$\Omega_{gw}(\nu) = \frac{\pi^2}{3} h^2(\nu) \left(\frac{\nu}{\nu_H} \right)^2. \quad (4.45)$$

Note que estamos utilizando a definição dada por [Baskaran et al. \(2006\)](#).

Para calcular o espectro para o modelo mCDM utilizando a definição (4.41) temos que

nos lembrar da relação de dispersão 4.3, que para o tempo atual, em unidades físicas, fica:

$$n = \sqrt{(\omega/c)^2 - m^2}, \quad (4.46)$$

onde $\omega = 2\pi\nu$. Dessa relação emerge naturalmente um limite inferior para as possíveis frequências das OGs primordiais dado por $\nu > mc/2\pi$. Então, da relação 4.25 encontramos que o limite imposto pela relação de dispersão é:

$$\nu > \sqrt{\frac{35\Omega_g}{4\pi^2}} H_0 \Rightarrow \nu > 1,8 \times 10^{-18} \text{ Hz para } \Omega_g = 0,73. \quad (4.47)$$

Fixando a amplitude como $\sim 10^{-5}$ nessa frequência encontramos o espectro apresentado na figura 4.7. Numa comparação com o espectro do modelo Λ CDM vemos que o espectro para mCDM tem amplitude maior para toda a faixa de frequências considerada, devido à normalização numa frequência ligeiramente maior. Esse resultado fica mais evidente quando comparamos o espectro de energia, mostrado na figura 4.8. Também avaliamos o espectro de potência e a densidade de energia no contexto do modelo mCDM para diferentes valores de β (ver figuras 4.9 e 4.10) e verificamos que a intensidade da alteração causada é semelhante do caso Λ CDM.

Na ausência de uma detecção direta de OGs, os limites impostos sobre a densidade de energia total Ω_{gw} são mais relevantes. Para calculá-lo, veja que na expressão (4.43) temos um limite inferior ν_1 e um limite superior ν_2 . O limite inferior deve ser aquele correspondente ao comprimento de onda da ordem do raio de Hubble, ou seja, a frequência:

$$\nu_1 = 2,87 \times 10^{-18} \text{ Hz}, \quad (4.48)$$

ou a frequência limite (4.47) para o caso mCDM. O limite superior pode ser obtido a partir da análise da seção anterior, tomando o valor máximo que a raiz do potencial $V(\eta)$ atinge na época inflacionária no instante η_i . Como vimos anteriormente esse valor é dado por $\sqrt{V(\eta_i)} \simeq 10^{10} \text{ Hz}$. Ondas com frequências atuais acima desse valor não puderam ser influenciadas significativamente pelo potencial cosmológico e decaíram adiabaticamente com a expansão do Universo. Assim ficamos com:

$$\nu_2 \simeq 10^{10} \text{ Hz}. \quad (4.49)$$

De forma equivalente, esse limite superior também pode ser obtido realizando uma estimativa do parâmetro de Hubble $H(\eta_i) = \mathcal{H}_i/a_i$ no tempo η_i . Tomando a escala de energia do vácuo que promove a inflação como sendo $E_{vac} \sim 10^{16} \text{ GeV}$, típica das teorias

	$\beta = -1,80$	$\beta = -1,90$	$\beta = -2,02$
Λ CDM	$2,41 \times 10^{-2}$	$9,61 \times 10^{-8}$	$4,56 \times 10^{-14}$
mCDM	$2,48 \times 10^{-1}$	$7,78 \times 10^{-7}$	$9,02 \times 10^{-13}$

Tabela 4.1 - Valores da densidade energia integrada Ω_{gw} para os modelos Λ CDM e mCDM considerando alguns valores do índice inflacionário β . O limite imposto pela nucleossíntese é da ordem de 10^{-6} .

de grande unificação, então $H(\eta_i) \sim 10^{13}\text{GeV} \simeq 10^{38}\text{Hz}$. Durante a expansão, esse valor sofre um redshift de $\sim 10^{-29}$, o que nos leva a $\nu_2 \simeq 10^{10}\text{ Hz}$ (MIAO; ZHANG, 2007).

Considerando esses limites na integral (4.43), para o modelo Λ CDM encontramos $\Omega_{gw} = 2,41 \times 10^{-2}$ para $\beta = -1,80$. No entanto, a nucleossíntese primordial estabelece um limite superior para a densidade de energia das OGs no tempo presente dado por (MAGGIORE, 2000):

$$h^2\Omega_{gw} < 5 \times 10^{-6}. \quad (4.50)$$

Então o modelo $\beta = -1,80$ prevê uma densidade de energia cerca de 4 ordens superior a esse limite, o que o torna inviável. Calculando a densidade de energia para outros valores de β temos, $\Omega_{gw} = 9,61 \times 10^{-8}$ para $\beta = -1,90$ e $\Omega_{gw} = 4,56 \times 10^{-14}$ para $\beta = -2,02$. Então esses modelos são permitidos de acordo com o limite acima.

Avaliando a energia total para o modelo mCDM encontramos $\Omega_{gw} = 2,48 \times 10^{-1}$ para $\beta = -1,80$, que está cerca de 5 ordens acima do limite da nucleossíntese. Encontramos ainda, $\Omega_{gw} = 7,78 \times 10^{-7}$ e $\Omega_{gw} = 9,02 \times 10^{-13}$ para $\beta = -1,9$ e $\beta = -2,02$ respectivamente. Então, de acordo com o limite da nucleossíntese, esses modelos são possíveis. Note que esses valores de energia são cerca de uma ordem de magnitude superiores aos valores encontrados para o modelo Λ CDM. Essa é uma característica que pode tornar os dois modelos distinguíveis através das observações. Na tabela 4.1 apresentamos uma comparação entre todas as densidades de energia totais que calculamos.

4.4 Detecção de OGs primordiais

Uma vez que tenhamos calculado o espectro de OGs primordiais, é importante que verifiquemos sua detectabilidade, ou seja, verificar se os detectores operantes, ou projetados para operarem futuramente, são capazes de detectar tais sinais.

As dificuldades técnicas envolvidas na detecção de ondas gravitacionais são grandes pois, como vimos, as amplitudes previstas para as perturbações métricas são muito pequenas. Pioneiro na detecção de OGs, J. Weber construiu o primeiro detector na década de 1960.

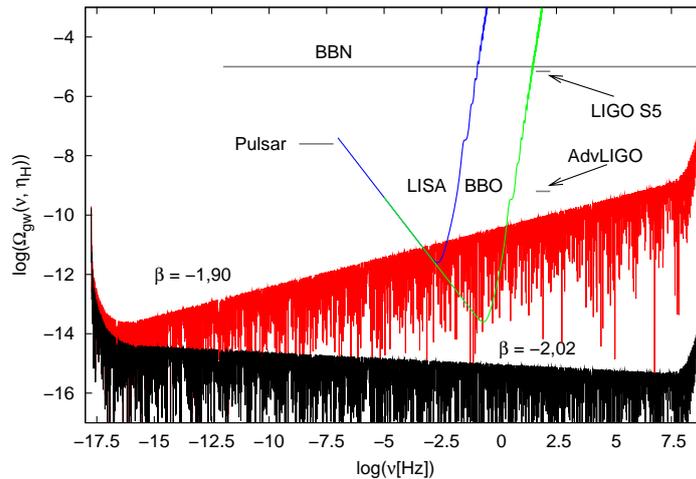


Figura 4.11 - Comparação entre diferentes limites para o fundo de OGs primordiais, curvas de sensibilidade e as densidades de energia espectrais dos fundos que estamos calculando. Apresentamos o limite superior imposto pela última corrida científica do detector LIGO S5, $\Omega_{gw} < 6,9 \times 10^{-6}$, que aplica-se na banda de frequência 41,5 – 169,25 Hz comparado com a sensibilidade projetada do Advanced LIGO (AdvLIGO) e dos detectores espaciais LISA e BBO. Mostramos ainda os limites superiores impostos pela nucleossíntese (BBN - Big Bang nucleosynthesis) (MAGGIORE, 2000) e pelos pulsares binários (JENET et al., 2006). O limite dos pulsares é baseado nas flutuações no tempo de chegada dos pulsos de pulsares de milissegundos e aplica-se em frequências em torno de 10^{-8} Hz. Os espectros que utilizamos para comparação foram aqueles calculados para o modelo Λ CDM para os valores de índice espectral $\beta = -1,9$ e $\beta = -2,02$. Para todos os casos fixamos o valor do parâmetro de Hubble $H_0 = 71,0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

Seu detector era do tipo massa ressonante constituído de um cilindro de alumínio de 1,4 ton, 1,5 m de comprimento e frequência ressonante de 10 kHz. Seu princípio de funcionamento é baseado na excitação dos modos normais de vibração por uma OG que atinja o detector. Essas vibrações mecânicas são captadas e convertidas em sinais elétricos por transdutores colocados estrategicamente na superfície do cilindro. Como consequência de seu princípio de funcionamento, detectores massa ressoante possuem uma banda de sensibilidade muito estreita quando comparados com outros tipos de detectores. Outros exemplos de detectores cilíndricos são o detector norte americano Allegro e os Italianos Nautilus e Auriga.

Os detectores massa ressonante podem ainda ser esféricos, dos quais existem apenas dois em operação atualmente, sendo eles o detector holandês Mini-GRAIL e o brasileiro Mario Schenberg localizado na cidade de São Paulo (para a situação atual do detector Schenberg ver Aguiar et al. (2008)). Uma vantagem dos detectores esféricos é que eles podem determinar instantaneamente a polarização da onda e localizar sua fonte no céu para qualquer sinal de OG detectado uma vez que saibamos qual é a “correta” teoria de gravitação. De forma similar, se soubermos onde a fonte está localizada no céu, é possível determinar a correta teoria de gravitação. O detector Schenberg é feito de uma liga de

cobre alumínio (CuAl 6%), tem diâmetro de 65 cm e massa de 1,15 ton. Ele apresentará sensibilidade suficiente para captar sinais com amplitudes $S \sim 10^{-22} \text{ Hz}^{-1/2}$ (o “strain” S é definido em termos da amplitude adimensional h da seguinte forma $S(\nu) = h(\nu)/\sqrt{\nu}$) na faixa de frequência de 3,0 – 3,4 kHz. Dentro dessa banda encontram-se algumas fontes interessantes de radiação gravitacional tais como colapsos nucleares em supernovas axi-assimétricas, coalescência de objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros, cujo objeto final possui massa de $\sim 3,8 M_{\odot}$, instabilidades hidrodinâmicas em estrelas de nêutrons, entre outras.

Devido à sensibilidade que atingem, os detectores massa ressonante geralmente não são considerados interessantes para a detecção de OGs primordiais. No entanto, para as fontes que detectarem, os detectores esféricos podem ser capazes de discriminar diferentes teorias de gravidade relacionando as medidas dos modos vibracionais excitados com os parâmetros NP que calculamos no Capítulo 2 (BIANCHI et al., 1996; STELLATI, 2006).

Existem outros tipos de detectores, como os interferométricos, cujo princípio de funcionamento é a interferometria a laser. Esses detectores, em geral do tipo Michelson, possuem banda de frequência bem mais larga do que os massa ressonante. Um exemplo de detector interferométrico em funcionamento é o detector LIGO (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) localizado nos Estados Unidos. Esse detector é formado, na realidade, por três interferômetros, em duas localizações: dois interferômetros chamados de H1 (4 km) e H2 (2 km) compartilham o mesmo sítio em Hanford, no estado de Washington, enquanto L1 (4 km) está localizado em Livingston Parish, no estado de Louisiana. LIGO, juntamente com o interferômetro de 3 km Virgo, na Itália, e GEO, na Alemanha, formam um conjunto de observatórios de OGs baseado nessa técnica. LIGO completou recentemente mais uma corrida científica, chamada de S5, acumulando um ano de dados coincidentes entre H1, H2 e L1 trabalhando na sensibilidade projetada. Tal sensibilidade permitiria detectar OGs com amplitudes tão pequenas quanto $S \sim 3 \times 10^{-22} \text{ Hz}^{-1/2}$ numa banda em torno de 100 Hz (ABBOT, B. P. et al., 2009). Utilizando ainda a técnica de correlação cruzada na análise de dados, é possível impor um limite superior para OGs primordiais cerca de ~ 100 vezes menor do que as sensibilidades individuais dos interferômetros. Na figura 4.11 apresentamos o limite superior imposto pelo LIGO para a densidade de energia espectral das OGs primordiais. O limite é de $\Omega_{gw} < 6.9 \times 10^{-6}$ e aplica-se na banda de frequência 41,5 – 169,25 Hz (ABBOT, B. P. et al., 2009). Na mesma figura comparamos os sinais que calculamos previamente e a sensibilidade projetada do Advanced LIGO (<http://www.ligo.caltech.edu/docs/M/M060056-10.pdf>).

Sensibilidade em frequências mais baixas podem ser atingidas por detectores interferométricos baseados no espaço. O projeto LISA (Laser Interferometric Space

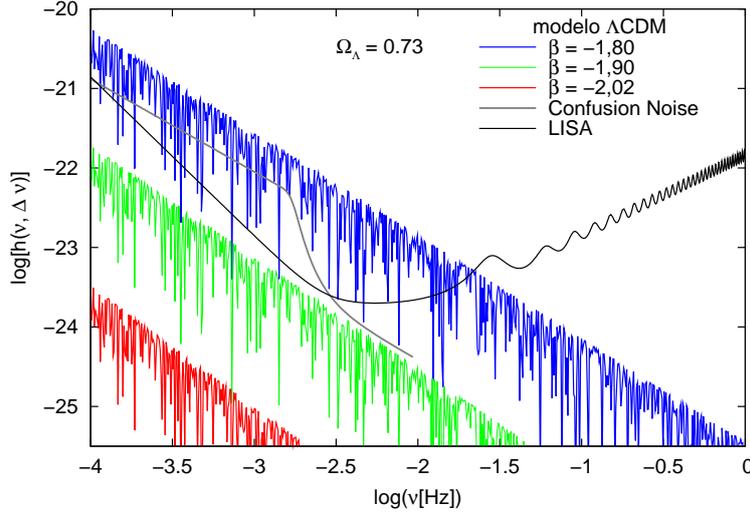


Figura 4.12 - Comparação entre a curva de sensibilidade do detector LISA e os espectros calculados para o modelo Λ CDM. O tempo de observação considerado foi de um ano. Incluímos também o “confusion noise”, que é o sinal de fundo devido aos sistemas binários da Galáxia.

Antenna) é um exemplo desse tipo de detector. O LISA é uma missão espacial proposta em conjunto pela agência nacional espacial americana (NASA) e pela agência espacial européia (ESA), com o objetivo de detectar e estudar OGs na banda de frequência de milihertz. A missão consiste em utilizar feixes coerentes de laser sendo trocados entre três espaçonaves idênticas formando um triângulo aproximadamente equilátero de lado 5×10^6 km. Na figura 4.11 incluímos a curva de sensibilidade do LISA (www.srl.caltech.edu/shane/sensitivity/MakeCurve.html) e de outro projeto espacial, o BBO (Big Bang Observer) (CROWDER; CORNISH, 2005). Na seção que segue analisamos a detectabilidade do fundo primordial para esses dois satélites que são particularmente interessantes devido a sensibilidade atingida.

4.5 Espectro nas bandas de sensibilidade do LISA e do BBO

Nas figuras 4.12 e 4.13 mostramos uma comparação entre a curva de sensibilidade do futuro detector espacial LISA (para a banda $10^{-4} - 1$ Hz) e os espectros que calculamos para o modelo Λ CDM e para o modelo mCDM, respectivamente. Ao realizar essa comparação precisamos reescalonar a amplitude que calculamos (4.41) da seguinte forma (MAGGIORE, 2000; GRISHCHUK, 2000):

$$h(\nu, \Delta\nu) = h(\nu) \sqrt{\frac{\Delta\nu}{\nu}}. \quad (4.51)$$

Essa relação leva em conta que as observações são realizadas no período de um ano, que corresponde ao bin de frequência $\Delta\nu = 3,17 \times 10^{-8}$ Hz ($\Delta\nu = 1/T$, onde $T = 1$ ano) para cada frequência. Para se ter uma idéia mais realista das possibilidades

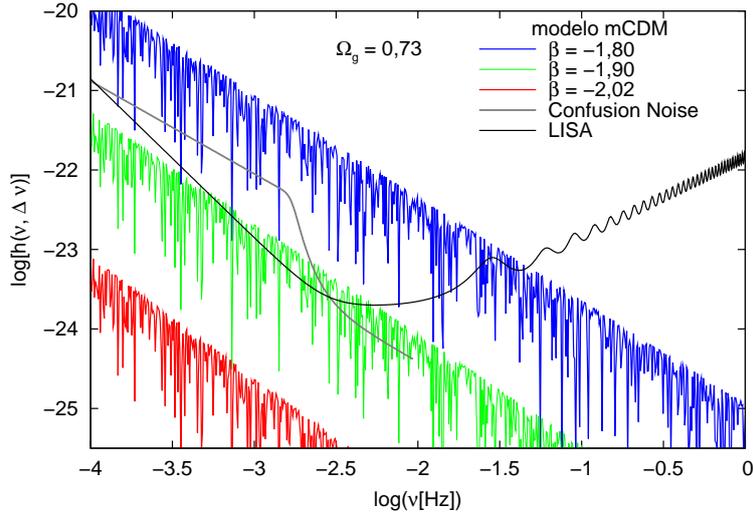


Figura 4.13 - Comparação entre a curva de sensibilidade do detector LISA e os espectros calculados para o modelo mCDM.

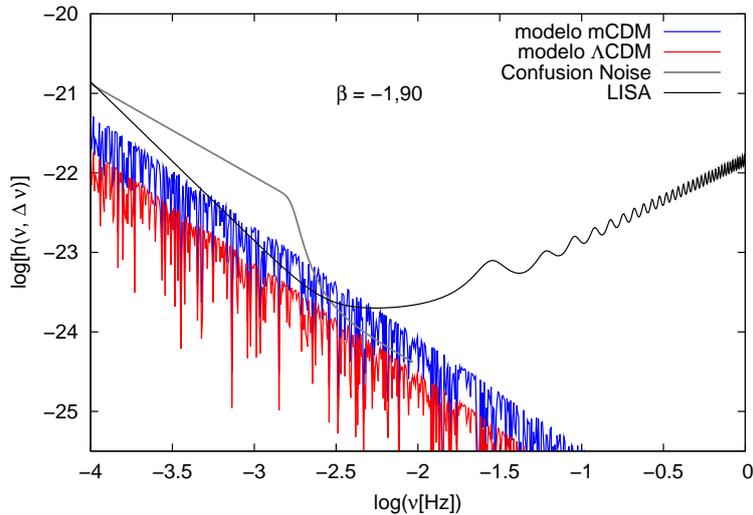


Figura 4.14 - Os modelos Λ CDM e mCDM seriam possivelmente distinguíveis na parte mais sensível da curva do LISA.

de detecção, incluímos também o chamado “confusion noise”, que é uma estimativa para o sinal de fundo produzido pelos sistemas binários da Galáxia. Tanto a curva de sensibilidade do LISA quanto a curva para o Confusion Noise foram extraídas de www.srl.caltech.edu/shane/sensitivity/MakeCurve.html. Como vemos, o confusion noise limita as observações de OGs na parte baixa da banda de sensibilidade do LISA. Vemos, assim, que não seria possível a detecção do espectro primordial para o caso $\beta = -2,02$ seja no contexto Λ CDM ou no contexto mCDM. Para o valor $\beta = -1,9$, o sinal seria apenas marginalmente detectado para o caso Λ CDM, mas seria possivelmente detectável

no caso mCDM, na parte mais sensível do espectro ($\nu = 10^{-2,5}$). Assim, como mostramos na figura 4.14, essa seria uma forma possível de distinguir entre os dois modelos para esse caso.

É importante destacar ainda que o fundo correspondente às binárias da Galáxia não forma um sinal estacionário, mas sim “cicloestacionário” (EDLUND; TINTO, 2005) devido ao movimento orbital do LISA ao redor do Sol. Então o sinal galáctico possui máximos e mínimos ao longo de um período de um ano. Tal característica permitiria, em princípio, diferenciar o fundo galáctico de outras fontes de OGs, como o fundo primordial.

Nas figuras 4.15, 4.16 e 4.17 realizamos a mesma comparação com a curva de sensibilidade do futuro detector BBO para a banda $10^{-2} - 10^2$ Hz. Essa curva pode ser encontrada em Crowder e Cornish (2005). Mais um vez essa comparação foi realizada considerando um ano de observação. Veja que para a banda de frequência que o BBO atuará, o fundo galáctico não é mais um fator limitante das observações. Agora os sinais para $\beta = -1,90$ poderiam ser detectados tanto para Λ CDM quanto para mCDM. Ainda mais, seria possível distinguir entre esses modelos para valores de $\beta = -1,90$ ou ainda menores. No entanto, em nenhum caso seria possível detectar o fundo para $\beta = -2,02$.

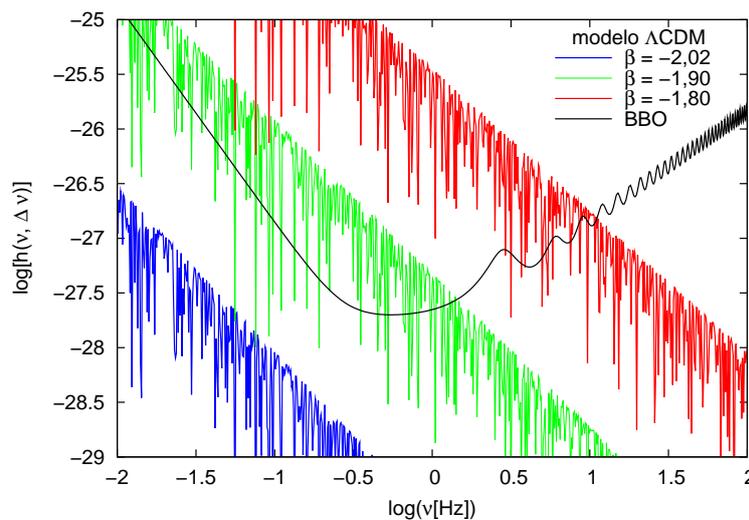


Figura 4.15 - Comparação entre as curvas de sensibilidade do detector BBO e os espectros calculados para o modelo Λ CDM. Consideramos um ano de observação. Note que na faixa de frequências que o BBO atua não há a limitação do sinal advindo dos sistemas binários galácticos.

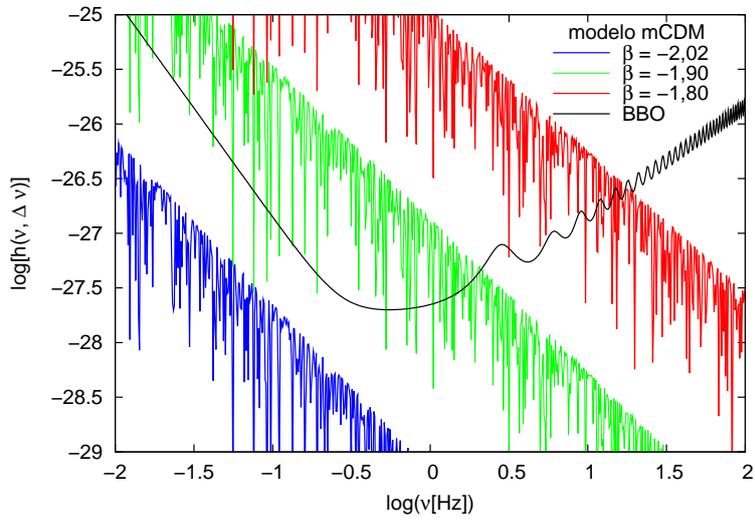


Figura 4.16 - Comparação entre as curvas de sensibilidade do detector BBO e os espectros calculados para o modelo mCDM.

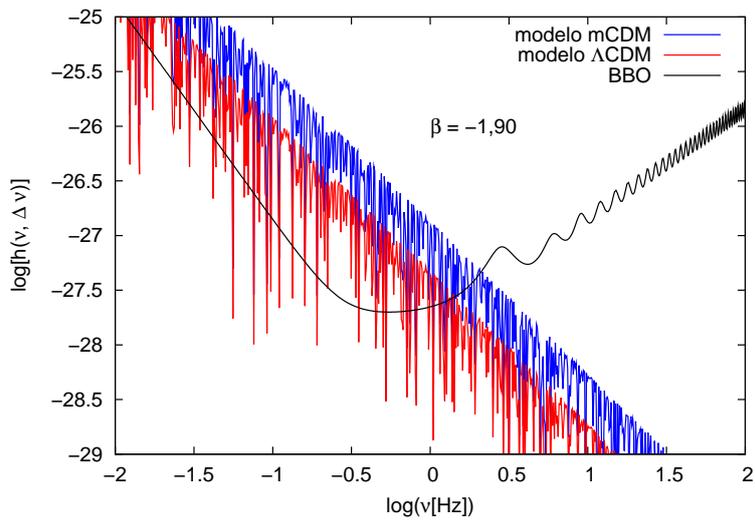


Figura 4.17 - Os modelos Λ CDM e mCDM poderiam, em princípio, ser distinguíveis pelas observações com o BBO.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

No presente trabalho foram desenvolvidos alguns aspectos de perturbações cosmológicas clássicas, particularmente as que representam OGs, não somente no contexto da teoria de Einstein mas também em teorias alternativas de gravitação.

Primeiramente concentramos nossa atenção na avaliação do número de estados independentes de polarização de OGs que cada teoria pode apresentar. Ao realizar essa tarefa, utilizamos o formalismo NP, que é uma ferramenta não somente simples, mas muito robusta no que diz respeito à caracterização de OGs em teorias métricas de gravitação.

Nesse contexto, extraímos informações importantes a respeito das teorias aqui consideradas. A amplitude observável Ψ_2 é uma peça chave para a distinção entre teorias, uma vez que se ela for não nula, a teoria encontra-se na classe II_6 , que é a classe $E(2)$ mais geral e, conseqüentemente, a presença de Ψ_2 é independente do observador. Assim, se a amplitude Ψ_2 for detectada, a classe de modelos $f(R)$ no contexto do formalismo métrico que consideramos seria viabilizada. Também o seria uma teoria escalar-tensorial geral e a teoria bimétrica com grávitons massivos. Nesse caso, precisaríamos de um outro método para distinguir entre as duas teorias, como a comparação entre os espectros primordiais produzidos em cada uma delas ou a análise da forma de onda produzida por um sistema particular como, por exemplo, sistemas binários de objetos compactos.

Esses resultados originais obtidos para a teoria $f(R)$ encontram-se descritos de forma detalhada na referência (ALVES et al., 2009c), na qual também aplicamos o formalismo NP para a teoria que considera termos $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ na ação gravitacional e não somente potências do escalar de Ricci.

Prosseguindo, se a amplitude Φ_{22} for detectada, mas não as amplitudes Ψ_2 e Ψ_3 então, dentre os modelos estudados, apenas a teoria de Brans-Dicke seria viabilizada enquanto os outros modelos seriam descartados.

Finalmente, caso Ψ_4 seja a única amplitude a ser detectada, a teoria de Brans-Dicke seria descartada, então não somente a RG, mas também a gravidade $f(R)$ no contexto da abordagem de Palatini seriam viabilizadas. Por conseguinte, outras análises seriam necessárias para uma clara identificação entre essas duas teorias.

Na segunda parte do trabalho tratamos de uma nova abordagem para perturbações cosmológicas em teorias alternativas de gravitação, nos focando nas perturbações que representam OGs. Notamos que outros modos, que não os TT, surgem nessas teorias e portanto um formalismo mais geral que leve em conta esses modos de OGs nas

perturbações fez-se necessário.

Uma vez que o número de estados de polarização das OGs é determinado de forma inequívoca pelo formalismo NP, somos capazes de decompor as perturbações métricas considerando os modos correspondentes a cada teoria. Em nosso caso, obtivemos as equações de evolução para OGs primordiais no contexto da teoria bimétrica de Visser e para uma teoria escalar-tensorial geral. Embora tenhamos exemplificado o esquema de decomposição apenas para essas duas teorias, nossos resultados são bastante gerais e cálculos semelhantes podem ser realizados para qualquer teoria.

Verificamos que os modos associados às amplitudes Ψ_2 e Φ_{22} são “acoplados” a perturbações escalares do fluido perfeito, ou seja, as perturbações de densidade e de pressão entram diretamente como fonte das equações dinâmicas para OGs com valor de helicidade $s = 0$ (ALVES et al., 2009b). Essa é uma característica particular de teorias alternativas que não aparece no estudo de perturbações cosmológicas no âmbito da RG.

De forma semelhante, para o caso da teoria bimétrica, os modos correspondentes a Ψ_3 são acoplados a perturbações vetoriais. Assim, perturbações de velocidade do fluido perfeito aparecem como fonte das perturbações métricas vetoriais e essas, por sua vez, entram como fonte dos modos de OGs com $s = \pm 1$.

Como resultado desse acoplamento, as equações de evolução que emergem são consideravelmente mais complicadas do que aquelas para o caso dos modos livres associados a Ψ_4 . Porém, uma vez que realizamos os cálculos utilizando as coordenadas harmônicas generalizadas definidas pela equação (3.19), é interessante substituir essas condições por outras que simplifiquem as equações. De particular interesse poderíamos utilizar, por exemplo, o calibre síncrono que é definido por $\delta g^{\mu\nu} U_\nu = 0$. Se U_ν é a quadrivelocidade do observador em repouso com relação ao fluido, então essa condição simplifica-se para $\delta g^{\mu 0} = 0$. Dessa forma, para o caso da teoria de Visser, por exemplo, todas as quantidades que entram na perturbação métrica representariam modos de OGs (veja a matriz de perturbação 3.82). Esse é um procedimento que consideraremos no futuro no intuito de simplificar o sistema de equações acopladas das perturbações e encontrar soluções para o fundo de OGs com $s = 0$ e $s = \pm 1$.

Outro aspecto importante nesse ponto vem do fato de que, assim como ocorre para a RG, apenas os modos TT são invariantes de calibre. Outras perturbações métricas, sejam elas representativas de OGs ou não, são dependentes do calibre adotado. No contexto da teoria de perturbações clássicas, isso é usualmente solucionado combinando as perturbações métricas em novas quantidades que são invariantes de calibre e, então,

as equações dinâmicas podem ser obtidas em termos dessas quantidades (MUKHANOV *et al.*, 1992; BARDEEN, 1980, entre outros). É interessante, assim, verificar como essa mesma abordagem pode ser implementada quando consideramos os modos adicionais de OGs. Podemos encontrar uma descrição invariante de calibre para OGs que seja válida para todas as teorias métricas de gravitação? Essa é uma questão que demanda atenção e que pode nortear futuros testes de teorias alternativas de gravidade.

Outra alternativa interessante para descrever os modos de OGs (provavelmente a mais elegante) sem tocar em questões de escolha de coordenadas, é adotar o formalismo covariante de Ellis (1989) para perturbações cosmológicas. Esse formalismo provém de estudos anteriores de Hawking (1966) e Olson (1976), e uma apresentação atualizada e detalhada foi dada por Ellis e Elst (1999). A essência do método é identificar um conjunto de variáveis, definidas de forma covariante, que descrevam a inhomogeneidade e a anisotropia do Universo de uma forma transparente e invariante de calibre. No formalismo covariante todas as variáveis possuem significado físico e geométrico bem definidos. Ao aplicar o formalismo para teorias alternativas deveríamos identificar quais variáveis podem representar os modos de polarização não nulos de OGs.

Seja qual for a abordagem considerada, é sem dúvida muito importante que soluções para os modos adicionais em teorias alternativas sejam encontradas. Será possível assim obter uma clara identificação da contribuição de cada modo para o fundo de OGs.

A detecção dos modos extras pode ser a assinatura inequívoca de uma certa teoria ou ao menos uma forma de estabelecer limites ou regimes de validade para cada caso. Se OGs apresentarem modos não somente com $s = \pm 2$, mas também $s = \pm 1$ e $s = 0$ como os discutidos nesse trabalho, então teremos um fundo estocástico de OGs primordiais que será constituído de uma mistura de todos os modos de polarização.

O cálculo da função resposta de modos extras para detectores interferométricos foi realizado recentemente por Nishizawa *et al.* (2009) e Corda (2009). Particularmente, Nishizawa *et al.* (2009) encontraram que a partir de dados de mais de três detectores é possível separar a mistura dos modos de polarização no sinal de saída dos detectores. Além disso, estatisticamente, os detectores tem aproximadamente a mesma sensibilidade para cada modo de polarização do fundo estocástico primordial.

Como discutimos acima, uma detecção positiva de certos modos e uma detecção negativa de outros pode excluir uma teoria particular ou, ao menos, estabelecer fortes limites a teorias alternativas de gravitação. Mas é importante enfatizar que a confirmação pela observação do número de modos não nulos de OGs não é suficiente para determinar a

teoria mais adequada, uma vez que um conjunto de teorias pode ter o mesmo número de modos independentes. Assim, também é necessário avaliar o espectro de OGs para cada modo e para cada teoria. Uma análise rigorosa do espectro somente pode ser levada a cabo estudando a física evolutiva das OGs. Nesse sentido, as equações que encontramos neste trabalho são o primeiro passo para tal objetivo. Por fim, uma análise conjunta da resposta de um dado modo e a avaliação do espectro pode trazer respostas cruciais para a compreensão da gravidade em escalas cosmológicas.

Concluimos os objetivos do presente trabalho com o estudo do mecanismo de amplificação superadiabática para os modos livres (modos TT) de OGs. Uma vez que esses modos não acoplam-se com as perturbações do fluido perfeito, eles trazem informações únicas do Universo jovem. Assim, encontramos o espectro presente de OGs primordiais tanto para o modelo Λ CDM quanto para o modelo que nomeamos de mCDM (ALVES et al., 2009a). Utilizamos essa nomenclatura pois, na teoria bimétrica com grávitons massivos, a presença do termo massivo seria a responsável pela atual fase de expansão acelerada do Universo, ou seja, ele mimetizaria o efeito da energia escura.

Nosso principal resultado nessa etapa foi que, como consequência da relação de dispersão, o modelo mCDM prevê uma densidade de energia cerca de uma ordem de magnitude maior de OGs (para um dado β) que o modelo Λ CDM. Como demonstramos, seria possível, em princípio, que os detectores espaciais LISA e BBO permitissem uma distinção entre os dois modelos. Mas existem valores de β para os quais não há a possibilidade de detecção, para o caso $\beta = -2,02$ fornecido pelo WMAP, por exemplo. No entanto, se os futuros detectores alcançarem maiores sensibilidades, será possível, em princípio, distinguir entre as teorias.

Enfatizamos também a metodologia utilizada para encontrar as soluções evolutivas das OGs para cada época cosmológica. A análise do comportamento do potencial cosmológico $V(\eta)$ nos permitiu escolher diferentes métodos de solução dependendo da faixa de frequências considerada. Enquanto para a época inflacionária encontramos uma solução completamente analítica, o período subsequente dividiu-se em duas soluções, a saber, uma solução numérica para ultra-baixas frequências ($\nu < 10^{-16}$ Hz) e uma solução analítica bastante simples para frequências mais altas ($\nu > 10^{-16}$ Hz) que compreendem a grande parte do espectro de interesse dos detectores em atuação e futuros.

A solução analítica no contexto Λ CDM para altas frequências é consideravelmente mais simples que a encontrada em trabalhos anteriores de Miao e Zhang (2007), por exemplo, o que pode facilitar a implementação de outras fases nas quais o fundo primordial sofre modificações, como o espalhamento livre de neutrinos (MIAO; ZHANG, 2007) ou a interação

com plasmas magnetizados. A solução numérica para baixas frequências mostrou-se igualmente robusta, o que é muito importante pois são para essas frequências que o espectro é normalizado e, ainda mais, é nesse faixa que esperamos encontrar assinaturas de OGs na RCFM.

Assim, o presente trabalho tratou de uma contribuição para a cosmologia de OGs em teorias alternativas de gravitação. Ficou demonstrado como características particulares de uma dada teoria alternativa pode influenciar a física e, conseqüentemente, o espectro de OGs primordiais. Essas características podem permitir distinguir entre as várias alternativas e nos trazer mais informações da “correta” teoria. Ainda mais, esse pode ser um teste importante que ajudará a decifrar não somente a física primordial, pois os espectros dependem fortemente do modelo inflacionário, mas também o atual enigma da energia escura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBOT, B. P. et al. An upper limit on the stochastic gravitational-wave background of cosmological origin. **Nature**, v. 460, p. 990–994, Aug 2009. [92](#)

AGUIAR, O. D.; ANDRADE, L. A.; BARROSO, J. J.; CASTRO, P. J.; COSTA, C. A.; SOUZA, S. T. de; WAARD, A. de; FAUTH, A. C.; FRAJUCA, C.; FROSSATI, G.; FURTADO, S. R.; GRATENS, X.; MAFFEI, T. M. A.; MAGALHÃES, N. S.; MARINHO JR., R. M.; OLIVEIRA JR., N. F.; PIMENTEL, G. L.; REMY, M. A.; TOBAR, M. E.; ABDALLA, E.; ALVES, M. E. S.; BESSADA, D. F. A.; BORTOLI, F. S.; BRANDÃO, C. S. S.; COSTA, K. M. F.; DE ARAÚJO, H. A. B.; DE ARAUJO, J. C. N.; DE GOUVEIA DAL PINO, E. M.; DE PAULA, W.; DE REY NETO, E. C.; EVANGELISTA, E. F. D.; LENZI, C. H.; MARRANGHELLO, G. F.; MIRANDA, O. D.; OLIVEIRA, S. R.; OPPER, R.; PEREIRA, E. S.; STELLATI, C.; WEBER, J. The schenberg spherical gravitational wave detector: the first commissioning runs. **Classical and Quantum Gravity**, v. 25, n. 11, p. 114042–+, Jun 2008. [91](#)

ALVES, M. E. S. **Cosmologia na teoria de Visser**: Dissertação (mestrado em astrofísica). São José dos Campos: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2006. (INPE-14664-TDI/1219) p. Disponível em: <http://urlib.net/sid.inpe.br/MTC-m13@80/2006/12.20.18.30>. Acesso em: 01 de dez. de 2009. [30](#), [80](#)

ALVES, M. E. S.; CARVALHO, F. C.; MIRANDA, O. D.; DE ARAUJO, J. C. N.; WUENSCHÉ, C. A.; SANTOS, E. M. Observational constraints on Visser's cosmological model. **Submitted to Physical Review D**, 2009. [30](#), [80](#)

ALVES, M. E. S.; MIRANDA, O. D.; DE ARAUJO, J. C. N. The conservation of energy-momentum and the mass for the graviton. **General Relativity and Gravitation**, v. 39, p. 777, Sept 2008. [30](#), [45](#)

_____. Can massive gravitons be an alternative to dark energy? Jul 2009. Disponível em: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0907/0907.5190v1.pdf. Acesso em: 29 de jul. de 2009. [30](#), [80](#), [100](#)

_____. Extra polarization states of cosmological gravitational waves in alternative theories of gravity. **Submitted to Classical and Quantum Gravity**, 2009. [60](#), [64](#), [67](#), [70](#), [98](#)

_____. Probing the $f(R)$ formalism through gravitational wave polarizations. **Physics Letters B**, v. 679, p. 401–406, Aug 2009. [31](#), [46](#), [52](#), [55](#), [97](#)

- BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. **Physical Review D**, v. 22, p. 1882–1905, Oct 1980. [53](#), [99](#)
- BARROW, J. D.; MIMOSO, J. P.; de GARCIA MAIA, M. R. Amplification of gravitational waves in scalar-tensor theories of gravity. **Physical Review D**, v. 48, p. 3630–3640, Oct 1993. [55](#), [68](#), [73](#)
- BASKARAN, D.; GRISHCHUK, L. P.; POLNAREV, A. G. Imprints of relic gravitational waves in cosmic microwave background radiation. **Physical Review D**, v. 74, p. 083008, Oct 2006. [73](#), [88](#)
- BERTSCHINGER, E. Cosmological dynamics. Apr 1995. Disponível em: <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/9503125v1>>. Acesso em: 26 de set. de 2008. [53](#)
- BESSADA, D.; MIRANDA, O. D. CMB polarization in theories of gravitation with massive gravitons. **Classical and Quantum Gravity**, v. 26, p. 045005, Jan 2009. [62](#)
- BIANCHI, M.; COCCIA, E.; COLACINO, C. N.; FAFONE, V.; FUCITO, F. Testing theorie of gravity with a spherical gravitational wave detector. Apr 1996. Disponível em: http://arxiv.org/PS_cache/gr-qc/pdf/9604/9604026v1.pdf>. Acesso em: 10 de fev. de 2007. [92](#)
- BICAK, J.; KATZ, J.; LYNDEN-BELL, D. Cosmological perturbation theory, instantaneous gauges, and local inertial frames. **Physical Review D**, v. 76, p. 063501, Sept 2007. [61](#)
- BICAK, J.; KATZ, K. On the uniqueness fo harmonic coordinates. **Czechoslovak Journal of Physics**, v. 55, p. 105–228, 2005. [58](#)
- BIRREL, N. D.; DAVIES, P. C. W. **Quantum fields in curved space**. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. [46](#)
- BOULWARE, D. G.; DESER, S. Can gravitation have a finite range? **Physical Review D**, v. 6, p. 3368–3382, Dec 1972. [29](#)
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation. **Physical Review**, v. 124, p. 925–935, Nov 1961. [28](#), [41](#)
- CAPOZZIELLO, S.; CORDA, C.; DE LAURENTIS, M. F. Stochastic background of relic scalar gravitational waves from scalar-tensor gravity. **Modern Physics Letters A**, v. 22, p. 2647–2655, Jul 2007. [55](#)

_____. Massive gravitational waves from $f(R)$ theories of gravity: Potential detection with LISA. **Physics Letters B**, v. 669, p. 255–259, Oct 2008. 55

CAPOZZIELLO, S.; FRANCAVIGLIA, M. Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications. **General Relativity and Gravitation**, v. 40, p. 357–420, Feb 2008. 31, 46, 55

CARROLL, S. M.; DUVVURI, V.; TRODDEN, M.; TURNER, M. Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? **Physical Review D**, v. 70, n. 4, p. 043528–+, Aug 2004. 28

CHANDRASEKHAR, S. **The mathematical theory of black holes**. Oxford: Oxford University Press, 1992. 33, 37, 39

COLE, S.; PERCIVAL, W. J.; PEACOCK, J. A.; NORBERG, P.; BAUGH, C. M.; FRENK, C. S.; BALDRY, I.; BLAND-HAWTHORN, J.; BRIDGES, T.; CANNON, R.; COLLESS, M.; COLLINS, C.; COUCH, W.; CROSS, N. J. G.; DALTON, G.; EKE, V. R.; PROPRIS, R. D.; DRIVER, S. P.; EFSTATHIOU, G.; ELLIS, R. S.; GLAZEBROOK, K.; JACKSON, C.; JENKINS, A.; LAHAV, O.; LEWIS, I.; LUMSDEN, S.; MADDOX, S.; MADGWICK, D.; PETERSON, B. A.; SUTHERLAND, W.; TAYLOR, K. The 2df galaxy redshift survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 362, p. 505–534, Sep 2005. 27

CORDA, C. A longitudinal component in massive gravitational waves arising from a bimetric theory of gravity. **Astroparticle Physics**, v. 28, p. 247–250, May 2007. 54

_____. Primordial production of massive relic gravitational waves from a weak modification of general relativity. **Astroparticle Physics**, v. 30, p. 209–215, Sept 2008. 55

_____. Interferometric detection of gravitational waves: the definitive test for general relativity. Jul 2009. Disponível em:
<http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0905/0905.2502v3.pdf>. Acesso em: 10 de ag. de 2009. 99

CROWDER, J.; CORNISH, N. J. Beyond LISA: Exploring future gravitational wave mission. **Physical Review D**, v. 71, p. 127503, Oct 2005. 93, 95

d' INVERNO, R. **Introducing Einstein's relativity**. Oxford: Oxford University Press, 1992. 55

- de GARCIA MAIA, M. R. **The stochastic background of gravitational waves:** Phd thesis. Sussex: The University of Sussex, 1994. [72](#), [73](#)
- de GARCIA MAIA, M. R.; BARROW, J. D. Cosmological graviton production in general relativity and related gravity theories. **Physical Review D**, v. 50, p. 6262–6296, Nov 1994. [68](#), [73](#)
- de GARCIA MAIA, M. R.; LIMA, J. A. S. Graviton production in elliptical and hyperbolic universes. **Physical Review D**, v. 54, p. 6111–6121, Nov 1996. [73](#)
- de PAULA, W. L. S.; MIRANDA, O. D.; MARINHO, R. M. Polarization states of gravitational waves with a massive graviton. **Classical and Quantum Gravity**, v. 21, n. 19, p. 4595–4605, Sept 2004. [31](#), [45](#), [69](#), [117](#)
- de WITT, B. S. **The dynamical theory of groups and fields**. New York: Gordon and Breach, 1965. [45](#), [46](#)
- EARDLEY, D. M.; LEE, L.; LIGHTMAN, P. Gravitational wave observations as a tool for testing relativistic gravity. **Physical Review D**, v. 8, p. 3308–3321, Jun 1973. [31](#), [33](#), [35](#), [36](#), [42](#)
- EDLUND, J. A.; TINTO, M. White-dwarf – white-dwarf galactic background in the LISA data. **Physical Review D**, v. 71, p. 122003, Jun 2005. [95](#)
- ELLIS, G. F. R. Covariant and gauge-invariant approach to cosmological density fluctuations. **Physical Review D**, v. 40, p. 1804–1818, Sept 1989. [99](#)
- ELLIS, G. F. R.; ELST, H. van. Cosmological models (cargèse lectures 1998). **NATO ASIC Proc. 541: Theoretical and Observational Cosmology**, p. 1–116, 1999. [99](#)
- FERRARIS, M.; FRANCAVIGLIA, M.; VOLOVICH, I. The universality of vacuum einstein equations with cosmological constant. **Classical and Quantum Gravity**, v. 11, p. 1505–1517, Feb 1994. [51](#)
- FEYNMAN, R. P. **Feynman lectures on gravitation**. California: Addison-Wesley, 1995. [116](#)
- FIERZ, M.; PAULI, W. On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field. **Royal Society of London Proceedings Series A**, v. 173, p. 211–232, Nov 1939. [28](#)
- FINN, L. S.; SUTTON, P. J. Bounding the mass of the graviton using binary pulsar observations. **Physical Review D**, v. 65, n. 4, p. 044022–+, Feb 2002. [29](#), [80](#)

GABADADZE, G.; GRUZINOV, A. Graviton mass or cosmological constant? **Physical Review D**, v. 72, p. 124007, Dec 2005. 28

GOLDHABER, A. S.; NIETO, M. M. Mass of the graviton. **Physical Review D**, v. 9, p. 1119–1121, Feb 1974. 28, 80

GRISHCHUK, L. P. Amplification of gravitational waves in an isotropic universe. **Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics**, v. 40, p. 409, Sept 1974. 26, 58, 68, 75, 76

_____. Quantum effects in cosmology. **Class. Quantum Grav.** 10, v. 10, p. 2449, Jul 1993. 76

_____. Relic gravitational waves and limits on inflation. **Physical Review D**, v. 48, p. 3513–3516, Oct 1993. 81

_____. Relic gravitational waves and their detection. Feb 2000. Disponível em: <<http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0002035>>. Acesso em: 26 de mar. de 2007. 25, 85, 93

_____. Relic gravitational waves and cosmology. mar 2006. Disponível em: <<http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0504018>>. Acesso em: 26 de mar. de 2007. 84

_____. Discovering relic gravitational waves in cosmic microwave background radiation. May 2007. Disponível em: <http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0707/0707.3319v3.pdf>. Acesso em: 15 de jun. de 2007. 26

GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. **Physical Review D**, v. 23, p. 347–356, Jan 1981. 25

HAWKING, S. W. Perturbations of an expanding universe. **Astrophysical Journal**, v. 145, p. 554, Feb 1966. 99

HU, B. L.; VERDAGUER, E. Stochastic gravity: Theory and applications. **Living Reviews in Relativity**, v. 11, p. 3, May 2008. Disponível em: <<http://www.livingreviews.org/Irr-2008-3>>. Acesso em: 2 de fev. de 2009. 45

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. New York: John Wiley & Sons, 1975. 117

JENET, F. A.; HOBBS, G. B.; STRATEN, W. van; MANCHESTER, R. N.; BAILES, M.; VERBIEST, J. P. W.; EDWARDS, R. T.; HOTAN, A. W.; SARKISSIAN, J. M.;

- ORD, S. M. Upper bounds on the low-frequency stochastic gravitational wave background from pulsar timing observations: current limits and future prospects. **Astrophysical Journal**, v. 653, p. 1571–1576, Dec 2006. [91](#)
- KOMATSU, E.; DUNKLEY, J.; NOLTA, M. R.; BENNETT, C. L.; GOLD, B.; HINSHAW, G.; JAROSIK, N.; LARSON, D.; LIMON, M.; PAGE, L.; SPERGEL, D. N.; HALPERN, M.; HILL, R. S.; KOGUT, A.; MEYER, S. S.; TUCKER, G. S.; WEILAND, J. L.; WOLLACK, E.; WRIGHT, E. L. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe observations: cosmological interpretation. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 180, p. 330–376, Feb 2009. [27](#), [77](#), [78](#), [85](#)
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The classical theory of fields**. New York: Pergamon, 1973. [40](#)
- LARSON, S. L.; HISCOCK, W. A. Using binary stars to bound the mass of the graviton. **Physical Review D**, v. 61, p. 104008–+, May 2000. [29](#)
- LIFSHITZ, E. On the gravitational stability of the expanding universe. **Journal of Physics**, X, p. 116–129, Jun 1946. [53](#)
- LINDE, A. Inflation and string cosmology. Mar 2005. Disponível em: http://arxiv.org/PS_cache/hep-th/pdf/0503/0503195v1.pdf. Acesso em: 10 de out. de 2008. [77](#)
- LINDE, A. D. The inflationary universe. **Reports on Progress Physics**, v. 47, p. 925–986, Feb 1984. [25](#)
- MAGGIORE, M. Gravitational wave experiments and early universe cosmology. **Physics Reports.**, v. 331, p. 283–367, Aug 2000. [54](#), [90](#), [91](#), [93](#)
- MAGGIORE, M.; NICOLIS, A. Detection strategies for scalar gravitational waves with interferometers and resonant spheres. **Physical Review D**, v. 62, p. 024004, Jun 2000. [42](#), [43](#)
- MIAO, H. X.; ZHANG, Y. Analytic spectrum of relic gravitational waves modified by neutrino free streaming and dark energy. **Physical Review D**, v. 75, p. 104009, May 2007. [27](#), [85](#), [86](#), [90](#), [100](#)
- MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. **Physics Report**, v. 215, p. 203–333, 1992. [53](#), [62](#), [99](#)
- NEWMAN, E.; PENROSE, R. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. **Journal of Mathematical Physics**, v. 3, p. 566–578, May 1962. [31](#), [33](#)

- NÄF, J.; JETZER, P.; SERENO, M. On gravitational waves in spacetimes with a nonvanishing cosmological constant. **Physical Review D**, v. 79, p. 024014, Jan 2009. 51
- NISHIZAWA, A.; TARUYA, A.; HAYAMA, K.; KAWAMURA, S.; SAKAGAMI, M. Probing nontensorial polarizations of stochastic gravitational-wave backgrounds with ground-based laser interferometers. **Physical Review D**, v. 79, p. 092002, Apr 2009. 99
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Modified gravity with $\ln r$ terms and cosmic acceleration. **General Relativity and Gravitation**, v. 36, p. 1765–1780, Aug 2004. 28
- NORDTVEDT, K. Post-newtonian metric for a general class of scalar-tensor gravitational theories and observational consequences. **Astrophysical Journal**, v. 161, p. 1059–1067, Sept 1970. 41
- OLSON, D. W. Density perturbations in cosmological models. **Physical Review D**, v. 14, p. 327–331, Jul 1976. 99
- PARKER, L. Quantized fields and particle creation in expanding universes. **Physical Review**, v. 183, p. 1057–1068, Jul 1969. 74
- PEEBLES, P. J. E. **Principles of Physical Cosmology**. Princeton: Princeton University Press, 1993. 53
- PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDHABER, G.; KNOP, R. A.; NUGENT, P.; CASTRO, P. G.; DEUSTUA, S.; FABBRO, S.; GOOBAR, A.; GROOM, D. E.; HOOK, I. M.; KIM, A. G.; KIM, M. Y.; LEE, J. C.; NUNES, N. J.; PAIN, R.; PENNYPACKER, C. R.; QUIMBY, R.; LIDMAN, C.; ELLIS, R. S.; IRWIN, M.; MCMAHON, R. G.; RUIZ-LAPUENTE, P.; WALTON, N.; SCHAEFER, B.; BOYLE, B. J.; FILIPPENKO, A. V.; MATHESON, T.; FRUCHTER, A. S.; PANAGIA, N.; NEWBERG, H. J. M.; COUCH, W. J.; The Supernova Cosmology Project. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. **Astrophysical Journal**, v. 517, p. 565–586, Jun 1999. 27
- PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; P., F. B. **Numerical recipes in fortran 77: the art of scientific computing**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. Disponível em: <<http://www.nr.com>>. 84
- RAJARAMAN, R. **Solitons and instantons: an introduction to solitons and instantons in quantum field theory**. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1982. 48
- RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTI, A.; DIERCKS, A.; GARNAVICH, P. M.; GILLILAND, R. L.; HOGAN, C. J.; JHA, S.; KIRSHNER, R. P.; LEIBUNDGUT, B.; PHILLIPS, M. M.; REISS, D.; SCHMIDT, B. P.; SCHOMMER,

R. A.; SMITH, R. C.; SPYROMILIO, J.; STUBBS, C.; SUNTZEFF, N. B.; TONRY, J. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **Astronomical Journal**, v. 116, p. 1009–1038, Sept 1998. [27](#)

RIESS, A. G.; STROLGER, L.-G.; CASERTANO, S.; FERGUSON, H. C.; MOBASHER, B.; GOLD, B.; CHALLIS, P. J.; FILIPPENKO, A. V.; JHA, S.; LI, W.; TONRY, J.; FOLEY, R.; KIRSHNER, R. P.; DICKINSON, M.; MACDONALD, E.; EISENSTEIN, D.; LIVIO, M.; YOUNGER, J.; XU, C.; DAHLÉN, T.; STERN, D. New hubble space telescope discoveries of type ia supernovae at $z \geq 1$: narrowing constraints on the early behavior of dark energy. **Astrophysical Journal**, v. 659, p. 98–121, Apr 2007. [27](#)

SANTOS, J.; ALCANIZ, J.; CARVALHO, F.; PIRES, N. Latest supernovae constraints on $f(r)$ cosmologies. **Physics Letters B**, v. 669, p. 14–18, Oct 2008. [28](#)

SCHUTZ, B. **First course in general relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. [113](#), [114](#)

STAROBINSKY, A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. **Physics Letters B**, v. 91, p. 99–102, Mar 1980. [46](#)

STELLATI, C. **Testes de teorias de gravitação com o detector de ondas gravitacionais Mário Schenberg**: Tese (doutorado em física). São José dos Campos: Centro Técnico Aeroespacial. Instituto Tecnológico da Aeronáutica, 2006. [92](#)

STELLE, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. **Physical Review D**, v. 16, p. 953–969, Aug 1977. [46](#)

STEPHANI, H. **General relativity: an introduction to the theory of the gravitational field**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. [33](#), [37](#), [39](#)

TALMADGE, C.; BERTHIAS, J.-P.; HELLINGS, R. W.; STANDISH, E. M. Model-independent constraints on possible modifications of Newtonian gravity. **Physical Review Letters**, v. 61, n. 10, Sept 1988. [28](#), [80](#)

TAYLOR, J. H. Pulsar timing and relativistic gravity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 10, p. 167–+, Dec 1993. [29](#)

TEGMARK, M.; STRAUSS, M. A.; BLANTON, M. R.; ABAZAJIAN, K.; DODELSON, S.; SANDVIK, H.; WANG, X.; WEINBERG, D. H.; ZEHAVIDI, I.; BAHCALL, N. A.; HOYLE, F.; SCHLEGEL, D.; SCOCCIMARRO, R.; VOGELEY, M. S.; BERLIND, A.; BUDAVARI, T.; CONNOLLY, A.; EISENSTEIN, D. J.; FINKBEINER, D.; FRIEMAN, J. A.; GUNN, J. E.; HUI, L.; JAIN, B.; JOHNSTON,

D.; KENT, S.; LIN, H.; NAKAJIMA, R.; NICHOL, R. C.; OSTRIKER, J. P.; POPE, A.; SCRANTON, R.; SELJAK, U.; SHETH, R. K.; STEBBINS, A.; SZALAY, A. S.; SZAPUDI, I.; XU, Y.; ANNIS, J.; BRINKMANN, J.; BURLES, S.; CASTANDER, F. J.; CSABAI, I.; LOVEDAY, J.; DOI, M.; FUKUGITA, M.; GILLESPIE, B.; HENNESSY, G.; HOGG, D. W.; IVEZIĆ, Ž.; KNAPP, G. R.; LAMB, D. Q.; LEE, B. C.; LUPTON, R. H.; MCKAY, T. A.; KUNSZT, P.; MUNN, J. A.; O'CONNELL, L.; PEOPLES, J.; PIER, J. R.; RICHMOND, M.; ROCKOSI, C.; SCHNEIDER, D. P.; STOUGHTON, C.; TUCKER, D. L.; BERK, D. E. vanden; YANNY, B.; YORK, D. G. Cosmological parameters from SDSS and WMAP. **Physical Review D**, v. 69, n. 10, p. 103501–+, May 2004. [27](#)

TSEYTLIN, A. A. Ambiguity in the effective action in string theories. **Physics Letters B**, v. 176, p. 92–98, Aug 1986. [46](#)

van DAM, H.; VELTMAN, M. Massive and mass-less yang-mills and gravitational fields. **Nuclear Physics B**, v. 22, p. 397–411, Jun 1970. [29](#)

VISSER, M. Mass for the graviton. **General Relativity and Gravitation**, v. 30, n. 12, p. 1717–1728, Dec 1998. [30](#), [44](#), [54](#), [74](#)

WAGONER, R. V. Scalar-tensor theory and gravitational waves. **Physical Review D**, v. 1, p. 3209–3216, Jun 1970. [41](#)

WANG, S.; ZHANG, Y.; XIA, T. Y.; MIAO, H. X. Modifications by the QCD transition and e^+e^- annihilation of the analytic spectrum of relic gravitational waves in the accelerating universe. **Physical Review D**, v. 77, p. 104016, May 2008. [27](#)

WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology**. New York: John Wiley Sons, 1972. [24](#), [113](#)

WEISBERG, J. M.; TAYLOR, J. H. The relativistic binary pulsar B1913+16: thirty years of observations and analysis. **ASP Conf. Ser. 328: Binary Radio Pulsars**, p. 25–+, Jan 1993. [29](#)

WEYL, H. **Space-Time-Matter**. New York: Dover, 1922. [45](#)

WILL, C. M. **Theory and experiment in gravitational physics**. New York, USA: Cambridge University Press, 1993. [27](#), [36](#), [114](#), [117](#)

_____. The confrontation between general relativity and experiment. **EAS Publications Series**, v. 30, p. 3–13, Sept 2008. [27](#)

ZELDOVICH, Y. B. A hypothesis, unifying the structure and the entropy of the universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 160, p. 1, Sept 1972. [24](#)

ZWIEBACH, B. Curvature squared terms and string theories. **Physics Letters B**, v. 156, p. 315–317, Jun 1985. [46](#)

A EQUAÇÕES DE CAMPO LINEARIZADAS PARA A RELATIVIDADE GERAL E PARA A TEORIA DE VISSER

Quando estamos lidando com campos gravitacionais fracos tais que possamos, na linguagem geométrica da RG, considerá-los como pequenas perturbações do espaço-tempo plano (representado pela métrica de Minkowski da Relatividade Restrita), e a expansão do Universo possa ser desprezada, então estaremos no contexto das equações de campo linearizadas.

Para obter as equações de Einstein nesse regime consideraremos a métrica (SCHUTZ, 1992; WEINBERG, 1972, e.g.):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ representa, neste contexto, o próprio campo gravitacional tal que $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Então trabalharemos com a métrica (A.1) nas equações (2.51) realizando uma teoria de perturbação de primeira ordem. Começando com a conexão métrica, ela fica escrita na forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu}h_{\kappa\nu} + \partial_{\nu}h_{\kappa\mu} - \partial_{\kappa}h_{\mu\nu}) + O(h^2). \quad (\text{A.2})$$

O símbolo $O(h^2)$ indica que estamos eliminando os termos de ordem maior ou igual a 2 em $h_{\mu\nu}$.

Utilizando (A.2) para calcular o tensor de Ricci encontramos:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} - \partial_{\kappa}\partial_{\nu}h^{\kappa}_{\mu} - \partial_{\kappa}\partial_{\mu}h^{\kappa}_{\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\kappa}_{\kappa}) + O(h^2), \quad (\text{A.3})$$

onde:

$$\square = \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}. \quad (\text{A.4})$$

Note que, como estamos assumindo apenas a primeira ordem na perturbação, nossos cálculos se passam como se o tensor de segunda ordem $h_{\mu\nu}$ fosse um tensor no espaço de Minkowski, e portanto operações, como abaixamento e levantamento de índices ou como (A.4), são realizadas utilizando a métrica $\eta_{\mu\nu}$.

Prosseguindo, a partir da contração dos índices do tensor de Ricci (A.3) encontramos o escalar de curvatura:

$$R = \square h - \eta^{\mu\nu}\partial_{\kappa}\partial_{\nu}h^{\kappa}_{\mu}, \quad (\text{A.5})$$

para enfim substituir todas as quantidades em (2.51) obtendo, assim, as equações de

Einstein linearizadas:

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\kappa \partial_\nu h^\kappa{}_\mu - \partial_\kappa \partial_\mu h^\kappa{}_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\kappa h^{\lambda\kappa} + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \square h = -16\pi G T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.6})$$

na qual fizemos $h = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}$.

De forma geral, o tensor $h_{\mu\nu}$ pode apresentar até 6 graus de liberdade independentes numa teoria métrica de gravitação, para uma análise detalhada sobre esse tema, ver por exemplo [Will \(1993\)](#). Contudo, como ficou demonstrado no capítulo 2, OGs apresentam apenas 2 graus de liberdade independentes correspondentes a dois estados de polarização no contexto da RG. Os outros quatro graus de liberdade não carregam energia e momentum e portanto não são “físicos”. Assim deve ser possível encontrar uma transformação de coordenadas na qual possamos reduzir os graus de liberdade apresentados em (A.6).

Uma transformação de coordenadas infinitesimal geral no regime de campo fraco é da forma ([SCHUTZ, 1992](#), e.g.):

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \quad (\text{A.7})$$

na qual $\xi^\mu(x)$ são quatro funções infinitesimais porém arbitrárias de x .

A métrica no novo sistema de coordenadas é dada por:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \partial_\lambda \tilde{x}^\mu \partial_\kappa \tilde{x}^\nu g^{\lambda\kappa}, \quad (\text{A.8})$$

ou, uma vez que $g^{\mu\nu} \simeq \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, obtemos:

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial_\lambda \xi^\mu \eta^{\lambda\nu} - \partial_\kappa \xi^\nu \eta^{\kappa\mu}. \quad (\text{A.9})$$

Assim, se $h_{\mu\nu}$ é solução de (A.6), também o será:

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu. \quad (\text{A.10})$$

Que isso é verdadeiro pode ser verificado por substituição direta em (A.6), esta propriedade é chamada de “invariância de calibre”.

Por conveniência, definiremos um novo tensor $\bar{h}_{\mu\nu}$ como:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (\text{A.11})$$

que por (A.10) transforma-se da forma:

$$\tilde{\bar{h}}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha. \quad (\text{A.12})$$

Calculando ainda:

$$\partial_\nu \tilde{\bar{h}}_\mu{}^\nu = \partial_\nu \bar{h}_\mu{}^\nu - \eta^{\lambda\kappa} \partial_\lambda \partial_\kappa \xi_\mu, \quad (\text{A.13})$$

vemos que se $\partial_\nu \bar{h}_\mu{}^\nu \neq 0$ podemos realizar uma transformação de coordenadas para fazer:

$$\partial_\nu \tilde{\bar{h}}_\mu{}^\nu = 0 \quad (\text{A.14})$$

desde que as funções $\xi_\mu(x)$ satisfaçam:

$$\square \xi_\mu = \partial_\nu \bar{h}_\mu{}^\nu. \quad (\text{A.15})$$

Por outro lado, se

$$\partial_\nu \bar{h}_\mu{}^\nu = 0 \quad (\text{A.16})$$

podemos realizar uma transformação de coordenadas que mantenha essa condição desde que $\xi_\mu(x)$ satisfaçam a equação de onda:

$$\square \xi_\mu = 0. \quad (\text{A.17})$$

Veja que a condição (A.16) é análoga à condição de Lorentz adotada no eletromagnetismo para o potencial vetor A^μ .

Retornado agora a definição (A.11) juntamente com a condição (A.16) para (A.6) encontramos a equação de onda para $\bar{h}_{\mu\nu}$:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.18})$$

Para o vácuo $T_{\mu\nu} = 0$ e a solução desta equação é simplesmente uma superposição linear de ondas planas:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha), \quad (\text{A.19})$$

onde $A_{\mu\nu}$ são as amplitudes da onda e k_α é o vetor de onda. Com essa solução em $\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0$ encontramos:

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad (\text{A.20})$$

ou seja, a RG prevê que as OGs propagam-se em geodésicas nulas ou, em outras palavras, à velocidade da luz c .

De (A.19) em (A.16) encontramos ainda que a amplitude e o vetor de onda são ortogonais:

$$A^{\mu\nu} k_\nu = 0. \quad (\text{A.21})$$

Note que inicialmente $\bar{h}_{\mu\nu}$ (ou de forma equivalente $h_{\mu\nu}$) possui 16 componentes, mas como estamos trabalhando com tensores simétricos (isto é, não estamos trabalhando em espaços com torção), ele tem na realidade 10 componentes independentes. A condição (A.21) que provém da condição de Lorentz amarra quatro graus de liberdade nos deixando com 6 componentes.

Outras condições de calibre ainda podem ser requeridas para impormos $A^{0\nu} = 0$ e $A^i_i = 0$, ou seja, ondas transversas à direção de propagação e com o traço da amplitude nulo. Esses graus de liberdade que descartamos são por vezes chamados de “ondas de calibre” (FEYNMAN, 1995), elas não tem efeitos físicos e sempre podem ser removidas por uma transformação de calibre. Com isso deixamos a perturbação $\bar{h}_{\mu\nu}$ no chamado calibre transverso e sem traço, no qual $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Assim, torna-se manifesto que OGs planas no contexto da teoria de Einstein possuem apenas 2 graus de liberdade fisicamente verdadeiros independentes tal qual havíamos enunciado anteriormente.

Para obter as equações de campo linearizadas no contexto da teoria bimétrica de Visser, a métrica $g_{\mu\nu}$ deve ser expandida em torno de $(g_0)_{\mu\nu}$ na forma: $g_{\mu\nu} = (g_0)_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Mas indo para coordenadas cartesianas ficamos simplesmente com a métrica de fundo de Minkowski $(g_0)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Assim, as equações de campo (2.76) ficam:

$$\square h_{\mu\nu} - \partial_\kappa \partial_\nu h^\kappa_\mu - \partial_\kappa \partial_\mu h^\kappa_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\kappa h^{\lambda\kappa} + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \square h - m^2 (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.22})$$

Note agora que ao realizarmos uma transformação infinitesimal de coordenadas do tipo (A.7), a partir da qual $h_{\mu\nu}$ obedece a lei de transformação (A.10), as equações (A.22) resultam em:

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu} &- \partial_\kappa \partial_\nu h^\kappa_\mu - \partial_\kappa \partial_\mu h^\kappa_\nu + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\kappa h^{\lambda\kappa} + \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \square h - m^2 (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h) \\ &+ m^2 (\partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Comparando as expressões (A.22) e (A.23) notamos que elas não coincidem devido a um termo que contém as funções de transformação multiplicado por m^2 . Concluimos, dessa forma, que as equações de campo linearizadas para grávitons massivos não são invariantes de calibre e, portanto, soluções obtidas em determinado calibre podem diferir de soluções obtidas em outro. Dizemos, assim, que a introdução de um termo de massa nas equações de

campo “quebra” a simetria de calibre. Veja que no limite $m \rightarrow 0$ recuperamos as equações de campo da RG derivadas anteriormente e a invariância de calibre é restaurada.

Se reescrevemos a expressão (A.22) na forma condensada:

$$2G_{\mu\nu}(h) - m^2(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.24})$$

fica claro verificar que se tomamos a divergência em ambos os lados de (A.24) temos que a divergência do tensor de Einstein anula-se, pela conservação de energia $\partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0$ pois o tensor energia momentum $T_{\mu\nu}$ não se acopla com $h_{\mu\nu}$ no limite linearizado e ficamos com a condição:

$$\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.25})$$

onde $\bar{h}_{\mu\nu}$ foi definido por (A.11). Ou seja, a condição (A.25) que foi obtida na seção anterior através de uma condição de calibre, aqui é uma condição natural que emerge como consequência da conservação de energia. O mesmo fenômeno ocorre para o potencial vetor no eletromagnetismo ao introduzirmos a Lagrangiana de Procca (JACKSON, 1975, e.g.)

Como (A.25) é a única condição que vincula as componentes de $h_{\mu\nu}$, ele possui no total seis graus de liberdade independentes que correspondem, no caso da teoria de Visser, a seis estados de polarização das OGs (de PAULA et al., 2004)(em outras teorias o número de estados de polarização pode diferir do número de graus de liberdade). Na figura 2.1 mostramos o efeito de cada um dos modos de polarização num anel de partículas teste. Fisicamente, podemos identificar os modos de polarização pelas forças de maré entre duas partículas (WILL, 1993).

Utilizando (A.25), as equações de campo (A.22) simplificam-se para:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - m^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.26})$$

Para o vácuo $T_{\mu\nu} = 0$, uma superposição de ondas planas é solução de (A.26) e teremos consequentemente a seguinte relação para o quadrivetor de onda:

$$k_\alpha k^\alpha = -m^2. \quad (\text{A.27})$$

Se assumimos que o vetor de onda espacial está orientado na direção z de um sistema de coordenadas cartesiano temos $k^\alpha = (\omega, 0, 0, k)$ e (A.27) nos fornece a relação de dispersão:

$$k = \sqrt{\omega^2 - m^2}, \quad (\text{A.28})$$

da qual podemos derivar a velocidade de propagação da onda gravitacional via $v = d\omega/dk$

que nos leva a:

$$v(\omega) = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{\omega}\right)^2}, \quad (\text{A.29})$$

ou seja, para ondas gravitacionais massivas, a velocidade é dependente da frequência.

Assumindo campos aproximadamente estacionários, podemos fazer $\square \simeq \nabla^2$ e o tensor energia-momentum no limite não relativístico reduz-se para $T_{\mu\nu} \simeq T_{00} = \rho$. Levando essas informações em A.26, ficamos com:

$$(\nabla^2 - m^2)\bar{h}_{00} = -16\pi Gc^4\rho. \quad (\text{A.30})$$

Na correspondência Newtoniana identificamos $h_{00} = -2\phi$ e portanto $\bar{h}_{00} = -4\phi$, o que nos leva para:

$$(\nabla^2 - m^2)\phi = 4\pi G\rho. \quad (\text{A.31})$$

A solução de (A.31) em coordenadas polares esféricas para uma massa pontual é um potencial do tipo Yukawa:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \exp(-r/\lambda_g), \quad (\text{A.32})$$

onde identificamos $\lambda_g = \hbar/m_g c$ como o comprimento de onda Compton associado ao gráviton. Veja que quando $m_g \rightarrow 0$ recuperamos o potencial Newtoniano e as equações de campo voltam a ser Einsteinianas.