



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2012/01.24.16.15-TDI

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO UNIVERSO PRÉ-GALÁCTICO

Eduardo dos Santos Pereira

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr. Oswaldo Duarte Miranda, aprovada em 24 de fevereiro de 2012.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3B8Q7ML>>

INPE
São José dos Campos
2012

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3208-6923/6921

Fax: (012) 3208-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE (RE/DIR-204):**Presidente:**

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Membros:

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

Dr^a Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Dr. Germano de Souza Kienbaum - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dr. Manoel Alonso Gan - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr^a Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Plínio Carlos Alvalá - Centro de Ciência do Sistema Terrestre (CST)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Vivéca Sant´Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



sid.inpe.br/mtc-m19/2012/01.24.16.15-TDI

UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO UNIVERSO PRÉ-GALÁCTICO

Eduardo dos Santos Pereira

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr. Oswaldo Duarte Miranda, aprovada em 24 de fevereiro de 2012.

URL do documento original:

<<http://urlib.net/8JMKD3MGP7W/3B8Q7ML>>

INPE
São José dos Campos
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Pereira, Eduardo dos Santos.

P414u

Uma contribuição ao estudo do universo pré-galáctico / Eduardo dos Santos Pereira. – São José dos Campos : INPE, 2012.
xxx + 185 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m19/2012/01.24.16.15-TDI)

Tese (Astrofísica) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2012.

Orientador : Dr. Oswaldo Duarte Miranda.

1. cosmologia. 2. formação de estruturas. 3. buracos negros.
4. astrofísica computacional. I. Título.

CDU 524.85

Copyright © 2012 do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente com o propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright © 2012 by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming, or otherwise, without written permission from INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

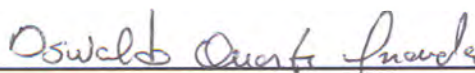
Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de Doutor(a) em
Astrofísica

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza



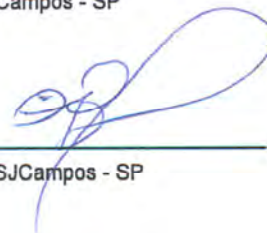
Presidente / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Oswaldo Duarte Miranda



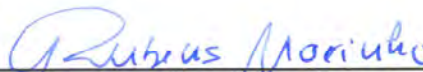
Orientador(a) / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Odylio Denys de Aguiar



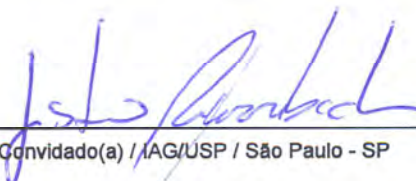
Membro da Banca / INPE / SJC Campos - SP

Dr. Rubens de Melo Marinho Júnior




Convidado(a) / ITA / SJC Campos - SP

Dr. Gastão Cesar Bierrenbach Lima Neto



Convidado(a) / IAG/USP / São Paulo - SP

Dr. Martin Makler



Convidado(a) / CBPF / Rio de Janeiro - RJ

Este trabalho foi aprovado por:

() maioria simples

unanimidade

Aluno (a): Eduardo dos Santos Pereira

São José dos Campos, 24 de fevereiro de 2012

*A minha esposa Regla, a minha filha Victória, a meus pais
Antônio e Nilce e à minha irmã Luciana*

AGRADECIMENTOS

Agradeço com um carinho muito especial à Regla, por ter se tornado uma grande amiga, confidente, amante e companheira de todos os dias. Por ter sido meu pilar nas horas difíceis e por ter entrado em minha vida para jamais deixá-la e pelo presente maravilhoso que é minha filha, a princesinha do nosso lar Victória.

Agradeço a meus pais, Antônio e Nilce, que são pessoas dignas, lutadoras, vitoriosas e exemplos que me amparam e me indicam aquilo que devo ser.

Agradeço a compreensão e o carinho de minha querida irmã Luciana, que nunca está ausente de meus pensamentos.

Agradeço ao meu orientador Dr. Oswaldo Duarte Miranda por ser um guia durante esta jornada.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -CAPES, pela oportunidade de desenvolvimento profissional, intelectual e pessoal.

Agradeço a todos os meus familiares, por toda consideração.

Agradeço à coordenação e ao grupo de pós-graduação da Divisão de Astrofísica do Instituto Nacional de Pesquisas espaciais-INPE, por sua infra-estrutura e atenção oferecida.

Agradeço aos membros desta banca, pela paciência e atenção que prestaram ao meu trabalho neste momento de grande importância em minha vida.

Agradeço a todas as pessoas que não foram mencionadas aqui, mas que, de alguma forma, deram sua contribuição para este trabalho.

RESUMO

Nesse trabalho foi desenvolvido um modelo baseado no formalismo “tipo-Press-Schechter” que permite derivar a taxa cósmica de formação estelar (TCFE). Em particular, essa TCFE produz um bom acordo com os dados observacionais para *redshifts* $z < 6$. De posse da TCFE, estudou-se fundos estocásticos de ondas gravitacionais produzidos pelo colapso, para buracos negros, de estrelas formadas a partir de *redshifts* $z \sim 20 - 40$. Foram observados, para alguns modelos, razões Sinal-Ruído (S/N) > 10 a partir da correlação de dois detectores LIGO avançados (*Advanced LIGO* ou LIGO III). Uma outra possibilidade de detector de onda gravitacionais, para a próxima década, é o Telescópio Einstein (ET) que incrementará as razões Sinal-Ruído estudadas neste trabalho por um fator de 10. Assim, a astronomia de ondas gravitacionais poderá contribuir enormemente para o estudo do Universo pré-galáctico, ajudando a reconstruir a história de formação estelar a altos-*redshifts*. Além disso, estudou-se o crescimento de buracos negros supermassivos e sua conexão com a TCFE. Em particular, é possível obter, a partir de sementes de $1000M_{\odot}$ (em *redshift* ~ 20), a evolução da densidade comóvel de buracos negros considerando que estes crescem por acreção de matéria (argumento de Soltan). Para reproduzir a função luminosidade de quasares (FLQ), esse modelo mostra que a eficiência radiativa média, dos discos de acreção, deve ser uma função do *redshift*. Um resultado interessante é de que a função *Duty Cycle* dos quasares é máxima dentro da janela em *redshift* $8,5 - 11$, que está dentro da incerteza observacional associada com a reionização do Universo. Dessa forma, talvez mini-quasares possam ter tido um papel importante durante a reionização do nosso Universo. Esta tese também produziu um *framework* computacional chamado PyGraWC para o estudo de cosmologia e ondas gravitacionais de origem cosmológica. Esse *framework* está disponível para a comunidade desde que respeitados os termos da GNU-GPL.

A CONTRIBUTION FOR THE PRE-GALACTIC UNIVESRE STUDY

ABSTRACT

We developed a model based on the “Press-Schechter-like formalism” which allows to derive the cosmic star formation rate (CSFR). In particular, our CSFR produces a good agreement with observational data for redshifts $z < 6$. Using the CSFR, we studied the stochastic backgrounds of gravitational waves produced by the collapse of stars to produce black holes as remnants. We have obtained, for some models, Signal to Noise ratios (S/N) > 10 from the correlation of two advanced LIGO detectors (Advanced LIGO or LIGO III). Another possibility of gravitational wave detector, for the next decade, is the Einstein Telescope (ET) that will increase the Signal to Noise ratios studied in this work by a factor of 10. Thus, gravitational wave astronomy can contribute greatly to the study of pre-galactic universe, helping to reconstruct the history of star formation at high redshifts. We also studied the growth of supermassive black holes and their connection with the CSFR. In particular, from seeds of $1000M_{\odot}$ (at a redshift of ~ 20), we reconstructed the evolution of the comoving density of black holes just using Soltan’s argument. In order to reproduce the quasar luminosity function (QLF), our model shows that the mean radiative efficiency of the accretion disks should be a function of redshift. An interesting result is that the duty-cycle of quasars is maximum within the redshift range 8.5 to 11, which is within the observational uncertainties associated with the reionization of the Universe. Thus, perhaps mini-quasars may have had an important role during the reionization of our universe. This thesis also produced a framework called PyGravWC for the study of cosmology and gravitational waves of cosmological origin. This framework is available to the community if respected the terms of the GNU-GPL

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Aglomerado da Bala	5
3.1 Pulsar de Hulse-Taylor	40
3.2 Polarização das Ondas Gravitacionais	56
3.3 Diagrama Básico de um Detector Interferométrico	56
3.4 Detector LIGO	57
3.5 Detector LISA	58
3.6 Detector DECIGO	58
3.7 Detector BBO	59
4.1 Comparação entre Taxas Cósmicas de Formação Estelar	74
4.2 TCFE - efeito da Massa Mínima dos Halos	75
4.3 TCFE - Efeito da Escala Característica de Formação Estelar	76
4.4 TCFE - Efeito do <i>Redshift</i> do Início da Formação	77
4.5 Estrela mais próxima de Sagittarius A*	79
4.6 Imagem feita pelo ESOVLT	80
4.7 Estrelas na região de Sagittarius A*	80
4.8 XTE J1118+480	81
5.1 Taxa cósmica de formação estelar para $M_{\min} = 10^6 M_{\odot}$	88
5.2 Taxa cósmica de formação estelar para $M_{\min} = 10^8 M_{\odot}$	90
5.3 Taxa cósmica de formação estelar para $M_{\min} = 10^{10} M_{\odot}$	92
5.4 Densidade de Energia de Ondas Gravitacionais	93
5.5 Amplitude do fundo de ondas gravitacionais	95
6.1 Correlação entre gás - formação estelar - buracos negros	101
6.2 Comparação entre Taxas Cósmicas de Formação Estelar	104
6.3 Densidade de massa de buracos negros	105
6.4 Razão ρ_{BH}/ρ_g	106
6.5 Densidade de Luminosidade de Quasares	109
6.6 Eficiência radiativa média	110
6.7 Taxa média adimensional de acreção de matéria	112
6.8 Função <i>duty cycle</i> de quasar	113
7.1 Diagrama de classes do PyGraWC	119
7.2 Estrutura Geral dos Programas	120
7.3 StarCosmo - Tela inicial	121

7.4	StarCosmo - TCFE	122
7.5	StarCosmo - Tempo X <i>Redshift</i>	122
7.6	<i>Graviton Perturbation</i> - Página inicial	123
7.7	<i>Graviton Perturbation</i> - Menu	124
7.8	<i>Graviton Perturbation</i> - Tempo e <i>redshift</i>	125
7.9	<i>Graviton Perturbation</i> - Gráfico de $t \times z$	126

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
5.1 Resultados do modelo com $M_{\min} = 10^6 M_{\odot}$	88
5.2 Resultados para o modelo com $M_{\min} = 10^8 M_{\odot}$	90
5.3 Resultados para os modelos com $M_{\min} = 10^{10} M_{\odot}$	92
6.1 Parâmetros de melhor ajuste para $\bar{\eta}(z)$	108
6.2 Máximo valor para a eficiência radiativa média.	110
6.3 Máximos valores para a função <i>duty-cycle</i>	113

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 Cosmologia e Formação de Estruturas	5
2.1 Cosmologia Relativística	6
2.1.1 Propagação da Luz e o <i>Redshift</i>	7
2.1.2 Equações de Evolução para o fator de escala e densidades de matéria- energia	9
2.1.3 Relação entre Tempo e Redshift	12
2.1.4 Distância comóvel, variação do volume comóvel e Distância de Lumi- nosidade	13
2.2 Formação de Estruturas	15
2.2.1 Campos aleatórios em um espaço euclidiano 3D	15
2.2.2 Crescimento das Escalas Cosmológicas	19
2.2.3 Flutuações (Perturbações de Densidade)	19
2.2.4 Análise da Perturbação	22
2.2.5 Fase Einstein- de Sitter	25
2.2.6 Efeito Mészáros	26
2.2.7 Supressão da Formação de Estruturas por Λ	26
2.2.8 Evolução da flutuação de bárions após o desacoplamento	27
2.2.9 Formação dos Halos de Matéria Escura	28
2.2.10 Halos Virializados	30
2.2.11 O Formalismo tipo Press-Schechter	31
2.2.12 Extensão do Formalismo tipo Press-Schechter	35
2.2.13 Taxa de Fusão de halos	35
3 GRAVITAÇÃO E ONDAS GRAVITACIONAIS	39
3.1 Equações de Campo de Einstein	40
3.2 Ondas Gravitacionais - Equações de Einstein Linearizadas	42
3.3 Emissão de Ondas Gravitacionais	46
3.4 Estados de Polarização das Ondas Gravitacionais	50
3.5 Detectores Interferométricos de Ondas Gravitacionais	55
3.6 Razão Sinal/Ruído de um Fundo Estocástico para Detectores Interfero- métricos	59

4 Taxa C3smica de Forma33o Estelar e os Buracos Negros no Uni- verso	67
4.1 Cen3rio Hier3rquico de Forma33o de Estruturas	67
4.2 Taxa C3smica de Forma33o Estelar	70
4.2.1 Resultados	73
4.3 Buracos Negros	79
5 Estudando o Universo Atrav3s de Buracos Negros Estelares . .	83
5.1 Fundo de Buracos Negros Estelares	83
5.2 Resultados	87
5.2.1 An3lise e Discuss3o dos Resultados	96
6 Crescimento de Buracos Negros Supermassivos	101
6.1 Os Buracos Negros Supermassivos e a Forma33o Estelar	102
6.2 Efici3ncia Radiativa M3dia	106
6.3 Fun33o <i>Duty Cycle</i> de Quasares	111
6.4 Sum3rio dos Resultados	113
7 Astrof3sica Computacional	117
7.1 Design de Alto N3vel Aplicado 3 Astrof3sica	118
7.2 Resultados	120
7.2.1 StarForm - Cosmologia e Forma33o Estelar	121
7.2.2 Laborat3rio virtual de Cosmologia, Astrof3sica e Ondas Gravitacionais	123
8 Considera33es Finais	127
REFER3NCIAS BIBLIOGR3FICAS	129
AP3NDICE A - Otimizando o C3lculo em Maquinas Multiproces- sadores	139
A.1 O m3dulo ppvector	139
A.1.1 Exemplo de Uso	141
AP3NDICE B - C3digos Fonte	143
B.1 PyGraWC- C3digos	143
B.1.1 PyGraWC- C3digos Python	143
B.1.1.1 Classe Cosmo	143
B.1.1.2 Classe PressSchechter	148
B.1.1.3 Classe csfr	152

B.1.1.4	Classe smbh	157
B.1.2	Compilador dos códigos FORTAN	160
B.1.3	PyGraWC- Códigos FORTRAN	161
B.1.3.1	Módulo cosmol1	161
B.1.3.2	Módulo cosmol2	163
B.1.3.3	Módulo SGM	165
B.1.3.4	Módulo csfrF77	167
B.2	StarForm - Código	171
B.3	Modelo de Banco de Dados	181
APÊNDICE C - Simulação Monte Carlo		183

1 INTRODUÇÃO

No presente é possível observar estruturas complexas como galáxias e aglomerados de galáxias. Essas por sua vez são constituídas por objetos astrofísicos que vão desde de gás e poeira, passando por estrelas e sistemas planetários, além de objetos ainda cercados de mistério, no que diz respeito a sua natureza, como buracos negros e a matéria escura. Para se compreender o cenário atual, é preciso conhecer as inter-relações que ocorrem durante os processos evolutivos dos diversos componentes. No que cerne ao conhecimento do estágio inicial do Universo, cerca de 300 mil anos após o seu início, no chamado *Big Bang*, a radiação cósmica de fundo em micro-ondas nos têm possibilitado obter uma vasta quantidade de conhecimento. Já em períodos mais próximos do presente, em particular 840 milhões de anos após o *Big Bang*, é possível obter informações a partir de observações no espectro eletromagnético que vão desde a faixa rádio até raios-X e γ .

Contudo, ainda existe um período da vida do Universo, entre 300 mil e 840 milhões de anos após o *big bang*, a chamada era cosmológica das trevas (*Dark Age* - DA), que ainda não é acessível do ponto de vista observacional. É nessa fase que se inicia o processo de formação de estruturas e que estrelas de grande massa são formadas, as chamadas estrelas de população III, deixando buracos negros remanescentes, além de gás rico em metais. Essas estrelas são também sementes dos buracos negros supermassivos presentes no centro de galáxias. Nesse contexto, um cenário que descreva essa fase de forma mais completa ainda está por vir. Uma fonte propícia de informação sobre essa época virá com o início da astrofísica e cosmologia observacional no espectro de ondas gravitacionais¹. Essa última potencialidade se dá pelo fato de que existem diversos fenômenos astrofísicos, que tomam lugar na DA, que podem produzir ondas gravitacionais detectáveis, tais como o processo de colapso de uma estrela para buraco negro e o crescimento e fusão de buracos negros supermassivos.

Essa Tese surge com o objetivo de contribuir com o estudo do Universo pré-galáctico, em particular o potencial uso das ondas gravitacionais, para o estudo do Universo até *redshifts* 20 – 40, além de tentar entender melhor os processos associados com a formação e crescimento de buracos negros supermassivos. Um subproduto desta tese é o desenvolvimento de um código robusto e com baixo custo computacional para o estudo do Universo pré-galáctico. Esse cenário parte do processo de acreção de

¹Na Teoria Geral da Relatividade ondas gravitacionais são perturbações do espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz.

gás em halos de matéria escura, passando pela taxa cósmica de formação estelar e o uso dessa última como um traçador do processo de crescimento de buracos negros supermassivos.

Durante o desenvolvimento dessa tese foi possível produzir o seguinte conjunto de artigos:

- ***Stochastic background of gravitational waves generated by pregalactic black holes*** de Eduardo S. Pereira e Oswaldo D. Miranda publicado na revista *Mon. Not. R. Astron. Soc.* (V. 401, p. 1924-1932 de 2010). No qual é abordado o modelo para se obter a taxa cósmica de formação estelar dentro do cenário hierárquico de formação de estruturas e a obtenção do fundo estocástico de ondas gravitacionais gerada por buracos negros estelares.
- ***Massive black hole binary system in hierarchical scenario of structure formation*** de Eduardo S. Pereira e Oswaldo D. Miranda publicado no *Int. J. of Modern Phys. D.* (V. 19, N 8-10, p. 1271-1274 de 2010). Em que se aborda o processo de formação de sistemas binários de buracos negros massivos a partir da fusão de halos de matéria escura.
- ***Supermassive black holes: connecting the growth to the cosmic star formation rate*** de Eduardo S. Pereira e Oswaldo D. Miranda publicado no *Mon. Not. R. Astron. Soc. Letters* (V. 418, p. L30-L34 de 2011). No qual foi abordada a conexão entre a taxa cósmica de formação estelar e o crescimento de buracos negros supermassivos, além de um mecanismo para se obter a eficiência radiativa média do disco de acreção, que se forma ao redor do buraco negro.
- ***OGCOSMO: An auxiliary tool for the study of the Universe within hierarchical scenario of structure formation*** de Eduardo S. Pereira e Oswaldo D. Miranda submetido ao *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*. No qual se apresenta o desenvolvimento inicial dos códigos apresentados nessa tese.
- ***Programing using high level design with python and fortran: a study case in astrophysics*** de Eduardo S. Pereira e Oswaldo D. Miranda submetido ao *Journal of Computational Interdisciplinary Sciences*. No qual é abordada uma técnica computacional desenvolvida para aplicações em astrofísica.

A presente Tese está organizada da seguinte forma: Uma fundamentação teórica em forma de revisão bibliográfica é apresentada nos capítulos 2 e 3. O capítulo 2 traz uma revisão sobre cosmologia, formação de estruturas e o cenário hierárquico dentro do formalismo tipo Press-Schechter. Já no capítulo 3 trata-se de uma revisão sobre ondas gravitacionais e detectores interferométricos dessas ondas. No capítulo 4 se descreve o modelo que fornece a taxa cósmica de formação estelar. Também são abordadas as evidências observacionais da existência de buracos negros estelares e supermassivos. No capítulo 5 é mostrado o formalismo para o cálculo do fundo estocástico de ondas gravitacionais gerado por estrelas que colapsam para buracos negros estelares. No capítulo 6 é tratado o processo de conexão entre a taxa cósmica de formação estelar e o crescimento de buracos negros supermassivos, além da obtenção da função *duty cycle* de quasares e a eficiência radiativa média do disco de acreção de buracos negros supermassivos. No capítulo 7 é apresentada a metodologia computacional utilizada ao longo desse trabalho. Finalmente, no capítulo 8 encontram-se as considerações finais desta tese.

2 Cosmologia e Formação de Estruturas

A cosmologia é uma ciência que estuda a origem, estrutura e evolução do Universo como um todo. Atualmente sabe-se que o Universo é composto de $\sim 70\%$ de energia escura, $\sim 25\%$ de matéria escura e $\sim 5\%$ de matéria bariônica, que é a matéria que forma estrelas, planetas. A primeira componente, a energia escura, está associada com a expansão acelerada do Universo, (RIESS et al., 1998). A segunda componente, matéria escura, é um tipo de matéria que não emite nem absorve fótons, mas que possui interação gravitacional. Uma prova direta da existência da matéria escura foi apresentada por Clowe et al. (2006) na observação do aglomerado 1E 0657-56, também conhecido como aglomerado da bala, em que é possível notar a separação entre a matéria escura, via efeito de lente gravitacional, da matéria ordinária, ou matéria bariônica, pela emissão de raios-X (Figura 2.1).

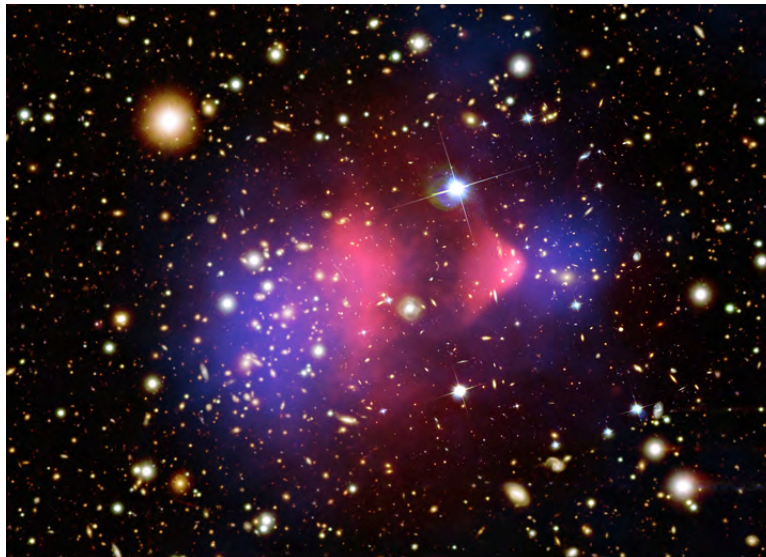


Figura 2.1 - Aglomerado 1E 0657-56 também conhecido como aglomerado da bala. Matéria bariônica em rosa, detectada por emissão em raios-X, em azul indica matéria escura, detectada por lentes gravitacionais.

FONTE: (MARKEVITCH et al., 2011)

Contudo, ainda não se possui um entendimento completo da natureza da matéria e energia escuras.

Além disso, estudos recentes mostram que a Teoria Geral da Relatividade, mais constante cosmológica (Λ) e matéria escura fria (*Cold Dark Matter*-CDM) produzem um modelo cosmológico (Λ CDM) em concordância com observações do Universo em

larga escala, como pode ser observado no trabalho de [Reyes et al. \(2010\)](#).

As convenções adotadas nesse capítulo são, índices gregos variam de 0 a 3, índices latinos variam de 1 a 3. A assinatura métrica é dada por $(+, -, -, -)$.

Nesse capítulo serão tratados os seguintes temas: uma breve introdução à cosmologia relativística e ao modelo Λ CDM (seção 2.1); a formação de estruturas no contexto do formalismo tipo Press-Schechter e sua extensão (seção 2.2).

2.1 Cosmologia Relativística e o Modelo de Matéria Escura Fria mais Constante Cosmológica

A cosmologia relativística tem como pilar: i) A Teoria Geral da Relatividade: essa teoria permite descrever relações de distância, ou geometria, do espaço-tempo com o conteúdo energético-material contido no mesmo; ii) O princípio cosmológico: o qual diz que em cada época o Universo possui o mesmo aspecto em cada ponto, a menos das irregularidades locais, ou seja, que o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. ii) O postulado de Weyl: o qual diz que as linhas de mundo de um fluido de partículas do substrato são hiper-superfícies ortogonais formando uma congruência normal a geodésica tipo-tempo divergente de um ponto no passado, sendo esse último finito ou infinito¹.

Esses três elementos podem ser traduzidos no seguinte conjunto de equações:

- 1) Elemento de linha de Robertson-Walker (Princípio cosmológico) ([WEINBERG, 1972](#); [NARLIKAR, 1993](#)):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [a(t)]^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]; \quad (2.1)$$

sendo $a(t)$ o fator de escala, que varia com o tempo cósmico t , e as coordenadas θ , r e ϕ são conhecidas como coordenadas comoveis, ou seja, uma partícula movendo-se livremente permanece em repouso nessas coordenadas. A constante k descreve a geometria da seção espacial do espaço-tempo sendo que para $k = -1, 0, +1$ tem-se, respectivamente, universo hiperbólico, plano e fechado;

- 2) O tensor energia-momento do substrato como fluido perfeito (Princípio de Weyl) ([D'INVERNO, 1992](#)):

¹Esse princípio quer dizer que geodésicas não se intersectam exceto em um ponto singular no passado, seja esse finito ou não. Nesse caso, as geodésicas do substrato compõe uma família de hiper-superfícies ortogonais.

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

em que ρ é a densidade do fluido e p a sua pressão, $g_{\mu\nu}$ é a métrica de fundo e $u_{\mu\nu}$ é a quadri-velocidade.

3) Equação de campo de Einstein, com constante cosmológica (D'INVERNO, 1992):

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}; \quad (2.3)$$

sendo $G_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein G é a constante gravitacional, c é a velocidade da luz e Λ é a constante cosmológica.

Nas próximas subseções serão apresentados, a partir das equações anteriores, os efeitos sobre a propagação da luz e o efeito de *redshift* (desvio para o vermelho do espectro eletromagnético), definição de distância, a dinâmica de evolução do Universo a partir das equações de Friedmann e a relação entre o tempo cosmológico e o *redshift*.

2.1.1 Propagação da Luz e o *Redshift*

A partir do princípio cosmológico é possível avaliar a propagação da luz de um ponto r_1 ao ponto r_0 , considerando $r_0 = 0$, ou seja, que o observador está centrado na origem independentemente de onde o mesmo se encontre no Universo. Nesse caso, é possível inserir, em coordenadas comóveis, a condição de geodésica radial nula em que:

$$ds^2 = d\theta = d\phi = 0. \quad (2.4)$$

Tomando isso em conta no elemento de linha dada pela equação (2.1) tem-se:

$$cdt = \pm \frac{a(t)dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.5)$$

Na equação anterior os sinais $+$ e $-$ representam respectivamente, nessa geodésica nula, um fóton se afastando do observador e um fóton se aproximando. Assumindo um fóton vindo da posição r_1 em direção a origem, e integrando a equação anterior vê-se que:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_1), \quad (2.6)$$

aqui vale ressaltar que a integral do lado direito da equação anterior terá as seguintes soluções particulares:

$$f(r_1) = \begin{cases} \sin^{-1}(r_1), & \text{se } k = +1; \\ r_1, & \text{se } k = 0; \\ \sinh^{-1}(r_1), & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Considerando a emissão de ondas de luz localizada em r_1 e que essa emissão ocorre no intervalo de tempo t_1 e $t_1 + \Delta t_1$, sendo recebida pelo observador na origem em t_0 e $t_0 + \Delta t_0$. Considerando esse fato na equação (2.6) então:

$$\int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.8)$$

Pode-se subdividir a faixa de integração para eliminar o “*overlap*” entre $t_1 + \Delta t_1$. Isto é:

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_1 + \Delta t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)},$$

o que implica em :

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.9)$$

Dessa forma é possível escrever:

$$\frac{c\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{c\Delta t_1}{a(t_1)}. \quad (2.10)$$

Logo, a relação entre a frequência da onda luminosa emitida, ν_1 , e a recebida, ν_0 é dada por:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (2.11)$$

Definindo o desvio em comprimento de onda sofrido pela onda luminosa, devido a variação do fator de escala como:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1,$$

normalizando o fator de escala em t_0 como $a(t_0) = 1$ e usando a Equação (2.11) é possível escrever:

$$z = \frac{1}{a(t_1)} - 1. \quad (2.12)$$

O significado físico do *redshift* é de que o comprimento de onda de fótons propagando livremente aumenta com a expansão do Universo e de forma proporcional ao fator de escala.

2.1.2 Equações de Evolução para o fator de escala e densidades de matéria-energia

A partir das Equação (2.3), (2.2) e (2.1), assumindo um sistema de coordenadas comoveis ou seja,

$$u^a = (1, 0, 0, 0),$$

e assumindo somente a componente tempo-tempo das equações de Einstein:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R - \Lambda g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00};$$

e considerando a métrica dada pelo elemento de linha da Equação (2.1) obtem-se a equação de Friedmann, para Universo plano ($k = 0$):

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = H^2 = \frac{\Lambda}{3} - \frac{8\pi G}{3c^2}\rho = \frac{8\pi G}{3c^2}(\rho + \rho_\Lambda); \quad (2.13)$$

Agora, considerando as componentes espaciais das Equações de Einstein,

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij};$$

e usando $g_{ij} = -\delta_{ij}a^2$, chega-se a:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\Lambda}{2} = -\frac{4\pi G}{c^2}p, \quad (2.14)$$

que combinada com a Equação (2.13) fornece:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p - 2\rho_\Lambda), \quad (2.15)$$

em que ρ é a densidade de matéria-energia, $\rho_\Lambda = (c^2/8\pi G)\Lambda$.

Sendo (2.13) e (2.15) as equações para a evolução do fator de escala.

A Equação (2.13) pode ser reescrita, como:

$$\frac{\dot{a}}{a} = B^{1/2}\rho_T^{1/2}, \quad (2.16)$$

em que $\rho_T = \rho + \rho_\Lambda$ leva em conta a densidade total de matéria-energia no Universo e $B \equiv 8\pi G/(3c^2)$. Derivando a equação anterior com o tempo tem-se:

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{1}{2}B^{1/2}\frac{\dot{\rho}_T}{\rho_T^{1/2}}.$$

Usando novamente a Equação (2.16) na equação anterior juntamente com a Equação (2.15) obtém-se:

$$-B^{1/2}(\rho + 3p - 2\rho_\Lambda + 2\rho_T) = \frac{\dot{\rho}_T}{\rho_T^{1/2}}, \quad (2.17)$$

o que permite escrever:

$$\dot{\rho} = -3\rho_T^{1/2}B^{1/2}(\rho + p). \quad (2.18)$$

Novamente usando a Equação (2.16) e definindo a equação de estado $p = w\rho$, tem-se:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.19)$$

cuja solução geral é:

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}. \quad (2.20)$$

Veja que para cada componente (matéria, radiação, energia escura) pode-se escrever:

$$\rho_i = \rho_0^i a^{-3(1+w_i)}. \quad (2.21)$$

Para o caso de um fluido não relativístico $p \ll \rho$, ou seja, podemos considerar $w \simeq 0$. No caso de um fluido relativístico, como a radiação, $p = \rho/3$ o que conduz a $w = 1/3$. Já para a constante cosmológica $w = -1$. Assim tem-se as seguintes funções de evolução para as densidades de matéria e radiação respectivamente:

$$\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}. \quad (2.22)$$

$$\rho_r = \rho_r^0 a^{-4}. \quad (2.23)$$

sendo ρ_m^0 e ρ_r^0 os valores para o presente de ρ_m e ρ_r .

Veja que o tensor energia-momento é simplesmente:

$$T_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

e também que o resultado obtido na Equação (2.19) surge da condição de conservação do tensor energia-momento,

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0,$$

com:

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} = \frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu}.$$

Considerando a densidade crítica do Universo sendo $\rho_c^0 = (3H_0^2 c^2)/(8\pi G)$ e usando o resultado da Equação (2.21) em (2.13) tem-se:

$$\left(\frac{H^2}{H_0^2}\right) = \frac{1}{\rho_c^0} \sum_i \rho_i^0 a^{-3(1+w_i)}, \quad (2.25)$$

ou

$$\left(\frac{H^2}{H_0^2}\right) = \sum_i \Omega_i^0 a^{-3(1+w_i)}, \quad (2.26)$$

sendo $\Omega_i^0 = \rho_i^0/\rho_c^0$.

2.1.3 Relação entre Tempo e Redshift

Usando a Equação (2.26) pode-se escrever:

$$\frac{da}{dt} = H_0 a \sqrt{\sum_i \Omega_i^0 a^{-3(1+w_i)}}, \quad (2.27)$$

mas $a = 1/(1+z)$, logo $da/dz = -1/(1+z)^2$ e $da/dt = (dz/dt) * (da/dz)$. Assim a equação anterior pode ser escrita como:

$$\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{1}{H_0(1+z)} \frac{1}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^0 a^{-3(1+w_i)}}}. \quad (2.28)$$

Desprezando a contribuição da radiação para o presente, tem-se:

$$\left|\frac{dt}{dz}\right| = \frac{1}{H_0(1+z)} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m^0 (1+z)^3 + \Omega_{\Lambda}^0}}. \quad (2.29)$$

Integrando a Equação (2.29) pode-se obter a expressão para a idade do Universo.

Isto é:

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)\sqrt{\Omega_m^0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}. \quad (2.30)$$

Note que para um Universo com $\Omega_m = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$ a equação anterior fornece para a idade do Universo $t_U = 2/(3H_0)$.

2.1.4 Distância comóvel, variação do volume comóvel e Distância de Luminosidade

Para se obter a distância comóvel em um dado momento, basta considerar $ds = d\theta = d\phi = 0$ na Equação (2.1), o que para Universo plano, $k = 0$, fornece:

$$dr = \frac{c}{a} dt.$$

Mas $dz = -da/a^2$ e definindo $E(z) \equiv \sqrt{\sum_i \Omega_i^0 a^{-3(1+w_i)}}$, então $E(z) = H(z)/H_0$, assim:

$$\frac{dz}{E(z)} = \frac{-da}{a^2 E(z)} = \frac{-H_0 da}{a^2 H(z)} = \frac{-H_0 da}{a^2} \frac{a}{\dot{a}},$$

ou seja,

$$\frac{-dz}{E(z)} = \frac{H_0}{a} \frac{da}{\dot{a}} = \frac{H_0}{a} \frac{da}{da/dt} = \frac{H_0}{a} dt;$$

logo:

$$\frac{-dz}{H_0 E(z)} = \frac{dt}{a},$$

o que permite escrever:

$$dr = \frac{c}{H_0} \frac{-dz}{E(z)}.$$

Dessa forma:

$$\int_0^{r_c} dr = - \int_z^0 \frac{c}{H_0} \frac{dz'}{E(z')} = \int_0^z \frac{c}{H_0} \frac{dz'}{E(z')}.$$

Finalmente a distância comóvel será:

$$r_c = \int_0^z \frac{c}{H_0} \frac{dz'}{E(z')}. \quad (2.31)$$

$$r_c = \int_0^z \frac{c}{H_0} \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}}}. \quad (2.32)$$

Já a distância de luminosidade é definida como:

$$d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi l} \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

com L sendo a luminosidade absoluta da fonte e l é a luminosidade aparente dada pela potência por unidade de área, sendo (WEINBERG, 1972):

$$l \equiv \frac{P}{A} = \frac{L a^2}{4\pi r_c^2}. \quad (2.34)$$

Assim, a Equação (2.33) pode ser escrita como:

$$d_L = ar_c = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}}}. \quad (2.35)$$

Finalmente, a variação do volume comóvel com o *redshift* será:

$$\frac{dV}{dz} = 4\pi r_c^2 \frac{dr_c}{dz},$$

ou:

$$\frac{dV}{dz} = 4\pi r_c^2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\sum_i \Omega_i^0 (1+z)^{3(1+w_i)}}}. \quad (2.36)$$

2.2 Formação de Estruturas

O Universo real não é homogêneo e isotrópico, exceto em escalas muito grandes. A distribuição 3D para a posição de galáxias no “*galaxy redshift survey*” 2dF, até distâncias da ordem de 600 Mpc, mostra claramente que a distribuição de galáxias não é aleatória. As galáxias se distribuem numa delicada rede cósmica formada por filamentos separados por grandes vazios. Contudo, ao olharmos o Universo em escalas cada vez maiores (acima de 100 Mpc) vemos que ele vai se tornando cada vez mais homogêneo. Além disso a radiação cósmica de fundo em microondas era suave em uma parte em 10^5 na época da recombinação. Nesta seção será mostrado como as instabilidades gravitacionais, que tiveram origem em pequenas perturbações iniciais, geraram as estruturas em grande escala.

O cálculo da formação de estruturas envolve a determinação da perturbação $\delta_k(z_0)$, no espaço de Fourier, dada a partir de:

$$\delta_k(tz_0) = T(k)\delta_k(z_i); \quad (2.37)$$

com:

$$P(k) = T^2(k)P_i(k), \quad (2.38)$$

sendo $P_i(k)$ o espectro inicial de potência das flutuações de densidade. Esse espectro é função da particular teoria em que as pequenas flutuações são produzidas, como por exemplo a inflação.

2.2.1 Campos aleatórios em um espaço euclidiano 3D

Um campo aleatório $f(\vec{x})$ é aquele que em cada posição comóvel \vec{x} assume algum número aleatório com média $\langle f(\vec{x}) \rangle = 0$.

A probabilidade do campo assumir uma dada configuração é um funcional $Pr[f(\vec{x})]$. Uma quantidade de interesse é o correlator, ou função de correlação, do campo $f(\vec{x})$

que nada mais é do que o valor esperado do produto do campo em diferentes partes do espaço.

A função correlação dois pontos é então:

$$\xi(\vec{x}, \vec{y}) = \langle f(\vec{x})f(\vec{y}) \rangle = \int Df Pr[f] f(\vec{x})f(\vec{y}). \quad (2.39)$$

Já a homogeneidade estatística significa que as propriedades estatísticas do campo transladado

$$\tilde{T}_a f(\vec{x}) \equiv f(\vec{x} - \vec{e})$$

são as mesmas do campo original, isto é:

$$Pr[f(x)] = Pr[\tilde{T}_a f(x)]. \quad (2.40)$$

Para a função de correlação de dois pontos isso significa:

$$\xi(\vec{x}, \vec{y}) = \xi(\vec{x} - \vec{a}, \vec{y} - \vec{a}) \forall \vec{a}, \quad (2.41)$$

$$\xi(x, y) = \xi(x - y). \quad (2.42)$$

Assim a função correlação depende apenas da separação dos dois pontos.

Por outro lado, a isotropia estatística significa que as propriedades estatísticas do campo rotacionado

$$\hat{R}f(x) = f(R^{-1}x), \quad (2.43)$$

sendo R uma matriz de rotação, são as mesmas do campo original. Isto é:

$$Pr[f(x)] = Pr[\hat{R}f(x)]. \quad (2.44)$$

Para a função correlação de dois pontos, isso significa que :

$$\xi(x, y) = \xi(R^{-1}x, R^{-1}y) \forall R, \quad (2.45)$$

logo

$$\xi(x, y) = \xi(|x - y|). \quad (2.46)$$

Uma questão que surge neste ponto é: como vincular um campo real $f(\vec{x})$ com um correlator que respeite homogeneidade e isotropia? A resposta pode ser obtida a partir da transformada de Fourier do campo $f(\vec{x})$. Isto é:

$$f(\vec{k}) = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} f(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.47)$$

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} f(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (2.48)$$

Sob translação a transformação de Fourier ganha um fator de fase:

$$\hat{T}_a f(\vec{k}) = f(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}}. \quad (2.49)$$

Como campos reais têm a propriedade $f(\vec{k}) = f^*(-\vec{k})$, então a invariância da função correlação dois pontos no espaço de Fourier é:

$$\langle f(\vec{k}) f^*(\vec{k}') \rangle = \langle f(\vec{k}) f^*(\vec{k}') \rangle e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{a}} \quad \forall \vec{a},$$

o que implica em:

$$\langle f(\vec{k}) f^*(\vec{k}') \rangle = F(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.50)$$

para alguma função real $F(\vec{k})$.

sob rotação:

$$\hat{R}f(\vec{k}) = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} f(R^{-1}\vec{x}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad (2.51)$$

o que implica em:

$$\hat{R}f(\vec{k}) = f(R^{-1}\vec{k}). \quad (2.52)$$

A invariância da função correlação dois pontos sob rotação implica:

$$\begin{aligned} \langle \hat{R}f(k)[\hat{R}f(k')]^* \rangle &= \langle f(R^{-1}k)f^*(R^{-1}k') \rangle \\ &= F(R^{-1}k)\delta(k - k') \\ &= F(k)\delta(k - k') \quad \forall R. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Dessa forma, para um campo $f(\vec{x})$ homogêneo e isotrópico, é definido o espectro de potência $P_f(k)$ por:

$$\langle f(\vec{k})f^*(\vec{k}') \rangle = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^3 P_f(k)\delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.54)$$

A função correlação é então a transformada de Fourier do espectro de potência:

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{x})f(\vec{y}) \rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{d^3k'}{(2\pi)^{3/2}} \langle f(\vec{k})f^*(\vec{k}') \rangle e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{y}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{dk}{k} P_f(k) \int d\Omega_k e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

A integral angular pode ser calculada se for considerado:

$$\vec{k}\cdot(\vec{x} - \vec{y}) = k|\vec{x} - \vec{y}|d\mu,$$

de forma que a integral fica:

$$2\pi \int_{-1}^{+1} d\mu e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|\mu} = 4\pi j_0(k|\vec{x} - \vec{y}|), \quad (2.56)$$

sendo

$$j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

a função esférica de Bessel de ordem zero. Dessa forma:

$$\xi(\vec{x}, \vec{y}) = \int \frac{dk}{k} P_f(k) j_0(k|\vec{x} - \vec{y}|). \quad (2.57)$$

A variância do campo é $\xi(0) = \int d \ln(k) P_f(k)$. Um espectro invariante de escala tem $P(k) \propto k$ e sua variância recebe igual contribuição para cada década de k .

2.2.2 Crescimento das Escalas Cosmológicas

É possível descrever o crescimento das estruturas cosmológicas em diferentes escalas através de uso de teorias específicas (MO et al., 2010). Por exemplo:

- a) Crescimento cosmológico linear: É descrito por fluxos cósmicos em escalas maiores que 30 Mpc e por um contraste de densidade δ menor que um. Nessa escala é possível estudar os processos envolvidos com instabilidade gravitacional e também analisar as estruturas do Universo através da teoria de perturbação linear.
- b) Crescimento cosmológico quase-linear: Quando uma região possui contraste de densidade $\delta \sim 1$, sua evolução não pode ser descrita pela teoria linear. Perturbações com $\delta \sim 1$ envolvem escalas entre 3 Mpc e 30 Mpc.
- c) Crescimento cosmológico não linear: Neste caso $\delta \gg 1$. A maior parte dos estudos nessa escala (menos que 3 Mpc) envolve simulações numéricas.

2.2.3 Flutuações (Perturbações de Densidade)

A flutuação de densidade $\delta(x, t)$ é uma função da posição tanto quanto do tempo e é dada em termos da densidade não perturbada $\bar{\rho}$ como (PEACOCK, 1999):

$$\delta(x, t) = \frac{\rho(x, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}. \quad (2.58)$$

A formação de estruturas do Universo está inteiramente conectada com o crescimento de δ em um Universo em expansão. Normalmente, gravidade Newtoniana é usada como uma aproximação, razoavelmente adequada, da Relatividade Geral em cosmologia para as escalas que estão dentro do raio de Hubble.

Considerando um fluido não relativístico com densidade ρ , pressão $P \ll \rho$ e velocidade \vec{u} , pode-se escrever as equações da dinâmica do fluido como (MO et al.,

2010):

Continuidade:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla}_r \cdot (\rho \vec{u}) = 0; \quad (2.59)$$

Euler:

$$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r = -\frac{1}{\rho} \nabla_r P - \vec{\nabla}_r \phi; \quad (2.60)$$

Poisson:

$$\vec{\nabla}_r^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (2.61)$$

com $\partial_t = \partial/\partial t$. Note que o potencial gravitacional ϕ determina a aceleração gravitacional por $\vec{g} = -\vec{\nabla}_r \phi$. Observe que, como usual, \vec{r} representa o vetor posição e t o tempo.

A introdução da constante cosmológica pode ser feita através de:

$$\vec{\nabla}_r^2 \phi = 4\pi G \rho - \Lambda. \quad (2.62)$$

Para recuperar a dinâmica do fundo (descrita pelas equação de Friedmann) considera-se que o fluido em expansão satisfaz a Lei de Hubble $\vec{u} = H(t)\vec{r}$.

Com $\phi = 0$ em $r = 0$, a equação de Poisson fornece:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = (4\pi G \rho - \Lambda) r^2, \quad (2.63)$$

$$\phi = \frac{1}{6} (4\pi G \rho - \Lambda) r^2. \quad (2.64)$$

A equação de Euler então torna-se:

$$(\partial_t H)\vec{r} + H^2 \vec{r} \cdot \vec{\nabla}_r \vec{r} = -\frac{1}{3} (4\pi G \rho - \Lambda) \vec{r}. \quad (2.65)$$

Como $\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_r \vec{r} = \vec{r}$, tem-se:

$$\partial_t H + H^2 = \frac{1}{3}(\Lambda - 4\pi G\rho) \quad (2.66)$$

Esse é o limite Newtoniano de uma das equações de Friedmann (o resultado relativístico troca ρ com a soma das densidade de energia e três vezes a pressão, $\rho + 3P$).

A equação de continuidade torna-se:

$$\partial_t \rho \vec{\nabla}_r \cdot [\rho(t) H \vec{r}] = 0, \quad (2.67)$$

o que implica em:

$$\partial_t \rho + 3\rho H = 0. \quad (2.68)$$

Veja que a equação acima fornece a conservação da energia para $\rho \gg P$. Isto é, introduzindo o fator de escala através de $\dot{a}/a = H$, tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{3}{a} \frac{\partial a}{\partial t} = 0 \quad (2.69)$$

implicando em:

$$\rho \propto a^{-3} \quad (2.70)$$

Um observador comóvel no fundo cosmológico (isto é, não perturbado) tem velocidade $d\vec{r}/dt = H(t)\vec{r}$ de forma que sua posição é $\vec{r} = a(t)\vec{x}$, sendo \vec{x} uma constante. Normalmente, em cosmologia, eventos não são representados por t e \vec{r} , prefere-se usar t e \vec{x} , sendo \vec{x} coordenadas comóveis.

Em um universo perturbado, regiões de dado tamanho possuem uma velocidade peculiar, que vem do fato da mudança (variação) de \vec{x} . Assim, uma partícula do fluido perturbado obedece a equação:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{da\vec{x}}{dt} = aH\vec{x} + a\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}. \quad (2.71)$$

O termo $a(d\vec{x}/dt = \vec{V})$ é a velocidade peculiar e descreve as mudanças nas coordenadas comóveis dos elementos do fluido cosmológico com o tempo. Isto é, \vec{V} mede afastamentos do fluxo de Hubble.

Dessa forma, num sistema em que os eventos são descritos por t e \vec{x} , que recebe o nome de coordenadas lagrangeanas, as derivadas se transformam da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - aH(t)\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_r. \quad (2.72)$$

2.2.4 Análise da Perturbação

Aplicando perturbações em ρ , \vec{u} e ϕ em relação aos seus valores de fundo tem-se (e.g. Peebles (1980), Choudhury e Padmanabhan (2002)):

$$\rho \rightarrow \bar{\rho}(t) + \delta\rho \equiv \bar{\rho}(t)(1 + \delta); \quad (2.73)$$

$$P \rightarrow \bar{P}(t) + \delta P; \quad (2.74)$$

$$\vec{u} \rightarrow \vec{V} + a(t)H(t)\vec{x}; \quad (2.75)$$

$$\phi \rightarrow \bar{\phi}(x, t) + \phi \quad (2.76)$$

Usando então a equação de continuidade, tem-se, para ρ :

$$\left[\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\bar{\rho}H\right] + \left[\left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\bar{\rho}H\right)\delta + \bar{\rho}\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\bar{\rho}}{a}\vec{\nabla} \cdot \vec{V}\right] + \left[\frac{\bar{\rho}}{a}(\vec{V} \cdot \nabla \delta + \delta \vec{\nabla} \cdot \vec{V})\right] = 0 \quad (2.77)$$

Da Equação (2.68) vem que:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + 3\bar{\rho}H = 0.$$

Na aproximação linear é considerado que as perturbações e suas derivadas são pequenas. Com isso, pode-se ignorar os termos de ordem mais alta (o último termo da Equação (2.77)). Disso então resulta:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0. \quad (2.78)$$

As equações de momento e de Poisson tornam-se, respectivamente:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + H\vec{V} = -\frac{1}{a\bar{\rho}} \nabla \delta P - \frac{1}{a} \nabla \phi \quad (2.79)$$

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta. \quad (2.80)$$

A derivada temporal da equação de continuidade perturbada resulta:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{1}{a} H \nabla \cdot \vec{V} + \frac{1}{a} \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad (2.81)$$

Combinando as equações de Euler e Poisson perturbadas obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} - 4\pi G \bar{\rho} \delta - \frac{1}{a^2 \bar{\rho}} \nabla^2 \delta P = 0. \quad (2.82)$$

que é a equação fundamental para o crescimento de estruturas na teoria Newtoniana. Ela mostra a competição geral entre a queda de matéria por atração gravitacional (termo $4\pi\bar{\rho}\delta$) e o suporte de pressão (termo $\nabla^2\delta P$).

Considerando um fluido barotrópico tal que $P = P(\rho)$, então:

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial \rho} \bar{\rho} \delta \equiv c_s^2 \bar{\rho} \delta, \quad (2.83)$$

sendo c_s a velocidade do som. Usando (2.83) em (2.82) e fazendo uma expansão de

Fourier de modo que $\nabla^2 \rightarrow -k^2$ isso fornece:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho} \right) \delta = 0. \quad (2.84)$$

Essa é uma equação de um oscilador amortecido em um universo em expansão, desde que:

$$\frac{c_s^2 k^2}{a^2} > 4\pi G \bar{\rho}. \quad (2.85)$$

Se isso acontecer, o suporte de pressão produz oscilações acústicas no fluido. Contudo para:

$$\frac{c_s^2 k^2}{a^2} < 4\pi G \bar{\rho}, \quad (2.86)$$

o sistema é instável para acreção gravitacional.

Perturbações com comprimento de onda próprio $2\pi a/k$ excedendo o comprimento de onda de Jeans,

$$k_j = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G \bar{\rho}}},$$

são gravitacionalmente instáveis enquanto que em escalas menores as perturbações oscilam suportadas pela pressão.

O comprimento de Jeans é aproximadamente o raio R de uma região com densidade de fundo $\bar{\rho}$ tal que o tempo de queda livre, t_{ff} , é igual ao tempo necessário para o som cruzar a região. Isso é $t_{ff} \sim R/V_{ff}$, sendo V_{ff} a velocidade de queda livre. Um objeto caindo do repouso, com massa $M \sim \bar{\rho} R^3$ tem velocidade $V_{ff} = \sqrt{GM/R}$. Assim,

$$t_{ff} \sim \frac{R}{\sqrt{GM/R}} \sim \frac{1}{\sqrt{G \bar{\rho}}}.$$

O tempo de travessia do som é simplesmente $t_{som} = R/c_s$ e é igual ao tempo de

queda livre para:

$$R \sim c_s / \sqrt{G\bar{\rho}} \sim \lambda_j.$$

Flutuações maiores que o comprimento de Jeans não tem tempo suficiente para fazer com que a pressão resista a queda gravitacional. Isso ocorre pois o tempo para a queda gravitacional é menor que o tempo necessário para a pressão, isto é, onda sônica, cruzar a perturbação. Observe que o tempo de queda livre é aproximadamente o tempo de Hubble $1/H$, quando curvatura e energia escura são desconsiderados.

2.2.5 Fase Einstein- de Sitter

Após a época da igualdade radiação-matéria, mas bem antes da energia escura dominar, o Universo é bem descrito por um modelo Einstein- de Sitter tendo $\bar{P} \approx 0$ e curvatura (ou Λ) zero. As escalas de interesse cosmológicos são muito maiores que a escala de Jeans para bárions. Assim, as flutuações nos bárions e na matéria escura estão sujeitas as mesmas equações dinâmicas. O contraste de densidade total é então:

$$\delta_m = \frac{\bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_c \delta_c}{\bar{\rho}_b + \bar{\rho}_c} \approx \delta_c, \quad (2.87)$$

assim, a matéria do Universo se aproxima do contraste, δ_c , da matéria escura.

Como $H^2 \propto \bar{\rho} \propto a^{-3}$, tem-se $a \propto t^{2/3}$ e assim $H = 2/(3t)$ e $4\pi G\bar{\rho} = 2/(3t^2)$.

A Equação (2.82) é então re-escrita como (NARLIKAR, 1993):

$$\frac{\partial^2 \delta_m}{\partial t^2} + \frac{4}{3t} \frac{\partial \delta_m}{\partial t} - \frac{2}{3t^2} \delta_m = 0 \quad (2.88)$$

Soluções tentativas do tipo t^P mostram que existem duas soluções independentes: $\delta_m \propto t^{-1}$ e $\delta_m \propto t^{2/3} \propto a$.

A solução modo de crescimento (*growing-mode*) cresce com o fator de escala. A outra solução é o fator de amortecimento das perturbações (*decaying-mode*).

A equação de Poisson informa que o potencial gravitacional é constante, visto que no espaço de Fourier:

$$-k^2\phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta = \text{constante.} \quad (2.89)$$

2.2.6 Efeito Mészáros

O efeito Mészáros descreve a via em que a matéria escura fria (Cold Dark Matter -CDM) cresce durante a época de domínio da radiação (WEINBERG, 2008). A CDM sente a gravidade de todos os componentes de forma que:

$$\frac{\partial^2 \delta_i}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta_i}{\partial t} - 4\pi G \sum_j \bar{\rho}_j \delta_j - \frac{1}{a^2 \bar{\rho}_i} \nabla^2 \delta P_i = 0. \quad (2.90)$$

Para CDM livre de pressão:

$$\frac{\partial^2 \delta_c}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta_c}{\partial t} - 4\pi G \sum_j \bar{\rho}_j \delta_j = 0 \quad (2.91)$$

Durante a época de domínio da radiação $H^2 \propto \bar{\rho} \propto a^{-4}$, o que implica $a \propto t^{1/2}$ e assim $H = 1/(2t)$. Logo:

$$\frac{\partial^2 \delta_c}{\partial t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial \delta_c}{\partial t} - 4\pi G \bar{\rho}_c \delta_c = 0. \quad (2.92)$$

Na época do domínio da radiação $\bar{\rho}_r \gg \bar{\rho}_c$ de forma que o último termo pode ser ignorado. Então a solução da equação anterior é do tipo $\delta_c \propto \ln(t)$.

2.2.7 Supressão da Formação de Estruturas por Λ

Após a era de domínio da radiação, a componente de matéria começa a se aglomerar. Nesse caso (MO et al., 2010):

$$\frac{\partial^2 \delta_m}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta_m}{\partial t} - 4\pi G \bar{\rho}_m \delta_m = 0. \quad (2.93)$$

Quando Λ começa a dominar, $a \propto e^{t\sqrt{\Lambda/3}}$ de forma que $4\pi G \bar{\rho}_m \ll H^2$ (No presente $4\pi G \bar{\rho}_m \sim 0.37$). Logo:

$$\frac{\partial^2 \delta_m}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta_m}{\partial t} \approx 0. \quad (2.94)$$

As soluções são do tipo $\delta_m = \text{constante}$ ou $\delta_m \propto e^{-2t/\sqrt{\Lambda/3}}$ de forma que $\delta_m \propto a^{-2}$ e Λ suprime o crescimento de estruturas.

Note também que um contraste de densidade constante implica que o potencial gravitacional diminui com $a^2 \bar{\rho}_m \propto a^{-1}$. Isso leva a uma assinatura na radiação cósmica de fundo chamada efeito Sachs-Wolfe integrado.

2.2.8 Evolução da flutuação de bárions após o desacoplamento

Antes do desacoplamento, a dinâmica dos bárions está conectada a da radiação através de um eficiente espalhamento Compton. Em escalas sub-Hubble, δ_b oscila como a radiação.

Contudo, após o desacoplamento, $\delta_c \gg \delta_b$, fazendo com que os bárions caiam nos poços de potencial da matéria escura. Isso faz com que $\delta_b \rightarrow \delta_c$.

Ignorando a pressão dos bárions e Λ , a dinâmica acoplada dos fluidos bariônico e da matéria escura após o desacoplamento é dada por:

$$\frac{\partial^2 \delta_b}{\partial t^2} + \frac{4}{3t} \frac{\partial \delta_b}{\partial t} = 4\pi G (\bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_c \delta_c) \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial^2 \delta_c}{\partial t^2} + \frac{4}{3t} \frac{\partial \delta_c}{\partial t} = 4\pi G (\bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_c \delta_c). \quad (2.96)$$

Usando $\Delta = \delta_c - \delta_b$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} + \frac{4}{3t} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = 0, \quad (2.97)$$

o que implica $\Delta = \text{constante}$ ou $\Delta \propto t^{-1/3}$.

O valor inicial não nulo para δ_b no desacoplamento, e mais importante $\partial \delta_b / \partial t$ não nulo, produzem uma pequena assinatura em δ_m . Essa assinatura assemelha-se a uma oscilação e recebe o nome de oscilação acústica dos bárions (PADMANABHAN, 1996).

2.2.9 Formação dos Halos de Matéria Escura

A evolução de uma perturbação de densidade esférica é idêntica à evolução do Universo com uma densidade de matéria igual à densidade crítica. Considerando perturbações esféricas, a lei de Gauss diz que é possível ignorar a matéria fora da esfera e que a massa interior é constante, assim (PEEBLES, 1980):

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}, \quad (2.98)$$

que integrada fornece:

$$\dot{r}^2 = \frac{2GM}{r} + c \quad (2.99)$$

Essa equação diferencial ordinária tem solução:

$$r = A(1 - \cos(\theta));$$

$$t = B(\theta - \sin(\theta));$$

$$A^3 = GMB^2,$$

com $\theta = [0, 2\pi]$ sendo uma variável temporal paramétrica e $c = -A^2/B^2$. Essa solução é um cicloide. Para $c < 0$ o sistema é ligado. Essa é uma solução semelhante a da evolução do fator de escala em um universo fechado.

Agora será analisado o comportamento desse sistema em tempos iniciais da evolução da perturbação de densidade. Inicialmente, a perturbação expande com o fluxo de Hubble. Para $\theta \rightarrow 0$, $r = A\theta^2/2$ e $t = B\theta^3/6$. Logo $\theta^6 = 8r^3/A^3 = 36t^2/B^2$ ou $r^3 = (9/2)GMt^2$. Como $r^3 = 3M/4\pi\rho$ isso implica que $6\pi G\rho = t^2$.

Para associar esse resultado com a expansão cósmica, veja que $H^2 = 8\pi G\rho/3$ de forma que $6\pi G\rho = (9/4)H^2$. Assim, tem-se que $(9/4)H^2 = t^2$ implicando em $t = 2/3H$. Dessa forma vê-se que em tempos muito primitivos da vida do Universo (quanto θ é pequeno), esse modelo esférico evolui como um Universo com $\Omega = 1$.

A medida que se avança em tempo (ou θ) é necessário expandir a solução:

$$r = A\theta^2/2(1 - \theta^2/20);$$

$$t = B\theta^3/6(1 - \theta^2/20),$$

que pode ser escrita como:

$$r = \frac{A}{2} \left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3} \left[1 \pm \frac{1}{20} \left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3}\right] \quad (2.100)$$

o sinal $-$ é a solução cicloide enquanto o $+$ é para solução hiperbólica. O primeiro termo do lado direito da equação é o termo de 1ª ordem da expansão enquanto o segundo termo representa o crescimento do contraste de densidade.

A massa inicial do sistema é $M = 4/3(\pi\bar{\rho}r^3)$. Se a densidade é alterada pelo crescimento do contraste δ , o raio deve variar por δr para poder conservar a massa total do sistema.

$$M = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}r^3(1 + \delta)(1 + \delta r)^3 \quad (2.101)$$

Igualando a massa final com a inicial tem-se:

$$(1 + \delta)(1 + \delta r)^3 = 1.$$

Expandindo para primeira ordem dá:

$$\delta \sim -3\delta r = \pm \frac{3}{20} \left(\frac{6t}{B}\right)^{2/3}.$$

Observe que $\delta \propto t^{2/3}$ como na teoria linear. É possível usar essa fórmula para quantificar alguns eventos chaves na história da evolução das perturbações de densidade. O primeiro é o crescimento com a expansão de Hubble. Quando ocorre o domínio da auto-gravidade, a expansão da perturbação cessa e ela atinge uma

expansão máxima em $\theta = \pi$. Isto é $r = 2A$ e $t = \pi B$. O colapso final da perturbação ocorre quando $\theta = 2\pi$, $r = 0$ e $t = 2\pi B$.

Dessa forma pode-se estimar a sobredensidade no momento de retorno (*turnaround*) e colapso, respectivamente por:

$$\delta_t = (3/20)(6\pi)^{2/3} = 1,06$$

$$\delta_c = (3/20)(12\pi)^{2/3} = 1,69$$

Então uma perturbação inicia a sua contração logo após cruzar o contraste de densidade ~ 1 . O colapso da perturbação ocorre numa situação idealizada (simetria esférica) quando $\delta \sim 1,69$. Certamente, esse valor é espúrio já que no colapso o contraste de densidade deve ir para ∞ . Contudo a extrapolação usada a partir do regime linear produz $\delta \sim 1,69$.

Nesse cenário, as conchas no interior da perturbação esférica possuem um comportamento homólogo, de forma que as conchas não se cruzam e todas elas atingem o *turnaround* e o colapso no mesmo tempo.

2.2.10 Halos Virializados

Na prática, o colapso cessa bem antes da singularidade por um processo chamado virialização. Um aspecto importante do colapso esférico é o valor da sobredensidade atingida pelo colapso. Embora teoria de perturbação linear não possa nos dar informação sobre esse estado final altamente não linear, pode-se obter informações importantes a partir de argumentos energéticos.

O primeiro passo é determinar a densidade na virialização. No *turnaround* a energia cinética, T , é nula e a energia total, E , é igual a energia potencial, V ($V = E$). O teorema do virial nos diz que o estado final tem $V = -2T$ e assim $E = T + V = -T$, que dá $V = 2E$.

Dessa forma a energia potencial é dobrada do *turnaround* para a virialização (assumindo conservação de energia). Assim, o raio do sistema é alterado. Como o raio do *turnaround* é $r = 2A$, o raio final de virialização deve ser $r = A$. A densidade do halo formado nesse processo é $\rho_h = 3M/4\pi A^3$.

Para um universo com $\Omega = 1$, vê-se que $\bar{\rho} = (6\pi Gt^2)^{-1}$. Para t considera-se o tempo de colapso $t = 2\pi B$. assim $\bar{\rho} = (24\pi^3 GB^2)^{-1}$.

Com isso a sobre-densidade no colapso é então:

$$\rho \approx \frac{\rho_h}{\bar{\rho}} = \frac{72\pi^3 GMB^2}{4\pi A^3} = 178$$

Dessa forma um halo terá sempre uma densidade média de cerca de 200 vezes a densidade cósmica média na época de formação.

2.2.11 O Formalismo tipo Press-Schechter

Halos de matéria escura são o berçário natural para a formação galáctica que procede via condensação dos bárions, do meio ambiente, para o interior dos halos. Uma questão natural que surge é que até esse instante falou-se de halos individuais. Seria possível determinar o espectro de massa (ou função de massa) dos halos a partir de considerações cosmológicas?

A resposta é sim, sendo dada em 1974 por [Press e Schechter](#). A teoria de [Press e Schechter](#) (P-S) é um modelo analítico para a evolução da função de massa dos halos. Sua derivação não é rigorosa, embora os resultados que derivam dela se mostram notavelmente precisos.

P-S e suas extensões configuram-se na fórmula analítica mais usada na teoria cosmológica para formação de galáxias. Diversos esforços foram dispendidos nos últimos 35 anos para tornar o formalismo P-S mais rigoroso e/ou mais preciso ([BOND et al., 1991](#); [LACEY; COLE, 1993](#); [SCANNAPIECO](#); [BARKANA, 2002](#)), embora o formalismo P-S ainda produza uma grande dose de discernimento no estudo da formação de galáxias a partir de considerações relativamente simples.

Imagine uma região com massa M e que essa região está colapsando. Essa massa pode ser conectada com uma escala de comprimento comóvel (r ou k) no campo de densidade inicial por meio de $M = (4/3)\pi\rho_0 r^3$, sendo ρ_0 a densidade cósmica média e $k = 2\pi/r$.

Considere agora flutuações de densidade em esferas de massa M . Tais flutuações tem um valor quadrático médio dado por:

$$\sigma_r^2 = \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} P(k) \left(\frac{3 \sin(kr) - 3kr \cos(kr)}{(kr)^3} \right)^2. \quad (2.102)$$

A equação acima pode ser obtida tomando a flutuação de densidade em uma esfera de raio R que é dada por:

$$\Delta R = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{esfera} \delta(\vec{r}) d^3 r, \quad (2.103)$$

cujo valor médio é:

$$\langle \Delta R \rangle = \frac{3}{4\pi R^3} \int_{esfera} \langle \delta(\vec{r}) \rangle d^3 r = 0, \quad (2.104)$$

e o valor quadrático médio é $\sigma_r = \langle \Delta R^2 \rangle^{1/2}$.

Também é introduzida uma função $W(r)$ que vale 1 nos pontos interiores da esfera e 0 para pontos fora da esfera. Essa função, $W(r)$, é chamada de função janela e o caso especial $W(r) = 1$ dentro e $W(r) = 0$ fora da esfera é chamada “janela quadrada” (*top-hat window*).

Assim:

$$\sigma_r^2 = \langle \Delta R^2 \rangle = \left\langle \frac{1}{V} \int d^3 r \delta(\vec{r}) W(r) \frac{1}{V} \int d^3 r' \delta(\vec{r}')^* W(r') \right\rangle; \quad (2.105)$$

ou seja:

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{V^2} \int d^3 r d^3 r' W(r) W(r') \xi(|r - r'|). \quad (2.106)$$

No espaço de Fourier tem-se:

$$\sigma^2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{P(k) |W_k|^2}{V^2}, \quad (2.107)$$

com W_k sendo a transformada de Fourier da função janela e $P(k)$ o espectro de potência das flutuações de densidade.

Para uma janela esférica, a transformada de Fourier é também esférica. Assim:

$$\begin{aligned} W_k &= \int d^3r W(r) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}; \\ &= V \frac{3kr \cos(kr) - 3 \sin(kr)}{(kr)^3}; \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$= \frac{V 3j_1(kr)}{kr}. \quad (2.109)$$

Dessa forma, tem-se:

$$\sigma^2 = \int_0^\infty \frac{k^2}{2\pi^2} dk P(k) \left(\frac{3 \sin(kr) - 3kr \cos(kr)}{(kr)^3} \right)^2 \quad (2.110)$$

$$= \int \frac{dk k^3 P(k)}{k 2\pi^2} W^2(kr). \quad (2.111)$$

Hoje, a flutuação em uma esfera de raio $8h^{-1}\text{Mpc}$ é aproximadamente 1. Isso corresponde a uma massa da ordem de $2 \times 10^{14}h^{-1}M_\odot$. Isso introduz um outro parâmetro cosmológico fundamental chamado σ_8 .

Note que o espectro de potência nos diz o valor da amplitude das flutuações em diferentes modos de Fourier.

A ideia básica de Press-Schechter é de que os halos se formam a partir dos picos das flutuações da matéria. Na teoria linear para colapso esférico a densidade que colapsa é $1,69\rho_0$.

Dessa forma, em um dado tempo, todas as regiões que tem densidade de $1,69$ irão colapsar para formar um halo. A fração de massa que está em halos de massa $> M$ é dada pela fração da distribuição Gaussiana de σ_r que excede $1,69$.

$$f_{PS}(> M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1,69/\sigma_r}^\infty dx e^{-x^2/2} \quad (2.112)$$

A fração de massa que está em halos entre M e $M + dM$ é dada por df/dM .

Fazendo, por conveniência, $\nu(M) = 1,69/\sigma_r$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{df_{PS}}{dM} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{dx}{dM} e^{-x^2/2} \Big|_{x=\nu}^{x=\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d\nu}{dM} e^{-\nu^2/2}.\end{aligned}\tag{2.113}$$

A densidade numérica de todos os halos com massa $> M$ é então:

$$\frac{dn}{dM} = \frac{\rho_0}{M} \frac{df_{PS}}{dM} = \frac{\rho_0}{M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\nu^2/2} \frac{d\nu}{dM}.\tag{2.114}$$

Substituindo

$$\frac{d \log(\nu)}{d \log(M)} = \frac{M}{\nu} \frac{d\nu}{dM},$$

vem:

$$\frac{dn}{d \log M} = \frac{\rho_0}{M^2} \frac{\nu}{\sqrt{2\pi}} e^{-\nu^2/2} \frac{d \log \nu}{d \log M}.\tag{2.115}$$

Surpreendentemente o formalismo P-S funciona em praticamente todas as escalas de massa; desde galáxias anãs até aglomerados de galáxias. Contudo o formalismo P-S tende sistematicamente a subestimar a abundância de halos de grande massa e a sobre-estimar a abundância de halos de baixa massa ([JENKINS et al., 2001](#)).

Em vista disso, a função de massa mais usada atualmente é a de [Sheth e Tormen \(1999\)](#) (S-T), que considera os halos como elípticos ao invés de esféricos. Isso modifica a condição para o colapso dos halos.

Em particular [Reed et al. \(2003\)](#) mostraram que S-T produz um excelente ajuste para os resultados de simulações numéricas de formação de estruturas.

A função de massa de S-T é dada por:

$$f(\sigma) = A \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \left[1 + \left(\frac{\sigma^2}{a\delta_c^2} \right)^p \right] \frac{\delta_c}{\sigma} \exp\left(\frac{-a\delta_c^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.116)$$

em que $A = 0,3222$, $a = 0,707$, $p = 0,3$ são constantes e $\delta_c = 1,686$.

2.2.12 Extensão do Formalismo tipo Press-Schechter - Fusão de Halos de Matéria Escura

Lacey e Cole, em 1993, propuseram uma extensão do formalismo de P-S, baseados na proposta de “caminhos aleatórios Brownianos” de Bond et al. (1991). O objetivo dessa extensão foi o de calcular a probabilidade que um halo de massa M_1 tem de se fundir com um halo de massa M_2 , em um dado z , formando assim um halo de massa M_f . A taxa de transição instantânea para o intervalo de massa $[M_f, M_f + dM_f]$ é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2P}{dM_2 dz}(M_1, M_f, t) dM_f &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{d\delta_c}{dz} \right| \frac{1}{\sigma^2(M_f)} \left| \frac{d\sigma(M_f)}{d\ln(M_f)} \right| \\ &\times \left[1 - \frac{\sigma^2(M_f)}{\sigma^2(M_1)} \right]^{-3/2} \exp - \frac{\delta_c}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2(M_f)} - \frac{1}{\sigma^2(M_1)} \right] dM_f \quad (2.117) \end{aligned}$$

Só que, como apresentado por Benson et al. (2005), a taxa de fusões binárias de halos, obtida a partir de (2.117), não é consistente, pois a mesma não é simétrica ao se considerar M_1 ou M_2 como a massa menor (ou maior) do halo progenitor. Mas essa inconsistência desaparece se, ao invés de levar em conta apenas fusões binárias para formação do halo final, for considerado que a sua formação ocorre pelo processo de fusão entre n halos (Neistein e Dekel, 2008; Fakhouri e Ma, 2008).

2.2.13 Taxa de Fusão de halos

Para obter uma taxa de fusão de halos consistente, primeiramente considera-se que $M_{p,1}, M_{p,2}, \dots, M_{p,k}$ são as massas dos k -ésimos progenitores do halo de massa M_f . Agora, seja $\varepsilon_i = M_{p,i}/M_{p,1}$ ($i \geq 2$) e que durante um intervalo de $\Delta z = z_p - z_d$, com $z_p > z_d$, todos os halos de massa $M_{p,i}$, com $i \geq 2$, fundem-se com o halo mais massivo $M_{p,1}$ (FAKHOURI; MA, 2008). Logo, um halo descendente, com N_p progenitores, será formado por uma sequência de $(N_p - 1)$ eventos de fusões binárias, onde cada fusão é assinada com uma razão de massa

$$\varepsilon \equiv \frac{M_i}{M_1}, \quad i = 2, \dots, N_p \quad (2.118)$$

que por definição satisfaz $\varepsilon \leq 1$.

Considerando então que a taxa de fusão de halos seja simétrica, temos:

$$B(M, M', z)dM dM' = B(M', M, z)dM dM', \quad (2.119)$$

que mede o número de fusões por unidade de “*redshift*” e por unidade de volume entre halos progenitores no intervalo de massa $(M, M + dM)$ e $(M', M' + dM')$.

É usual escrever a taxa de fusão de halos como função da massa descendente e das razões de massa dos progenitores. Isto é:

$$B(M, M', z)dM dM' \implies B(M_0, \varepsilon, z)dM_0 d\varepsilon, \quad (2.120)$$

que mede a taxa média de fusões por volume, por halos descendentes, no intervalo de massa $[M_0, M_0 + dM_0]$ no redshift z_d , tendo progenitores a z_p com razão de massa no intervalo $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$

Desde que, em Λ CDM, a abundância de halos decresce com o aumento da massa dos halos, muito mais halos contendo massas menores contribuem para a taxa de fusão. É usual normalizar esse efeito e calcular a taxa média de fusões de halos. Para isso, divide-se B pela densidade numérica de halos descendentes, $n(M_0, z)$, tal que:

$$\frac{B}{n} \equiv \frac{B(M_0, \varepsilon, z_p : z_d)}{n(M_0, z_d)}, \quad (2.121)$$

que mede o número médio de fusões por unidade de “*redshift*” para um halo descendente de massa M_0 tendo progenitores de razão de massa ε .

Para obter uma taxa de fusão analítica, partindo das equações (2.117) e (2.121) é preciso assumir que as fusões são binárias e que ocorre perfeita conservação de massa, isto é $M_0 = M_{p,1} + M_{p,2}$. Também é preciso que fique bem claro que a taxa de fusões analítica não será necessariamente simétrica sobre as massas progenitoras. Isto é, a taxa obtida será dependente da escolha ser: $\varepsilon = M_{p,2}/M_{p,1} \geq 1$, ou seja

$M_{p,2} = M_0\varepsilon/(1 + \varepsilon)$, ou $\varepsilon = M_{p,1}/M_{p,2} \geq 1$, ou seja, $M_{p,1} = M_0/(1 + \varepsilon)$, (Fakhouri e Ma, 2008 e Hiotelis, 2009).

Assumindo que N_s seja o número de progenitores no intervalo de razão de massa $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$, tem-se:

$$B(M_0, \varepsilon, \Delta z) \equiv \frac{N_s}{V dz dM_0 d\varepsilon}. \quad (2.122)$$

Já a densidade numérica de halos descendentes no intervalo de massa $[M_0, M_0 + M_0]$ é:

$$n_0 = \frac{N_d}{V dM_0}, \quad (2.123)$$

onde N_d é o numero total de halos descendentes. Assim, a taxa de fusão de halos por unidade de “*redshift*” e por unidade de halos descendentes será:

$$\frac{B}{n_0} = \frac{N}{N_d dz d\varepsilon}. \quad (2.124)$$

Como próximo passo, multiplica-se a equação (2.117) por $(\rho_0 V n(M, z)/M) dM$, sendo n a função de massa de Press-Schechter. Em seguida, divide-se o resultado por $(\rho_0 V n(M_0, z)/M_0) dM_0$. Logo:

$$\frac{N}{N_d dz d\varepsilon} = \frac{2}{\pi} \frac{M_d}{M} \frac{1}{\sigma^2(M)} \frac{d\sigma(M)}{dM} \left| \frac{d\delta_c(t)}{dt} \right| \left[1 - \frac{\sigma^2(M_0)}{\sigma^2(M)} \right]^{-3/2}. \quad (2.125)$$

Como $\varepsilon = (M_0 - M)/M$, então:

$$dM = \frac{M^2}{M_0} d\varepsilon. \quad (2.126)$$

Com esse último resultado em (2.125) e em (2.124), chega-se a:

$$\frac{B}{n_0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma^2(M)} \frac{d\sigma(M)}{d \ln(M)} \left| \frac{d\delta_c(t)}{dt} \right| \left[1 - \frac{\sigma^2(M_0)}{\sigma^2(M)} \right]^{-3/2}. \quad (2.127)$$

ou, escrevendo explicitamente a taxa de fusão de halos, tem-se que:

$$B(M_0, \varepsilon, z) = n(M_0, z) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma^2(M)} \frac{d\sigma(M)}{d\ln(M)} \left| \frac{d\delta_c(t)}{dt} \right| \left[1 - \frac{\sigma^2(M_0)}{\sigma^2(M)} \right]^{-3/2}, \quad (2.128)$$

ou ainda, em termos das massas dos halos $M_{h,1}$ e $M_{h,2}$:

$$B(M_{h,1}, M_{h,2}, z) = n(M_{h,1} + M_{h,2}, z) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma^2(M_{h,1})} \frac{d\sigma(M_{h,1})}{d\ln(M_{h,1})} \times \left| \frac{d\delta_c(t)}{dt} \right| \left[1 - \frac{\sigma^2(M_{h,1} + M_{h,2})}{\sigma^2(M_{h,1})} \right]^{-3/2}, \quad (2.129)$$

Nesse capítulo procurou-se fazer uma revisão dos principais pontos associados à cosmologia e formação de estruturas do Universo e que sejam fundamentais, e essenciais, para compreender os resultados que serão apresentados a partir do capítulo 4 (resultados originais dessa Tese). No capítulo 3 será apresentada uma revisão sobre ondas gravitacionais encerrando nesse capítulo a parte puramente conceitual deste trabalho.

3 GRAVITAÇÃO E ONDAS GRAVITACIONAIS

A radiação é caracterizada pela transmissão de energia e informação através do espaço, ou por uma equação de onda que satisfaz algumas condições, tais como haver uma velocidade de propagação característica de tal onda. Na gravitação newtoniana, energia é transmitida pelo campo gravitacional, definido pelo potencial ϕ . Para o vácuo, este potencial satisfaz a relação

$$\nabla^2\phi = 0, \tag{3.1}$$

porém esta não é uma equação de onda. Na verdade, esta equação poderia ser entendida como uma equação de onda no limite em que sua velocidade de propagação seja infinita. Mas, assim, se torna impossível associar um comprimento de onda à uma dada frequência de oscilação.

Por outro lado, a possibilidade de transmissão instantânea de informação é algo que não condiz com o cenário físico descrito pela teoria da Relatividade Especial (RE), proposta por Einstein em 1905. Da necessidade de incluir a gravitação a este novo contexto, nasce a teoria da Relatividade Geral.

Outro fato importante está ligado à previsão da existência de ondas gravitacionais, que na Teoria Geral da Relatividade, são perturbações do espaço-tempo que se propagam a velocidade da luz. Uma prova indireta da existência de tais ondas está associada a perda de momento angular pelo pulsar PSR 1913+16, conhecido como pulsar de Hulse-Taylor (WEISBERG; TAYLOR, 2003). Na Figura 3.1 é mostrado o decaimento orbital do pulsar de Hulse-Taylor, sendo também apresentada a curva teórica desse decaimento na Teoria Geral da Relatividade via perda de energia por emissão de ondas gravitacionais.

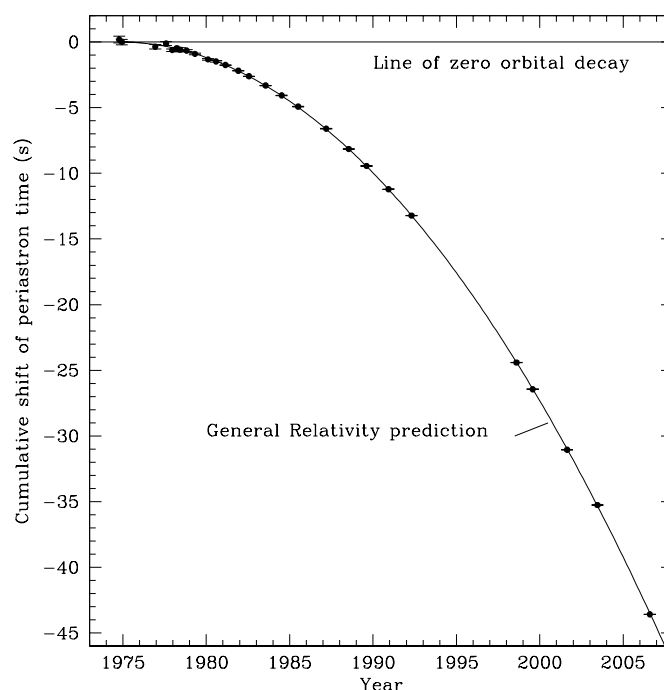


Figura 3.1 - Pulsar PSR 1913+16 conhecido como pulsar de Hulse-Taylor. Nessa figura é plotado os dados observados do decaimento orbital desse pulsar junto à sua curva teórica de decaimento orbital na Teoria Geral da Relatividade via perda de energia por emissão de ondas gravitacionais.

FONTE: (WEISBERG; TAYLOR, 2003)

3.1 Equações de Campo de Einstein

A motivação para a reestruturação da gravitação newtoniana, com a finalidade de torná-la em acordo com RE, é evocada por Einstein da seguinte forma:

Quando em 1907, eu trabalhava num artigo de síntese sobre a teoria da Relatividade Restrita para o *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, tive também que tentar modificar a teoria newtoniana da gravitação, de modo que suas leis se ajustassem à teoria da Relatividade Restrita.[...] Então me ocorreu o *‘glücklichste gedanke meines lebens’* [pensamento mais feliz de minha vida], da seguinte forma: O campo gravitacional tem apenas uma existência relativa, de algum modo semelhante ao campo elétrico gerado por indução magnetoelétrica. *Porque para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não existe -pelo menos no ambiente imediato- campo gravitacional.* Na realidade, se este observador deixar cair alguns corpos, estes permanecerão, em relação a ele, em estado de repouso ou de movimento relativo uniforme, independente da natureza física ou química de cada um (...) (PAIS, 1982)

Este pensamento descreve um dos cinco princípios (D’INVERNO, 1992) em que está

fundamentada a teoria da Relatividade Geral. Isto é, o Princípio da Equivalência. Em outras palavras, o que este princípio diz é: O movimento de uma partícula teste em um campo gravitacional é independente de sua massa e composição. O campo gravitacional está acoplado a tudo, e um observador em queda livre não consegue distinguir se está na presença de um campo gravitacional genuíno ou em um referencial uniformemente acelerado.

Os outros quatro princípios em que a Relatividade Geral está alicerçada são:

Princípio de Mach: A distribuição de matéria determina a geometria do Universo, assim, não há uma geometria pré-definida se não existe matéria. Os processos de inércia estão associados ao momento e energia total do espaço.

Princípio da Covariância: Todos os observadores são equivalentes, ou seja, as leis físicas são válidas independentemente do referencial ser inercial ou acelerado e as equações da física devem ter a forma tensorial.

Princípio do Acoplamento Gravitacional Mínimo: Nenhum termo que contenha explicitamente o tensor de curvatura será adicionado ao se fazer a transição da teoria da Relatividade Especial para a Geral. Isto é, em coordenadas geodésicas locais, as equações do movimento são as da Relatividade Especial.

Princípio da Correspondência: Uma nova teoria precisa ser consistente com uma dada teoria anterior, dentro dos seus limites de validade.

Baseando-se nestes princípios, Einstein chega à sua equação de campo na forma tensorial, em unidades relativísticas ($c = 1$):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e G a constante gravitacional. A convenção para os índices é: letras gregas variando de 0 – 3 ($\mu, \nu = 0, 1...3$) e latinas variando de 1 – 3 ($i, j = 1, \dots, 3$). O índice “0” corresponde à coordenada temporal, enquanto os índices 1, 2, 3 correspondem às coordenadas espaciais. A assinatura usada é $\{+, -, -, -\}$.

O tensor de Riemann é escrito em função dos símbolos de Christoffel da seguinte forma,

$$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\mu\beta}. \quad (3.3)$$

No qual,

$$\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\beta\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}). \quad (3.4)$$

A Equação (3.2) indica que a curvatura do espaço-tempo é dada pela distribuição de matéria e energia representada por $T_{\mu\nu}$.

O lado esquerdo da Equação (3.2) é o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Isto é:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (3.5)$$

Como já dito na introdução, a Relatividade Geral fornece uma solução para propagação de perturbações da métrica (espaço-tempo). Na próxima seção será demonstrado como, a partir da Equação (3.2), se chega a esta conclusão.

3.2 Ondas Gravitacionais - Equações de Einstein Linearizadas

Admitindo que o espaço-tempo é Minkowski, e introduzindo uma pequena perturbação na métrica dada por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.6)$$

em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação tal que:

$$|h_{\mu\nu}| \ll |\eta_{\mu\nu}| \text{ e } |\partial_{\alpha}h_{\mu\nu}| \gg |\partial_{\alpha}h_{\mu\nu}|^2; \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

a métrica contravariante será:

$$g^{\mu\nu} \cong \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Neste caso, os símbolos de Christoffel podem ser escritos como,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \cong \frac{1}{2}\eta^{\beta\sigma}(h_{\sigma\mu,\nu} + h_{\sigma\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}), \quad (3.8)$$

com

$$|h_{\sigma\mu,\nu}| \gg |h^{\beta\sigma}h_{\sigma\mu,\nu}|.$$

O tensor de Ricci em primeira ordem será:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(\square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h_{\mu,\beta\nu}^{\beta} - h_{\nu,\beta\mu}^{\beta}), \quad (3.9)$$

em que $\square = \partial_{\alpha}\partial^{\alpha} = (\nabla - \partial/\partial t)$ é o operador D'Alambertiano. O escalar de curvatura toma a forma,

$$R^{\mu}_{\mu} = R = \square h - h^{\beta\mu}_{\beta\mu}. \quad (3.10)$$

Ao se contrair a Equação (3.2) tem-se:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = -8\pi Gg^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

$$R - 2R = -8\pi GT^{\mu}_{\mu}$$

$$R = 8\pi GT^{\mu}_{\mu}. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.2) é possível escrever:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}_{\lambda}). \quad (3.12)$$

Levando a Equação (3.9) em (3.12), vem:

$$\square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h^{\beta}_{\mu,\beta\nu} - h^{\beta}_{\nu,\beta\mu} = -16\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\beta}_{\beta}). \quad (3.13)$$

Definindo

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\beta}_{\beta}, \quad (3.14)$$

pode-se escrever a Equação (3.13) como,

$$\square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h^{\beta}_{\mu,\beta\nu} - h^{\beta}_{\nu,\beta\mu} = -16\pi GS_{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

Como $T_{\mu\nu}$ satisfaz a condição de conservação do momento-energia, $T^{\mu}_{\nu,\mu} = 0$, e sendo o traço do tensor $S_{\mu\nu}$ dado por:

$$S^{\beta}_{\beta} = -T^{\beta}_{\beta}, \quad (3.16)$$

encontra-se:

$$S^{\mu}_{\nu,\mu} = \frac{1}{2}S^{\beta}_{\beta,\nu}. \quad (3.17)$$

Considerando uma transformação de coordenadas do tipo:

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x), \quad (3.18)$$

no qual $\varepsilon^{\mu}(x)_{,\nu}$ tem a mesma ordem que $h_{\mu\nu}$, a métrica no novo sistema de coordenadas será:

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} g^{\lambda\rho}. \quad (3.19)$$

Assim, chega-se a

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\rho} - \frac{\partial \varepsilon^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} \eta^{\rho\nu} - \frac{\partial \varepsilon^{\nu}(x)}{\partial x^{\rho}} \eta^{\rho\mu}. \quad (3.20)$$

Dessa forma $h_{\mu\nu}$ é escrito como,

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (3.21)$$

A transformação dada pela Equação (3.21) é conhecida como *transformação de gauge*. Isto significa que sob esta transformação a Equação (3.15) permanece invariante. Porém, surge agora um problema, essa invariância permite infinitas soluções para uma mesma condição física. Esta dificuldade pode ser removida escolhendo (ou fixando) um sistema particular de coordenadas. O mais conveniente é o *sistema de coordenadas harmônicas*, no qual

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0. \quad (3.22)$$

Partindo da Equação (3.8) obtém-se então:

$$h_{\nu,\mu}^\mu = \frac{1}{2} h_{,\nu}. \quad (3.23)$$

Nota-se que a Equação (3.21) não satisfaz a condição dada por (3.23), mas é possível encontrar um $h_{\mu\nu}$ que a satisfaça, considerando que

$$\square \varepsilon_\nu \equiv \frac{\partial h_{\nu}^\mu}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^\nu}. \quad (3.24)$$

Assim, com (3.24), $h_{\mu\nu}$ passa a satisfazer a (3.23).

Tomando a condição (3.23) na Equação (3.15) chega-se a,

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi G S_{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

que é uma equação de onda.

Para o vácuo vem:

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.26)$$

Por outro lado, da inspeção direta da (3.26) vem que ondas gravitacionais são perturbações da métrica do espaço-tempo que se propagam, no vácuo, com velocidade da luz. A solução para a Equação (3.25) será, da forma:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = 4G \int d^3\vec{x}' \frac{S(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (3.27)$$

que é uma equação do tipo Potencial Retardado, que permite caracterizar a radiação gravitacional emitida por uma dada fonte.

3.3 Emissão de Ondas Gravitacionais

Agora, a partir da Equação (3.27), será apresentada uma visão geral do processo de emissão de ondas gravitacionais e a energia que estas ondas carregam.

Reescrevendo (3.27) como:

$$h_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -4G \int d^3\vec{x}' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (3.28)$$

e tendo em conta a chamada zona de onda, em que as dimensões da fonte são muito menores que a distância entre o ponto em que se recebe o sinal e a fonte, tal que:

$$\frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} \ll 1,$$

obtém-se,

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \simeq |\vec{x}| - \hat{x} \cdot \vec{x}'; \quad \hat{x} = \frac{|\vec{x}|}{\vec{x}}.$$

Nas relações anteriores, a distância à fonte é $r = |\vec{x}|$, e o vetor que determina distâncias internas na fonte é dado por $R = |\vec{x}'|$. É então possível escrever o potencial retardado como:

$$h^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -\frac{4G}{r} \int d^3\vec{x}' T^{\mu\nu}(t - r, \vec{x}'), \quad (3.29)$$

sendo $r \gg \vec{R} \cdot \hat{r}$. Pelas considerações anteriores, note que, a parte radiativa do tensor $h^{\mu\nu}$ é completamente determinada por sua parte espacial h^{ij} .

Da condição de conservação da energia momento ($T^\mu_{\nu,\mu} = 0$), obtém-se:

$$T^{00}_{,0} + T^{0k}_{,k} = 0, \quad (3.30)$$

$$T^{i0}_{,0} + T^{ik}_{,k} = 0 \quad (3.31)$$

Considerando que:

$$\int (T^{ik} x^j)_{,k} d^3x = \int T^{ik}_{,k} x^j d^3x + \int T^{ij} d^3x \quad (3.32)$$

Usando uma superfície gaussiana ao redor da fonte e o teorema de Gauss (FOSTER; NIGHTINGALE, 2006), o lado esquerdo da equação acima vai se tornar nulo. Com (3.31) chega-se a:

$$\int T^{ij} d^3x = \frac{\partial}{\partial t} \int T^{i0} x^j d^3x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) d^3x. \quad (3.33)$$

Porém,

$$\int (T^{0k} x^i x^j)_{,k} d^3x = \int T^{0k}_{,k} x^i x^j d^3x + \int (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) d^3x, \quad (3.34)$$

Utilizando novamente o teorema de Gauss, chega-se a,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00} x^k x^l d^3x = \int T^{kl} d^3x. \quad (3.35)$$

Para a matéria não relativística, e tendo em conta o princípio da correspondência, a equação de campo é dada pela equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho. \quad (3.36)$$

Com isto, a densidade de energia T_{00} será:

$$T_{00} \simeq \rho.$$

Assim, a equação do tipo potencial retardado,

$$h_{\kappa l}(t, \vec{x}) = -\frac{4G}{r} \int d^3 \vec{x}' T_{\kappa l}(t-r, \vec{x}') \quad (3.37)$$

pode ser escrita como:

$$h^{\kappa l} = -\frac{2G}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(x') x'^{\kappa} x'^l d^3 x' \right]_{t-r}. \quad (3.38)$$

Por outro lado, o tensor de quadrupolo é definido como

$$Q^{\kappa l} \equiv \int (3x'^{\kappa} x'^l - r'^2 \delta^{\kappa l}) \rho(x') d^3 x'. \quad (3.39)$$

Reescrevendo $h^{\kappa l}$ para obter uma relação com $Q^{\kappa l}$, chega-se a,

$$h^{\kappa l} = -\frac{2G}{3r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{\kappa l} + \delta^{\kappa l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r'^2 \rho(\vec{x}') d^3 x' \right]_{t-r}. \quad (3.40)$$

Na aproximação linear, o tensor energia momentum $t^{\mu\nu}$ do campo gravitacional não está incorporado no tensor $T^{\mu\nu}$ que representa a matéria. Contudo, para calcularmos o fluxo de energia irradiada, por uma dada fonte, é necessário levar em conta $t^{\mu\nu}$ em consideração.

Isto pode ser feito recorrendo ao procedimento usual da teoria quântica de campos, em que uma vez conhecida a densidade de lagrangiana \mathcal{L} , de um dado campo $h^{\mu\nu}$, pode-se obter o tensor energia-momento pela relação (BOGOLIUBOV; SHIRKOV, 1959),

$$t_{\mu}^{\nu} = \partial_{\mu} h^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} h^{\alpha\beta})} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L}, \quad (3.41)$$

sendo que \mathcal{L} pode ser escrita como (OHANIAN, 1976):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} - 2\partial^\mu h_{\mu\nu} \partial_\lambda h^{\nu\lambda} + 2\partial^\mu h_{\mu\nu} \partial^\nu h - \partial_\mu h \partial^\mu h). \quad (3.42)$$

Considerando que não existe variação de massa da fonte, a segunda parte do lado direito da Equação (3.40) não contribui para a radiação gravitacional. Então, o fluxo de energia radial é escrito como,

$$t_s^0 n^s = \frac{1}{4}(2\dot{h}^{kl} \dot{h}^{kl} - 4\dot{h}^{kl} \dot{h}^{km} n^l n^m + \dot{h}^{kl} \dot{h}^{mr} n^k n^l n^m n^r);$$

ou,

$$t_s^0 n^s = \frac{G}{36\pi} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{2} \ddot{Q}_{\kappa l} \ddot{Q}_{\kappa l} - \ddot{Q}_{\kappa l} \ddot{Q}_{\kappa m} n^l n^m + \frac{1}{4} (\ddot{Q}_{\kappa l} n^\kappa n^l)^2 \right], \quad (3.43)$$

em que n^s é um vetor unitário na direção radial.

A energia total irradiada por unidade de ângulo sólido e unidade de tempo é igual a $-r^2 t_s^0 n^s$. Dessa forma, vem:

$$-\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{G}{36\pi} \left[\frac{1}{2} \ddot{Q}_{\kappa l} \ddot{Q}_{\kappa l} - \ddot{Q}_{\kappa l} \ddot{Q}_{\kappa m} n^l n^m + \frac{1}{4} (\ddot{Q}_{\kappa l} n^\kappa n^l)^2 \right]. \quad (3.44)$$

Considerando,

$$\frac{1}{4\pi} \int n^l n^m d\Omega = \frac{1}{3} \delta^{lm};$$

e

$$\frac{1}{4\pi} \int n^\kappa n^l n^m n^o d\Omega = \frac{1}{15} (\delta^{\kappa l} \delta^{mo} + \delta^{\kappa m} \delta^{lo} + \delta^{\kappa o} \delta^{lm}),$$

é possível escrever (3.44) como:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45} \ddot{Q}_{\kappa l} \ddot{Q}_{\kappa l}, \quad (3.45)$$

que escrita em unidades não relativísticas fica:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{Q}_{\kappa l} \ddot{Q}_{\kappa l}. \quad (3.46)$$

Dessa forma, a (3.46) fornece a potência irradiada em ondas gravitacionais por uma dada fonte. Veja que a radiação gravitacional é de natureza quadrupolar, já que envolve o tensor momentun de quadrupolo Q_{kl}

3.4 Estados de Polarização das Ondas Gravitacionais

A solução mais simples para a Equação (3.26) é a que representa uma superposição de ondas planas na forma

$$h_{\mu\nu} = \Re[A_{\mu\nu} e^{(ik_\alpha x^\alpha)}], \quad (3.47)$$

sendo $A_{\mu\nu}$ a matriz amplitude e \Re significa considerar a parte real da equação entre colchetes.

Considerando que a onda propaga na direção z , de forma que o vetor de onda é dado por:

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \quad \text{ou} \quad k_\mu = (k, 0, 0, -k);$$

Obtemos, substituindo (3.47) em (3.26)

$$A^{\mu\nu} k_\mu = 0; \quad ; \quad A_{\mu\nu} k^\mu = 0 \quad (3.48)$$

A (3.48) mostra que as componentes da amplitude da onda gravitacional devem ser ortogonais ao vetor de onda \vec{k} . A (3.48) é, de fato, composta por quatro equações lineares, uma para cada valor do índice livre ν . Isto é, sendo $A_{\mu\nu}$ um tensor simétrico, podemos escrever:

$$A_{0\nu} = A_{3\nu} \quad (3.49)$$

Seja agora U um quadrivetor arbitrário com componentes U^μ . Então, nós temos suficiente liberdade para escolher as componentes de ε^μ (vide Equação 3.21) de

forma a fazer com que o tensor amplitude de onda satisfaça:

$$A_{\mu\nu}U^\mu = 0. \quad (3.50)$$

Considerando agora uma partícula teste experimentando a passagem de uma onda gravitacional numa região plana do espaço-tempo. Nós podemos então fazer uma transformação para um referencial de Lorentz em que a partícula teste esteja em repouso. Isto é, sua quadrivelocidade U^μ tem componentes $(1,0,0,0)$, o que nos permite escrever:

$$U^\mu = \delta_0^\mu \quad (3.51)$$

As equações (3.50) e (3.51) então implicam em

$$A_{\mu 0} = 0 \quad (3.52)$$

,

para todo μ . E com o uso de (3.48), também podemos escrever:

$$A_{\mu 3} = 0 \quad (3.53)$$

para todo μ . Ou seja, não existe componente da perturbação da métrica na direção de propagação das ondas. Isto é, neste calibre a perturbação da métrica é transversal à direção de propagação da onda gravitacional.

A condição de *gauge* (3.21) aplicada à matriz amplitude $A^{\mu\nu}$ produz:

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - \varepsilon^\mu k^\nu - \varepsilon^\nu k^\mu + \eta^{\mu\nu}(\varepsilon^\alpha k_\alpha).$$

Como a onda viaja na direção de z temos, considerando (3.48); (3.52) e (3.53)

$$\begin{aligned}
A'^{00} &= -k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) & A'^{11} &= A^{11} - k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) \\
A'^{01} &= -k\varepsilon^1 & A'^{12} &= A^{12} \\
A'^{02} &= -k\varepsilon^2 & A'^{22} &= A^{22} - k(\varepsilon^0 - \varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Nas equações anteriores, os parâmetros ε^μ são arbitrários. Como $A^{\mu 0} = 0$ e $A^{\mu 3} = 0$, podemos escolher:

$$\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0 \text{ e } \varepsilon^0 + \varepsilon^3 = 0 \Rightarrow \varepsilon^0 = -\varepsilon^3,$$

Logo:

$$A'^{11} + A'^{22} = A^{11} + A^{22} + 4k\varepsilon^3,$$

e

$$\varepsilon^3 = -\frac{A^{11} + A^{22}}{4k}.$$

Dessa forma, o conjunto de equações (3.54) produz sob essa transformação de *gauge*:

$$A'^{11} + A'^{22} = 0 \text{ e } A'^{12} = A^{12}.$$

Veja que $A'^{11} + A'^{22} = 0$ significa traço nulo. Portanto, nesse calibre as ondas gravitacionais são sem traço e induzem perturbações transversais à direção de propagação. Por isso, esse calibre é conhecido na literatura como “*Transverse-traceless Gauge*” (Calibre transverso e com traço nulo), ou calibre TT.

Em termos matriciais, temos:

$$\|A^{\mu\nu}\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{11} & A^{12} & 0 \\ 0 & A^{12} & -A^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

e $h_{\mu\nu}$ toma a forma,

$$h_{\mu\nu} = \Re\{\alpha e_{\mu\nu}(+) + \beta e_{\mu\nu}(\times)\}e^{ik \cdot x}. \quad (3.56)$$

Onde α e β são duas funções complexas arbitrárias de k , enquanto $e_{\mu\nu}(+)$, $e_{\mu\nu}(\times)$ são dois estados de polarização da onda. Na forma matricial, temos:

$$\|e_{\mu\nu}(+)\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

e

$$\|e_{\mu\nu}(\times)\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Como colocado acima, este calibre é conhecido como TT, que leva a duas polarizações (h_+ e h_\times)

Os estados de polarização podem ser interpretados fisicamente da seguinte forma: Considera-se uma partícula teste em um ponto O , na origem de um dado sistema de coordenadas. Uma outra partícula estará em $\eta^\mu = (0, \vec{\eta})$. Inicialmente, estas partículas estão em repouso, uma em relação a outra, antes da onda gravitacional passar. A separação entre elas será:

$$l = |g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu|^{1/2},$$

ou seja,

$$l = |(\delta_{ij} - h_{ij})\eta^i\eta^j|^{1/2}.$$

Com a mudança de coordenadas

$$\eta^i \rightarrow k^i = \eta^i + \frac{1}{2} h^i_j \eta^j \quad (3.59)$$

é possível reescrever l como,

$$l = [\delta_{ij} k^i k^j]^{1/2} + O(\|h_{ij}\|^2), \quad (3.60)$$

em que o vetor k é paralelo ao eixo z e $k^3 = \eta^3$ já que $h^3_j = 0$.

Portanto, se as duas partículas estiverem dispostas em um plano paralelo à direção de propagação da onda, a distância entre elas não será afetada. Contudo, se as partículas estiverem colocadas num plano transversal a direção de propagação da onda, teremos:

$$\|k^i\| = \|\eta^i\| - \frac{1}{2} \alpha \cos[k(t+z)] \left\| \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \eta^i \right\| ; \quad (3.61)$$

$$\|k^i\| = \|\eta^i\| - \frac{1}{2} \alpha \cos[k(t-z)] \left\| \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \eta^i \right\|. \quad (3.62)$$

Considerando a equação,

$$\frac{D^2 \eta^\mu}{D\tau^2} - R^\mu_{\rho\delta\gamma} v^\rho v^\delta \eta^\gamma = 0, \quad (3.63)$$

que fornece os deslocamentos relativos das partículas sob ação de uma onda gravitacional, tem-se então que:

$$\frac{D^2 \eta^\mu}{D\tau^2} - R^\mu_{00j} \eta^j = 0. \quad (3.64)$$

Sendo $v^\mu = (1, \vec{0})$ e $\Gamma^\mu_{00} = 0$, obtém-se,

$$\frac{D^2 \eta^i}{D\tau^2} \sim R^i_{00j} \eta^j, \quad (3.65)$$

ou,

$$\frac{D^2\eta^i}{D\tau^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h^i_j}{\partial t^2}\eta_0^j, \quad (3.66)$$

no qual foi usado o tensor de Riemann linearizado no *gauge* TT.

Para a onda propagando na direção $+z$, chega-se a,

$$h_{11} = -h_{22} = \Phi_+(t - z), \quad (3.67)$$

e

$$h_{12} = h_{21} = \Phi_\times(t - z). \quad (3.68)$$

Note que, a oscilação não é paralela a z ($h^3_j = 0$ e $\dot{\eta}^3 = 0$), isto significa que as ondas gravitacionais são ondas que produzem deslocamentos transversais à direção de propagação.

Pode-se obter uma solução aproximada da Equação (3.66), na forma,

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\Phi_+(t - z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\Phi_\times(t - z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

A Figura (3.2) mostra o efeito da propagação de uma onda gravitacional sobre um anel de partículas teste. A ação é entendida como um *efeito de maré*, que perturba o sistema de partículas.

3.5 Detectores Interferométricos de Ondas Gravitacionais

Nesta seção serão apresentadas as características gerais do funcionamento de alguns detectores de ondas gravitacionais (OG's) do tipo interferométrico que poderão detectar os sinais de objetos pré-galácticos.

O interferômetro é um instrumento que utiliza a característica ondulatória da

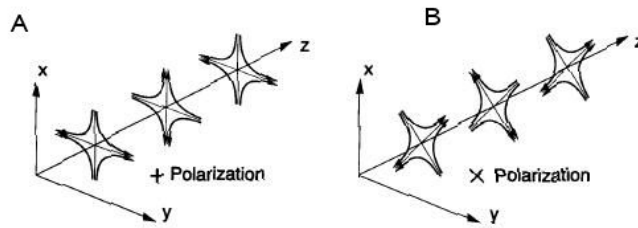


Figura 3.2 - Campo de aceleração produzido pela passagem de uma OG. A e B são os dois modos (+ e x) de polarização, segundo a Relatividade Geral.
 Fonte: Hughes et al. (2001).

radiação para gerar um padrão de interferência, sendo esse padrão sensível as mudanças de separação dos espelhos que compõem o aparelho. A seguir está apresentado um esquema de um detector interferométrico.

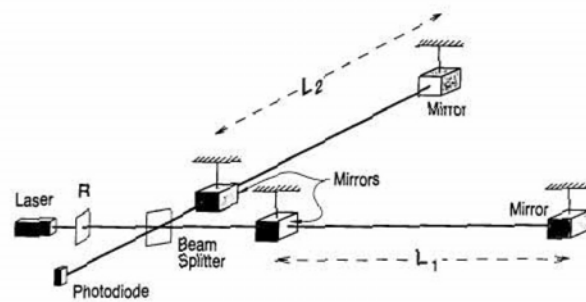


Figura 3.3 - Representação esquemática de um interferômetro.
 Fonte: Hughes et al. (2001)

No caso mais simples, um detector interferométrico de OG's é construído com dois grandes braços ortogonais, sendo que, próximo ao vértice e no final de cada braço, são colocados quatro massas de teste suspensas por fios. Os braços possuem a forma de 'L', em que a separação L_1 entre as massa do primeiro braço é aproximadamente igual a L_2 do segundo ($L_1 = L_2 = L$, vide Figura 3.3). A diferença fracional;

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{L'_1 - L'_2}{L}, \quad (3.71)$$

em uma direção qualquer é dada por (ABRAMOVICI et al., 1992):

$$\frac{\Delta L}{L} = F_+ h_+(t) + F_\times h_\times(t), \quad (3.72)$$

em que $h(t)$ é o alongamento produzido pela onda, F_+ e F_\times são funções que dependem da direção da fonte e orientação do detector.

Quando uma onda gravitacional atravessa o detector, um dos braços é contraído enquanto o outro é alongado. Esta modificação no caminho óptico leva a uma modificação no padrão de interferência. Porém o deslocamento relativo dos espelhos, devido a passagem de OG's, é muito pequeno. Dessa forma, se faz necessário braços muito longos. Por exemplo, para uma OG de $1kHz$ são necessários braços da ordem de $100km$ (HAKIM, 1999). Assim, para se obter braços efetivos dessa ordem, o laser passa pelos braços várias vezes.

A seguir são apresentadas algumas características de detectores interferométricos cujas bandas abrangem o intervalo de frequência dos fundo estocásticos de OG's de interesse esse trabalho:

- Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory - LIGO: detector interferométrico com banda de detecção na faixa de (10 a 10000) Hz (ABBOTT et al., 2004), sendo constituído por dois observatórios, um em Livingston, Louisiana e outro em Hanford em Washington. Esses estão separados por uma distância de $\sim 3000km$, o que corresponde a cerca de 10ms de diferença na chegada de uma onda que se propague a velocidade da luz no vácuo. Na Figura 3.4 é mostrado o interferômetro norte americano LIGO, que possui braços com comprimento de 4 km.



Figura 3.4 - Foto aérea do LIGO -*Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory*- no sítio em Hanford, Washington
Fonte: Shoemaker (2007).

- Laser Interferometer Space Antenna - LISA: será formado por três satélites posicionados nos vértices de um triângulo equilátero cujos lados são de 5×10^6 km e sua faixa de operação será de (0,1 a 100) mHz (RACCA; MCNAMARA, 2010). Na figura 3.5 está a representação do LISA.

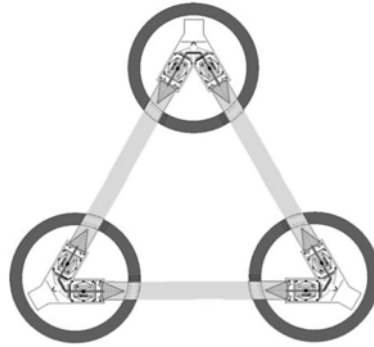


Figura 3.5 - Representação esquemática do LISA -*Laser Interferometer Space Antenna*.
Fonte: Raccà e McNamara (2010).

- DECI-hertz Interferometer Gravitational wave Observatory - DECIGO: Tal como o LISA será formado por três satélites posicionados nos vértices de um triângulo equilátero cujo os lados serão de 1000km. Sua banda de operação será de 1mHz a 100Hz, porém, com maior sensibilidade na faixa de (0,1 a 10) Hz (KAWAMURA et al., 2008). Na figura 3.6 é mostrado o esquema do detector DECIGO.

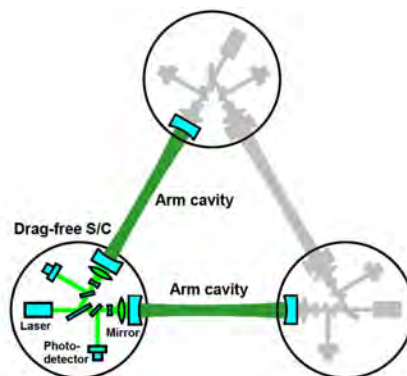


Figura 3.6 - Representação esquemática do detector DECIGO -*DECI-hertz Interferometer Gravitational wave Observatory*.
Fonte: Kawamura et al. (2008).

- Big Bang Observer - BBO: será formado por quatro detectores similares ao LISA, sendo que dois dos detectores estarão sobrepostos. O BBO terá maior sensibilidade na faixa de (0, 1 a 10) Hz e sua principal função será observação de OG's produzidas logo após o *big bang*, embora possa ser usado para observações de fontes mais próximas tal como sistemas binários (CUTLER; HARMS, 2006). Na figura 3.7 é mostrado a representação da configuração do BBO.

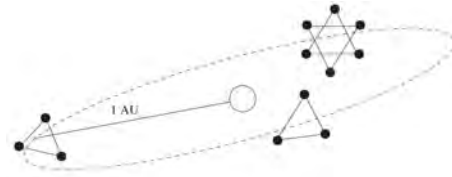


Figura 3.7 - Representação esquemática do detector BBO -*Big Bang Observer*.
Fonte: Cutler e Harms (2006).

3.6 Razão Sinal/Ruído de um Fundo Estocástico para Detectores Interferométricos

Fontes estocásticas de ondas gravitacionais são caracterizadas por emissões aleatórias, de ondas gravitacionais, vindas de um grande número de fontes independentes e não correlacionadas que não podem ser resolvidas individualmente. Um exemplo de fonte estocástica é a emissão de OG's devido ao colapso para buracos negros de estrelas pré-galácticas a diferentes *redshifts*. Nessa seção será apresentado como a correlação de dois detectores de ondas gravitacionais pode ser usada para estudar os fundos estocásticos.

Para o caso mais simples em que se tem dois detectores interferométricos localizados no mesmo ponto e com idênticas orientações, o sinal de saída do primeiro detector será:

$$s_1(t) = h_1 + n_1, \quad (3.73)$$

em que h_1 é o sinal gerado no detector devido ao fundo estocástico e n_1 é o seu ruído interno. Do mesmo modo, para o segundo detector tem-se:

$$s_2(t) = h_2 + n_2. \quad (3.74)$$

Como foi suposto que ambos detectores possuem mesma orientação e estão no mesmo ponto, $h_1(t)$ será igual a $h_2(t)$. Com isto, pode-se obter um sinal efetivo a partir dos sinais de saída de cada detector, o que leva a:

$$S = \langle s_1, s_2 \rangle \equiv \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)s_2(t)dt, \quad (3.75)$$

em que T é o tempo de integração.

Como o sinal é pequeno, comparado com o ruído, tem-se:

$$S = \langle h_1, h_2 \rangle + \langle n_1, h_2 \rangle + \langle h_1, n_2 \rangle + \langle n_1, n_2 \rangle, \quad (3.76)$$

ou,

$$S \cong \langle h_1, h_2 \rangle + \langle n_1, n_2 \rangle, \quad (3.77)$$

em que, $\langle n_1, h_2 \rangle$ são menores que $\langle n_1, n_2 \rangle$.

Para o caso mais realista, é preciso levar em conta o fato de que os braços dos detectores não estão paralelamente alinhados e que há um atraso temporal na recepção do sinal entre os detectores. Isto leva a uma redução da sensibilidade, pois a sobreposição dos sinais não ocorre de forma a maximizar o sinal composto.

Assim, para considerar este efeito é definida uma função de redução para a sobreposição dos sinais, dada por (FLANAGAN, 1993):

$$\gamma(f) = \frac{5}{8\pi} \int_{S^2} d\hat{\Omega} e^{2\pi f \hat{\Omega} \cdot \frac{\Delta \vec{x}}{c}} (F_1^+ F_2^+ + F_1^\times F_2^\times), \quad (3.78)$$

sendo $\hat{\Omega}$ um vetor unitário (em esteradianos), $\Delta \vec{x}$ é a separação entre os detectores e $F_i^{+, \times}$ é a resposta do detector i à polarização \times ou $+$, a qual é dada por:

$$F_i^{+, \times} = \frac{1}{2} \left(\widehat{X}_1^a \widehat{X}_1^b - \widehat{Y}_1^a \widehat{Y}_1^b \right) e_{ab}^{+, \times}(\widehat{\Omega}). \quad (3.79)$$

As direções dos braços dos detectores são definidas por \widehat{X}_1^a e \widehat{Y}_1^a , enquanto $e_{ab}^{+, \times}(\widehat{\Omega})$ é o tensor de polarização da onda em uma dada frequência f .

A Equação (3.78) é normalizada de forma que para $|\Delta \vec{x}| = 0$ e braços paralelos tenhamos $\gamma \rightarrow 1$. O fator exponencial é a fase que leva em conta o atraso temporal na resposta dos detectores, para a radiação chegando na direção de $\widehat{\Omega}$.

Em seu trabalho, Flanagan (FLANAGAN, 1993), utiliza estatística bayesiana para análise da razão sinal/ruído, porém aqui, será feito um tratamento mais simples e de cunho frequentista.

Uma forma mais geral de correlação entre o sinal dos detectores é dada por:

$$S \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t - t'), \quad (3.80)$$

em que $Q(t - t')$ é uma função filtro.

A escolha da função filtro depende da orientação e localização dos detectores, bem como dos seus ruídos característicos, e também do espectro de potência do fundo estocástico.

Se os detectores estão próximos, em relação ao comprimento de onda do sinal recebido, para o qual são sensíveis, possuam estreita largura de banda e estão identicamente orientados, a melhor escolha da função filtro é a delta de Dirac ($Q(t - t') = \delta(t - t')$).

Partindo disto, é possível reescrever a Equação (3.80) como:

$$S \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t - t'), \quad (3.81)$$

desde que o tempo de integração T seja de pelo menos alguns meses.

Escrevendo a equação anterior no domínio das frequências, no qual a transformada de Fourier é dada por:

$$\bar{g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-2\pi|f|t} g(t), \quad (3.82)$$

e assumindo que o filtro seja uma função real, tal que $\bar{Q}(-f) = \bar{Q}^*(f)$, em que * denota complexo conjugado, obtém-se:

$$S \equiv \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T(f - f') \bar{s}_1^*(f) \bar{s}_2(f') \bar{Q}(f'). \quad (3.83)$$

A função $\delta_T(f - f')$ é uma aproximação no tempo da delta de Dirac definida como:

$$\delta_T(f) \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-2\pi i f t} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}, \quad (3.84)$$

a qual se reduz a usual delta de Dirac no limite $T \rightarrow \infty$. Contudo, em observações finitas no tempo, tem-se:

$$\delta_T(0) = T. \quad (3.85)$$

Considerando que o sinal de interesse seja um fundo estocástico isotrópico, não polarizado e Gaussiano, as transformadas de Fourier do sinal e do ruído serão dadas por:

$$\langle \bar{h}_1^*(f) \bar{h}_2(f') \rangle = \delta(f - f') \frac{3H_0^2}{20\pi^2} |f|^{-3} \Omega_{GW}(|f|) \gamma(|f|); \quad (3.86)$$

$$\langle \bar{n}_i^* \bar{n}_j \rangle = \frac{1}{2} \delta(f - f') \delta_{ij} P_i(|f|), \quad (3.87)$$

em que i e j denotam a localização dos detectores, $P_i(f)$ é a função densidade do espectro de potência do ruído, o qual é uma função real não negativa, H_0 é a constante de Hubble e Ω_{GW} é a contribuição para a densidade de energia do Universo devido ao fundo estocástico de OG's.

Considerando a Equação (3.86) na Equação (3.83) tem-se:

$$\langle S \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T(f - f') \langle \bar{h}_1^*(f) \bar{h}_2(f') \rangle \bar{Q}(f'), \quad (3.88)$$

ou,

$$\langle S \rangle = \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T \int_{-\infty}^{\infty} df \gamma(|f|) |f|^{-3} \Omega_{GW}(|f|) \bar{Q}(f), \quad (3.89)$$

em que foi assumido $\delta_T(0) = T$.

A quantidade de ruído é dada por:

$$N \equiv S - \langle S \rangle. \quad (3.90)$$

Como o ruído de cada detector $n_i(t)$ é muito maior que $h_i(t)$ tem-se que:

$$N \cong \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T(f - f') \bar{n}_1^*(f) \bar{n}_2(f') \bar{Q}(f'). \quad (3.91)$$

Como os ruídos dos detectores não são correlacionados, tem-se:

$$\langle N \rangle = 0, \quad (3.92)$$

Contudo, o valor quadrático médio não será nulo, ou seja,

$$\langle N^2 \rangle = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2. \quad (3.93)$$

Usando a Equação (3.91) e (3.87) obtém-se:

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T^2(f - f') P_1(|f|) P_2(|f'|) |\bar{Q}(f')|^2, \quad (3.94)$$

para longas observações no tempo, a função delta tem um pico na região $f - f'$, isso quando a escala $1/T$ é muito pequena comparada com a escala na qual as funções P_1 , P_2 e \bar{Q} variam. Com isto obtém-se:

$$\langle N^2 \rangle = \frac{T}{4} \int_{-\infty}^{\infty} df P_1(|f|) P_2(|f|) |\bar{Q}(f)|^2. \quad (3.95)$$

É importante encontrar uma função filtro \bar{Q} que maximize a razão sinal/ruído, para que seja possível observar o fundo desejado.

Partindo das equações anteriores é possível definir a razão sinal/ruído como:

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \frac{\langle S \rangle}{\langle N^2 \rangle^{1/2}}. \quad (3.96)$$

Introduzindo o produto interno entre duas funções complexas e arbitrárias $A(f)$ e $B(f)$, tal que este produto produza um único número complexo (A, B) , o qual é definido como:

$$(A, B) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} df A^*(f) B(f) P_1(|f|) P_2(|f|). \quad (3.97)$$

Será possível então expressar o sinal e a quantidade de ruído em função deste produto como:

$$\langle S \rangle = \left(\bar{Q}, \frac{\gamma(|f|)\Omega_{GW}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)} \right) \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T; \quad (3.98)$$

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{4} (\bar{Q}, \bar{Q}) T. \quad (3.99)$$

Com isto, a Equação (3.96) pode ser escrita como:

$$\left(\frac{S}{N} \right)^2 = \left(\frac{3H_0^2}{10\pi^2} \right)^2 T \frac{\left(\bar{Q}, \frac{\gamma(|f|)\Omega_{GW}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)} \right)^2}{\bar{Q}, \bar{Q}}. \quad (3.100)$$

Como o produto interno entre dois vetores é maximizado quando estes apontam na mesma direção, vem:

$$\bar{Q}(f) = \frac{\gamma(|f|)\Omega_{GW}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)}. \quad (3.101)$$

Assim, a expressão da razão sinal/ruído torna-se:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{9H_0^4}{50\pi^4} T \int_0^\infty \frac{\gamma^2(f)\Omega_{GW}^2(f)}{f^6 P_1(f)P_2(f)} df. \quad (3.102)$$

A equação (3.102) é válida para a correlação de dois interferômetros. Para os LIGO's, a função $\gamma(f)$ é obtida por Allen (1997), enquanto que $P_1(f)$ e $P_2(f)$ são obtidos do trabalho de Owen e Sathyaprakash (1999). A distância entre os dois LIGO's situados em Hanford (Washington) e Livingston (Louisiana) é

$$|\Delta \vec{x}| \simeq 2.998\text{km}.$$

No próximo capítulo será apresentado como a partir do cenário hierárquico de formação de estruturas (cenário tipo Press-Schechter) é possível obter a taxa cósmica de formação estelar.

4 Taxa Cósmica de Formação Estelar e os Buracos Negros no Universo

Pode-se considerar que existem dois grandes reservatórios de gás no Universo, o meio intergaláctico e o meio interestelar. A medida que halos de matéria escura colapsam, o gás do meio intergaláctico é agregado a estruturas e durante esse processo estrelas podem ser formadas. A medida que esses objetos evoluem, parte do gás pode retornar ao meio interestelar devido a ventos estelares e supernovas. Além disso, a explosão de supernovas acaba por injetar energia ao gás contido no meio interestelar, o que pode ocasionar o retorno do gás ao meio intergaláctico. Além do processo de formação estelar, buracos negros podem ser considerados como sumidouros de gás, a medida que os mesmos crescem por acreção de matéria do seu ambiente.

Dentro desse contexto, nesse capítulo é apresentado, na seção 4.1, um breve resumo das equações e conceitos referentes ao cenário hierárquico de formação de estruturas, já discutido anteriormente no capítulo 2, e que são importantes no cálculo da taxa cósmica de formação estelar (TCFE). Na seção 4.2 é apresentado o modelo que permite determinar a TCFE comparando os resultados desse modelo com as observações até *redshift* ~ 6 . A seção 4.3 tratará brevemente a questão das evidências observacionais da existência de buracos negros como um “preâmbulo” dos capítulos seguintes.

4.1 Cenário Hierárquico de Formação de Estruturas

Como visto no capítulo 2, Press e Schechter (P-S), em 1974, propuseram de forma heurística, uma função de massa, $n(M, z)$, que fornece a densidade numérica de halos com massa entre M e $M + dM$. Posteriormente, Bond et al. (1991), Lacey e Cole (1993) e Scannapieco e Barkana (2002) derivaram tal equação partindo do formalismo de “caminhos aleatórios Brownianos”. Além disso, existem outras funções de massa que se ajustam melhor as simulações de n -corpos (JENKINS et al., 2001), tal como a função de massa de Sheth e Tormen (1999).

De forma mais generalizada, a função de massa de halos de matéria escura, $n(M, z)$, pode ser escrita como (SHETH; TORMEN, 1999):

$$n(M, z) = 2 \frac{\rho_0}{M^2} F(\nu) \left| \frac{d \ln(\sigma(M))}{d \ln(M)} \right|, \quad (4.1)$$

com $\nu = [\delta_c(z)/\sigma(M)]^2$ e :

$$F(\nu) = \begin{cases} A \left(1 + \frac{1}{(a\nu)^p}\right) \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/2} \frac{\exp\left(\frac{-a\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} & \text{Função de Sheth e Tormen} \\ \left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/2} \frac{\exp\left(\frac{-\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} & \text{Função de Press-Schechter} \end{cases} \quad (4.2)$$

em que $A = 0,3222$, $a = 0,707$, $p = 0,3$ são constantes, ρ_0 é a densidade de matéria de fundo, $\sigma(M)$ é a variância do campo de densidade linear, sendo que (e.g. Jenkins et al. (2001)):

$$\sigma^2(M) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k^2 P(k) W^2(k; M) dk, \quad (4.3)$$

em que $P(k)$ é o espectro de potência das perturbações primordiais e $W(k; M)$ é a função janela no espaço de Fourier. A partir desse ponto será denotado $n_{st}(M, z)$ para descrever o uso da função de massa de Sheth-Tormem.

Já δ_c é o contraste de densidade das perturbações de massa extrapolado para o presente. No regime linear, o campo de densidades mantém sua forma, em coordenadas comóveis, e o contraste de densidade cresce com (e.g. Scannapieco e Barkana, 2002 e Hiotelis, 2003):

$$\delta_c(z) = \delta_{crit}(z) \frac{D(z=0)}{D(z)} \quad (4.4)$$

em que $D(z)$ é a função de crescimento tal que $D(z=0) = 1$ para $\Omega_m = 1$ e z é o “redshift” em que ocorre o colapso. A função de crescimento é dada em termos do fator de escala ($a = 1/(1+z)$) por (CARROLL; PRESS, 1992):

$$D(a) = \frac{5\Omega_m(a)a}{2[1 - \Omega_\Lambda(a) + \Omega_m^{4/7}(a) + (2\Omega_m(a))^{-1}]}. \quad (4.5)$$

A função $\delta_{crit}(z)$ é a extrapolação linear da densidade crítica para que uma estrutura colapse em z . É obtido $\delta_{crit} \approx 1,686$, independente de z , para o modelo de universo Einstein-de Sitter ($\Omega_m^0 = 1$, $\Omega_\Lambda^0 = 0$). Porém, em outras cosmologias, δ_{crit} possui uma fraca dependência com a era em que ocorre o colapso. Em particular, para um Universo plano, tem-se a seguinte aproximação (HIOTELIS, 2003):

$$\delta_{crit} \cong 1,686\Omega_m^{0,0055}(z) \quad (4.6)$$

Porém, ao longo desse trabalho será considerado que δ_{crit} é independente de z .

O espectro de potência $P(k)$, em Λ CDM, é (BOND et al., 1986):

$$P(k) = AkT(k), \quad (4.7)$$

sendo A uma constante de normalização e $T(k)$ é a função transferência, que leva em conta processos que modificam o espectro de potência primordial. Vale lembrar que o espectro de potência nada mais é do que uma média do quadrado da amplitude das componentes de Fourier do campo de densidades.

A função transferência adotada é (EFSTATHIOU et al., 1992):

$$T(k) = \frac{1}{\{1 + [ak + (bk)^{3/2} + (ck)^2]^\nu\}^{2/\nu}}, \quad (4.8)$$

em que $a = (6, 4/\Gamma)h^{-1}\text{Mpc}$, $b = (3, 0/\Gamma)h^{-1}\text{Mpc}$, $c = (1, 7/\Gamma)h^{-1}\text{Mpc}$, $\nu = 1, 13$, $\Gamma = \Omega_0 h$ com h sendo o parâmetro de Hubble escrito como $h = H_0/100\text{kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

A função filtro adotada será a “*top-hat*” (ou perfil quadrado) que no espaço de Fourier toma a forma:

$$W(k; M) = \frac{3}{(kR_f)^3}(\text{sen}(kR_f) - kR_f \text{cos}(kR_f)), \quad (4.9)$$

sendo a escala característica, R_f , proporcional a $\rho_0 M^{-3}$.

Para obter a evolução da fração de matéria bariônica em estruturas, considera-se que a distribuição de matéria bariônica traça a distribuição de matéria escura sem viés (ou “*bias*”), isto é, que a densidade de bárions é proporcional a densidade de matéria escura. Também que estrelas podem ser formadas somente em halos que possuam uma massa mínima, M_{min} . Tendo isso em conta, a fração de bárions em estruturas pode ser escrita como (PEREIRA; MIRANDA, 2010; DAIGNE et al., 2006):

$$f_b = \frac{\int_{M_{min}}^{\infty} n_{st}(M, z) M dM}{\int_0^{\infty} n_{st}(M, z) M dM}, \quad (4.10)$$

note que, a densidade comóvel de matéria escura é simplesmente (ver, em particular,

Daigne et al. (2006)):

$$\rho_{DM} = \int_0^\infty n_{st}(M, z) M dM. \quad (4.11)$$

Usando a definição dada pela equação (4.10), a taxa de acreção $a_b(t)$, que leva em conta o aumento na fração de bárions em estruturas é (PEREIRA; MIRANDA, 2010; DAIGNE et al., 2006):

$$a_b(t) = \Omega_b \rho_c \left(\frac{dt}{dz} \right)^{-1} \left| \frac{df_b}{dz} \right| \quad (4.12)$$

sendo $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ a densidade crítica do Universo.

4.2 Taxa Cósmica de Formação Estelar

Nos modelos hierárquicos de formação de galáxias os primeiros halos inciam o colapso em $z \gtrsim 20$, tendo massa $\sim 10^6 M_\odot$ (SALVADORI et al., 2007). Em particular, a história de formação estelar para um sistema “tipo-galáctico” é determinada pela interação entre a incorporação de bárions em objetos colapsados e retorno de bárions em estado difuso.

O processo anterior pode ser descrito em duas fases: (a) regresso em massa de estrelas ao meio interestelar do sistema, através, por exemplo, de ventos estelares e de supernovas, que acontece a nível local, e (b) *infall* (queda nas estruturas) dos bárions de fora do sistema. O processo anterior é uma parte bem conhecida e firmemente estabelecida do modelo padrão de evolução estelar (CHIOSI; MAEDER, 1986), embora os detalhes da perda de massa em um determinado tipo estelar pode ainda ser controverso, não há nada controverso na base física do processo.

Assim, ao longo deste trabalho será usado o processo básico descrito acima. Para isso, será considerado que a taxa de acreção de bárions $a_b(t)$, descrita pela Equação (4.12), como um termo de *infall* que abastece o reservatório representado pelo halos. Dessa forma, considerando que a probabilidade de formar uma estrela de massa m e a rapidez com que o gás é convertido em estrelas sejam independentes, o número de estrelas formadas por unidade de volume, massa e tempo pode ser escrito como:

$$\frac{d^3 N(m, t, r)}{dV dm dt} = \phi(m) \Psi(t), \quad (4.13)$$

sendo $\phi(m)$ a função de massa inicial (FMI), que descreve a frequência de formação de estrelas para um dado intervalo de massa $[m, m + dm]$ e $\Psi(r, t)$ é a taxa de formação estelar, que descreve quanto de gás é convertido em estrelas por unidade de tempo.

O espectro inicial de massa é definido de forma que $\phi(m)dm$ represente o número de estrelas formadas ao mesmo tempo, no intervalo de massa $[m, m + dm]$ e no instante que começa a queima de hidrogênio na sequência principal.

Salpeter, em 1955, introduziu a ideia de que a razão de formação de estrelas como função da massa pode ser calculada a partir da função de luminosidade observada. Isso é razoável, ao se considerar o fato de que uma estrela formada na galáxia passa a maior parte de sua vida na sequência principal, sendo esse tempo proporcional a relação entre a massa e a respectiva luminosidade da estrela. Assim, Salpeter (1955) pôde determinar a função de massa inicial, $\phi(m)$, válida para a vizinhança solar como:

$$\phi(m) = Am^{-(1+x)}, \quad (4.14)$$

sendo A uma constante de normalização, pois, embora (4.14) seja contínua para qualquer massa m diferente de zero, na prática limita-se a FMI em um intervalo de massa $[m_{inf}, m_{sup}]$ fora do qual $\phi(m) = 0$.

Dessa forma, pode-se escrever:

$$\int_{m_{inf}}^{m_{sup}} Am^{-(1+x)} m dm = 1, \quad (4.15)$$

para normalizar a FMI. Aqui será considerado $m_{inf} = 0,1M_{\odot}$ e $m_{sup} = 140M_{\odot}$.

A taxa cósmica de formação estelar é obtida considerando inicialmente que a mesma é dependente da quantidade de gás (bárions) disponível, ou seja, da densidade (ou massa) de gás local, tal como foi apresentado por Pereira e Miranda (2010). Desta forma, assumiu-se a lei de Schmidt (1959):

$$\frac{d^2 M_*}{dV dt} = k \rho_g^n(r, t), \quad (4.16)$$

com $d^2 M_*/dV dt$ sendo a taxa de conversão do gás em estrelas, ρ_g é a densidade do gás e n fornece o grau de eficiência na conversão de gás em estrelas, sendo que para

cada valor de n obtém-se distintos modelos evolutivos. A constante k é o inverso da escala característica de formação estelar ($k = 1/\tau$ Gyr), se for considerado $n = 1$ em (4.16). Assim, a taxa cósmica de formação estelar é:

$$\dot{\rho}_* = k\rho_g. \quad (4.17)$$

Dessa forma, para obter a taxa cósmica de formação estelar é preciso entender o processo de evolução de gás em estruturas, tal como será descrito a seguir.

Com o passar do tempo, parte do gás que é convertido em estrelas retornará para o meio interestelar na forma de ventos estelares e explosão de supernovas. Nesse caso, a taxa de massa ejetada no ambiente, por unidade de volume e unidade de tempo, será dada por (PEREIRA; MIRANDA, 2010):

$$\frac{d^2 M_{\text{ej}}}{dV dt} = \int_{m(t)}^{M_{\text{sup}}} (m - m_r)\Phi(m)\Psi(t - \tau_m)dm. \quad (4.18)$$

O limite inferior na equação anterior, $m(t)$, corresponde à massa de estrelas cujo tempo de vida é igual a t . Além disso, na integral, m_r é a massa do objeto remanescente e que depende da massa da estrela progenitora. Note que a taxa de formação estelar é tomada com um tempo retardado de $(t - \tau_m)$, sendo τ_m o tempo de vida da estrela de massa m .

A escala de vida das estrelas, τ_m , formadas em halos é obtida através da função independente da metalicidade ajustada por Scalo (1986) e Copi (1997):

$$\log_{10}(\tau_m) = 10 - 3,6 \log_{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) + \left[\log_{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \right]^2, \quad (4.19)$$

Para determinar a massa do objeto remanescente, m_r , é preciso levar em conta as seguintes considerações (TINSLEY, 1980):

- I) Estrelas com massa menor que $1M_{\odot}$ tem tempo de vida muito grande e não contribuem para o retorno de massa para o meio;
- II) Estrelas com massa no intervalo $[1M_{\odot}, 8M_{\odot}]$ após evoluir pela sequência principal, deixam uma anã branca de carbono e oxigênio em que:

$$m_r = 0,1156m + 0,4551. \quad (4.20)$$

- III) Estrelas com massa no intervalo de $8M_{\odot} < m \leq 10M_{\odot}$ ao fim da sequencia principal deixam como remanescente uma anã branca de oxigênio-neônio-magnésio com $m_r = 1,35M_{\odot}$.
- IV) Estrelas com massa maior que $10M_{\odot}$ e menor que $25M_{\odot}$ explodem como supernovas e deixam uma estrela de nêutrons com $m_r = 1,4M_{\odot}$
- V) Estrelas com massa no intervalo de $25M_{\odot} \leq m \leq 140M_{\odot}$ deixam um buraco negro. Sendo que a remanescente nesse caso é dado pelo núcleo de hélio, m_{He} , (HEGER; WOOSLEY, 2002):

$$m_r = m_{He} = \frac{13}{24}(m - 20M_{\odot}) \quad (4.21)$$

Finalmente, usando as Equações (4.16) e (4.18) e a Equação (4.12) como fonte de gás do meio intergaláctico para as estruturas, a taxa de variação de gás em estruturas pode ser descrita pela seguinte lei de conservação:

$$\dot{\rho}_g = -\frac{d^2 M_{\star}}{dV dt} + \frac{d^2 M_{ej}}{dV dt} + a_b(t), \quad (4.22)$$

Assim, usando a equação de evolução do gás na Equação (4.17), tem-se a taxa cósmica de formação estelar.

4.2.1 Resultados

Nos diversos casos, a taxa cósmica calculada foi normalizada de modo a fornecer $\dot{\rho}_{\star} = 0,016M_{\odot} \text{Mpc}^{-3} \text{yr}^{-1}$ em $z = 0$. Isso permite obter boa concordância, no presente, para a taxa cósmica derivada através de modelos hidrodinâmicos de Springel e Hernquist (2003) e também com os dados observacionais tomados de Hopkins (2004), Hopkins (2007). Os parâmetros cosmológicos considerados foram: $\Omega_m = 0,24$, $\Omega_b = 0,04$, $\Omega_{\Lambda} = 0,76$ e $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-3}$ com $h = 0,73$ e $\sigma_8 = 0,84$.

Na Figura 4.1 é apresentada uma comparação entre a taxa cósmica de formação estelar do presente trabalho (PEREIRA; MIRANDA, 2010), para o caso de $M_{min} = 10^6 M_{\odot}$, $\tau_s = 2,0 \text{ Gyr}$, $x = 1,35$ e $z_{ini} = 20$, e as de Springel e Hernquist (2003) (SH), que obtém essa função via simulação hidrodinâmica e as de Fardal et al. (2007) (F) e Hopkins e Beacom (2006) (HB) que utilizam ajustes de dados observacionais disponíveis para derivar a taxa cósmica de formação estelar. Os dados observacionais com as devidas barras de erro foram obtidas do trabalho de Hopkins (2004), Hopkins

(2007).

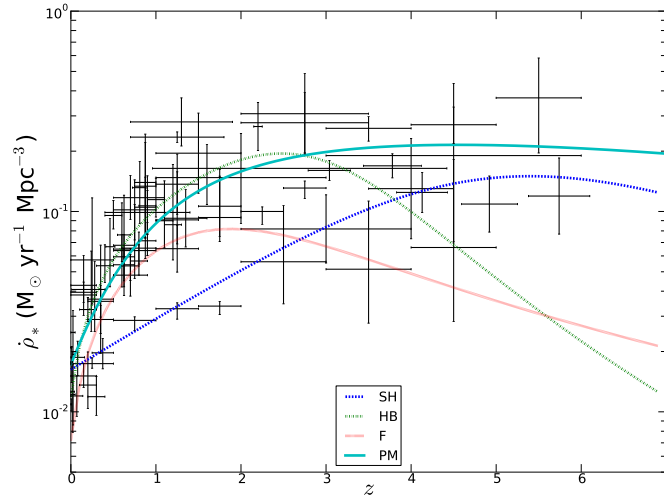


Figura 4.1 - Comparação entre a taxa cósmica de formação estelar de Pereira e Miranda (2010) (PM) com as de Springel e Hernquist (2003) (SH), Fardal et al. (2007) (F) e Hopkins e Beacom (2006) (HB). Os dados observacionais com as devidas barras de erro foram obtidas do trabalho de Hopkins (2004), Hopkins (2007)

Na Figura 4.2 é apresentada a TCFE derivada no presente trabalho para vários valores do limiar de massa M_{\min} (ver Equação (4.10)). Nesse caso é considerada a função de massa inicial com inclinação $x = 1,35$, $\tau_s = 2,0 \text{ Gyr}^1$ como escala característica de formação estelar, também é considerado que as estrelas começam a se formar em *redshift* $z_{ini} = 20$. Como pode ser visto, os modelos com $M_{\min} = 10^6 - 10^8 M_{\odot}$ têm um excelente acordo com a TCFE observacional em *redshifts* $z \lesssim 6,5$. Veja que o limite em massa M_{\min} atua sobre a amplitude e o *redshift* (z_*) em que a amplitude da TCFE é máxima.

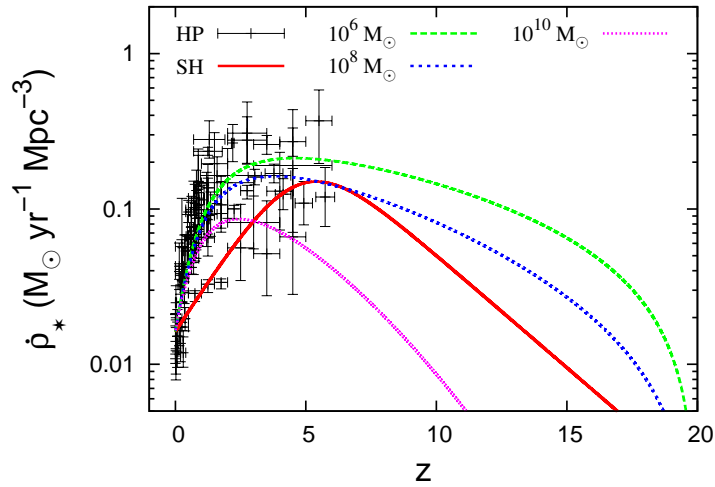


Figura 4.2 - A TCFE derivada nesse trabalho comparada com os pontos observacionais (HP) extraídos do trabalho de Hopkins (2004), Hopkins (2007). Nesse caso foi assumida a função de massa de Salpeter padrão ($x = 1,35$), $\tau_s = 2,0 \text{ Gyr}$ como escala temporal de formação estelar. Neste gráfico pode-se ver a influência de M_{\min} (limiar para a massa de formação dos halos) na TCFE. A linha sólida representa a TCFE de Springel e Hernquist (2003) (SH), a linha tracejada corresponde a $M_{\min} = 10^6 M_{\odot}$, a linha tracejada curta corresponde a $M_{\min} = 10^8 M_{\odot}$ e a linha tracejada-pontilhada representa $M_{\min} = 10^{10} M_{\odot}$.

O modelo, com $M_{\min} = 10^{10} M_{\odot}$ tem um bom acordo com os dados em $z \lesssim 5$. Por outro lado, em *redshifts* mais elevados ($5 \lesssim z \lesssim 6,5$) este modelo não concorda muito bem com os pontos observacionais. Na Figura 4.2, também incluiu-se a TCFE obtida por Springel e Hernquist (2003) (SH) para comparação. Apesar dos modelos, com $M_{\min} = 10^6 - 10^8 M_{\odot}$ terem amplitude maior do que a obtida por SH, pode-se observar que ambos, SH e os modelos do presente trabalho, se encaixam muito bem aos dados observacionais.

¹ 1 Gyr = 10^9 anos - 1 *Giga year*

Na Figura 4.3 é apresentada a influência de τ_s na TCFE. Foi considerado $x = 1,35$, $z_{\text{ini}} = 20$, e foi tomado $M_{\text{min}} = 10^6 M_{\odot}$ para o limite de massa. Note que, $\tau_s \leq 2,0$ Gyr produz uma escala de consumo de gás compatível com as galáxias *early-type* (PACHECO, 1997). Assim, o primeiro efeito básico de aumentar τ_s é o de deslocar o pico da TCFE para *redshifts* menores. Isso significa que, quanto maior o valor do parâmetro τ_s , menor é o *redshift* no qual aparece o pico da $\dot{\rho}_*$. Em particular, o pico da $\dot{\rho}_*$ é deslocado para *redshift* 3,3 se $\tau_s = 4,0$ Gyr e para 6,1 se $\tau_s = 1,0$ Gyr.

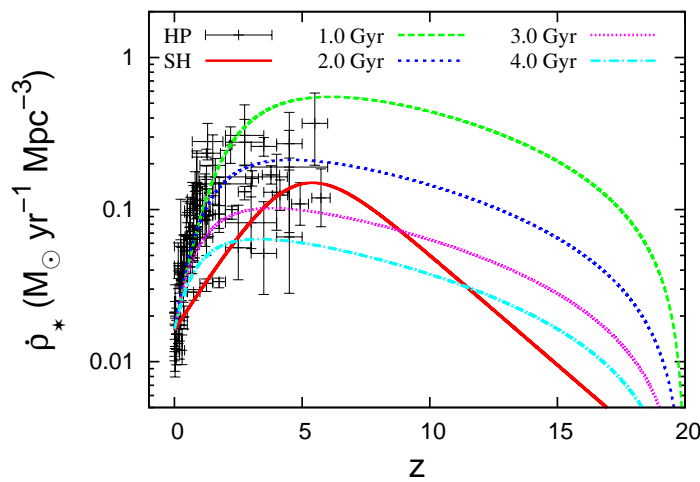


Figura 4.3 - A Influência da escala característica de formação estelar (τ_s) nos resultados. A linha sólida representa a TCFE de SH, a linha tracejada corresponde a $\tau_s = 1\text{Gyr}$, a linha tracejada curta corresponde a $\tau_s = 2\text{Gyr}$, a linha pontilhada corresponde a $\tau_s = 3\text{Gyr}$ e a linha pontilhada-tracejada representa $\tau_s = 4\text{Gyr}$. Esses modelos tem limiar de massa $M_{\text{min}} = 10^6 M_{\odot}$ e a FMI com expoente $x = 1,35$. HP são os pontos observacionais da TCFE (HOPKINS, 2004; HOPKINS, 2007).

O parâmetro τ_s também está relacionado com a amplitude de $\dot{\rho}_*$ (ver também Equação (4.17)). Veja que, considerando $M_{\text{min}} = 10^6 M_{\odot}$ então os modelos com $\tau_s = 2,0 - 3,0$ Gyr são aqueles que apresentam a melhor concordância com os dados observacionais. Vale ressaltar que ambos os parâmetros, M_{min} e τ_s , produzem efeitos similares sobre os resultados. Ou seja, eles agem sobre a amplitude de $\dot{\rho}_*$ e no valor de z_* . Na Figura 4.3 também está incluída a TCFE obtida por SH para comparação.

Na Figura 4.4, é apresentada a influência de z_{ini} sobre a evolução de $\dot{\rho}_*$. Os modelos têm evolução semelhante em $z \lesssim 5$. No entanto, em *redshifts* maiores, o modelo com $z_{\text{ini}} = 40$ produz uma TCFE maior do que a obtida a partir de $z_{\text{ini}} = 20$. Em particular, o pico da TCFE ocorre em *redshift* 4,6 (5,5) para o modelo com $z_{\text{ini}} = 20$ ($z_{\text{ini}} = 40$).

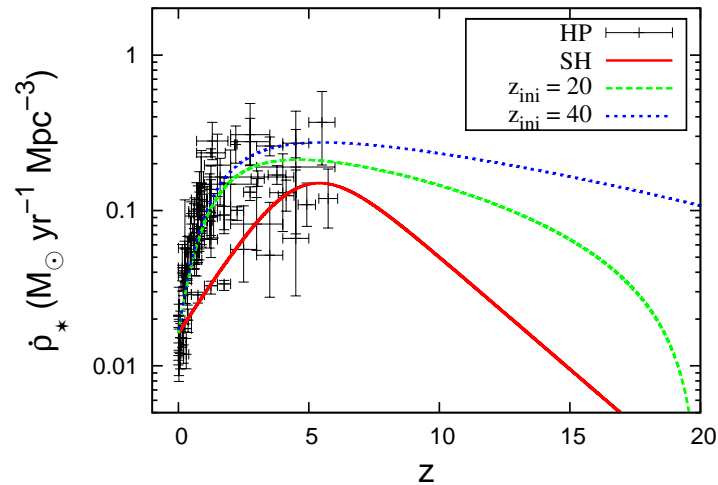


Figura 4.4 - Modelos com $\tau_s = 2\text{Gyr}$ e $M_{\text{min}} = 10^6 M_\odot$ mas considerando dois valores diferentes para o *redshift* inicial. A linha sólida corresponde a TCFE de SH, a linha tracejada corresponde a $z_{\text{ini}} = 20$ e a linha tracejada curta corresponde a $z_{\text{ini}} = 40$. HP são dados observacionais da TCFE (HOPKINS, 2004; HOPKINS, 2007).

Vale ressaltar que a TCFE é inferida a partir de observações da luz emitida pelas estrelas em diferentes comprimentos de onda. Um parâmetro importante na determinação da TCFE é o obscurecimento por poeira que é bem conhecido por afetar as medições de luminosidade das galáxias em ultravioleta (UV) e em comprimentos de onda do óptico. Correção para este efeito nem sempre é fácil. Assim, existem grandes incertezas associadas à determinação da TCFE como pode ser visto a partir das Figuras 4.1-4.4 (veja em particular Hopkins (2004), de ARAUJO e Miranda (2005) que discutem essas incertezas com mais detalhes).

Na próxima seção será apresentada uma breve discussão sobre as evidências observacionais para a existência de buracos negros, sejam estelares ou supermassivos.

4.3 Buracos Negros

Nos últimos anos, evidências observacionais têm mostrado que buracos negros massivos estão presentes na maioria das galáxias a baixo “*redshift*” (e.g., [Magorrian et al. \(1998\)](#)). Em particular, no centro de nossa Galáxia, na região conhecida como Sagittarius A*, indícios muito fortes da presença de um buraco negro supermassivo surgem dos dados de dez anos de imagens astrométricas de alta resolução. Nessas imagens são encontradas estrelas percorrendo órbitas elípticas keplerianas em torno de Sagittarius A*. Essas informações revelam que a massa do objeto central é da ordem de $10^6 M_{\odot}$. Nas Figuras 4.5, 4.6 e 4.7 são apresentados alguns resultados a cerca das observações do possível buraco negro supermassivo do centro de nossa Galáxia.

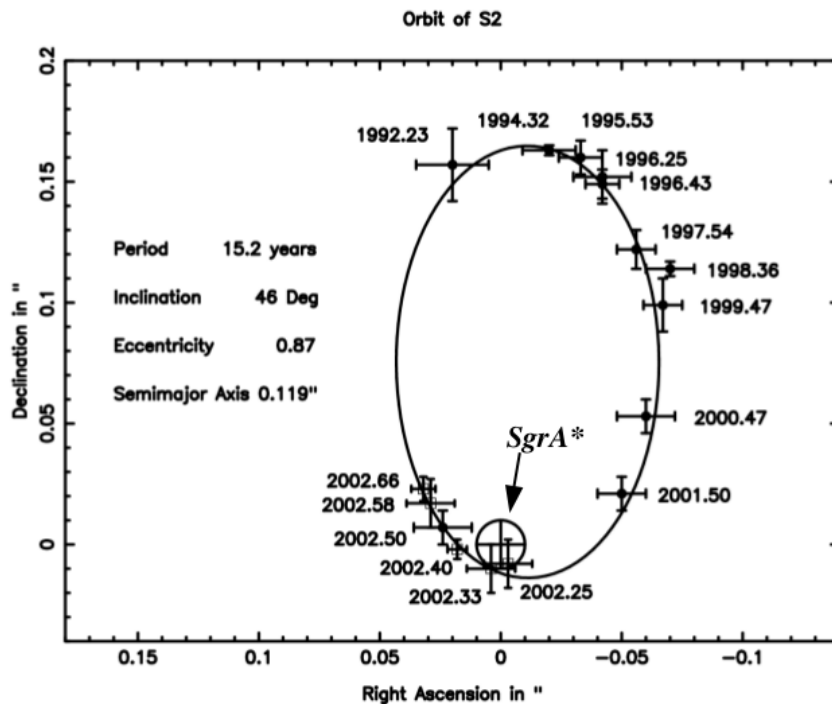


Figura 4.5 - Órbita da estrela mais próxima da posição de Sagittarius A*.
FONTE: [Schödel et al. \(2002\)](#)

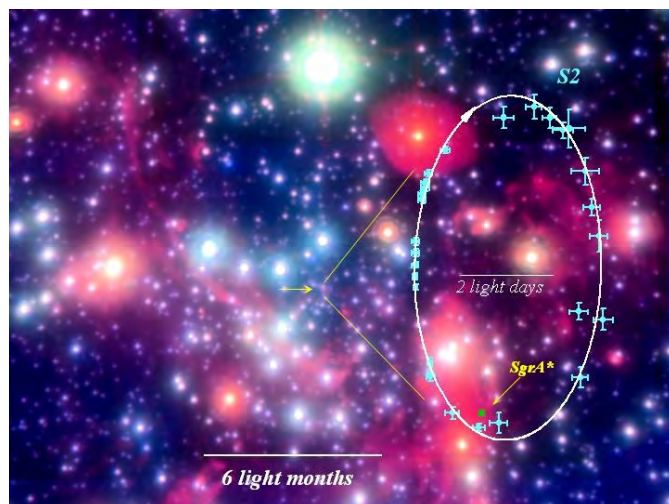


Figura 4.6 - Imagem em cor falsa feita pelo *European Southern Observatory's Very Large Telescope* da região Central da Via Láctea. Superposta com a composição de imagens da reconstrução da órbita da estrela mais próxima de Sagittarius A*.
 FONTE: Reid (2009)

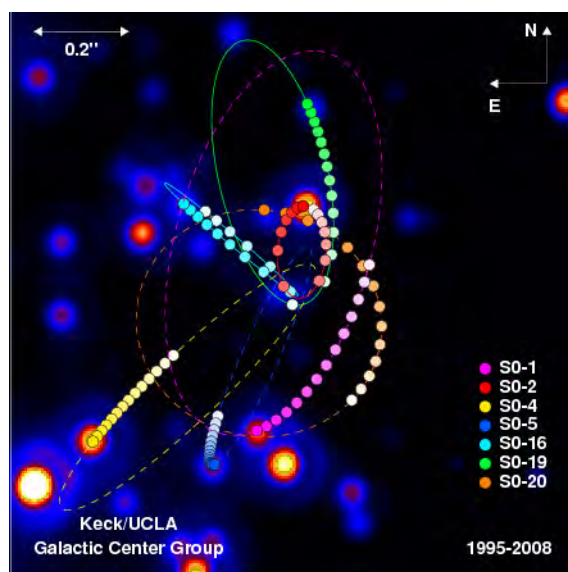


Figura 4.7 - Estrelas dentro da região de 0,02 parsecs do centro galáctico orbitando um objeto massivo, da ordem de $10^6 M_{\odot}$ não visível.
 FONTE: Reid (2009)

Mas a falta de dados observacionais a altos “*redshifts*”, em particular no período conhecido como era cosmológica das trevas (“*Cosmic Dark Age*” - DA), torna difícil afirmar que a presença de buracos negros centrais ocorra para todo o histórico de formação de galáxias. Isso acaba dificultando o entendimento da origem desses objetos. Uma possível explicação está no fato de que esses objetos possam ter sido

originados a partir do colapso de estrelas primordiais de alta massa que geram buracos negros ~ 300 a $1000 M_{\odot}$. Um fato a favor disso está na observação de candidatos a buracos negros, de origem estelar, em raios-X.

Na Figura 4.8 é apresentada a imagem das bordas de um disco de acreção em torno de um buraco negro estelar. Essa imagem foi construída a partir de dados do observatório de raio-X Chandra (Veja mais detalhes na página do projeto: <http://chandra.harvard.edu/about/>).

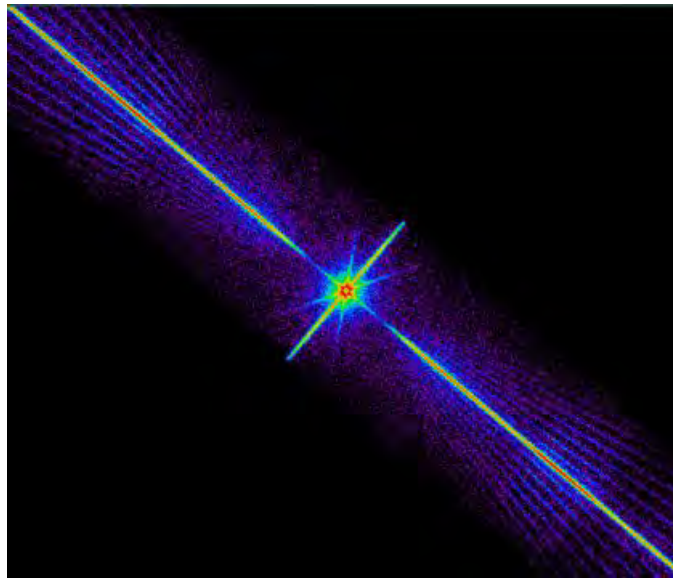


Figura 4.8 - XTE J1118+480 - Espectro produzido a partir de dados do Chandra das bordas de um disco de acreção em torno de um buraco negro.
FONTE: McClintock e Garcia (2011)

Buracos negros, sejam estelares ou supermassivos, constituem-se em um extraordinário laboratório para o estudo do Universo. Nos próximos capítulos será mostrado que a taxa cósmica de formação estelar está intimamente associada tanto com o crescimento de buracos negros supermassivos quanto com a formação de buracos negros estelares até *redshift* $\sim 20 - 40$. Como a formação de buracos negros resulta na emissão de ondas gravitacionais, em princípio detectando e estudando fundos estocásticos de ondas gravitacionais permitiria reconstruir a história da formação estelar do Universo até *redshifts* $\sim 20 - 40$.

Em particular no próximo capítulo será apresentado o cálculo do fundo estocástico de ondas gravitacionais produzido pelo colapso de estrelas de alta massa para buracos negros.

5 Estudando o Universo Através de Buracos Negros Estelares

Existem diversos eventos astrofísicos capazes de emitir ondas gravitacionais (OG's) detectáveis, tais como: Supernovas, colapso de estrelas ou de aglomerados de estrelas para formar buracos negros, espiralação e coalescência de binárias compactas, queda de estrelas em buracos negros, estrelas de nêutrons em rotação, sistemas de estrelas binárias ordinárias entre outros. Tais fontes podem ser usadas na busca de um melhor entendimento sobre os processos que tomam lugar no momento em que se inicia a formação estelar, já no fim da chamada era cosmológica das trevas (DA).

É importante ter em mente que, no estudo de Fundos Estocásticos de Ondas Gravitacionais (FEOG) provenientes de fontes astrofísicas é preciso conhecer as características populacionais dos objetos estudados tais como: taxa de formação e distribuição de massa. Para o caso do fundo gerado pelo colapso de estrelas para buracos negros, como será apresentado a seguir, é necessário conhecer a taxa cósmica de formação estelar e a função de massa inicial.

Nesse capítulo será apresentada uma visão geral do formalismo usado para caracterizar o FEOG, pois esse assunto já foi discutido em trabalhos prévios (vide e.g. [Pereira e Miranda, 2010](#) e suas referências). Após esse resumo serão apresentados os resultados comparando os modelos considerados.

5.1 O Fundo Produzido Pelo Colapso de Estrelas para Buracos Negros

O espectro de um fundo estocástico de OG's é caracterizado pela densidade de energia por intervalo logarítmico de frequência e normalizado pela densidade crítica do Universo. Isto é ([ALLEN, 1997](#); [FERRARI et al., 1999](#)):

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{d\log(\nu_{obs})} \quad (5.1)$$

em que ρ_{GW} é a densidade de energia gravitacional, ν_{obs} é a frequência no referencial do observador e ρ_c é a densidade crítica do Universo.

A equação acima também pode ser escrita como (e.g. [Pereira e Miranda, 2010](#)):

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{c^3 \rho_c} \nu_{obs} F_{\nu_{obs}} = \frac{4\pi^2}{3H_0^2} \nu_{obs}^2 h_{BG}^2 \quad (5.2)$$

sendo $F_{\nu_{obs}}$ o fluxo de OG's na frequência observada, ν_{obs} , integrado sobre todas as fontes cosmológicas e h_{BG} é a amplitude adimensional do fundo de ondas gravitacionais.

O fluxo recebido em OG's por um detector na Terra é dado por (de ARAUJO; MIRANDA, 2005):

$$F_{\nu}(\nu_{obs}) = \int \frac{l_{\nu}}{4\pi d_L^2} \frac{d\nu}{d\nu_{ob}} dV \quad (5.3)$$

sendo $l_{\nu} = dL_{\nu}/dV$ a densidade de luminosidade comóvel ($\text{ergs}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{Mpc}^{-3}$), o que obviamente se refere ao referencial da fonte. Veja que d_L é a distância de luminosidade e dV é o elemento de volume comóvel.

A equação anterior é válida para estimar a radiação recebida na Terra de um fundo estocástico independentemente de sua origem. Outra forma de escrever l_{ν} é:

$$l_{\nu} = \int \frac{dE_{GW}}{d\nu} \dot{\rho}_*(z) \phi(m) dm, \quad (5.4)$$

com $dE_{GW}/d\nu$ sendo a energia específica de uma dada fonte, $\dot{\rho}_*(z)$ é a taxa cósmica de formação estelar (TCFE) e $\phi(m)$ é a função de massa inicial.

Com isto, o fluxo recebido na Terra é:

$$F_{\nu}(\nu_{obs}) = \int \int \frac{1}{4\pi d_L^2} \frac{dE_{GW}}{d\nu} \frac{d\nu}{d\nu_{obs}} \frac{dV}{dz} \dot{\rho}_*(z) \phi(m) dm dz. \quad (5.5)$$

O fluxo de energia específico por unidade de frequência é (em e.g $\text{erg cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$):

$$f_{\nu}(\nu_{obs}) = \frac{1}{4\pi d_L^2} \frac{dE_{GW}}{d\nu} \frac{d\nu}{d\nu_{obs}}, \quad (5.6)$$

que pode ser escrito como (CARR, 1980):

$$f_{\nu}(\nu_{obs}) = \frac{\pi c^3}{2G} h_{BN}^2, \quad (5.7)$$

em que h_{BN} é a amplitude adimensional da onda gravitacional gerada por um único

buraco negro.

Escrevendo o fluxo recebido na Terra em termos da amplitude adimensional do fundo estocástico como,

$$F_\nu(\nu_{obs}) = \frac{\pi c^3}{2G} h_{BG}^2 \nu_{obs}, \quad (5.8)$$

obtém-se, com o uso das equações (5.5), (5.6), (5.7) e (5.8)

$$h_{BG}^2 = \frac{1}{\nu_{obs}} \int h_{BN}^2 dR_{BN}, \quad (5.9)$$

que permite obter a amplitude característica do fundo estocástico. Nessa equação,

$$dR_{BN} = \dot{\rho}_*(z) \phi(m) \frac{dV}{dz} dm dz, \quad (5.10)$$

é a razão diferencial de formação de buracos negros, ν_{obs} é a frequência observada na Terra. Note que, o histórico de formação estelar, dado pela TCFE $\dot{\rho}_*(z)$ e a função de massa $\phi(m)$ (Conseqüentemente a própria história de formação e evolução de estruturas), estão embutidos na razão diferencial de formação de buracos negros. A amplitude adimensional produzida pelo colapso de uma estrela para buraco negro, h_{BN} , é dado por (THORNE, 1987):

$$h_{BN} = 7,4 \times 10^{-20} \epsilon_{GW}^{1/2} \left(\frac{M_r}{M_\odot} \right) \left(\frac{d_L}{1\text{Mpc}} \right)^{-1}, \quad (5.11)$$

em que ϵ_{GW} é a eficiência de geração de OG's, d_L é a distância de luminosidade e M_r é a massa do buraco negro.

O colapso para buraco negro produz um sinal, na frequência observada, dada por (THORNE, 1987):

$$\nu_{obs} = 1,3 \times 10^4 \left(\frac{M_\odot}{M_r} \right) (1+z)^{-1}. \quad (5.12)$$

O fator $(1+z)^{-1}$ leva em conta o efeito de *redshift* na frequência emitida. Isto

é, um sinal emitido na frequência ν_e no *redshift* z é observado na frequência $\nu_{obs} = \nu_e(1+z)^{-1}$.

Agora, assumindo (5.11) a (5.9) torna-se:

$$h_{BG}^2 = \frac{(7,4 \times 10^{-20} \epsilon_{GW}^{1/2})^2}{\nu_{obs}} \int_{z_{cf}}^{z_{ci}} \int_{M_{min}}^{M_{max}} \left(\frac{M_r}{M_\odot} \right)^2 \left(\frac{d_L}{1\text{Mpc}} \right)^{-2} \dot{\rho}_*(z) \phi(m) \frac{dV}{dz} dm dz, \quad (5.13)$$

que é a equação usada para calcular o fundo estocástico de ondas gravitacionais gerado pelo colapso de estrelas para buracos negros.

Como discutido no capítulo 4, buracos negros são formados a partir de estrelas com $25 \leq m \leq 140M_\odot$. A massa da remanescente é assumida ser a massa do núcleo de hélio antes do colapso (veja equação (4.21)). Dessa forma, dado um histórico de formação estelar, consistindo de uma taxa cósmica de formação estelar por volume comóvel, $\dot{\rho}_*(z)$, e a função de massa inicial $\phi(m)$, é possível caracterizar o FEOG produzido por buracos negros pré-galácticos.

Finalmente, para verificar a detectabilidade de um sinal em OG's, é preciso avaliar o valor da razão sinal-ruído (*signal-to-noise* (S/N)) para um par de detectores interferométricos, o qual é dado por (veja por e.g. [Pereira e Miranda, 2010](#) e suas referências):

$$(S/N)^2 = \left[\left(\frac{9H_0^4}{50\pi^4} \right) T \int_0^\infty \frac{\gamma^2(\nu) \Omega_{GW}^2(\nu)}{\nu^6 S_h^{(1)}(\nu) S_h^{(2)}(\nu)} d\nu \right], \quad (5.14)$$

sendo $S_h^{(i)}$ a densidade espectral de ruído do detector i , T o tempo de integração, γ a função de redução de sobreposição, o qual depende da posição dos dois detectores. Aqui foi assumido $T = 1$ ano.

5.2 Resultados

Usando o formalismo descrito na seção anterior e nos capítulos antecedentes, foram estudados um total de 72 modelos variando os seguintes parâmetros:

- a) a massa limite (M_{\min}) para a formação de estrutura, sendo considerados os valores $10^6 M_{\odot}$, $10^8 M_{\odot}$ e $10^{10} M_{\odot}$;
- b) o expoente (x) da função de massa inicial (FMI), em que foram considerados $x = 1,35$ (expoente de “Salpeter”), $x = 0,35$ que produz um maior número de buracos negros remanescentes do que a FMI de Salpeter e $x = 2,35$, que produz um menor número desses remanescentes do que o expoente de Salpeter;
- c) a escala característica de formação estelar (τ_s), sendo considerados os valores 1 Gyr, 2 Gyr, 3 Gyr, e 4 Gyr;
- d) o *redshift* inicial (z_{ini}), em que a formação estelar inicia. Foram tomados os valores 20 e 40.

Sobre este conjunto de modelos usaram-se dois critérios para selecionar os melhores. O primeiro critério foi ter uma boa concordância com dados observacionais de formação estelar em *redshifts* $z \lesssim 6,5$.¹ O segundo critério foi produzir um $(S/N) > 3$ para o par de interferômetros no modo “avançado”. Considerou-se que esta escolha de (S/N) era razoável para uma caracterização adequada dos FEOG’s.

¹Realizou-se uma análise de χ^2 sobre os modelos com $(S/N) > 3$. Em particular, determinou-se o qui-quadrado reduzido definido como $\chi_r = \chi^2/\text{dof}$ (sendo “dof” o número de “graus de liberdade”). Considerou-se que os modelos com $\chi_r \leq 1$ têm boa concordância com dados observacionais.

Na Figura 5.1 são apresentados os modelos com $M_{\min} = 10^6 M_{\odot}$ que satisfazem os critérios citados anteriormente. Os principais resultados desses modelos (A1-A6) se resumem na Tabela 5.1. Observe que na coluna cinco dessa tabela é apresentado o *redshift* (z_*) para o qual a TCFE alcança seu máximo valor e na sexta coluna é apresentada a razão (S/N). Para calcular a razão (S/N) foi considerada a integração de 1 ano na equação (5.14).

Tabela 5.1 - Resultados do modelo com $M_{\min} = 10^6 M_{\odot}$. A razão sinal/ruído, (S/N), é apresentada para o par de interferômetros LIGO III (configuração avançada). (S/N) é calculada para um ano de observações e considerando a eficiência de produção de ondas gravitacionais como sendo $\epsilon_{\text{GW}_{\max}} = 7 \times 10^{-4}$.

Modelo	z_{ini}	x (IMF)	τ_s (Gyr)	z_*	(S/N)
A1	20	1,35	2,0	4,6	7,4
A2	20	1,35	3,0	3,8	3,8
A3	20	0,35	1,0	4,4	93,5
A4	40	1,35	2,0	5,6	9,8
A5	40	1,35	3,0	4,6	4,8
A6	40	0,35	1,0	5,3	119,9

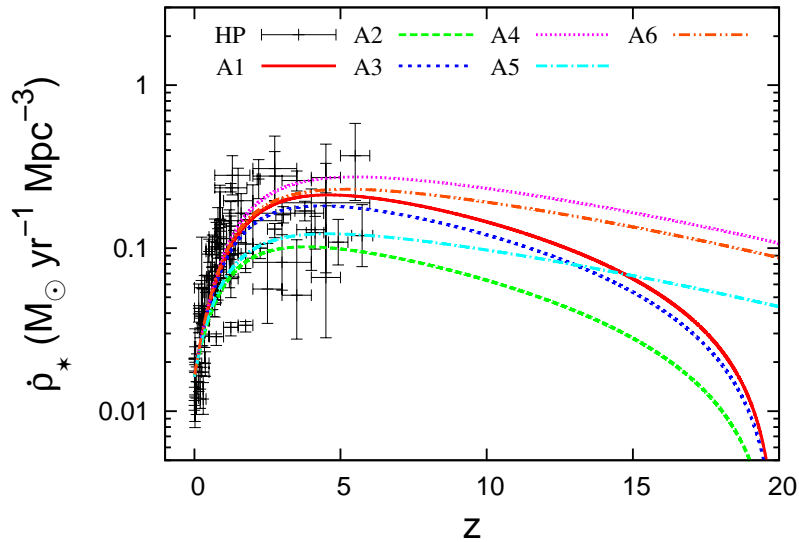


Figura 5.1 - Taxa cósmica de formação estelar para $M_{\min} = 10^6 M_{\odot}$. Os valores dos parâmetros que foram variados são apresentados na Tabela 5.1

O valor máximo de ϵ_{GW} é da ordem de $7,0 \times 10^{-4}$. Este foi obtido por Piran e Stark (1986) através da simulação do colapso assimétrico de uma estrela, em rotação, gerando um buraco negro. Contudo, recentemente Fryer et al. (2001) obtiveram $\epsilon \simeq 2,0 \times 10^{-5}$, para remanescentes de buracos negros gerados a partir do colapso de estrelas com massa da ordem de $100M_{\odot}$. Porém, é importante destacar que não existe uma parametrização que relacione ϵ como uma função da massa do buraco negro formado. Assim, nesse trabalho foi assumido $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$.

Observe que há possibilidade de detectar o FEOG aqui proposto se ϵ_{GW} é em torno do valor máximo. Observe que para a FMI de Salpeter ($x = 1,35$) obtemos um valor significativo da razão (S/N) se $\tau_s \sim 2,0 - 3,0$ Gyr.

Por outro lado, os modelos com $x = 0,35$ produzem os maiores valores para a razão (S/N). Isso acontece porque $x = 0,35$ produz um maior número de estrelas massivas do que a FMI de Salpeter. Neste caso, a TCFE que se ajusta aos dados observacionais são aqueles com $\tau_s \lesssim 1,0$ Gyr. Veja que os modelos com $\tau_s \lesssim 1,0$ Gyr tem uma curta escala de tempo para a formação estelar. Estes valores para o parâmetro τ_s são consistentes com uma população estelar de alta massa.

No entanto, se a FMI de estrelas pré-galácticas estiver perto de $x = 2,35$, então não será possível detectar os FEOG's propostos aqui, até mesmo para orientação e localizações ideais dos interferômetros LIGO. Em particular, todos os modelos, com $x = 2,35$ têm $(S/N) < 0,1$, mesmo para aqueles modelos de produção de $\dot{\rho}_{\star}$, com excelente concordância com os dados de Hopkins. Assim pode-se concluir que seria possível a detecção de um fundo de buracos negros pré-galácticos, se a FMI desses objetos for dada por $x \lesssim 1,35$ e se $\epsilon_{GW} \sim 7 \times 10^{-4}$.

Para avaliar a influência de M_{\min} nos valores da razão (S/N) são apresentados na Figura 5.2 os modelos para $M_{\min} = 10^8 M_{\odot}$ e que satisfazem os critérios já citados anteriormente. Na Tabela 5.2 são resumidos os resultados para os seis modelos B1-B6 que aparecem na Figura 5.2.

Tabela 5.2 - Resultados para o modelo com $M_{\min} = 10^8 M_{\odot}$.

Modelo	z_{ini}	x (IMF)	τ_s (Gyr)	z_*	(S/N)
B1	20	1,35	1,0	5,1	11,9
B2	20	1,35	2,0	3,8	5,7
B3	20	0,35	1,0	3,6	72,8
B4	40	1,35	1,0	5,2	13,2
B5	40	1,35	2,0	3,9	6,2
B6	40	0,35	1,0	3,8	77,6

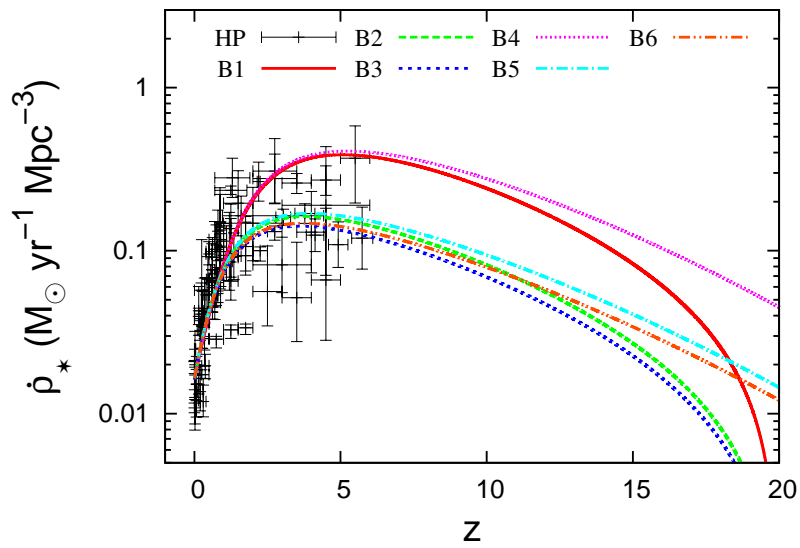


Figura 5.2 - Taxa cósmica de formação estelar para $M_{\min} = 10^8 M_{\odot}$. Os valores dos parâmetros que foram variados são apresentados na Tabela 5.2

O primeiro efeito da modificação de M_{\min} foi deslocar z_* (por exemplo, compare os modelos A1 e B2). Isto é, um halo com massa $10^6 M_{\odot}$ colapsa mais cedo do que um halo com massa de $10^8 M_{\odot}$. Assim, o máximo da formação estelar para os modelos com $10^8 M_{\odot}$ será deslocado para *redshifts* baixos.

O segundo efeito é observado na amplitude de $\dot{\rho}_*$ como discutido na seção anterior. Como a quantidade de buracos negros é $\propto \dot{\rho}_*$, então aumentando o valor de M_{\min} o número de buracos negros formados irá diminuir. Como consequência, os modelos com $10^8 M_{\odot}$ apresentam um menor valor para a razão (S/N) do que aqueles com $M_{\min} = 10^6 M_{\odot}$.

Finalmente, o terceiro efeito pode ser visto comparando as Tabelas 1 e 2. Os modelos que satisfazem os critérios de seleção, com $M_{\min} = 10^6 M_{\odot}$ são aqueles com $\tau_s \sim 2,0 - 3,0$ Gyr para $x = 1,35$. Caso contrário, com $M_{\min} = 10^8 M_{\odot}$, os critérios de seleção são satisfeitos se $\tau_s \sim 1,0 - 2,0$ Gyr para $x = 1,35$. Este resultado pode ser entendido lembrando que τ_s também age sobre a amplitude de $\dot{\rho}_*$.

Isso significa que ao se diminuir o valor de τ_s a amplitude de $\dot{\rho}_*$ aumenta (ver, por exemplo, a Figura 4.3 e a Equação (4.3)). Por outro lado, como discutido acima, se o valor do parâmetro M_{\min} for aumentado, a amplitude de $\dot{\rho}_*$ é reduzida. Assim, se M_{\min} for modificado de $10^6 M_{\odot}$ para $10^8 M_{\odot}$, será preciso diminuir o parâmetro τ_s , a fim de obter $\dot{\rho}_*$ com boa concordância com os dados observacionais e também para a produção de $(S/N) > 3$.

Na Figura 5.3 são apresentados os modelos com $M_{\min} = 10^{10}M_{\odot}$ (veja detalhes na Tabela 5.3). Somente são mostrados os modelos com $x = 1,35$ e $\tau_s = 1,0\text{Gyr}$ que tiveram boa concordância com os dados observacionais e também produziram $(S/N) > 3$. Note que a diferença entre C1 e C2 é bem sutil.

Isso acontece porque a fração de bárions em estruturas com $M_{\min} > 10^{10}M_{\odot}$ é muito pequena a *redshifts* 20 – 40. Então, z_{ini} não tem forte influência na evolução dos modelos C1 e C2 a baixos *redshifts*.

Tabela 5.3 - Resultados para os modelos com $M_{\min} = 10^{10}M_{\odot}$.

Modelo	z_{ini}	x (IMF)	τ_s (Gyr)	z_{\star}	(S/N)
C1	20	1,35	1,0	3,2	5,4
C2	40	1,35	1,0	3,2	5,6

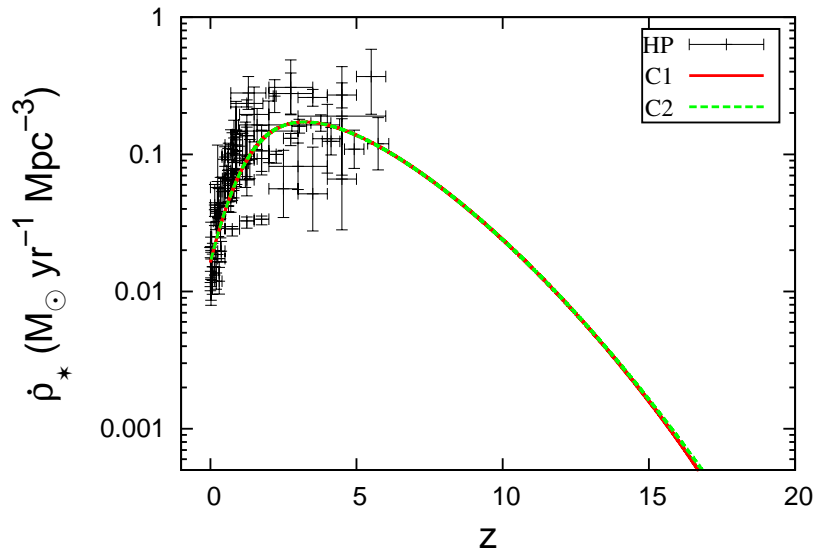


Figura 5.3 - Taxa cósmica de formação estelar para $M_{\min} = 10^{10}M_{\odot}$. Os valores dos parâmetros que foram variados são apresentados na Tabela 5.3

A Figura 5.4 mostra o parâmetro de densidade Ω_{GW} como uma função da frequência observada ν_{obs} . O parâmetro de densidade aumenta em baixas frequências e atinge uma amplitude máxima de cerca de $9,0 \times 10^{-7}$ em torno de 200 Hz no modelo A6. Por outro lado, o modelo A2 ² atinge uma amplitude máxima de $4,2 \times 10^{-8}$ também ao redor 200 Hz. Veja que em ambos as amplitudes máximas de Ω_{GW} em alta frequência dos espectros ³ não é fortemente dependente do *redshift* inicial z_{ini} . Para verificar, compare os modelos A1 e A4; A2 e A5, A3 e A6.

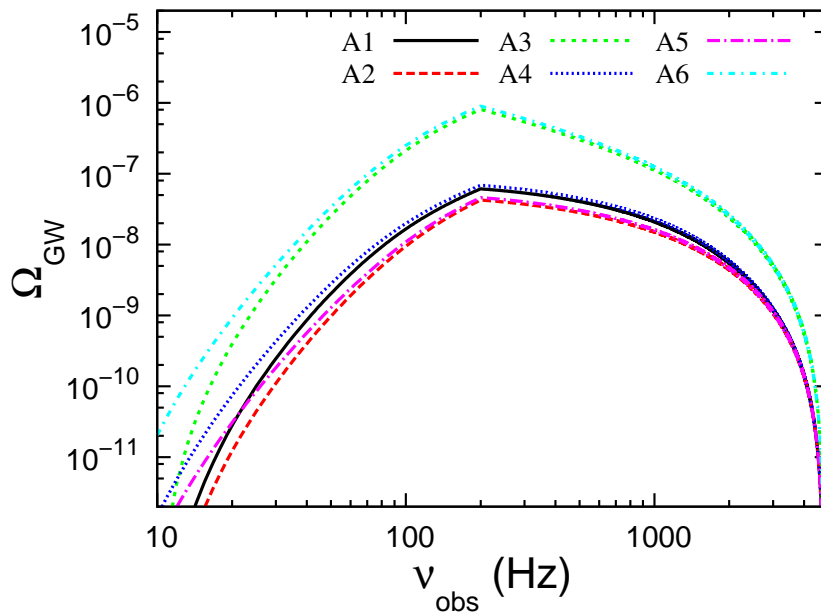


Figura 5.4 - Espectro do parâmetro de densidade de energia de ondas gravitacionais. Detalhes dos modelos A1-A6 são apresentados na tabela 5.1

No entanto, o valor de z_{ini} tem influência sobre a parte de baixa frequência dos espectros, como pode ser visto na Figura 5.4. Esta parte do espectro é dominada pela população de buracos negros formados em *redshifts* $z \gtrsim 7$.

Vale ressaltar que, de ARAUJO et al. (2004) assumiram o modelo de formação estelar de Springel e Hernquist (2003) (S-H) e obtiveram um resultado semelhante para Ω_{GW} . O espectro calculado por esses autores tinha pico de $\Omega_{\text{GW}} h^2 \approx 5 \times 10^{-9}$ em $\nu_{\text{obs}} \approx 200\text{Hz}$ para uma FMI de Salpeter. Usando $h = 0,73$ encontra-se $\Omega_{\text{GW}} \sim 9 \times 10^{-9}$ para o seu modelo fiducial.

²O modelo A2 é aquele que tem menores valores de Ω_{GW} . Como consequência, de todos os modelos apresentados nas Tabelas 5.1-5.3, A2 é aquele que apresenta a menor razão sinal-ruído.

³No que diz respeito aos resultados apresentados nas Figuras 5.4 e 5.5 aqui é definida a parte de alta frequência dos espectros como $\nu_{\text{obs}} > 200\text{Hz}$.

Este é um fator ~ 5 menor do que a amplitude máxima de Ω_{GW} obtida pelo modelo A2 desse trabalho. No entanto, note que as $\dot{\rho}_*$ obtidas do modelo de 3 Gyr na Figura 5.3, que corresponde ao modelo A2 na Tabela 5.1, são menores que a TCFE de S-H apenas na faixa de $4,5 \lesssim z \lesssim 8,2$. Assim, com exceção deste intervalo de *redshift*, a taxa de colapso obtida via a TCFE de S-H é realmente menor do que a obtida a partir do modelo A2.

A ponta das curvas mostradas na Figura 5.4 são produzidas pela escolha do fluxo de energia (ver Equações (5.6) e (5.7)). Observou-se que a densidade de energia (Ω_{GW}) é diretamente proporcional ao fluxo de energia e, portanto, mais sensíveis à sua dependência em frequência. Aqui, o fluxo de energia específico é obtido a partir da Equação (5.11), que leva em conta os modos quasi-normais mais relevantes de um buraco negro com rotação.

Embora alguns autores utilizem um fluxo de energia que é dependente da frequência (vide por exemplo Ferrari et al. (1999)), de ARAUJO et al. (2000) mostraram que a aproximação embutida na Equação (5.11) não é ruim para avaliar o sinal gerado por fundos estocásticos. A utilização de um fluxo de energia dependente da frequência apenas suavizaria o pico mostrado em nossos resultados. Contudo, nenhuma mudança mais significativa aconteceria nos nossos resultados.

Uma vez que alguns autores utilizam, em vez de Ω_{GW} , a *strain* amplitude $S_h^{1/2}$, definida por Allen e Romano (1999) como:

$$S_h = \frac{3H_0^2 \Omega_{\text{GW}}}{4\pi^2 \nu_{\text{obs}}}. \quad (5.15)$$

essa função é apresentada na Figura 5.5.

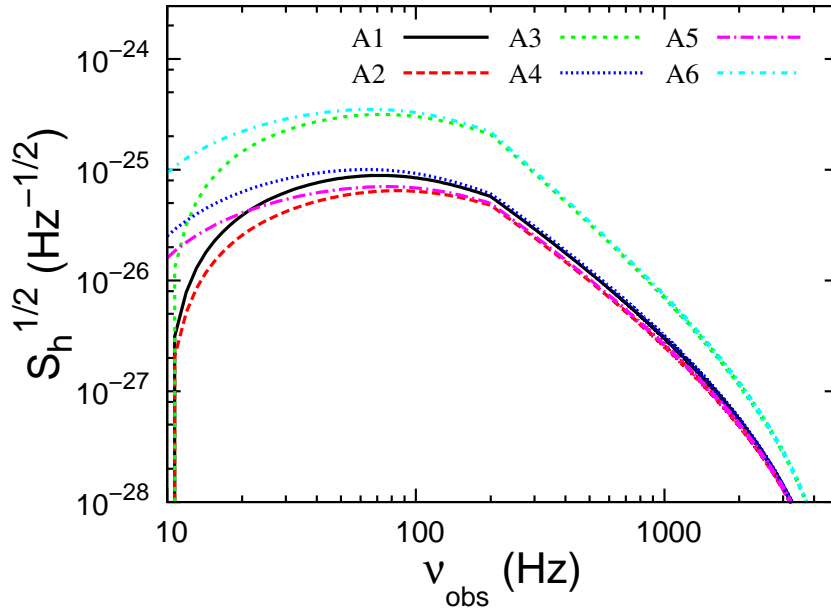


Figura 5.5 - Amplitude dos fundos de ondas gravitacionais em $\text{Hz}^{-1/2}$. Detalhes dos modelos A1-A6 são apresentados na tabela 5.1

Um parâmetro chave para determinar os valores apresentados nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3 é a eficiência de geração de OG's. Aqui foi tomado o valor máximo da eficiência encontrada por Piran e Stark (1986) ou seja, $\epsilon_{\text{GW}} = 7 \times 10^{-4}$ para um colapso assimétrico resultando em um buraco negro.

Por outro lado, mais recentemente, Fryer et al. (2001) obtiveram eficiência de 2×10^{-5} para um buraco negro remanescente de $100M_{\odot}$. Note que desde que $\Omega_{\text{GW}} \propto \epsilon$, se a eficiência é realmente mais perto de 2×10^{-5} , a densidade de energia observada em ondas gravitacionais pode ser dividida por um fator de 35. Neste caso, de todos os modelos aqui estudados apenas o modelo A6 irá produzir $(S/N) > 3$.

No entanto, a distribuição de ϵ_{GW} em função da massa de um buraco negro é desconhecida. Em particular, considere o que ocorre com outros objetos compactos - estrelas de nêutrons - para ver o que se pode aprender com eles. A estrela de nêutrons recém-nascida pode perder momento angular devido a ondas gravitacionais associadas a oscilações não-radiais (FERRARI et al., 2003). Isto poderia explicar porque todas as estrelas de nêutrons jovens conhecidas possuem rotação relativamente lenta.

Os buracos negros poderiam ter tido uma história semelhante, ou seja, eles poderiam ter sido formados com rápida rotação e perdido impulso devido a emissão de radiação gravitacional, através dos seus modos quase normais. Se esse fosse o caso, o valor de ϵ_{GW} poderia ser perto do máximo, ou na pior das hipóteses, poderia ter um valor para produzir $(\text{S/N}) > 3$ para um par LIGO III.

5.2.1 Análise e Discussão dos Resultados

Neste trabalho, foi utilizado o cenário hierárquico de formação de estruturas derivado do formalismo Press-Schechter para construir a taxa cósmica de formação estelar-TCFE de uma maneira auto-consistente. Esse trabalho é diferente de trabalhos anteriores, basicamente na forma como é obtida a função $\dot{\rho}_*$ (ou TCFE).

Em particular, a partir do cenário hierárquico foi obtida a taxa de acreção de bárions, $a_b(t)$, que abastece o reservatório de gás nos halos. Assim, o termo $a_b(t)$ é tratado como um termo *infall* nos modelos aqui desenvolvidos.

Este cenário está de acordo com o modelo de matéria escura fria de formação de estruturas em escala cosmológica, em que as primeiras fontes de luz são esperadas se formarem em poços de potencial de matéria escura com $\sim 10^6 M_\odot$ em $z \geq 20$.

Usando $\dot{\rho}_*$ calculou-se fundos estocásticos de ondas gravitacionais (FEOG's) produzidos por buracos negros pré-galácticos. Mostrou-se que uma quantidade significativa de OG's é produzida em relação à história das TCFE aqui estudadas, e esses FEOG's podem em princípio, dependendo do modelo, ser detectados por um par de interferômetros LIGO III.

Notou-se que a razão sinal-ruído $(\text{S/N}) \sim 90$ pode ser obtida se a eficiência de geração de OG's é próxima do valor máximo ($\epsilon_{\text{GW}} = 7 \times 10^{-4}$), se a função de massa inicial (FMI) produz um número elevado de remanescentes massivas ($x = 0, 35$), e se $z_{\text{ini}} \sim 20$. Considerando uma FMI de Salpeter ($x = 1, 35$), foi obtida razão sinal-ruído $(\text{S/N}) \sim 10$.

Um parâmetro crítico a ser limitado no caso de uma não detecção é ϵ_{GW} . A não detecção significa que a eficiência de geração de OG's durante a formação dos buracos negros não é alta o suficiente. Na realidade, $\epsilon_{\text{GW}_{\text{max}}}$ deve ser dividido por um fator > 35 no caso de uma não detecção.

Vale ressaltar que uma FMI com $x = 2,35$ também poderia ser responsável por uma não-deteção mesmo com $\epsilon_{\text{GW}} = \epsilon_{\text{GW}_{\text{max}}}$. No entanto, $x = 2,35$ produz um elevado número de estrelas de baixa massa que não está de acordo com recentes simulações numéricas do colapso e da fragmentação de nuvens primordiais (ver, por exemplo, [Abel et al. \(2002\)](#))

Outra possibilidade para uma não detecção é que as estrelas pré-galácticas são tais que os buracos negros formados teriam massas $> 500M_{\odot}$. Neste caso, a faixa de frequência das OG's estaria fora da largura de banda LIGO III.

No entanto, considerando-se os buracos negros formados a partir de estrelas com massas $25M_{\odot} \lesssim m \lesssim 140M_{\odot}$, então a sensibilidade da futura terceira geração dos detectores pode ser alta o suficiente para aumentar uma ordem de grandeza no valor esperado de (S/N). Exemplos de tais detectores são o Telescópio de Grande Escala de Onda Gravitacional Criogênico (*Large Scale Cryogenic Gravitational Wave Telescope-LCGT*) e a antena Europeia EGO (ver [Regimbau e Pacheco \(2006\)](#) e as suas referências para uma breve discussão sobre este assunto).

Especificamente, em torno de 650 Hz a sensibilidade prevista para o EGO vai ser um fator ~ 4 maior do que a prevista para a configuração avançada do LIGO. Isso poderia representar um ganho de um fator $\sim 5 - 20$ para o valor de (S/N), considerando dois interferômetros localizados no mesmo lugar ([REGIMBAU; PACHECO, 2006](#)). Assim, alguns modelos nas Tabelas 5.1-5.3 poderiam sobreviver com (S/N) > 3 mesmo com $\epsilon_{\text{GW}} \sim 2 \times 10^{-5}$.

Em particular, a detecção de um fundo com significativa (S/N) nos permitiria obter a curva de $S_{\text{h}}^{1/2}$ (ou Ω_{GW}) versus ν_{obs} . A partir dele, pode-se restringir $\dot{\rho}_{\star}$ em *redshifts* elevados e a eficiência de ondas gravitacionais (ϵ_{GW}). Assim, a detecção e caracterização de um FEOG's poderia ser usada como uma ferramenta para o estudo da formação estelar em altos *redshifts*.

Vale ressaltar que várias fontes astrofísicas podem contribuir para o fundo de ondas gravitacionais. Em princípio, deve ser possível distinguir diferentes fontes a partir do espectro de onda gravitacional detectado. Isto é, a partir da caracterização da

curva observada de Ω_{GW} contra ν_{obs} .

Por exemplo, no presente trabalho foi mostrado que buracos negros estelares cosmológicos ($3 \lesssim M_{\text{BH}}/M_{\odot} \lesssim 65$), formados em $z_{\text{ini}} \lesssim 20 - 40$, produz um fundo estocástico na faixa de frequência $\sim 10\text{Hz} - 5\text{kHz}$. Em particular, o pico dos espectros de ondas gravitacionais em $\nu_{\text{obs}} \approx 200\text{Hz}$. Se a população de buracos negros se forma a baixos *redshifts* (por exemplo, $z_{\text{ini}} \lesssim 10$), tanto a frequência para o pico de Ω_{GW} quanto a frequência mínima do espectro serão deslocadas para frequências maiores que as apresentadas aqui.

No entanto, a forma de Ω_{GW} não muda consideravelmente se for considerado o mesmo espectro de potência de energia em onda gravitacional para as fontes. Por outro lado, as estrelas mais massivas ($m > 200M_{\odot}$) irão deslocar o pico do espectro para frequências mais baixas. Veja por exemplo os resultados de Marassi et al. (2009) para remanescente de buracos negros estelares de População III com massas $100 - 500M_{\odot}$. Seus espectros atingem valor máximo na frequência $\nu_{\text{obs}} = 2,74 \text{ Hz}$ (com amplitude máxima $\Omega_{\text{GW}} 5 \times 10^{-15}$) e esses espectros se estendem até $\sim 600\text{Hz}$.

Outro exemplo pode ser visto a partir do trabalho de Buonanno et al. (2005). Os autores estudaram o fundo de ondas gravitacionais de todas as supernovas cósmicas. Seu modelo fiducial tem pico em $\nu_{\text{obs}} = 6\text{Hz}$ ($\Omega_{\text{GW}} \approx 10^{-13}$), enquanto a frequência máxima do fundo é $\sim 3\text{kHz}$ e o espectro pode estender a frequências muito baixas ($\nu_{\text{obs}} \lesssim 10^{-4}\text{Hz}$). Assim, em princípio, seria possível identificar as assinaturas de diferentes origens, se temos a curva de Ω_{GW} contra ν_{obs} sobre uma grande faixa de frequência.

Por fim, sugere-se a leitura do trabalho de Kauffmann e Haehnelt (2000) que apresentam um modelo unificado para a evolução de galáxias e quasares. Especificamente, estes autores discutem que o resfriamento do gás não é eficiente em estruturas muito massivas e também que halos com velocidade circular maior que 600kms^{-1} não poderiam formar estrelas. Se levamos em conta seus resultados, então o limite superior, M_{max} , na Equação (4.10) deve ser mudado para $\sim 10^{13}M_{\odot}$.

Verificou-se todos os modelos descritos nas Tabelas 5.1-5.3 com este novo limite superior ($M_{\text{max}} = 10^{13}M_{\odot}$). Constatou-se que a amplitude do FEOG diminui ligeiramente em $z \lesssim 3,5$ quando comparado com os resultados obtidos usando $M_{\text{max}} = 10^{18}M_{\odot}$ (para $z > 3,5$, não observou-se qualquer modificação no comportamento de $\dot{\rho}_{\star}$). Para os modelos com $M_{\text{min}} = 10^6M_{\odot}$ (10^8M_{\odot}), há apenas uma modificação sutil no resultado final. Em particular, as razões sinal-ruído são

$\sim 3,9\%$ ($\sim 4,6\%$) inferiores aos apresentados na Tabela 5.1 (Tabela 5.2). Para os modelos com $M_{\min} = 10^{10}M_{\odot}$ notou-se uma modificação $\sim 8,6\%$ nos resultados da Tabela 5.3. No entanto, todos os modelos apresentados nas Tabelas 5.1-5.3 satisfazem os “dois critérios”, como discutido na seção anterior. Ou seja, mesmo usando $M_{\max} = 10^{13}M_{\odot}$ os modelos produzem $(S/N) > 3$ e $\chi_r \leq 1$.

6 Crescimento de Buracos Negros Supermassivos e a Taxa Cósmica de Formação Estelar

A ideia de que o crescimento de buracos negros possa ser regulado pela taxa cósmica de formação estelar (TCFE) tem sido cogitada na literatura (FRANCESCHINI et al., 1999; HAIMAN et al., 2004; HECKMAN et al., 2004; MERLONI et al., 2004; MAHMOOD et al., 2005; WANG et al., 2006b; WANG et al., 2009). Isso tem sido reforçado ao se apresentar a conexão entre a taxa cósmica de formação estelar e a massa dos halos de matéria escura (PEREIRA; MIRANDA, 2010; CONROY; WECHSLER, 2009), lembrando que já é conhecida a existência de relações entre a massa do buraco negro central e a massa do halo de matéria escura (ou da galáxia) hospedeiro(a) (WYITHE; LOEB, 2003; FERRARESE; MERRITT, 2000; BANDARA et al., 2009). Nesse contexto a TCFE se mostra como um traçador do processo de evolução de gás em estruturas, sendo essa conexão (TCFE - gás em estruturas - Acreção de gás por Buracos Negros, vide Figura 6.1) que permite obter a densidade de massa de buracos negros a partir da TCFE.

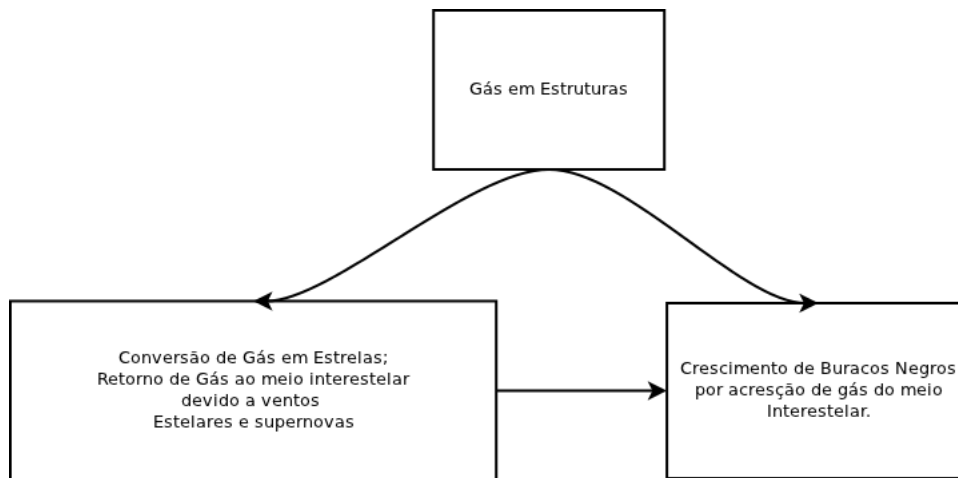


Figura 6.1 - Diagrama de correlação entre a taxa cósmica de formação estelar, gás em estruturas e crescimento de buracos negros. O gás é acretado em estruturas. Parte desse gás é convertido em estrelas. Uma pequena fração desse gás também é consumido por buracos negros. Sendo as estrelas uma fonte observável capaz de representar a evolução de gás em estruturas, a mesma pode ser usada como traçadora do processo de acreção de gás em buracos negros.

Assim, as medidas da massa e da taxa de acreção de buracos negros podem ajudar a compreender a evolução de núcleos ativos de galáxias e quasares e a relação dessas

fontes com a taxa cósmica de formação estelar (TCFE), além de contribuir com o entendimento do papel de mini-quasares para a reionização do Universo.

Nesse capítulo será apresentado o formalismo que permite confrontar diversas TCFE com a função de luminosidade de quasares (FLQ). Isso permitiria ter uma melhor estimativa da TCFE a redshifts ~ 7 usando os dados observados da FLQ para ajustar a TCFE teórica. Além disso, nesse capítulo é mostrado que a eficiência radiativa associada aos discos de acreção, de buracos negros, deve ser uma função do *redshift* se a acreção e o crescimento do buraco negro forem regulados pela TCFE.

6.1 Os Buracos Negros Supermassivos e a Formação Estelar

Aqui é assumido que os buracos negros crescem principalmente pela acreção de matéria (argumento de Soltan (1982)) e que o processo de acreção pode ser descrito por uma função de probabilidade diretamente regulada pela TCFE. Isso pode ser traduzido da seguinte forma:

$$\rho_{\text{BH}}(z) = \rho_{\text{BH}}^0 \frac{\rho_{\star\text{BH}}(z)}{\rho_{\star\text{BH}}(z=0)}, \quad (6.1)$$

sendo ρ_{BH}^0 a densidade de massa de buracos negros no Universo local. A função $\rho_{\star\text{BH}}(z)$ é dada por:

$$\rho_{\star\text{BH}}(z) = \int_z^{z_f} \frac{\dot{\rho}_{\star}(z')}{(1+z')} P(t_d) \frac{dt_d}{dz'} dz' \quad (6.2)$$

note que é essa função que faz a conexão entre a TCFE, $\dot{\rho}_{\star}(z)$, e a densidade de massa de buracos negros. $P(t_d)$ é a probabilidade por unidade de tempo que um buraco negro tem de crescer devido a acreção de gás do meio. Já o termo $(1+z)$ no denominador é usado para levar em conta a dilatação devido a expansão cósmica. O tempo t_d faz a conexão entre o *redshift* z_f para o qual o disco de acreção é formado em torno do buraco negro e o redshift z para o qual a matéria é efetivamente incorporada no buraco negro. Em que:

$$t_d = \int_z^{z_f} \frac{9,78 h^{-1} \text{Gyr}}{(1+z') \sqrt{\Omega_{\Lambda} + \Omega_m(1+z')^3}} dz' \quad (6.3)$$

Nesse trabalho é considerado que $P(t_d) = B t_d^n$, sendo B e n constantes, e que essa

função é normalizada tal que:

$$\int_{t_{min}}^{t_{now}} P(t_d) dt_d = 1, \quad (6.4)$$

sendo t_{min} o tempo mínimo requerido para o processo de acreção ocorrer e t_{now} é a idade do Universo. Aqui é assumido $t_{min} = t_s = 4,2 \times 10^7$ anos, que é a chamada escala de tempo de Salpeter, t_s . É importante destacar que a função $P(t_d) \propto t_d^n$ já foi usada por outros autores em diversos contextos astrofísicos, como por exemplo Regimbau e Pacheco (2006) e Regimbau e Hughes (2009) (veja também as referências desses autores).

Para avaliar os modelos descritos no presente capítulo foram consideradas as seguintes TCFE's: A derivada no capítulo 4 dessa tese (PEREIRA; MIRANDA, 2010) (PM); A de Springel e Hernquist (2003) (SH), que obtém essa função via simulação hidrodinâmica; e as de Fardal et al. (2007) (F) e Hopkins e Beacom (2006) (HB) que utilizam ajustes de dados observacionais disponíveis para derivar a taxa cósmica de formação estelar. Na Figura 6.2 estão sumarizadas todas essas taxas. Os dados observacionais com as devidas barras de erro foram obtidas do trabalho de Hopkins (2004), Hopkins (2007).

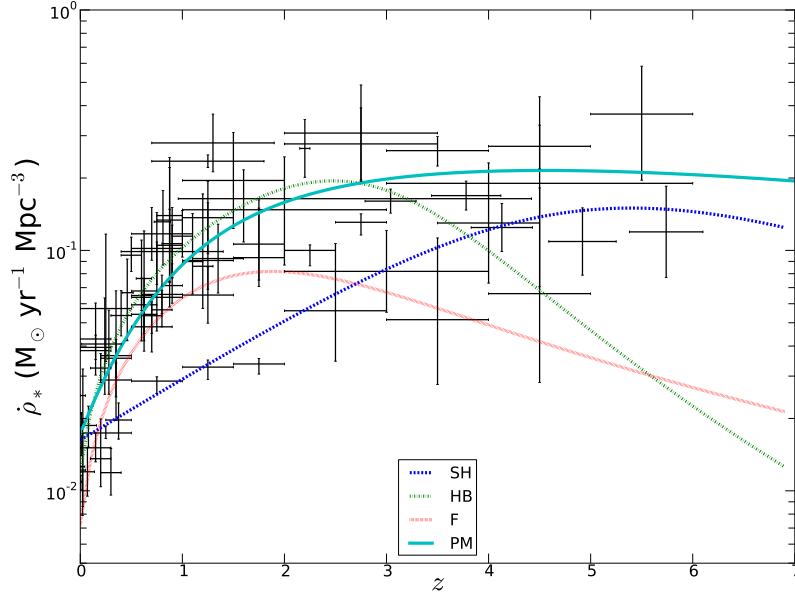


Figura 6.2 - Taxa cósmica de formação estelar derivada por Pereira e Miranda (2010) (PM) para o caso de $M_{min} = 10^6 M_\odot$, $\tau_s = 2,0 \text{ Gyr}$, $x = 1,35$ e $z_{ini} = 20$; Springel e Hernquist (2003) (SH); Fardal et al. (2007) (F) e Hopkins e Beacom (2006) (HB). Os dados observacionais com as devidas barras de erro foram obtidas do trabalho de Hopkins (2004), Hopkins (2007).

Na Figura 6.3 pode-se observar a densidade de massa de buracos negros como uma função do *redshift*. Os resultados são apresentados para diferentes TCFE's, detalhadas anteriormente, e usando as Equações (6.1) e (6.2). Observe que para a TCFE de PM, ρ_{BH}/ρ_{BH}^0 alcança o máximo em $z = 1,1$ ($1,5$) para $n = -1,0$ ($n = -1,5$). Considerando $n = -1,0$, note que a TCFE de PM produz valores mais altos de $\rho_{BH}(z)$, para $z > 4$, do que as outras TCFE's. Na Figura 6.3 também é apresentado o ρ_{BH} derivado do modelo padrão (*standard model*- SM).

Na literatura, o modelo padrão para obtenção da densidade de massa de buracos negros supermassivos é via a integração da função luminosidade de quasar, $\Phi_b(L_b, z)$, da seguinte forma (MERLONI et al., 2004; SHANKAR et al., 2009; SHANKAR, 2009; SMALL; BLANDFORD, 1992; YU; TREMAINE, 2002; WANG et al., 2006a):

$$\rho_{BH}(z) = \int_z^\infty \frac{dt}{dz} \int_{L_i}^{L_s} \frac{1-\eta}{c^2 \eta} L_b \Phi_b(L_b, z) dL_b, \quad (6.5)$$

com L_b sendo a luminosidade bolométrica tomada de Hopkins et al. (2007), η é

a eficiência radiativa média e c é a velocidade da luz. Note que para resolver a equação anterior alguma suposição sobre η deve ser tomada para resolver a integral. Em geral é assumido η constante com valor típico da ordem de 0, 1. Porém, como será apresentado na próxima seção, η precisa ser uma função do tempo se o crescimento de buracos negros for regulado pela TCFE.

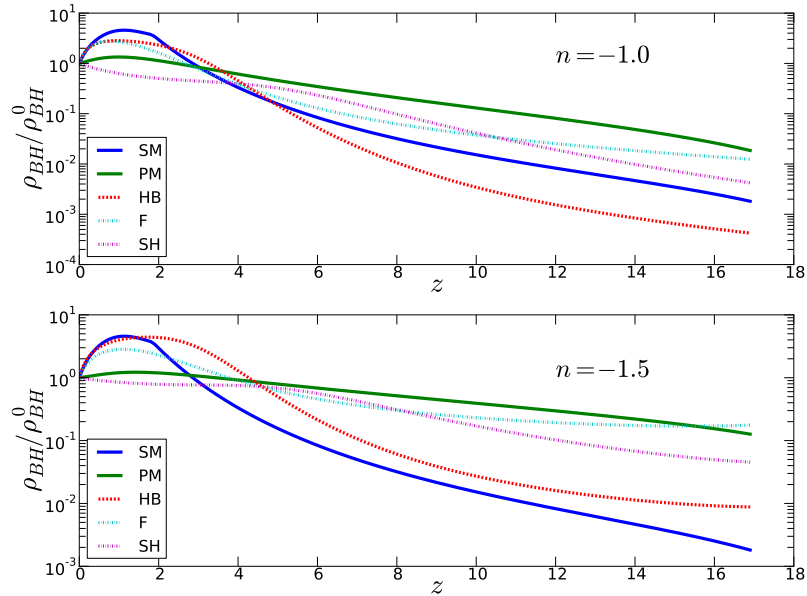


Figura 6.3 - Densidade comóvel de massa de buracos negros supermassivos

Na Figura 6.4 é apresentada a razão entre a densidade de massa de buracos negros e a densidade de gás em estruturas. Note que nos diversos casos essa razão ficou sempre abaixo de 1%, isso mostra que o processo de crescimento de buracos negros não perturba significativamente a evolução da TCFE.

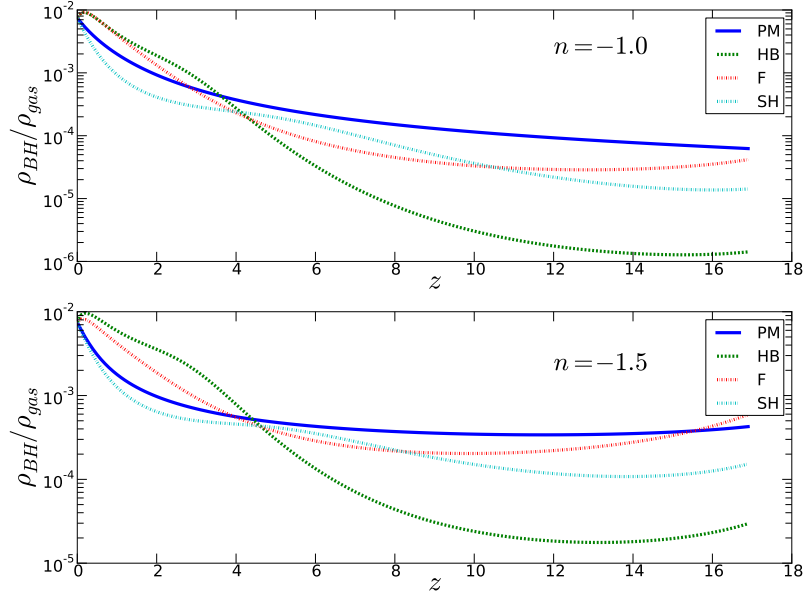


Figura 6.4 - Razão entre a densidade de massa de buracos negros supermassivos e a densidade de gás em estruturas.

6.2 Eficiência Radiativa Média

A luminosidade bolométrica de um buraco negro acretao matéria a uma taxa \dot{M}_a é dada por $L = \bar{\eta}\dot{M}_a c^2$, sendo $\bar{\eta}$ a eficiência radiativa média. Por outro lado, \dot{M}_a está relacionada com a variação de massa do buraco negro por $\dot{M}_a = \dot{M}_{BH}/(1 - \bar{\eta})$. Assumindo que $\bar{\eta}$ seja função só do *redshift*, então:

$$U = c^2 \frac{\bar{\eta}}{(1 - \bar{\eta})} \dot{\rho}_{BH}, \quad (6.6)$$

em que U é a densidade de luminosidade de quasar. Derivando a Equação (6.1) em z e usando o resultado em (6.2) chega-se a:

$$U(z) = \frac{\bar{\eta} c^2}{1 - \bar{\eta}} \frac{\rho_{BH}^0}{\rho_{\star BH}^0} \frac{\dot{\rho}_{\star}(z)}{(1 + z)} P(t_d). \quad (6.7)$$

A dependência temporal de $\bar{\eta}$ reflete o fato de que a atividade de buracos negros supermassivos tem um tempo de vida finito (DAVIS; LAOR, 2011). Por outro lado, a densidade de luminosidade de quasares pode ser obtida através da integração da

FLQ da seguinte forma:

$$U(z) = \int_{L_b^*} L_b \Phi_b(L_b, z) dL_b, \quad (6.8)$$

com L_b^* sendo o limite inferior da FLQ. Aqui é tomado L_b^* e $\Phi(L_b, z)$ de Hopkins et al. (2007).

Definindo $f(z) \equiv \bar{\eta}/(1 - \bar{\eta})$, então, da Equação (6.6), pode ser escrita como:

$$U = c^2 f(z) \dot{\rho}_{\text{BH}} \quad (6.9)$$

Nesse ponto será definido um funcional $f'(z, \vec{n}_i)$ que será usado para mapear a função $f(z)$. Sendo que \vec{n}_i é um vetor de parâmetros e:

$$f'(z, b_1, b_2, t_q) = C_0 \left[\left(\frac{t_u(z)}{t_q} \right)^{b_1} + \left(\frac{t_q}{t_u(z)} \right)^{b_2} \right]^{-1}, \quad (6.10)$$

em que C_0 é uma constante de normalização que garante que $\bar{\eta}(z=0) = \bar{\eta}^0$ (com $\bar{\eta}^0 = 0, 1$, veja e.g. Hopkins et al. (2007)), t_q pode ser entendido como uma escala característica de tempo, b_i ($i = 1, 2$) são constantes adimensionais e $t_u(z)$ é a idade do Universo no *redshift* z .

A forma paramétrica dada pela Equação (6.10) é amplamente usada na literatura. Por exemplo, a Equação (12) de Hopkins e Hernquist (2009) e a Equação (13) de Hopkins et al. (2006) são similares a Equação (6.10). Além disso, Wang et al. (2006a) usam essa mesma forma paramétrica para determinar a função de massa de buracos negros supermassivos.

A Equação (6.8) é aqui usada como fonte de informação para obter $\bar{\eta}(z)$. Assim, com as Equações (6.10), (6.8) e (6.9) é possível escrever:

$$e_i(\vec{n}_i, U_i, z_i) = \|U(z_i) - c^2 f'(z_i, \vec{n}_i) \dot{\rho}_{\text{BH}}(z_i)\|. \quad (6.11)$$

Note que aqui o que se está fazendo é solucionar um sistema de equações através de

métodos de minimização. Assim a função a ser minimizada será:

$$J(\vec{n}_i) = \sum_{i=0}^{N-1} e_i^2(\vec{n}_i, U_i, z_i). \quad (6.12)$$

Vale ressaltar que $\bar{\eta} = f(z)/(1 + f(z))$ e que $f(z) = f'(z, \vec{n}_{\text{ibest}})$, sendo \vec{n}_{ibest} os parâmetros de melhor ajuste obtidos através da Equação (6.12). Na Tabela 6.2 são apresentados os parâmetros de melhor ajuste que permitem derivar $\bar{\eta}(z)$.

Tabela 6.1 - Parâmetros de melhor ajuste para $\bar{\eta}(z)$.

n	CSFR	b_1	b_2	$t_q(\text{Gyr})$
-1,5	PM	2,85	2,39	5,74
-1,5	HB	1,51	1,29	13,19
-1,5	F	0,82	1,47	5,99
-1,5	SH	2,74	3,17	4,93
-1,0	PM	1,81	1,96	5,40
-1,0	HB	1,91	0,74	14,81
-1,0	F	0,46	1,06	4,23
-1,0	SH	2,37	2,72	4,72

A Figura 6.5 mostra a densidade de luminosidade deste trabalho, quando comparada a obtida a partir da Equação (6.8), produzida a partir da integração da FLQ (Hopkins et al. (2007)). Em particular, para $n = -1, 0$ nota-se que a TCFE de PM e SH produzem um excelente acordo com *redshift* até ~ 6 . No caso de $n = -1, 5$ verifica-se que a TCFE de F é a que tem o melhor acordo com $U(z)$ para $z \leq 1$. Por outro lado, para $z \sim 1$ até ~ 6 , as TCFE's de PM e SH, além da F, têm boa concordância com a FLQ integrada se for considerada a forma paramétrica dada pela Equação (6.10).

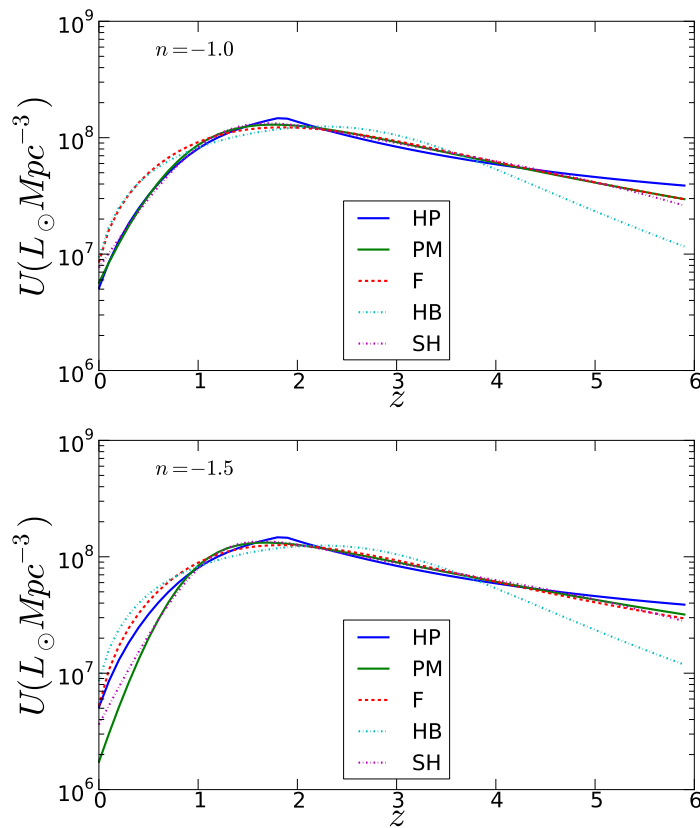


Figura 6.5 - Densidade de Luminosidade de Quasares

Na Figura 6.6 pode ser observada a eficiência radiativa média $\bar{\eta}(z)$ como uma função do *redshift*, enquanto na Tabela 6.2 são mostrados os *redshifts* em que $\bar{\eta}(z)$ alcança o máximo. Veja que $\bar{\eta}_{\max}$ está dentro da faixa de 0,10 – 0,46, dependendo da TCFE específica, sendo que esses máximos estão na faixa de *redshift*, z_{\max} , de 0,1 – 1,3. Estes resultados são concordantes com acreção de buracos negros que poderiam chegar a $\bar{\eta} \sim 0,2$ para os sistemas mais massivos (NARAYAN, 2005).

Tabela 6.2 - Máximo valor para a eficiência radiativa média.

n	CSFR	$\bar{\eta}_{\max}$	z_{\max}
-1,5	PM	0,38	1,1
-1,5	HB	0,10	0,1
-1,5	F	0,11	0,6
-1,5	SH	0,46	1,2
-1,0	PM	0,23	1,1
-1,0	HB	0,10	0,3
-1,0	F	0,11	0,7
-1,0	SH	0,39	1,3

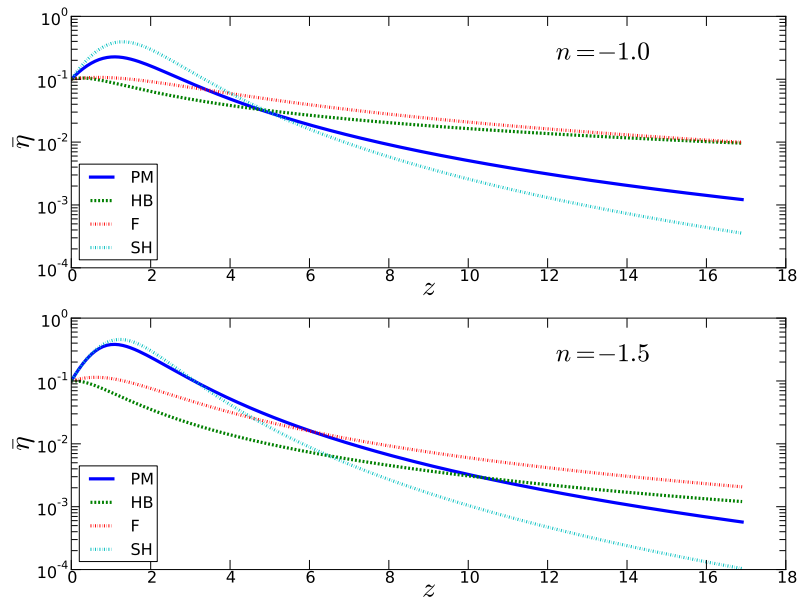


Figura 6.6 - Eficiência radiativa média

6.3 Função *Duty Cycle* de Quasares

A função *Duty Cycle* de Quasares (DCQ) fornece a razão entre os objetos ativos e inativos, ou seja, fornece informações sobre a fração de Quasares ativos com o tempo. Para obtê-la, primeiramente considera-se que a massa de Eddington¹ pode ser escrita como $\dot{M}_{\text{edd}} = M_{\text{BH}}/t_s$. Já a luminosidade bolométrica ponderada pela massa de Eddington é $L = (\eta c^2 \dot{m} M_{\text{BH}})/t_s$, sendo $\dot{m} = \dot{M}_a/\dot{M}_{\text{edd}}$ a taxa adimensional de acreção. Assumindo que $\langle \dot{m} \rangle$ é função somente do *redshift* (HOPKINS et al., 2007), então é possível escrever:

$$U(z) = \frac{\bar{\eta} \langle \dot{m} \rangle \rho_{\text{BH}} c^2}{t_s}. \quad (6.13)$$

Usando as Equações (6.13) e (6.6) obtém-se:

$$\langle \dot{m} \rangle = \frac{t_s}{(1 - \bar{\eta})} \frac{\dot{\rho}_{\text{BH}}}{\rho_{\text{BH}}}. \quad (6.14)$$

Na Figura 6.7 é apresentada a evolução de $\langle \dot{m} \rangle$ com o *redshift*. Note que os processos de acreção são mais ativos a *redshifts* mais altos para todas as TCFE's estudadas nessa tese. Contudo, esses resultados também mostram que o processo de acreção nunca alcança o regime super-Eddington. O processo de acreção associado com o crescimento de buracos negros supermassivos é “bem comportado” durante todo o tempo associado, desde a formação das sementes de buracos negros até o tempo presente.

¹Luminosidade de Eddington: é a máxima luminosidade que um objeto pode ter e ainda estar em equilíbrio hidrostático. Assim a massa de Eddington está ligada a taxa de acreção de matéria de um objeto brilhando com a luminosidade de Eddington.

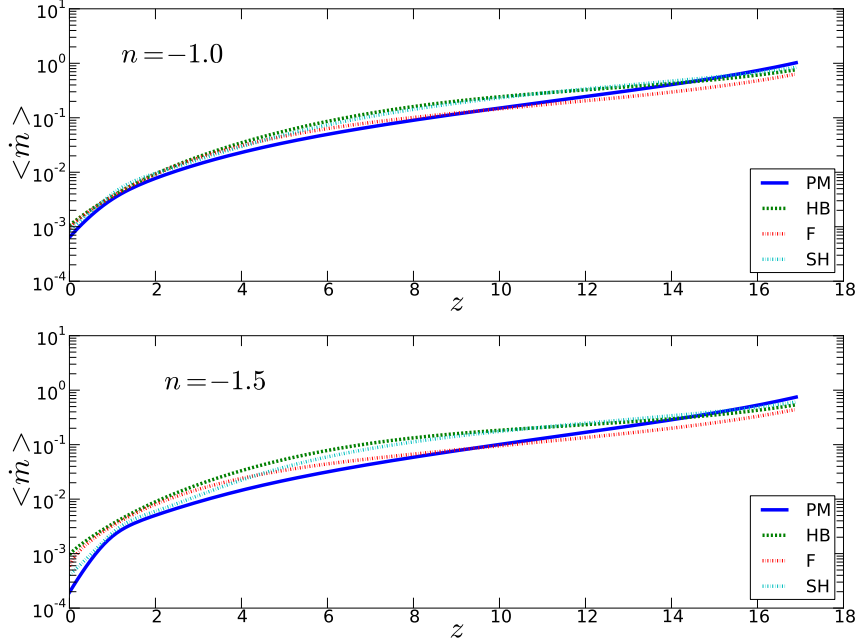


Figura 6.7 - Taxa média adimensional de acreção de matéria como função de z

Um outro ponto que pode ser derivado da Equação (6.14) é a taxa de acreção ponderada pelo tempo de vida de um buraco negro supermassivos ativo. O qual é dada por (MERLONI et al., 2004):

$$\tau_{\text{DC}}(z) = \int_z^{z_{\text{ini}}} \langle \dot{m} \rangle \frac{dt}{dz'} dz'. \quad (6.15)$$

Finalmente, a função DCQ, $\delta(z)$, é dada pela razão entre $\tau_{\text{DC}}(z)$ e o tempo de Hubble. Este resultado é apresentado na Figura 6.8. Veja que $\delta(z)$ é também a fração de buracos negros ativos dividido pelo número total de buracos negros. Como apontado por Wang et al. (2006a), este parâmetro é a chave para entender por quanto tempo e quantos buracos negros são ativados durante seu tempo de vida. Na Tabela 6.3 são apresentados os *redshifts* para os quais $\delta(z)$ alcança o máximo para cada TCFE estudada aqui. Note que, tipicamente, $\delta(z)$ é máxima no intervalo de *redshift* 8,5 – 11,0, e isto é muito curioso porque o *redshift* em que a reionização do Universo se completa é $10,5 \pm 1,2$ (JAROSIK et al., 2011).

Tabela 6.3 - Máximos valores para a função *duty-cycle*.

n	CSFR	δ_{\max}	z_{\max}
-1,5	PM	0,13	11,1
-1,5	HB	0,15	8,5
-1,5	F	0,09	9,9
-1,5	SH	0,16	9,4
-1,0	PM	0,19	10,9
-1,0	HB	0,20	9,0
-1,0	F	0,14	9,7
-1,0	SH	0,22	9,6

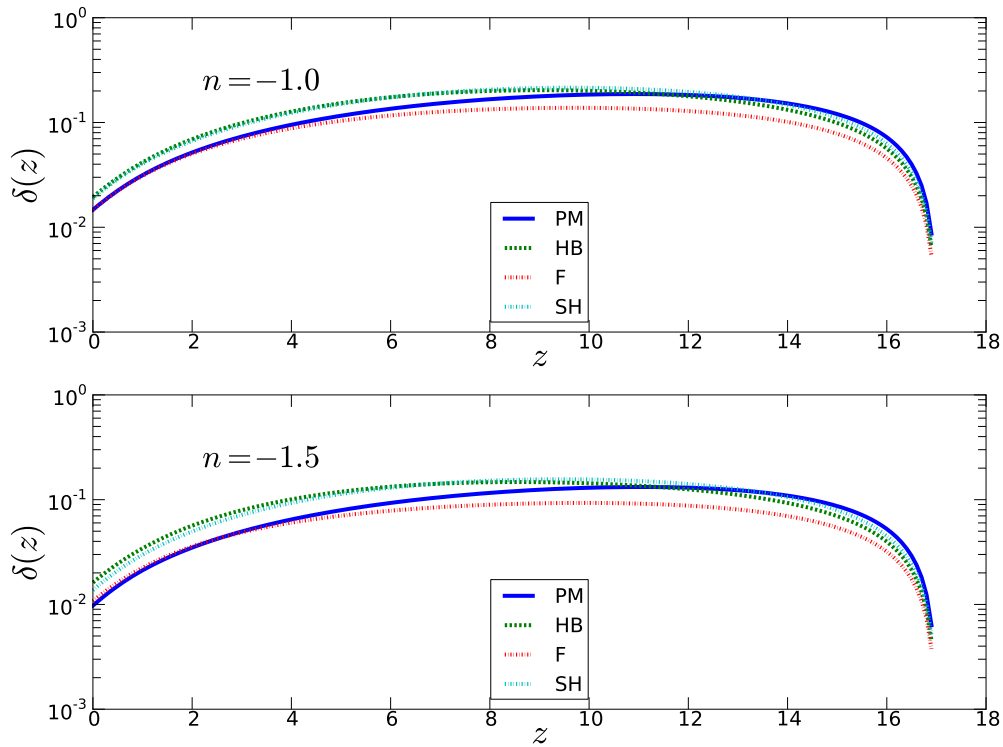


Figura 6.8 - Função *duty cycle* de quasar- Fornece a razão entre os quasares ativos e os totais.

6.4 Sumário dos Resultados

Nesse capítulo foi apresentado um modelo para obter a densidade de massa de buracos negros supermassivos (BNSM) a partir da taxa cósmica de formação estelar. O ponto-chave foi considerar o argumento de Soltan e que o processo de

acresção pode ser descrito por uma função probabilística diretamente regulada pela TCFE. Tal modelo permite determinar a função $\rho_{BH}(z)$, a eficiência radiativa média associada com o crescimento dos buracos negros, $\bar{\eta}(z)$, e a função *Duty Cycle*, $\delta(z)$. Na literatura, a forma comum de se obter a densidade de massa de BNSM's é através da integração da FLQ, como apresentado na Equação (6.5), e considerando $\bar{\eta}$ como uma constante. No entanto, aqui foi apresentado um cenário diferente. Em particular, foi derivado $\rho_{BH}(z)$ a partir da TCFE e depois foi usada a densidade de luminosidade dos quasares, a fim de obter a eficiência radiativa média como uma função do *redshift*. A partir de $\bar{\eta}(z)$ é fácil obter a taxa de acresção de massa adimensional média e a função *Duty Cycle*.

Se for considerado $\rho_{BH}^0 = (5,9h^3) \times 10^5 M_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$ (GRAHAM; DRIVER, 2007; VIKI et al., 2009), então o modelo aqui apresentado retorna, usando a TCFE do presente trabalho (PEREIRA; MIRANDA, 2010), $\rho_{BH}^{\text{seed}} = 4,60 \times 10^3 M_{\odot} \text{Mpc}^{-3}$ (com $n = -1, 0$) para a densidade de massa de buracos negros sementes. Este resultado é compatível com buracos negros sementes $\sim 10^3 M_{\odot}$ em $z \sim 20$. Notou-se também que a função *Duty Cycle* de quasares tem um valor máximo próximo a $z \sim 8,5 - 11$ e assim dentro das incertezas observacionais associados ao *redshift* da reionização. Como o principal componente do presente modelo é a TCFE, este cenário oferece possibilidade futura de várias investigações. Uma delas está relacionada com a forma da função probabilística que permite determinar o crescimento de BNSM a partir da TCFE. Na medida em que tanto a formação estelar quanto o crescimento de BNSM's podem ser descritos da mesma forma, as previsões de diferentes funções probabilísticas, $P(t_d)$, podem ser confrontados com diferentes observáveis em altos *redshifts*. Além disso, viu-se que os resultados aqui apresentados também mostram que não é necessário um regime de acresção super-Eddington para produzir o crescimento das sementes de buraco negro.

Um ponto favorável ao modelo de eficiência radiativa média fortemente dependente do tempo cosmológico é mostrado no trabalho de Wang et al. (2009), que apresentam alguns dados derivados de observações para se obter $\bar{\eta}(z)$ no intervalo de $z = 0 - 2$. Esses autores sugerem também uma correlação entre a evolução da densidade de massa de buracos negros e a taxa cósmica de formação estelar. Contudo eles não apresentam um modelo para essa conexão citando apenas que deve existir uma ligação entre $\rho_{BH}(z)$ e $\dot{\rho}_*(z)$.

Além disso, como pode ser visto na Figura 6.4, a razão entre a densidade de massa de buracos negros e a densidade de gás em estruturas ficou sempre abaixo de

1%, isso mostra que o processo de crescimento de buracos negros não perturba significativamente a evolução da TCFE.

No próximo capítulo serão apresentados os métodos e resultados computacionais desenvolvidos ao longo desse trabalho.

7 Astrofísica Computacional

Em diversos momentos ao longo desse trabalho não foi possível obter soluções analíticas das equações e sistemas de equações que representavam os modelos cosmológicos e astrofísicos. Nesse caso foram utilizadas diversas técnicas e ferramentas computacionais as quais serão abordadas nesse capítulo. Duas linguagens de programação que foram fundamentais no desenvolvimento desse trabalho foram FORTRAN e Python.

A linguagem FORTRAN foi desenvolvida a partir da década de 1950 e seu nome é um acrônimo da expressão *FORmula TRANslation*. Foi a primeira linguagem de programação imperativa e é considerada a primeira linguagem de alto nível. O primeiro compilador de FORTRAN foi desenvolvido para o IBM 704 em 1954-57 por uma equipe da IBM chefiada por John W. Backus. A linguagem foi modernizada a partir de 1970 e um novo padrão lançado em 1977, chamado de FORTRAN 77. A linguagem FORTRAN ainda é muito popular no meio acadêmico, embora inicialmente a linguagem tenha sido puramente procedural, versões como FORTRAN 2003 já aceitam programação orientada a objetos.

A linguagem Python teve seu desenvolvimento iniciado em 1989 pelo holandês Guido van Rossum. O nome Python origina-se da série humorística britânica *Monty Python's Flying Circus*, do grupo britânico *Monty Python*. Python é uma linguagem que agrega características importantes de diversas linguagens de programação, contendo uma sintaxe simples e clara. Ao terminar o projeto, a linguagem Python foi liberada como *open source* (fonte aberta) e hoje possui licença compatível com GPL (*General Public License* - <http://www.gnu.org/licenses/>).

Na seção 7.1 será apresentado o Design de Alto Nível, que consiste de uma metodologia ágil para o desenvolvimento de aplicativos combinando uma linguagem dinâmica de altíssimo nível (Python) com uma linguagem de nível intermediária compilada (FORTRAN). Além de ser apresentado um *framework* para o desenvolvimento de aplicativos para o estudo de ondas gravitacionais de fontes cosmológicas (PyGrAWC). Na seção 7.2 serão apresentados dois aplicativos desenvolvidos baseados no PyGrAWC, um aplicativo web e outro *desktop*.

7.1 Design de Alto Nível com Python e FORTRAN Aplicado à Astrofísica

O design de alto nível consiste na combinação de uma linguagem de programação dinâmica de altíssimo nível¹ (e.g. Python) com uma linguagem compilada de alto nível (e.g. FORTRAN)² (HINSEN et al., 2006; HINSEN, 2007). Uma vantagem de se realizar essa combinação está no fato de que parte do código pode ser escrita em uma linguagem de altíssimo nível enquanto uma menor parte do código, que exige um maior custo computacional, pode ser migrado para uma linguagem compilada de alto nível. Assim, essa combinação de linguagens nasce da necessidade de se construir modelos computacionais que sejam ao mesmo tempo altamente eficientes e que possam ser desenvolvidos, com qualidade, em um menor espaço de tempo. Para ter clareza dessa vantagem basta levar em conta o princípio de Pareto (BEHENEL et al., 2011), que nesse caso particular informa que em geral cerca de 80% do custo de processamento vem de apenas 20% do código.

Outra vantagem está na portabilidade do código³. Mesmo a parte do código que necessita de compilação poderá ser portátil. Essas mesmas motivações são apresentadas nos trabalhos de Peterson (2009), Ousterhout (1998). Em particular vale citar o resultado sobre o esforço de desenvolvimento de um programa, que é apresentado na tabela 1 de Ousterhout (1998), para exibir a curva de produção de um poço de petróleo. Usando a linguagem C demorou-se três meses para o desenvolvimento do programa, na linguagem dinâmica conhecida como Tcl levou-se apenas duas semanas, sendo que o código foi primeiro implementado em Tcl e em seguida reescrito em C.

Mas, além da portabilidade e eficiência computacional, outro fato importante está ligado à reusabilidade dos códigos⁴. Para se alcançar esse fato utilizou-se o poder da programação orientada a objetos, separando o problema astrofísico em diversas classes que herdavam métodos e atributos entre-si. O conjunto total das classes foi

¹O nível da linguagem de programação se refere ao quão próxima é a sintaxe dessa linguagem com a linguagem humana, quanto mais próxima a sintaxe for da linguagem de máquina, mais baixo será o nível da linguagem.

²Na literatura é comum encontrar também a definição de FORTRAN e linguagens tipo C como sendo de nível intermediário enquanto linguagens dinâmicas como Python serem chamadas de alto nível.

³Portabilidade se refere à capacidade de executar um programa em plataformas diferentes sem ter que modificar o mesmo, ou seja, o programa irá ter o mesmo comportamento independente do sistema operacional e da arquitetura da máquina onde esse esteja sendo executado.

⁴Reusabilidade é a capacidade de se estender ou criar funcionalidades de um programa usando como base códigos já escritos sem a modificação direta desses códigos originais.

reunida em um pacote formando um *framework*⁵ para o estudo de cosmologia e ondas gravitacionais de origem cosmológica chamado de PyGraWC (*PYthon framework for Gravitational Wave Cosmology*). Aqui foi utilizada a ferramenta conhecida como F2PY, desenvolvida por Peterson (2009), para se realizar a conexão entre as funções escritas em FORTRAN com Python.

Na Figura 7.1 está representado o diagrama de classes no pacote que forma o PyGraWC.

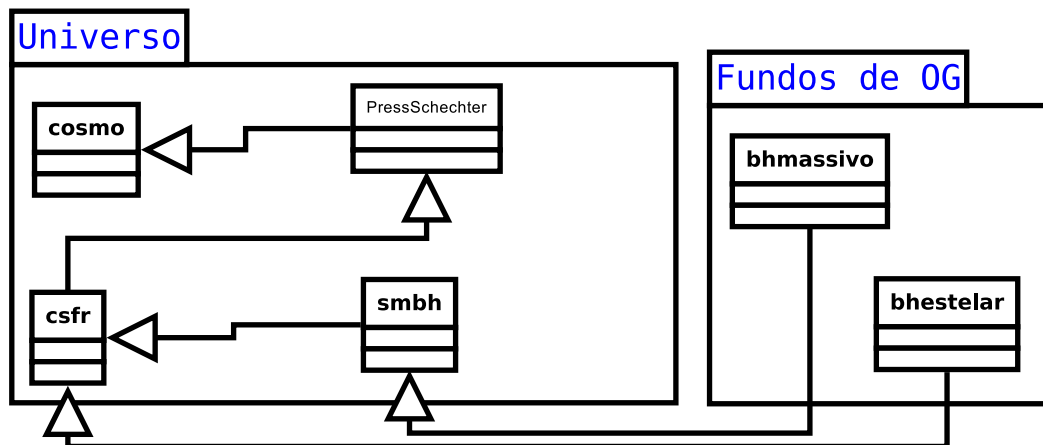


Figura 7.1 - Diagrama de classes que formam o PyGraWC. A classe **cosmo** contém os métodos e atributos relacionados ao modelo cosmológico de fundo. A classe **PressSchechter** possui os métodos e atributos relacionados ao formalismo tipo Press-Schechter para descrever o processo de formação de estruturas. A classe **csfr** possui os diversos métodos e atributos para o cálculo da taxa cósmica de formação estelar. A classe **smbh** possui métodos e atributos para a construção do histórico de evolução dos buracos negros supermassivos. Finalmente as classes **bhmassivo** e **bhestelar** possuem métodos e atributos para o cálculo das assinaturas em ondas gravitacionais produzidas por buracos negros supermassivos e buracos negros gerados pelo colapso de estrelas, respectivamente.

Os códigos fonte das principais classes já estáveis do *framework* **PyGraWC** são apresentados na seção B.1

No apêndice A é apresentada uma classe utilizada para realizar cálculos em paralelo em máquinas com multi-processadores.

⁵Um *framework* é um conjunto de classes, interfaces e padrões para resolver um grupo de problemas. É como uma pequena aplicação com estruturas dinâmicas e estáticas para resolver um conjunto restrito de problemas. Contudo um *framework* é mais que uma simples biblioteca de classes (GONVI, 1999; FAYAD; SCHIMIDT, 1997; FAYAD, 2000)

Na próxima seção são discutidos dois exemplos de uso do *framework* PyGraWC. O desenvolvimento de um aplicativo *desktop* para o estudo da taxa cósmica de formação estelar dentro do modelo Λ CDM e um aplicativo web que tem o intuito de ser uma ferramenta didática virtual para o entendimento dos desenvolvimentos astrofísicos apresentados nos capítulos anteriores. Além desses exemplos, no apêndice C é apresentado um aplicativo de simulação Monte Carlo para geração de halos sintéticos de matéria escura dentro do formalismo Press-Schechter. No apêndice B são apresentados os códigos fontes, sendo esses publicados sob as regras de uso GPL (*General Public License* - <http://www.gnu.org/licenses/>).

7.2 Resultados

A figura 7.2 mostra um diagrama que representa a estrutura geral da construção dos programas desenvolvidos com base no PyGraWC.

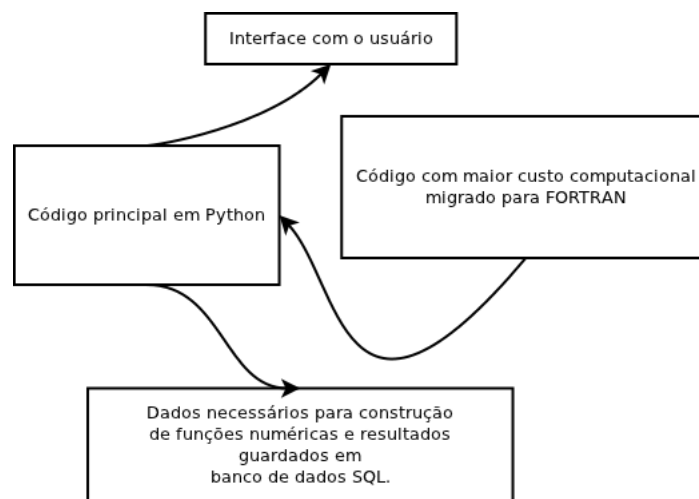


Figura 7.2 - Diagrama representativo da estrutura geral da construção dos programas apresentados na seção 7.2

A interface com o usuário foi desenvolvida usando o *framework* *Tkinter*, para o caso do aplicativo *Desktop*, e no caso do aplicativo web foi utilizado o *framework* *web2py*. Em ambos os casos, os dados e resultados gerados pelo programa foram guardados em um banco de dados tipo SQL. Para isso foi empregada uma camada de abstração de banco de dados (*Database Abstract Layer - DAL*) do *web2py*, que permite a portabilidade da manipulação dos dados, ou seja, a forma como os dados serão escritos e lidos no banco de dados são independentes do gerenciador utilizado. O código da modelagem do banco de dados pode ser visto na seção B.3.

A lista de dependências e as referências dos *frameworks* extras usados aqui são citados no apêndice B.

7.2.1 StarForm - Entendendo o processo de formação estelar no contexto cosmológico

Nas Figuras 7.3, 7.4 e 7.5 apresenta-se a interface gráfica do programa **StarForm**, que é uma ferramenta para o estudo da taxa cósmica de formação estelar e sua relação com os parâmetros cosmológicos dentro do modelo Λ CDM. Mostra-se respectivamente, o programa após iniciar sua execução, a geração do gráfico da taxa cósmica de formação estelar e a relação entre o tempo cosmológico e o *redshift*. Além disso, o programa também gera os gráficos para a relação entre a evolução da densidade de massa de matéria escura e bariônica com o *redshift*, a variância do campo de densidade linear como função da escala de massa e a evolução do contraste de densidade com o *redshift*.

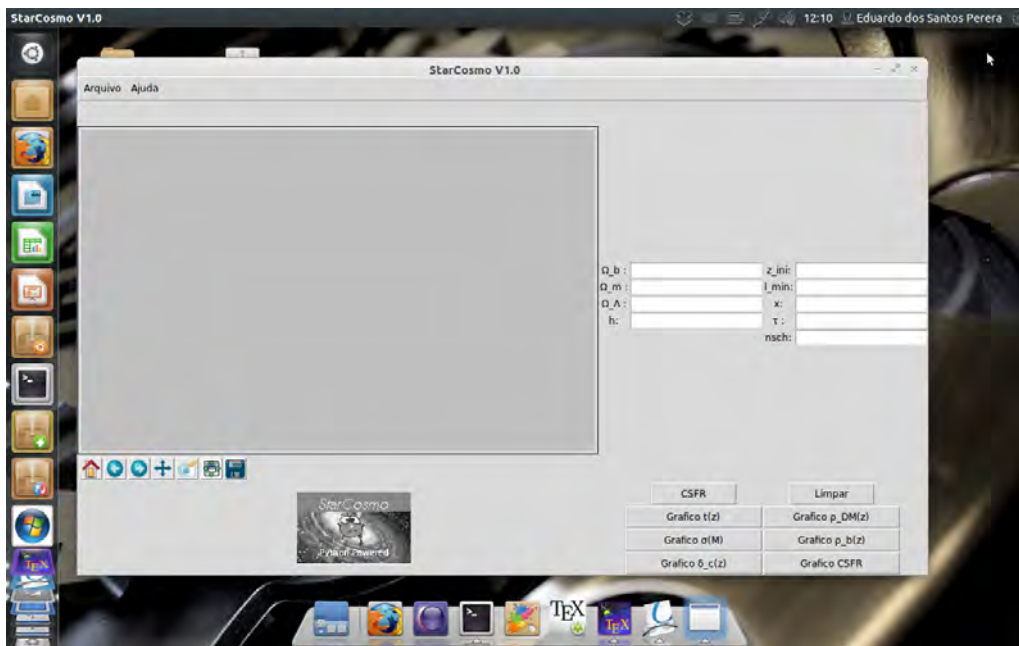


Figura 7.3 - StarCosmo - Tela inicial

O Código fonte desse programa pode ser visto na seção B.2.

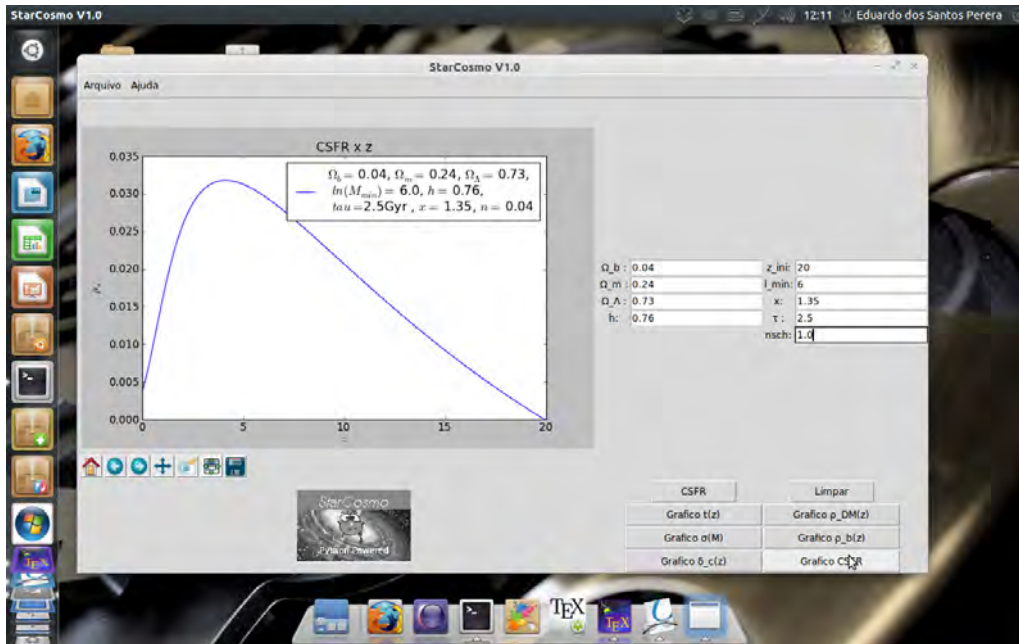


Figura 7.4 - StarCosmo - Geração do gráfico da evolução da taxa cósmica de formação estelar com o *redshift*.

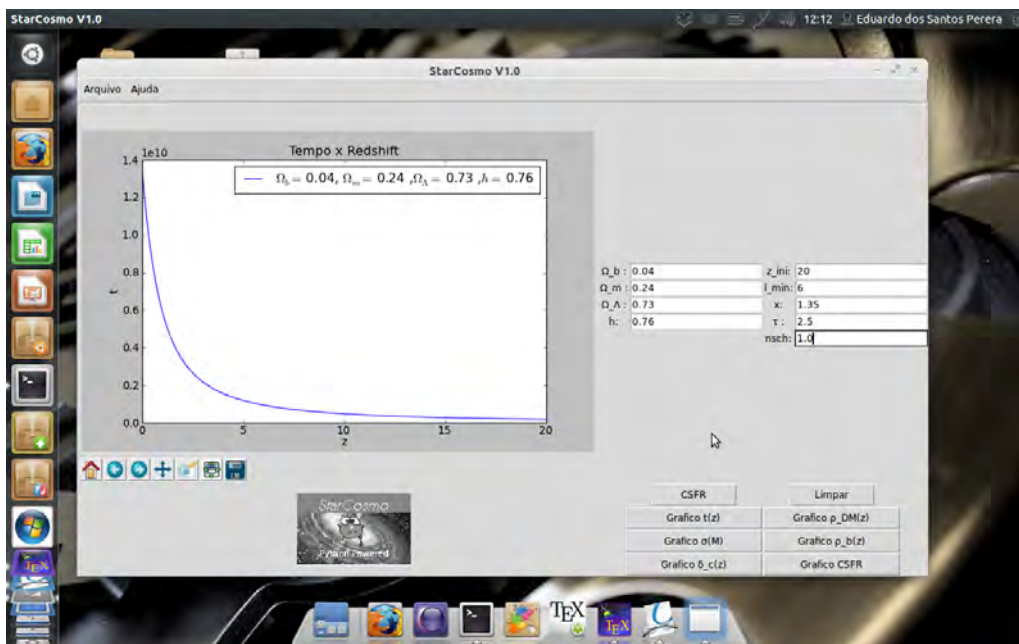


Figura 7.5 - StarCosmo - Geração do gráfico da evolução do tempo cósmico com o *redshift*.

7.2.2 Laboratório virtual de Cosmologia, Astrofísica e Ondas Gravitacionais

Os desenvolvimentos teóricos desse trabalho foram organizados de forma didática em um aplicativo web chamado *Graviton Perturbation*, o qual ainda está em fase de desenvolvimento. Esse aplicativo surge com o intuito de ser um laboratório virtual para o estudo do modelo Λ CDM e a interconexão dos processos de formação de estruturas que envolvem a formação estelar e o crescimento de buracos negros supermassivos. Nas Figuras 7.6, 7.7, 7.8 e 7.9 apresenta-se o funcionamento do aplicativo *Graviton Perturbation*. A Figura 7.6 mostra a página inicial do programa.



Figura 7.6 - *Graviton Perturbation*- Tela inicial contendo uma breve introdução sobre o aplicativo.

Na Figura 7.7 é apresentado o funcionamento dos sub-menus, em particular o que dá acesso às informações sobre propriedades diretamente ligadas ao modelo cosmológico de fundo.



Figura 7.7 - *Graviton Perturbation*- Utilização do sub-menu.

Na figura 7.8 é apresentada a tela que traz informações sobre a relação entre o tempo cósmico e o *redshift*.

Graviton Perturbation
duucosmo@das.inpe.br

Home Cosmologia » Estruturas » Ondas Gravitacionais

Relação entre o tempo cosmológico e o Redshift z

A relação entre o redshift, z, e o tempo, usando o modelo Λ CDM é dada pela seguinte relação:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{T_0 h^{-1}}{(1+z)\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3}}$$

com $T_0 = 9.78 \times 10^9$ anos.

Entre com os parametros cosmológicos e o redshift máximo.

Ω_b Ω_m Ω_Λ h

zini

© 2011 Eduardo dos Santos Pereira

Figura 7.8 - *Graviton Perturbation*-Apresentando a relação entre o tempo cósmico e o *redshift*.

A Figura 7.9 mostra a geração do gráfico da relação tempo X *redshift*, após os usuários digitarem os parâmetros cosmológicos e o *redshift* máximo.

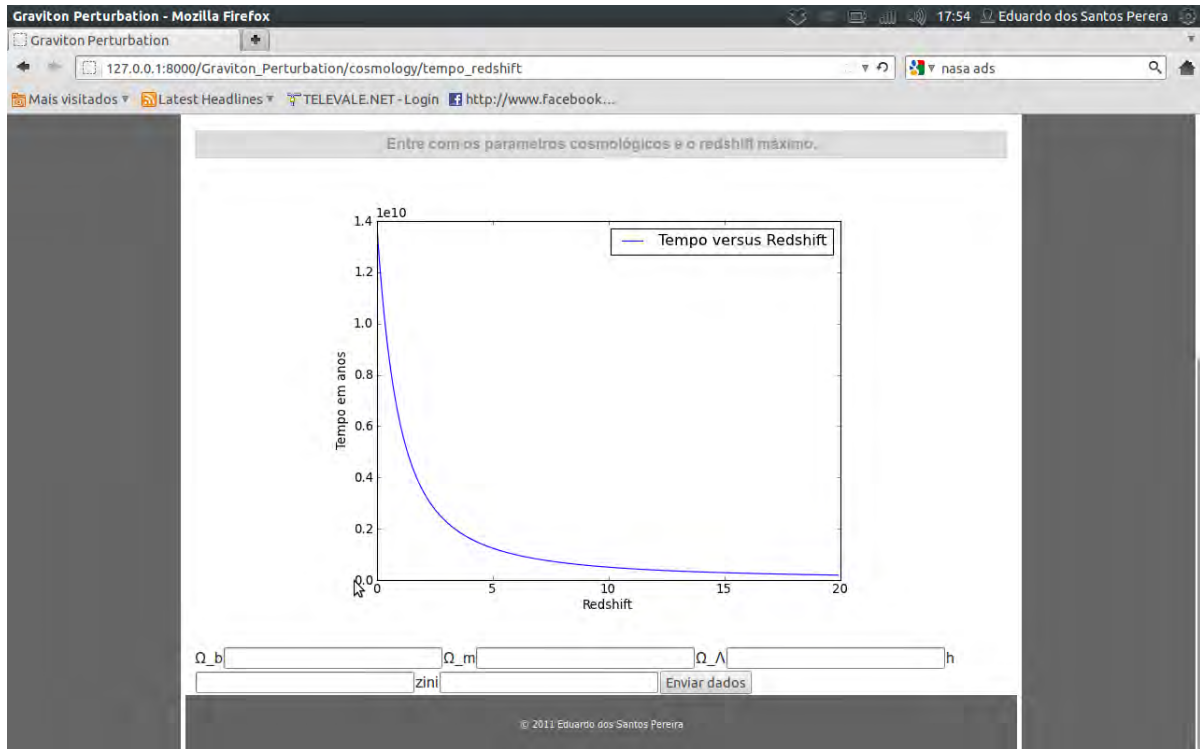


Figura 7.9 - *Graviton Perturbation*-Geração do gráfico da relação entre o tempo cósmico e o *redshift*.

O próximo capítulo contém as considerações finais do desenvolvimento desta tese.

8 Considerações Finais

Procurou-se com esta tese contribuir com o estudo do Universo pré-galáctico. Inicialmente, foi desenvolvido um modelo, baseado no formalismo tipo Press-Schechter, que permite obter a taxa cósmica de formação estelar (TCFE). Verificou-se um bom acordo da TCFE, obtida pelo modelo dessa tese, para $z < 6$, com os dados observacionais da formação estelar a altos *redshifts*.

Utilizando a TCFE, foi estudado o fundo estocástico gerado por estrelas que colapsam para buracos negros desde $z \sim 20 - 40$ até $z = 0$. O modelo derivado nesta tese mostra que a formação estelar a altos *redshifts* poderia produzir um fundo de ondas gravitacionais passível de ser detectado por interferômetros do tipo “*Advanced LIGO*” (LIGO III). As razões sinal-ruído (S/N) são maiores que 10 para esse tipo de fonte astrofísica. Esse resultado abre uma possibilidade interessante para o futuro; o de usar fundos estocásticos de ondas gravitacionais para estudar o início da formação estelar do Universo ao fim da chamada “era cosmológica das trevas” (*Dark-Age*). Em particular, fundos estocásticos de ondas gravitacionais com $\Omega_{\text{GW}_{\text{max}}} \sim 10^{-7}$ poderiam ser formados a partir do colapso para buracos negros, das estrelas pré-galácticas.

Embora não tenha sido considerado o detector de ondas gravitacionais Einstein ¹ (Einstein *Telescope*-ET) que é uma possibilidade para o início da próxima década (HILD et al., 2008; HILD et al., 2010; PUNTURO et al., 2010a; PUNTURO et al., 2010b), ao se utilizar as curvas de sensibilidade de Hild et al. (2008), e considerando a configuração triangular, as razões sinal-ruído obtidas dos modelos desse trabalho serão multiplicadas por um fator típico ~ 10 .

Assim, fundos estocásticos de ondas gravitacionais com $(S/N) \sim 100$ possivelmente permitirão resolver o problema inverso, reconstruindo a TCFE a partir de observações dentro do espectro gravitacional.

Também foi verificado aqui que existe um vínculo entre a TCFE com o crescimento de buracos negros supermassivos, desde que esses objetos cresçam principalmente a partir da acreção de matéria ambiente. Além de reproduzir a densidade de massa comóvel de buracos negros, o modelo gerado constata que a reprodução da FLQ somente é possível se a eficiência radiativa dos discos de acreção dos buracos negros for uma função do tempo. Também foi observado que a função *Duty Cycle* de quasares possui um máximo dentro da faixa em *redshift* 8, 5–11. Coincidentemente, esse intervalo em z está dentro da janela observacional associada com a reionização

¹<http://www.et-gw.eu/etsensitivities>

do Universo. Embora seja necessário aprofundar os estudos nesse ponto, os resultados mostram, preliminarmente, que mini-quasares podem ter tido um papel importante durante o processo de reionização do Universo.

Outra contribuição dessa tese foi produzir um *framework* para o estudo de cosmologia e ondas gravitacionais de origem cosmológica chamado de PyGraWC (*Python framework for Gravitational Wave Cosmology*). Este *framework* está à disposição da comunidade sob a licença de uso GPL.

Esta tese abre vários caminhos para futuros trabalhos, os dois mais imediatos que se propõe são: *a)* Aprofundar o estudo do modelo de coalescência de sistemas binários para formar buracos negros supermassivos; *b)* Calcular o sinal em ondas gravitacionais produzido pelo crescimento de buracos negros supermassivos via acreção de matéria. Espera-se que esses dois projetos desafiadores sejam assumidos e solucionados, no futuro próximo, em prol de continuar contribuindo com o estudo do Universo pré-galáctico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABBOTT, B. et al. First upper limits from ligo on gravitational wave bursts. **PRD**, v. 69, p. 102001, 2004. 57
- ABEL, T.; BRYAN, G.; NORMAN, M. L. The formation of the first star in the universe. **Science**, v. 295, p. 93–98, jan. 2002. 97
- ABRAMOVICI, A.; ALTHOUSE, W. E.; DREVER, R. W. P.; GURSEL, Y.; KAWAMURA, S.; RAAB, F. J.; SHOEMAKER, D.; SIEVERS, L.; SPERO, R. E.; THORNE, K. S. LIGO - the laser interferometer gravitational-wave observatory. **Science**, v. 256, p. 325–333, abr. 1992. 56
- ALLEN, B. The stochastic gravity-wave background: Sources and detection. In: MARC, J.-A.; LASOTA, J.-P. (Ed.). **Relativistic Gravitation and Gravitational Radiation**. England: Cambridge University Press, 1997. p. 373. 65, 83
- ALLEN, B.; ROMANO, J. D. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities. **PRD**, v. 59, n. 10, p. 102001, maio 1999. 95
- BANDARA, K.; CRAMPTON, D.; SIMARD, L. A relationship between supermassive black hole mass and the total gravitational mass of the host galaxy. **Apj**, v. 704, p. 1135–1145, out. 2009. 101
- BEHENEL, S. et al. Cython: the best of both worlds. **Computing in science & engineering**, v. 13, n. 2, p. 31–39, 2011. 118
- BENSON, A. J.; KAMIONKOWSKI, M.; HASSANI, S. H. Self-consistent theory of halo mergers. **MNRAS**, 2005. 35
- BOGOLIUBOV, N. N.; SHIRKOV, D. V. **Introduction to the Theory of Quantized Fields**. New York, NY: Interscience, 1959. 720 p. (Interscience Monographs in Physics and Astronomy, v. 3). 48
- BOND, J. R.; CARR, B. J.; HOGAN, C. J. Spectrum and anisotropy of the cosmic infrared background. **Apj**, v. 306, p. 428–450, jul. 1986. 69
- BOND, J. R.; EFSTATHIOU, G.; KAISER, N. Excursion set mass functions for hierarchical gaussian fluctuation. **Apj**, v. 379, p. 440–460, out. 1991. 31, 35, 67

- BUONANNO et al. Stochastic gravitational-wave background from cosmological supernovae. **PRD**, v. 72, n. 8, p. 084001, out. 2005. 98
- CARR, B. J. Cosmological gravitational waves - their origin and consequences. **A&A**, v. 89, p. 6–21, set. 1980. 84
- CARROLL, S. M.; PRESS, W. H. The cosmological constant. **ARAA**, v. 30, p. 499–542, 1992. 68
- CHIOSI, C.; MAEDER, A. The evolution of massive stars with mass loss. **ARAA**, v. 24, p. 329–375, 1986. 70
- CHOUDHURY, T. R.; PADMANABHAN, T. A simple analytical model for the abundance of damped $l_{y\alpha}$ absorbers. **Apj**, v. 574, p. 59–64, jul. 2002. 22
- CLOWE, D.; BRADAČ, M.; GONZALEZ, A. H.; MARKEVITCH, M.; RANDALL, S. W.; JONES, C.; ZARITSKY, D. A direct empirical proof of the existence of dark matter. **Apjl**, v. 648, p. L109–L113, set. 2006. 5
- CONROY, C.; WECHSLER, R. H. Connecting galaxies, halos, and star formation rates across cosmic time. **Apj**, v. 696, p. 620–635, maio 2009. 101
- COPI, C. J. A stochastic approach to chemical evolution. **Apj**, v. 487, p. 704, out. 1997. 72
- CUTLER, C.; HARMS, J. Big bang observer and the neutron-star-binary subtraction problem. **PRD**, v. 73, p. 042001–1, 2006. 59
- DAIGNE, F.; OLIVE, K. A.; SILK, J.; STOEHR, F.; VANGIONI, E. Hierarchical growth and star formation: Enrichment, outflows and supernova rates. **Apj**, v. 647, p. 773–786, ago. 2006. 69, 70
- DAVIS, S. W.; LAOR, A. The radiative efficiency of accretion flows in individual active galactic nuclei. **Apj**, v. 728, p. 98, fev. 2011. 106
- de ARAUJO, J. C. N.; MIRANDA, O. D. Star formation rate density and the background of gravitational waves. **Phys. Rev. D**, v. 71, n. 12, p. 127503, jun. 2005. 78, 84
- de ARAUJO, J. C. N.; MIRANDA, O. D.; AGUIAR, O. D. Stochastic background of gravitational waves. **Phys. Rev. D**, v. 61, n. 12, p. 124015, maio. 2000. 94

de ARAUJO, J. C. N.; MIRANDA, O. D.; AGUIAR, O. D. Gravitational wave background from black holes of the springel & hernquist star formation epoch. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 348, p. 1373–1378, mar. 2004. [93](#)

D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. 1. ed. New York: Oxford University, 1992. 383 p. [6](#), [7](#), [40](#)

EFSTATHIOU, G.; BOND, J. R.; WHITE, S. D. M. Cobe background radiation anisotropies and learge-scale structure in the universe. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 258, p. 1p–6p, jun. 1992. [69](#)

FAKHOURI, O.; MA, C.-P. The nearly universal merger rate of dark matter haloes in λ cdm cosmology. **MNRAS**, 2008. [35](#), [37](#)

FARDAL, M. A.; KATZ, N.; WEINBERG, D. H.; DAVÉ, R. On the evolutionary history of stars and their fossil mass and light. **mnras**, v. 379, p. 985–1002, ago. 2007. [73](#), [74](#), [103](#), [104](#)

FAYAD, M. E. Introduction to the computing surveys electronic symposium on object-oriented application frameworks. **ACM Comput. Surv.**, v. 32, n. 1, p. 1–9, 2000. [119](#)

FAYAD, M. E.; SCHIMIDT, D. C. Object-oriented application frameworks. **Commun.ACM**, v. 40, n. 10, p. 32–38, 1997. [119](#)

FERRARESE, L.; MERRITT, D. A fundamental relation between supermassive black holes and their host galaxies. **Apjl**, v. 539, p. L9–L12, ago. 2000. [101](#)

FERRARI, V.; MATARRESE, S.; SCHNEIDER, R. Gravitational wave background from a cosmological population of core-collapse supernovae. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 303, p. 247–257, fev. 1999. [83](#), [94](#)

FERRARI, V.; MINIUTTI, G.; PONS, J. A. Gravitational waves from newly born, hot neutron stars. **MNRAS**, v. 342, p. 629–638, jun. 2003. [96](#)

FLANAGAN, E. E. Sensitivity of the laser interferometer gravitational wave observatory to a stochastic background, and its dependence on the detector orientations. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 48, n. 6, p. 2389–2407, set. 1993. [60](#), [61](#)

FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J. D. **A Short Course in General Relativity**. 3th. ed. New york: Springer, 2006. 230 p. [47](#)

- FRANCESCHINI, A. et al. On the relationship between galaxy formation and quasar evolution. **MNRAS**, v. 310, p. L5–L9, nov. 1999. [101](#)
- FRYER, C. L.; WOOSLE, S. E.; HEGER, A. Pair-instability supernovae, gravity waves, and gamma-ray transients. **Apj**, v. 550, p. 372–382, mar. 2001. [89](#), [95](#)
- GONNOVI, D. **Java Application Frameworks**. New York: John Wiley & Sons, 1999. [119](#)
- GRAHAM, A. W.; DRIVER, S. P. The local supermassive black hole mass density: corrections for dependencies on the hubble constant. **MNRAS**, v. 380, p. L15–L19, set. 2007. [114](#)
- HAIMAN, Z.; CIOTTI, L.; OSTRICKER, J. P. Reasoning from fossils: learning from the local black hole population about the evolution of quasars. **Apj**, v. 606, p. 763–773, maio 2004. [101](#)
- HAKIM, R. **An Introduction to Relativistic Gravitation**. 1. ed. New York: Cambridge University, 1999. 286 p. [57](#)
- HECKMAN, T. M. et al. Present-day growth of black holes and bulges: The sloan digital sky survey perspective. **Apj**, v. 613, p. 109–118, set. 2004. [101](#)
- HEGER, A.; WOOSLEY, S. E. The nucleosynthetic signature of population iii. **Apj**, v. 567, p. 532–543, mar. 2002. [73](#)
- HILD, S.; CHELKOWSKI, S.; FREISE, A. Pushing towards the et sensitivity using 'conventional' technology. **ArXiv 0810.0604**, out. 2008. [127](#)
- HILD, S. et al. Sensitivity studies for third-generation gravitational wave observatories. **ArXiv 1012.0908**, 2010. [127](#)
- HINSEN, K. Parallel scripting with python. **Computing in science & engineering.**, p. 82–89, Nov./Dec 2007. [118](#)
- HINSEN, K.; P.LANGTANGEN, H.; SKAVHAUG, O.; ØDEGÅRD, Å. Using bsp and python to simplify parallel programming. **Future Generation Computer Systems**, v. 22, p. 123–157, 2006. [118](#)
- HIOTELIS, N. Merger rates of dark matter haloes from merger trees in the extended press-schechter theory. **ArXiv gr-qc/0905.0793**, v. 1, p. 7, mai. 1996. [37](#)
- _____. Extended press-schechter theory and the density profile of dark matter haloes. **MNRAS**, v. 344, p. 149–155, 2003. [68](#)

- HOPKINS, A. M. On the evolution of star-forming galaxies. **APJ**, American Physical Society, v. 615, p. 209–221, nov. 2004. [73](#), [74](#), [75](#), [76](#), [77](#), [78](#), [103](#), [104](#)
- _____. Erratum: “on the evolution of star-forming galaxies”. **Apj**, v. 654, p. 1175–1175, jan. 2007. [73](#), [74](#), [75](#), [76](#), [77](#), [103](#), [104](#)
- HOPKINS, A. M.; BEACOM, J. F. On the normalization of the cosmic star formation history. **Apj**, v. 651, p. 142–154, nov. 2006. [73](#), [74](#), [103](#), [104](#)
- HOPKINS, P. F.; HERNQUIST, L. Quasars are not light bulbs: Testing models of quasar lifetimes with the observed eddington ratio distribution. **Apj**, v. 698, p. 1550–1569, jun. 2009. [107](#)
- HOPKINS, P. F.; NARAYAN, R.; HERNQUIST, L. How much mass do supermassive black holes eat in their old age? **Apj**, v. 643, p. 641–651, jun. 2006. [107](#)
- HOPKINS, P. F.; RICHARDS, G. T.; HERNQUIST, L. An observational determination of the bolometric quasar luminosity function. **Apj**, v. 654, p. 731–753, jan. 2007. [104](#), [107](#), [109](#), [111](#)
- HUGHES, S. A.; MÁRKA, S.; BENDER, P. L.; HOGAN, C. J. New physics and astronomy with the new gravitational-wave observatories. **ArXiv astro-ph/0110349**, p. 29, out. 2001. [56](#)
- JAROSIK, N. et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: sky maps, systematic errors, and basic results. **APJS**, v. 192, p. 14, fev. 2011. [112](#)
- JENKINS, A.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M.; COLBERG, J. M. The mass function of dark matter haloes. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 321, p. 372–384, 2001. [34](#), [67](#), [68](#)
- KAUFFMANN, G.; HAEHNELT, M. A unified model for the evolution of galaxies and quasars. **MNRAS**, v. 311, p. 576–588, jan. 2000. [98](#)
- KAWAMURA, S. et al. The japanese space gravitational wave antenna - decigo. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 122, p. 8, 2008. [58](#)
- LACEY, C.; COLE, S. Merger rates in hierarchical models of galaxy formation. **MNRAS**, v. 262, p. 627–649, 1993. [31](#), [35](#), [67](#)

- MAGORRIAN, J. et al. The demography of massive dark objects in galaxy centers. **AJ**, v. 115, p. 2285–2305, jun. 1998. 79
- MAHMOOD, A.; DEVRIENDT, J. E. G.; J.SILK. A simple model for the evolution of supermassive black holes and the quasar population. **MNRAS**, v. 359, p. 1363–1378, jun. 2005. 101
- MARASSI, S.; SCHNEIDER, R.; FERRARI, V. Gravitational wave backgrounds and the cosmic transition from population iii to population ii stars. **MNRAS**, v. 398, p. 293–302, set. 2009. 98
- MARKEVITCH, M. et al. **NASA finds direct proof of dark matter**. nov 2011. Disponível em: <<http://chandra.harvard.edu/photo/2006/1e0657/>>. 5
- MCCLINTOCK, J.; GARCIA, M. **XTE J1118+480:Chandra pinpoints edge of accretion disk around black hole**. nov 2011. Disponível em: <<http://chandra.harvard.edu/photo/2001/xtej1118/index.html>>. 81
- MERLONI, A.; RUDNICK, G.; Di Matteo, T. Tracing the cosmological assembly of stars and supermassive black holes in galaxies. **MNRAS**, v. 354, p. L37–L42, nov. 2004. 101, 104, 112
- MO, H.; van den Bosch, F. C.; S.WHITE. **Galaxy formation and evolution**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 19, 20, 26
- NARAYAN, R. Black holes in astrophysics. **NJP**, v. 7, p. 199, set. 2005. 110
- NARLIKAR, J. V. **Introduction to Cosmology**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. 415 p. 6, 25
- NEISTEIN, E.; DEKEL, A. Merger rates of dark-matter haloes. **ArXiv gr-qc/0802.0198v2**, v. 2, p. 12, mai. 2008. 35
- OHANIAN, H. C. **Gravitation and Spacetime**. New York, NY: W.W. Norton, 1976. 461 p. 49
- OUSTERHOUT, J. K. Scripting higher level programming for the 21st century. **Computer IEEE**, v. 31, n. 3, p. 23–30, 1998. 118
- OWEN, B. J.; SATHYAPRAKASH, B. S. Matched filtering of gravitational waves from inspiraling compact binaries: Computational cost and template placement. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 60, n. 2, p. 022002, jun. 1999. 65

PACHECO, J. de F. The ns-ns coalescence rate in galaxies and its significance to the virgo gravitational antenna. **Astropart. Phys.**, v. 8, p. 21–26, Dez. 1997. 76

PADMANABHAN, T. **Cosmology and astrophysics through problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. 486 p. 27

PAIS, A. **Sutil É o Senhor. A Ciência e a Vida de Albert Einstein**. 5. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1982. 637 p. 40

PEACOCK, J. A. **Cosmological Physics**. Inglaterra: Cambridge University Press, 1999. 682 p. 19

PEEBLES, P. J. E. **The large-scale structure of the Universe**. Princeton: Princeton University Press, 1980. 422 p. 22, 28

PEREIRA, E. S.; MIRANDA, O. D. Stochastic background of gravitational waves generated by pre-galactic black holes. **MNRAS**, v. 401, p. 1924–1932, jan. 2010. 69, 70, 71, 72, 73, 74, 83, 86, 101, 103, 104, 114

PETERSON, P. F2py: a tool for connecting fortran and python programs. **IJCSE**, v. 4, n. 4, p. 296–305, 2009. 118, 119

PIRAN, T.; STARK, R. F. Gravitational radiation, gravitational collapse, and numerical relativity. **New York Academy Sciences Annals**, v. 470, p. 247–266, 1986. 89, 95

PRESS, W. H.; SCHECHTER, P. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. **Apj**, p. 425–438, fev. 1974. 31, 67

PUNTURO, M. et al. The einstein telescope: a third-generation gravitational wave observatory. **Classical and Quantum Gravity**, v. 27, n. 19, p. 194002, out. 2010. 127

_____. The third generation of gravitational wave observatories and their science reach. **Classical and Quantum Gravity**, v. 27, n. 8, p. 084007, abr. 2010. 127

RACCA, G. D.; MCNAMARA, P. W. The lisa pathfinder mission. tracing einstein's geodesics in space. **Space Sci Rev**, v. 151, p. 159–181, 2010. 58

REED, D. et al. Evolution of the mass function of dark matter haloes. **MNRAS**, v. 346, p. 565–572, dez. 2003. 34

- REGIMBAU, T.; HUGHES, S. A. Gravitational-wave confusion background from cosmological compact binaries: Implications for future terrestrial detectors. **PRD**, v. 79, n. 6, p. 062002, mar. 2009. 103
- REGIMBAU, T.; PACHECO, J. A. F. Stochastic background from coalescences of neutron star-neutron star binaries. **Apj**, v. 642, p. 455–461, maio 2006. 97, 103
- REID, M. J. Is there a supermassive black hole at the center of the milky way? **International Journal of Modern Physics D**, v. 18, p. 889–910, 2009. 80
- REYES, R.; MANDELBAUM, R.; SELJAK, U.; BALDAUF, T.; GUNN, J. E.; LOMBRISER, L.; SMITH, R. E. Confirmation of general relativity on large scales from weak lensing and galaxy velocities. **nature**, v. 464, p. 256–258, mar. 2010. 6
- RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, v. 116, n. 3, p. 1009, 1998. Disponível em:
<<http://stacks.iop.org/1538-3881/116/i=3/a=1009>>. 5
- SALPETER, E. E. The luminosity function and stellar evolution. **Apj**, v. 121, p. 161–167, 1955. 71
- SALVADORI, S.; SCHNEIDER, R.; FERRARA, A. Cosmic stellar relics in the galactic halo. **MNRAS**, v. 381, p. 647–662, out. 2007. 70
- SCALO, J. M. The stellar initial mass function. **Fundamentals Cosmic Phys.**, v. 11, p. 1–278, maio 1986. 72
- SCANNAPIECO, E.; BARKANA, R. An analytical approach to inhomogeneous structure formation. **Apj**, v. 571, p. 585–603, jun. 2002. 31, 67, 68
- SCHMIDT, M. The rate of star formation. **Apj**, v. 129, p. 243–258, mar. 1959. 71
- SCHÖDEL, R. et al. A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the milky way. **NAT**, v. 419, p. 694–696, out. 2002. 79
- SHANKAR, F. The demography of supermassive black holes: Growing monsters at the heart of galaxies. **NAR**, v. 53, p. 57–77, 2009. 104
- SHANKAR, F.; WEINBERG, D. H.; MIRALDA-ESCUDE, J. Self-consistent models of the agn and black hole populations: duty cycles, accretion rates, and the mean radiative efficiency. **Apj**, v. 690, p. 20–41, jan. 2009. 104
- SHETH, R. K.; TORMEN, G. **Mon. Not. R. Astron.**, v. 308, p. 119, 1999. 34, 67

SHOEMAKER, D. LIGO hanford observatory. National Science Foundation, ago. 2007. Disponível em:

<<http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO/scripts/summary.shtml>>. Acesso em: 06 junho 2007. 57

SMALL, T. A.; BLANDFORD, R. D. Quasar evolution and the growth of black holes. **MNRAS**, v. 259, p. 725–737, dez. 1992. 104

SOLTAN, A. Masses of quasars. **MNRAS**, v. 200, p. 115–122, jul. 1982. 102

SPRINGEL, V.; HERNQUIST, L. The history of star formation in a Λ cold dark matter universe. **Mon. Not. R. Astron.**, v. 339, p. 312–334, fev. 2003. 73, 74, 75, 93, 103, 104

THORNE, K. S. **300 Years of Gravitation, edited by Hawking, S. W.; Israel. W.** Inglaterra: Cambridge University Press, 1987. 330-458 p. 85

TINSLEY, B. M. Evolution of the stars and gas in galaxies. **FCP**, v. 5, p. 287–388, 1980. 72

VIKA, M. et al. The millennium galaxy catalogue: the M_{bh} - $L_{spheroid}$ derived supermassive black hole mass function. **MNRAS**, v. 400, p. 1451–1460, dez. 2009. 114

WANG, J. M.; CHEN, Y. M.; HO, L. C.; MCLURE, R. J. Evidence for rapidly spinning black holes in quasars. **ApjL**, v. 642, p. L111–L114, maio 2006. 104, 107, 112

WANG, J. M.; CHEN, Y. M.; ZHANG, F. Cosmological evolution of the duty cycle of quasars. **ApjL**, v. 647, p. L17–L20, ago. 2006. 101

WANG, J. M. et al. Episodic random accretion and the cosmological evolution of supermassive black hole spins. **ApjL**, v. 697, p. L141–L144, jun. 2009. 101, 114

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology. Principles and Application of the General Theory of Relativity**. 1. ed. New York: John Willey and sons, 1972. 656 p. 6, 14

_____. **Cosmology**. 1. ed. Oxford: Oxford University Press, 2008. 593 p. 26

WEISBERG, J. M.; TAYLOR, J. H. The relativistic binary pulsar B1913+16. In: M. Bailes, D. J. Nice, & S. E. Thorsett (Ed.). **Radio Pulsars**. [S.l.: s.n.], 2003. (Astronomical Society of the Pacific Conference Series, v. 302), p. 93. 39, 40

WYITHE, J. S. B.; LOEB, A. Low-frequency gravitational waves from massive black hole binaries: predictions for lisa and pulsar timing arrays. **Apj**, v. 590, p. 691–706, jun. 2003. 101

YU, Q.; TREMAINE, S. Observational constraints on growth of massive black holes. **MNRAS**, v. 335, p. 965–976, out. 2002. 104

APÊNDICE A - Otimizando o Cálculo em Maquinas Multiprocessadores

Os códigos fontes aqui apresentados podem ser utilizados desde que se respeite a licença de uso GPL (*General Public License* - <http://www.gnu.org/licenses/>).

A.1 O módulo ppvector

Um fato interessante sobre Python é que o mesmo possui um grande conjunto de módulos nativos, ou seja, são padrões durante a instalação do interpretador da linguagem. Um deles é o *multiprocessing*, que permite a programação em paralelo, em máquinas com multiprocessadores, de forma rápida. Com esse fato em mente, foi desenvolvida uma classe chamada **ppvector**, cujo diagrama pode ser visto na Figura A.1. Essa classe possui métodos que paralelizam o processo de construção das funções numéricas utilizadas ao longo desse trabalho. Abaixo se encontra o código fonte dessa classe.



```
1  #!/usr/bin/env python
2  ## coding: utf-8
3  __author__ = 'Eduardo dos Santos Pereira'
4  __version__ = '1.0'
5  __date__ = '15/03/2011'
6
7  """
8      This file is part of PyGraWC.
9      copyright : Eduardo dos Santos Pereira
10     31 mar. 2011.
11
12     PyGraWC is free software: you can redistribute it and/or modify
13     it under the terms of the GNU General Public License as published by
14     the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
15     PyGraWC is distributed in the hope that it will be useful,
16     but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
17     MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
18     GNU General Public License for more details.
19
20     You should have received a copy of the GNU General Public License
21     along with Foobar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
22
23     Aplicativo: ppvector
24     versao: 1.0
25     Autor : Eduardo dos Santos Pereira (Pereira; E. S.)
26     data: 31/05/2011
27
28     obs.:
29     Parte do Projeto de Doutorado em Astrofísica pelo Instituto Nacional
30     de Pesquisas Espaciais -INPE.
31
32     Objetivo do modulo corrente:
33     ppvector: Parallel Processing Vector
34     Modulo que calcula vetores em multiprocessos.
35
36     Exemplo:
```

```

37
38 import multiprocessing as mpg
39
40 #Inicializa-se os vetores da funcao e da variavel
41
42 fbt2= mpg.Array('d',[0 for i in range(self.np)]) #o d indica precisao
43 dupla
44 zFB= mpg.Array('d',[self.zmax-i*deltaz for i in range(self.np)])
45
46 #Defini-se a funcao que ira calcular os pontos do vetor fbt2 em paralelo
47 #k e o ponto do vetor onde se inicia o calculo
48 #E e o tamanho do subintervalo do vetor a ser calculado
49 #n e o numero do processo
50
51 def CalculusRenaiss(k,E,n):
52
53     for i in range(E):
54         z=zFB[k]
55         fbt2[k]=self.fbstruc(z)
56         k+=1
57
58 Dmatriz=self.np # Tamanho do vetor fbt2
59 C1= ppvector(Dmatriz,CalculusRenaiss) #Cria-se uma instacia
60 C1.runProcess() #Ativa o metodo que calcula em paralelo.
61 """
62
63 import multiprocessing as mpg
64
65
66 #@file ppvector.py
67 #@author Eduardo dos Santos Pereira <pereira.somoza@gmail.com>
68 #@version 1.0
69 #@section LICENSE
70 # This program is free software; you can redistribute it and/or
71 #modify it under the terms of the GNU General Public License as
72 #published by the Free Software Foundation; either version 2 of
73 #the License, or (at your option) any later version.
74 #This program is distributed in the hope that it will be useful, but
75 #WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
76 #MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU
77 #General Public License for more details at
78 #http://www.gnu.org/copyleft/gpl.html
79 #@section DESCRIPTION
80 #This program is used to calculate, in parallel, by python module
81 #multiprocessing, points in vector. Optimization for multicore machines.
82
83 class ppvector:
84     """
85     ppvector: Parallel Processing Vector
86     This program is used to calculate, in parallel, by python module
87     multiprocessing, points in vector. Example:
88
89     import multiprocessing as mpg
90     #Start the vector of result an the vector with valuer of variables
91     fbt2= mpg.Array('d',[0 for i in range(self.np)])
92     zFB= mpg.Array('d',[self.zmax-i*deltaz for i in range(self.np)])
93     #Define the function that will run in parallel.
94     #k is a point of vector that start the caculation
95     #E is the range of the vector
96     #n is the processor
97
98     def fun(x):
99         return x*x
100
101     def Calcula(k,E,n):
102         for i in range(E):
103             z=zFB[k]
104             fbt2[k]=fun(z)
105             k+=1
106
107     Dmatriz=self.np # The dimension of the vector
108     C1= ppvector(Dmatriz,Calcula)
109     C1.runProcess() #run the calculus in parallel
110     """
111
112     def __init__(self,Dmatriz,func):
113         ,,,

```

```

114         Dmatriz: The dimension of the vector
115         func: function that will run in parallel
116         '''
117         self.Dmatriz=Dmatriz
118         self.func=func
119
120     def __CalculusRenaiss(self,func,k,E,n):
121         func(k,E,n)
122
123
124
125     def __acaoParalera(self,n,q,Dmatriz,func,n_process):
126         E=Dmatriz/n_process
127         k=n*E
128         q.put(self.__CalculusRenaiss(func,k,E,n))
129
130     def runProcess(self):
131         '''
132         Calculate, in sub range, points of vector in parallel. For
133         multicore machines.
134
135         '''
136
137         n_process=2*mpg.cpu_count()
138         subprocess=[]
139
140
141         for i in range(n_process):
142             q = mpg.Queue()
143             p=mpg.Process(target=self.__acaoParalera,\
144                 args=(i,q,self.Dmatriz,self.func,n_process))
145             p.start()
146             subprocess.append(p)
147
148         while subprocess:
149             subprocess.pop().join()

```

A.1.1 Exemplo de Uso

Como exemplo de uso dessa classe, considere o seguinte. Seja

$$f(x) = \int_a^b g(x,k)dk = \int_a^{b_1} g(x,k)dk + \int_{b_1}^{b_2} g(x,k)dk + \dots + \int_{b_n}^b g(x,k)dk, \quad (\text{A.1})$$

sendo $a < b_n < b$. Em diversos casos a função $g(x,k)$ não pode ser escrita separadamente e a integral não tem uma solução analítica. Nesse caso, a integração pode ser avaliada em x para um dado intervalo $[x_0, x_f]$. Contudo, podemos dividir os intervalos $[a, b]$ e $[x_0, x_f]$ pelo número de unidades centrais de processamento (*Central Processor Units-CPU's*) de um *cluster* de computadores (ou de máquinas multiprocessadores). No código abaixo é apresentado um exemplo em que se realiza uma integração, em que se subdivide o intervalo $[x_0, x_f]$ em subintervalos menores de acordo com o número de processadores da máquina.

```

1 import multiprocessing as mpg
2 from ppvector import ppvector
3 from scipy.integrate import romberg
4
5 np=10000;   zmax=20.0;   deltaz=zmax/np
6 g= mpg.Array('d',[0 for i in range(np)]) #The d indicate duple precision
7 z= mpg.Array('d',[zmax-i*deltaz for i in range(np)])
8 #Define a function that will be calculate the integral in parallel
9 #k is the starter point of the sub-range

```

```
10 #E is the lenght of the range
11 #n is the number of CPU's of machine
12
13 def f(x):
14     def f2(k):
15         return (x+k)**(-2.0)
16     return romberg(f2,5.0,20.0)
17
18 def fun(k,E,n):
19     k2=k+E
20     for i in range(k,k2+1):
21         zloc=z[k]
22         g[k]=f(zloc)
23
24
25 C1= ppvector(np,fun) # Star the ppvector class
26 C1.runProcess() #Executing the parallel calculus.
```

APÊNDICE B - Códigos Fonte

Os códigos fonte aqui apresentados podem ser utilizados desde que se respeite a licença de uso GPL (*General Public License* - <http://www.gnu.org/licenses/>).

B.1 PyGraWC - Códigos fonte

B.1.1 PyGraWC- Códigos Python

B.1.1.1 Classe Cosmo

```
1 #!/usr/bin/env python
2 # -*- coding: utf-8 -*-
3 __author__='Eduardo dos Santos Pereira'
4 __version__='1.1'
5 __date__='23/03/2011'
6
7 """
8     This file is part of PyGraWC.
9     copyright : Eduardo dos Santos Pereira
10    31 mar. 2011.
11
12    PyGraWC is free software: you can redistribute it and/or modify
13    it under the terms of the GNU General Public License as published by
14    the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
15    PyGraWC is distributed in the hope that it will be useful,
16    but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
17    MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
18    GNU General Public License for more details.
19
20    You should have received a copy of the GNU General Public License
21    along with FooBar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
22
23
24
25 *****Março de 2010*****
26 *****Versao 0.01*****
27
28 Autor: Eduardo dos Santos Pereira.
29 email:duducosmo@das.inpe.br, duducosmos@hotmail.com
30 versao: 1.0
31
32 *****
33
34 """
35 from Extras_pack import *
36 from cStringIO import StringIO
37 import sys
38
39 from run_kut4 import *
40 from run_kut5 import *
41 from diferencial import *
42 from ProgBarr import *
43 from ppvector import ppvector
44 import multiprocessing as mpg
45
46 try:
47     import cosmol1 as cl1
48     import cosmol2 as cl2
49
50 except:
51     try:
52
53         from numpy import f2py
54
55         Fileloc= os.getcwd()
56         f2py.compile(open('./pygrawc/cosmol1.f','r').read(),'cosmol1')
57         f2py.compile(open('./pygrawc/cosmol2.f','r').read(),'cosmol2')
```

```

60     except:
61         print"Is not possible to compile the necessary modules."
62         sys.exit()
63
64 import time
65
66 class Cosmo:
67
68     def __init__(self,omegab,omegam,omegal,h,lmin,zmax,db):
69         from numpy.numarray import zeros,Float64,array
70
71         '''Inicializando a classe Cosmo
72     '''
73         print'Iniciando a Classe Cosmo'
74         self.omegab=omegab
75         self.omegam=omegam
76         self.omegal=omegal
77         self.h=h
78         self.lmin=lmin
79         self.zmax=zmax
80
81
82         if self.omegal >= 0.73 :
83             tilt = 1.92
84         elif( omegal >= 0.7 and omegal <= 0.73):
85             tilt = 1.915
86         else:
87             tilt = 1.8
88
89         h2 = self.h*self.h
90         h2om = h2*self.omegam
91         h2br = h2*self.omegab
92         self.rodM0 = 2.76e+11*h2om
93         self.robr0 = 2.76e+11*h2br
94         self.deltac=1.686
95         self.hsl = self.h*np.sqrt(self.omegal)
96         self.omegalm = self.omegal/self.omegam
97         self.s2pi = np.pi*np.sqrt(2.0)
98         self.pi2 = np.pi*np.pi
99         self.ut = 1.0/3.0
100        self.nr = 14000
101        self.mmin=1.0e+4
102        self.mmax=1.0e+18
103        self.lmax =np.log10(self.mmax/10.0)
104        self.ct0 = 4.0*np.pi
105        self.ct1 = self.ct0*2.76e+11/3.0
106        self.ct2 = self.ct1*h2om
107        self.ct3 = 9.78e+09/h
108        self.ast1=0.322
109        self.ast2=0.707
110        self.pst=0.3
111        self.tilt2=tilt/np.log(10.0)
112        self.ctst=self.ast1*np.sqrt(2.0*self.ast2/np.pi)
113
114        #Normalizacao do espectro de potencia
115        self.anorm = 1.94e-5*(self.omegam**(-0.785-0.05*\
116            np.log(self.omegam)))*np.exp(-0.95*\
117            (tilt-1.))-0.169*(tilt-1.)**2.0)/2.0/self.pi2
118        self.anorm = ((self.anorm)**2.0)*((2997.9/self.h)**(3.0+tilt))
119
120        self.gama1 = self.omegab*(1.0+np.sqrt(2.0*self.h)/self.omegam)
121        self.gamam = self.omegam*(self.h**2.0)/np.exp(self.gama1)
122        self.alfa = 6.4/self.gamam/self.h
123        self.beta = 3.0/self.gamam/self.h
124        self.gama = 1.7/self.gamam/self.h
125
126        #Inicializando Sigma(M) a ser usado pela Classe Press-Schchter (derivada de sigma(m)
127        numk = 1000.0
128        kscale = self.mmax/self.mmin
129        kls = np.log10(kscale)
130        numk = numk*kls
131        kls1 = kls/numk
132
133
134
135        print ' '
136        print 'Inicio do calculo de Sigma(m) '

```

```

137
138
139 #omegab,omegam,omegal,h,lmin,zmax
140
141 arq = "sigma_tz_"+str(omegab)+"_"+str(omegam)\
142      +"_"+str(omegal)+"_"+str(h)+"_"+str(lmin)+"_"+str(zmax)
143
144
145 try:
146     self.zred = zeros(int(numk),type=Float64)
147     self.t_z = zeros(int(numk),type=Float64)
148     self.sg = zeros(int(numk),type=Float64)
149     self.km = zeros(int(numk),type=Float64)
150
151
152     DadosMatriz= db(db.cosmology.Parametro == arq ).select()[0]
153
154
155
156     sgtz = StringIO(DadosMatriz.Matriz)
157     print 'arquivo encontrado sigma(M) e z(t) serÃo lidos:'
158     X = io.mmread(sgtz)
159
160     if(len(X) != int(numk)):
161
162         print 'ops!!'
163
164     def Opera(X,i):
165         x=X[i]
166         self.t_z[i]=x[0]
167         self.zred[i]=x[1]
168         self.km[i]=x[2]
169         self.sg[i]=x[3]
170
171     [Opera(X,i) for i in range(int(numk))]
172
173     sgtz.close()
174
175 except:
176     print '''sera inserido no banco de dados a matriz que contem
177           as informacoes paraconstruÃo de sigma(M) e z(t)
178           com o nome:%s \n\n ''' %arq
179
180
181     deltaz = self.zmax/(int(numk))
182     X=[]
183
184     def CalculaKm(i):
185         kmass = (10.0**((i+1)*kls1))*self.mmin
186         return kmass
187
188     def CalculaScale(i):
189         scale = (CalculaKm(i)/self.ct2)**self.ut
190         return scale
191
192
193     self.kmass = mpg.Array('d',[CalculaKm(i) for i in \
194                             range(int(numk))])
195     self.scale = mpg.Array('d',[CalculaScale(i) for i in \
196                             range(int(numk))])
197     self.zred=mpg.Array('d',[self.zmax-i*deltaz for i in \
198                             range(int(numk))])
199     self.km=mpg.Array('d',[0 for i in range(int(numk))])
200     self.scale2= mpg.Array('d',[0 for i in range(int(numk))])
201     self.sg = mpg.Array('d',[0 for i in range(int(numk))])
202     self.t_z=mpg.Array('d',[0 for i in range(int(numk))])
203     self.d_c2=mpg.Array('d',[0 for i in range(int(numk))])
204     self.rdm2=mpg.Array('d',[0 for i in range(int(numk))])
205     self.rbr2=mpg.Array('d',[0 for i in range(int(numk))])
206
207     Dmatriz=int(numk)
208     C2= ppvector(Dmatriz,self.__CalculusRenais)
209     C2.runProcess()
210
211
212
213     X=[[self.t_z[i],self.zred[i],self.km[i],self.sg[i],self.d_c2[i],\

```

```

214         self.rdm2[i],self.rbr2[i]] for i in range(int(numk))]
215
216
217     X2 = array(X)
218     sgtz= StringIO()
219     comentario=""A matriz contem os seguintes vetores, respectivamente por coluna:
220         idade do universo, redshift, log da escala de massa,
221         variancia de massa, densidade critica, densidade de materia escura e densidade de materia barionica""
222     io.mmwrite(sgtz,X2,comment=comentario,field='real')
223
224
225
226
227     db.cosmology.insert(Parametro=arq,Matriz=sgtz.getvalue)
228     db.commit()
229
230     self.km = array(self.km)
231     self.scale = array(self.scale)
232     self.zred=array(self.zred)
233     self.scale2= array(self.scale2)
234     self.sg =array(self.sg)
235     self.t_z=array(self.t_z)
236     self.d_c2=array(self.d_c2)
237     self.rdm2=array(self.rdm2)
238     self.rbr2=array(self.rbr2)
239
240     sgtz.close()
241
242
243
244     print ' '
245     print 'Sigma(M) calculado'
246     print ' '
247     print ' '
248     print 'Classe Cosmo Inicializada'
249
250
251
252 def __CalculusRenaiss(self,k,E,n):
253     print 'Processo %i inicializado' %n
254
255     #for i in range(E):
256     kmass=self.kmass[k:k+E]
257     Z=self.zred[k:k+E]
258     e,f=cl1.sigma(self.anorm,self.alfa,self.beta,self.gama,self.ct2,kmass)
259     a,b,c,d=cl2.timerho(self.omegab,self.omegam,self.omegal,\
260         self.h,self.rodM0,self.robr0,self.deltac,Z)
261     for i in range(len(Z)):
262         self.km[k]=e[i]
263         self.sg[k]=f[i]
264         self.d_c2[k]=a[i]
265         self.rdm2[k]=b[i]
266         self.rbr2[k]=c[i]
267         self.t_z[k]= d[i]
268         k+=1
269
270
271
272
273 #####
274 # Definindo os metodos da class Cosmo
275 #####
276
277 #@param kl  $\tilde{M}$  um real que representa a escala de massa
278 #@return retorna um real que representa a variancia de massa
279 def sigma8(self,kl):
280     '''calcula o integrando de sigma(M,z) para um
281     filtro top-hat. Em z = 0 fornece sigma_8.
282     Para z > 0 fornece sigma(M,z).
283     ...
284     k = np.exp(kl)
285     x = self.scale2[self.indice]*k
286     pk1 = 1.0+(self.alfa*k+(self.beta*k)**1.5+(self.gama*k)**2.0)**1.13
287     pk2 = 1.0/pk1
288     pdmk = pk2*(k**3.0)
289     return pdmk*(3.0*(np.sin(x) - x*np.cos(x))/x**3.0)**2.0
290

```



```

291 def sigma(self, scale, k):
292     self.scale2[k]=scale
293     self.indice=k
294     sigma_mz= np.sqrt(self.anorm*(
295         spi.romberg(self.sigma8,np.log(1.0e-7/scale),np.log(1.0e-3/scale),tol=1.48e-08)+
296         spi.romberg(self.sigma8,np.log(1.0e-3/scale),np.log(1.0/scale),tol=1.48e-08)+
297         spi.romberg(self.sigma8,np.log(1.0/scale),np.log(10.0/scale),tol=1.48e-08)+
298         spi.romberg(self.sigma8,np.log(10.0/scale),np.log(100.0/scale),tol=1.48e-08)
299     ))
300     return sigma_mz
301
302 def fstm(self, lm):
303     '''fornece a funcao a ser usada por dfridr para calculo de d_sigma_dlog10(m).'''
304
305     j = locate(self.km, len(self.km)-1, lm)
306     return self.sg[j]
307
308
309 def dt_dz(self, z):
310     "Fornece a relacao entre o redshift e o tempo cosmico "
311     import numpy as np
312
313     dtdz=self.ct3/((1.0+z)*np.sqrt(self.omegal+self.omegam*(1.0+z)**3.0))
314     return dtdz
315
316 def t_red(self, t):
317     '''Para um dado tempo fornece o redshift equivalente'''
318     j=locate(self.t_z, len(self.t_z)-1, t)
319     return self.zred[j]
320
321 def age(self, z):
322     '''Fornece a idade do Universo em um dado Redshift z'''
323     import numpy as np
324     z1 = 1.0+z
325     ascale = 1.0/z1
326     ascale3 = ascale**3.0
327     fct = self.omegalm*ascale3
328     return 6.522916e+09*np.log(np.sqrt(fct)+np.sqrt(fct+1.0))/self.hsl
329
330 def dr_dz(self, z):
331     '''Raio comovel em km'''
332     import numpy as np
333     vl = 3.0e+5 #Velocidade da luz em km/s
334     hub = 3.25e-18 #H_{0}/h = 1/s
335     drdz = (vl/hub/self.h)/np.sqrt(self.omegam*(1.0+z)**3.0+self.omegal)
336     return drdz
337
338 def dV_dz(self, z):
339     '''Variacao do volume comovel. em km^{3}'''
340     rz = spi.romberg(self.dr_dz, 0, z, tol=1.48e-09)
341     drdz = self.dr_dz(z)
342     dVdz = 4.0*np.pi*drdz*rz**2.0
343     return dVdz
344
345
346 def V_halo(self, z, Mhalo):
347     '''Volume de um halo de Massa M_h em um redshift z. em unidade de Mpc^{3}'''
348     if(z<0.):z=0.0
349     vl = 3.0e+5 #Velocidade da luz em km/s
350
351     Gnew = 1.30e26 #Constante gravitacional km^{3}/ano^{2}/M_{solar}
352
353     #volume do halo de massa M_h
354     a= 1.0/(1.0+z)
355
356     H0 = (1.02e-10)*self.h #constante de hubble ano^{-1}
357     H2 = (H0**2.0)*(self.omegam/a**3.0+self.omegal)
358     x = self.omegam*a/(self.omegam*a+self.omegal*a**4.0)-1.0
359     delta_vir = 18.0*np.pi+82.0*x-39.0*x**2.0
360     V_h = (4.0*np.pi/3.0)*(2.0*Gnew*Mhalo/(delta_vir*H2))*3.45e-59 #1km^{3} = 3.45 X 10^{-59}Mpc^{3}
361     return V_h
362
363
364 def growth2pi(self, z):
365     " Funcao de Crescimento: Fornece a funcao de crescimento e sua derivada com relacao ao tempo"
366     z1 = 1.0 + z
367     ascale = 1.0/z1

```

```

368     ascale2 = ascale**2.0
369     ascale3 = ascale**3.0
370     ascale4 = ascale*ascale3
371     ea = self.omegam*ascale+self.omegal*ascale4
372     omegamz = self.omegam*ascale/ea
373     omegalz = self.omegal*ascale4/ea
374     dz1 = 1.0-omegalz+omegamz**(4.0/7.0)+omegamz/2.0
375     growth = (2.5*omegamz*ascale/dz1)/self.s2pi
376
377     Q = 2.5*omegamz*ascale
378     dea_da = self.omegam+4.0*ascale3*self.omegal**6.0
379     domegamz_da = (self.omegam/ea**2.0)*(ea-ea*dea_da)
380     domegalz_da= self.omegal*(4.0*ascale3*ea-ascale4*dea_da)/(ea**2.0)
381     dQ_da = 5.0*(omegamz+ascale*domegamz_da)
382     dP_da = 2.0*(-domegalz_da + (4.0/7.0)*domegamz_da/(omegamz**(3.0/7.0))+domegamz_da/2.0)
383     dadz = ascale2
384     dgrowth_dt = (dadz)*(dz1*dQ_da-Q*dP_da)/(dz1**2.0)
385     return growth,dgrowth_dt
386
387     def rodm(self,z):
388         "Fornece a evolucao da materia escura com z e sua derivada em z."
389         z1 = 1.0 + z
390         ascale = 1.0/z1
391         ascale2 = ascale**2.0
392         ascale3 = ascale**3.0
393         return self.rodm0/ascale3,3.0*self.rodm0/ascale2
394
395     def robr(self,z):
396         "Fornece a evolucao da materia barionica com z"
397         z1 = 1.0 + z
398         ascale = 1.0/z1
399         ascale3 = ascale**3.0
400         return self.robr0/ascale3

```

B.1.1.2 Classe PressSchechter

```

1  #!/usr/bin/env python
2  #-*- coding: utf-8 -*-
3
4  __author__='Eduardo dos Santos Pereira'
5  __version__='1.0'
6  __date__='11/03/2011'
7
8
9  '''
10     This file is part of PyGrWC.
11     copyright : Eduardo dos Santos Pereira
12     31 mar. 2011.
13
14     PyGrWC is free software: you can redistribute it and/or modify
15     it under the terms of the GNU General Public License as published by
16     the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
17     PyGrWC is distributed in the hope that it will be useful,
18     but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
19     MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
20     GNU General Public License for more details.
21
22     You should have received a copy of the GNU General Public License
23     along with Foobar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
24
25     Aplicativo: ps
26     versao: 1.0
27     Autor : Eduardo dos Santos Pereira (Pereira; E. S.)
28     data: 31/05/2011
29
30     obs.:
31     Parte do Projeto de Doutorado em Astrofísica pelo Instituto Nacional
32     de Pesquisas Espaciais -INPE.
33
34     Objetivo do modulo corrente:
35
36     Utilizando o formalismo de Reed et al (MNRAS, 346, 565-572, 2003)
37     calcula-se a fracao de massa em halos de materia escura.
38     O programa calcula a densidade de massa em halos (integral de Mdn) e
39     a fracao de barions em estruturas (fbstruct) como funcao do tempo.

```

```

40  Usa-se a funcao Transferencia de Efstathiou, Bond & White
41  — (MNRAS, 258, 1P, 1992).
42  Na atual versao usamos a normalizacao do WMAP (sem ondas gravitacionais)
43  a expressao foi adaptada de Eisenstein e Hu (ApJ 511, 5, 1999)
44  de forma a fornecer sigma_8 = 0,84.
45  A fracao de massa dos halos e obtida de Sheth e Tormen (MNRAS 308, 119,
46  1999)
47  Todos os modelos consideram Omega_Total = Omega_M + Omega_L = 1,0
48
49  "Best Fit" do WMAP-3: omega_m = 0,238, omega_b = 0,042, omega_l = 0,762,
50  h = 0,734, sigma_8 = 0,744
51  Veja que sigma_8 pelo WMAP e' obtido atraves da recombinacao. Outras
52  estimativas (p.e. aglomerados de galaxias) fornecem sigma_8 = 0,84.
53  Conjunto de dados: WMAP-3: omega_m = 0,238, omega_b = 0,042, omega_l = 0,762
54  h = 0,734, sigma_8 = 0,84
55  WMAP-1: omega_m = 0,29, omega_b = 0,44, omega_l = 0,71
56  h = 0,72, sigma_8 = 0,9
57
58  '''
59  from cosmo import *
60  from run_kut4 import *
61  from run_kut5 import *
62  from WinBarra import *
63  from diferencial import *
64  from ProgBarr import *
65  from Extras_pack import *
66  from cStringIO import StringIO
67  import time
68  from ppvector import ppvector
69  import multiprocessing as mpg
70  from numpy.ndarray import zeros,Float64,array
71
72
73  class PressSchechter(Cosmo):
74      '''Essa classe e construida baseada no formalismo tipo
75      Press-Schechter que fornece caracteristicas como densidade numerica
76      de halosde materia escura no intervalo de massa M_h,M_h+dM_h, fracao
77      de barions em estruturas, taxa de acrecao de barios e numero total
78      de halos.'''
79
80      def __init__(self,omegab,omegam,omegal,h,lmin,zmax,db):
81          ''' Inicialzando a classe PressSchechter(Cosmo) — Note que esta
82              classe herda atributos da classe Cosmo'''
83          from numpy.ndarray import zeros,Float64,array
84
85          print' '
86          print' '
87
88          Cosmo.__init__(self,omegab,omegam,omegal,h,lmin,zmax,db)
89          self.np =10000
90
91
92          arq = 'ab_'+str(omegab)+"_"+str(omegam)+"_"+\
93              str(omegal)+"_"+str(h)+"_"+\
94              str(lmin)+"_"+str(zmax)
95
96          print' '
97
98          self.lmin=lmin
99
100         print'Inicio do calculo de fluxo de massa '
101         print'a_b(t) (em M_Sol yr^{-1} Mpc^{-3})'
102         print' '
103         try:
104
105
106             DadosMatriz= db(db.pressschechter.Parametro == arq ).select()[0]
107
108
109
110
111             abzt = StringIO(DadosMatriz.Matriz)
112             X = io.mmread(abzt)
113             self.abt2 =zeros(self.np,type=Float64)
114             self.ascale=zeros(self.np,type=Float64)
115
116             def Opera(X,i):

```

```

117         self.ascale[i]=X[i,0]
118         self.abt2[i]=X[i,1]
119
120     [Opera(X,i) for i in range(self.np)]
121
122
123     self.tck_ab = spint.splprep(self.ascale,self.abt2)
124     print "ab(t) lido"
125
126     abt.close()
127
128 except:
129
130     print 'Calculando Fracao de barions '
131     print ' '
132     print ' '
133
134
135
136
137     deltaz=self.zmax/float(self.np)
138
139
140
141
142     fbt2= mpg.Array('d',[0 for i in range(self.np)])
143     zFB= mpg.Array('d',[self.zmax-i*deltaz for i in \
144         range(self.np)])
145     ascale = [1.0/(1.0+zFB[i]) for i in range(self.np)]
146
147     def CalculusRenaiss(k,E,n):
148
149         for i in range(E):
150             z=zFB[k]
151             fbt2[k]=self.fbstruc(z)
152             k+=1
153
154     Dmatriz=self.np
155     C1= ppvector(Dmatriz,CalculusRenaiss)
156     C1.runProcess()
157
158
159
160     print ' '
161     print ' '
162     print 'Calculando a_b(t) propriamente dito'
163     print ' '
164     print ' '
165
166
167
168     tck=spint.splprep(ascale,fbt2)
169     ab3=spint.splev(ascale, tck, der=1)
170
171
172     #self.abt2 =zeros(self.np,type=Float64)
173     #self.ascale=zeros(self.np,type=Float64)
174     deltaz=self.zmax/float(self.np)
175
176
177     def a5(z,i):
178         a=1.0/(1.0+z)
179         a2=a*a
180         a3=-1.0*ab3[i]*a2
181         a4=a3
182         a5=self.robr0*abs(a4)/self.dt_dz(z)
183         return a5
184
185
186     self.abt2= mpg.Array('d',[0 for i in range(self.np)])
187     zFB= mpg.Array('d',[self.zmax-i*deltaz for i in range(self.np)])
188     self.ascale=mpg.Array('d',[1.0/(1.0+zFB[i])\
189         for i in range(self.np)])
190
191
192     def CalculusRenaiss2(k,E,n):
193         for i in range(E):

```

```

194         self.abt2[k]=a5(zFB[k],k)
195         k+=1
196
197         Dmatriz=self.np
198
199         C2= ppvector(Dmatriz,CalculusRenaiss2)
200         C2.runProcess()
201
202         X=[[self.ascale[i],self.abt2[i]] for i in range(self.np)]
203
204         X01 = array(X)
205
206         abzt=StringIO()
207         comentario=""" Essa matriz contem os seguintes vetores,
208             respectivamente por coluna:
209 fator de escala (a=1/(1+z)), taxa de acrescáo de massa em estruturas
210
211 """
212         io.mmwrite(abzt,X01,comment=comentario,field='real')
213
214         db.pressschechter.insert(Parametro=arg,Matriz=abzt.getvalue)
215         db.commit()
216
217
218         self.tck_ab = spint.splrep(self.ascale,self.abt2)
219
220
221         abzt.close()
222
223
224
225         print' '
226         print' '
227         print'Classe PressSchechter inicializada'
228
229
230 #####
231 # Definindo os metodos da class PressSchechter
232 #####
233
234 def halos_n(self,z):
235     ''' Fornece a integral da funcao de massa f(ps,M,z) vezes M
236     no intervalo de massa log(M_min) a log(M_max)'''
237     z2=z
238
239     def fmassM(lm):
240         '''Funcao de massa f(M,z) de Sheth e Tormen
241         (MNRAS 308, 119, 1999) multiplicada por M.
242         Essa funcao e usada pela funcao IfmassM(lmin,lmax,z).
243         '''
244         import numpy as np
245         gte,gte2 = self.growth2pi(z2)
246         rdmt,drmdt= self.rodM(z2)
247         step=lm/2.0e+1
248         kmsgm=lm
249         kmass= 10.0**(kmsgm)
250         sgm=self.fstm(lm)
251         dsgm_dlgm=dfridr(self.fstm,lm,step,err=0.0)
252         sigma1= self.deltac/(sgm*gte)
253         sigma2=sigma1**2.0
254         expn=np.exp(-self.ast2*sigma2/2.0)
255         fst=self.ctst*sigma1*\
256             (1.0+(1.0/(sigma2*self.ast2))**self.pst)*expn
257         frst = (rdmt/kmass)*fst*np.abs(dsgm_dlgm)/sgm
258         kmassa2=self.tilt2*kmass
259         mdn_dm=kmassa2*frst
260         return mdn_dm
261
262         deltal=(self.lmax-self.lmin)/50.0
263         #Lm=zeros(50,type=Float64)
264         #Fm=zeros(50,type=Float64)
265
266         Lm=[self.lmin +i*deltal for i in range(50)]
267
268         Fm= [fmassM(lm) for lm in Lm]
269
270         tck=spint.splrep(Lm,Fm)

```

```

271         Inte=spint.splint(self.lmin,self.lmax, tck)
272         return Inte
273
274     def numerical_density_halos(self,z):
275         '''
276         Fornece a densidade numerica de halos em um dado redshift
277         '''
278         z2=z
279         deltal=(self.lmax-self.lmin)/50.0
280         Lm=[self.lmin +i*deltal for i in range(50)]
281
282         Fm= [self.fmast(lm,z2) for lm in Lm]
283
284         tck=spint.splprep(Lm,Fm)
285         Inte=spint.splint(self.lmin,self.lmax, tck)
286         return Inte
287
288     def fbstruc(self,z):
289         '''Calculo da fracao de b̃arions em estruturas como
290         '''
291         rdm,drdm_dt = self.rodM(z)
292         fb = self.halos_n(z)/rdm
293         return fb
294
295     def abt(self,a):
296         '''Retorna a taxa de acresc̃ento de barions em estruturas para
297         um dado fator de escala.
298         '''
299         i = locate(self.ascale,len(self.ascale)-1,a)
300         return self.abt2[i]
301
302     def fmast(self,lm,z):
303         '''Funcao de massa f(M,z) de
304         Sheth e Tormen (MNRAS 308, 119, 1999).
305         '''
306         import numpy as np
307         gte,gte2 = self.growth2pi(z)
308         rdmt,drdmt= self.rodM(z)
309         step=lm/2.0e+1
310         kmsgm=lm
311         kmass= 10.0**(kmsgm)
312         sgm=self.fstm(lm)
313         dsgm_dlgm=dfridr(self.fstm,lm,step,err=0.0)
314         sigma1= self.deltac/(sgm*gte)
315         sigma2=sigma1**2.0
316         expn=np.exp(-self.ast2*sigma2/2.0)
317         fst=self.ctst*\
318             sigma1*(1.0+(1.0/(sigma2*self.ast2))**self.pst)*expn
319         frst = (rdmt/kmass**2.0)*fst*np.abs(dsgm_dlgm)/sgm
320         dn_dm=frst
321         return dn_dm

```

B.1.1.3 Classe csfr

```

1  #!/usr/bin/env python
2  #-*- coding: utf-8 -*-
3  __author__='Eduardo dos Santos Pereira'
4  __version__='1.0'
5  __date__='11/03/2011'
6
7  """
8      This file is part of PyGmWC.
9      copyright : Eduardo dos Santos Pereira
10     31 mar. 2011.
11
12     PyGmWC is free software: you can redistribute it and/or modify
13     it under the terms of the GNU General Public License as published by
14     the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
15     PyGmWC is distributed in the hope that it will be useful,
16     but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
17     MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
18     GNU General Public License for more details.
19
20     You should have received a copy of the GNU General Public License
21     along with Foobar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.

```

```

22
23 *****Setembro de 2010*****
24 *****Versao 0.01*****
25 -----
26 Autor: Eduardo dos Santos Pereira.
27 email:duducosmo@das.inpe.br, duducosmos@hotmail.com
28 versao: 1.0
29 -----
30 *****
31 """
32 import sys
33 from cosmo import *
34 from ps import *
35 from run_kut5 import *
36 import run_kut4 as rk42
37
38 try:
39     import csfrF77 as cs
40 except:
41     try:
42         from numpy import f2py
43         f2py.compile(open('./pygrawc/csfrF77.f','r').read(),'csfrF77')
44     except:
45         print"Is not possible to compile the necessary modules."
46         sys.exit()
47
48 from WinBarra import *
49 from diferencial import *
50 from ProgBarr import *
51 from Extras_pack import *
52 from numpy.numarray import zeros,Float64
53 import time
54
55
56 class csfr(PressSchechter):
57
58     def __init__(self,omegab,omegam,omegal,h,lmin,zmax,db,eimf=1.35,tau0=2.0,nsch=1):
59         PressSchechter.__init__(self,omegab,omegam,omegal,h,lmin,zmax,db)
60
61         self.db=db
62         self.loc = "CSFR_"+str(omegab)+"_"+str(omegam)+"_"+str(omegal)\
63                 +"_"+str(h)+"_"+str(zmax)+"_"+str(eimf)+\
64                 '_'+str(tau0)+'_'+str(nsch)
65
66         tau1=tau0*1.0e9
67         self.cc=self.tck_ab[1]
68         self.esnor = 1.0 #normalizacao da taxa cosmica de formacao estelar
69         self.nsch=nsch
70         self.tau1=tau1
71         #Normalizacao da funcao de massa inicial
72
73         self.eimf=eimf
74         self.aminf1=2.5e1
75         self.amsup1=1.4e2
76         amin=1.0e-1
77         self.eimf0 = eimf-1.0
78         self.anorm1 = self.eimf0/(1.0/amin**self.eimf0-1.0/self.amsup1**self.eimf0)
79         try:
80
81             print 'lendo dados'
82             DadosMatriz= db(db.cosmicformation.Parametro == self.loc ).select()[0]
83
84
85
86
87
88             Dados = StringIO(DadosMatriz.Matriz)
89
90             X= io.mmread(Dados)
91
92
93             self.astar= zeros(len(X),type=Float64)
94             self.csfr = zeros(len(X),type=Float64)
95             self.rho_gas = zeros(len(X),type=Float64)
96
97         def Opera(X,i):
98             x=X[i]

```

```

99         self.aster[i]=1.0/(1.0+x[0])
100         self.rho_gas[i]=x[1]
101         self.csfr[i]=x[2]
102
103         [Opera(X,i) for i in range(len(X))]
104
105         Dados.close()
106
107
108         print 'CSFR lida'
109     except:
110         self.csfr,self.rho_gas,self.aster=self.SFR()
111
112     tck_sf = spint.splrep(self.aster,self.csfr)
113     self.cs = tck_sf[1]
114
115     tck_sg=spint.splrep(self.aster,self.rho_gas)
116     self.cs2=tck_sg[1]
117
118     def rho_star(self,z):
119         '''Retorna a funcao interpolada, via cubi-spline, da taxa cosmica
120         de formacao estelar'''
121         a = 1.0/(1.0+z)
122         err="OK"
123
124         j=-1
125
126         while(1):
127             j=j+1
128             if(a < self.aster[j+1] and a >= self.aster[j] \
129             and j<= (len(self.aster)-3)):
130                 resp = (self.cs[j]/6.0)*(((a-self.aster[j+1])**3.0)/\
131                 (self.aster[j]-self.aster[j+1])-(a-self.aster[j+1])*\
132                 (self.aster[j]-self.aster[j+1])) \
133                 -(self.cs[j+1]/6.0)*(((a-self.aster[j])**3.0)/\
134                 (self.aster[j]-self.aster[j+1])-(a-self.aster[j]))\
135                 *(self.aster[j]-self.aster[j+1])) \
136                 +(self.csfr[j]*(a-self.aster[j+1])-self.csfr[j+1]\
137                 *(a-self.aster[j]))/(self.aster[j]-self.aster[j+1])
138                 return resp
139
140             elif(j >=(len(self.aster)-2) and j <= len(self.aster)):
141                 return self.csfr[j]
142             elif(a < self.aster[0]):
143                 err = "Falha"
144                 print err
145                 break
146
147     def Rho_gas(self,z):
148         '''Retorna a funcao interpolada, via cubi-spline, da densidade de gas em estruturas'''
149         a = 1.0/(1.0+z)
150         err="OK"
151
152         j=-1
153
154         while(1):
155             j=j+1
156             if(a < self.aster[j+1] and a >= self.aster[j] \
157             and j<= (len(self.aster)-3)):
158                 resp = (self.cs2[j]/6.0)*(((a-self.aster[j+1])**3.0)/\
159                 (self.aster[j]-self.aster[j+1])-\
160                 (a-self.aster[j+1])*(self.aster[j]-self.aster[j+1])) \
161                 -(self.cs2[j+1]/6.0)*(((a-self.aster[j])**3.0)/\
162                 (self.aster[j]-self.aster[j+1])-(a-self.aster[j]))\
163                 *(self.aster[j]-self.aster[j+1])) \
164                 +(self.rho_gas[j]*(a-self.aster[j+1])-self.rho_gas[j+1]\
165                 *(a-self.aster[j]))/(self.aster[j]-self.aster[j+1])
166                 return resp
167
168             elif(j >=(len(self.aster)-2) and j <= len(self.aster)):
169                 return self.rho_gas[j]
170             elif(a < self.aster[0]):
171                 err = "Falha"
172                 print err
173                 break
174
175     def phi(self,m):

```



```

176         return self.anorm1*m**(-(1.0+self.eimf))
177
178     def spn(self,a):
179         '''Retorna a funcao interpolada, via cubi-spline, da taxa de acrescáo de barions em estruturas.'''
180
181         err="OK"
182
183         j=-1
184
185         while(1):
186             j=j+1
187             if(a < self.ascale[j+1] and a >= self.ascale[j]\
188                and j<= (len(self.ascale)-3)):
189                 resp = (self.cc[j]/6.0)*(((a-self.ascale[j+1])**3.0)/\
190                    (self.ascale[j]-self.ascale[j+1])-(a-self.ascale[j+1])\
191                    *(self.ascale[j]-self.ascale[j+1])) \
192                    -(self.cc[j+1]/6.0)*(((a-self.ascale[j])**3.0)/\
193                    (self.ascale[j]-self.ascale[j+1])-(a-self.ascale[j])\
194                    *(self.ascale[j]-self.ascale[j+1])) \
195                    +(self.abt2[j]*(a-self.ascale[j+1])-self.abt2[j+1]\
196                    *(a-self.ascale[j]))/(self.ascale[j]-self.ascale[j+1])
197                 return resp
198
199             elif(j >=(len(self.ascale)-2) and j <= len(self.ascale)):
200                 return self.abt2[j]
201             elif(a < self.ascale[0]):
202                 err="Falha"
203                 print err
204                 break
205
206     def R_es(self,rg):
207         '''Dada a densidade de gas em estruturas em um dado instante,
208         a funcao retorna a taxa cosmica de formacao estelar'''
209         if(self.nsch == 1):
210             roes = rg/self.tau1
211         else:
212             roes = (rg**self.nsch)/self.tau1/self.robr0**(self.nsch-1.0)
213         return roes
214     def Z_r(self,a):
215         return 1.0/a-1.0
216
217     def FCN(self,a,rho_g):
218         from numpy.numarray import zeros,Float64
219
220         '''Retorna a funcao a ser integrada para a obtencao da densidade
221         de gas (bbarions) em estruturas'''
222
223         z= 1.0/a-1.0
224         if(z<0.0): z=0.0
225
226         tage=self.age(z)
227         age01 = 4.0*np.log10(tage)-2.704e+01
228         age02 = (3.6-np.sqrt(age01))/2.0
229
230         mi_1 = 1.0e+01**age02
231         amexp1 = (1.0/mi_1)**self.eimf0
232         amexp2 = (1.0/self.amsup1)**self.eimf0
233         amexp3 = (1.0/8.0)**self.eimf0
234         amexp4 = (1.0/self.aminf1)**self.eimf0
235         amexp5 = (1.0/mi_1)**self.eimf
236         amexp6 = (1.0/8.0)**self.eimf
237         amexp7 = (1.0/10.0)**self.eimf
238         amexp8 = (1.0/self.aminf1)**self.eimf
239         amexp9 = (1.0/self.amsup1)**self.eimf
240
241
242         yrem1 = (amexp1-amexp2)/self.eimf0
243         yrem2 = 1.156e-01*(amexp1-amexp3)/self.eimf0
244         yrem3 = 1.3e+01*(amexp4-amexp2)/self.eimf0/2.4e+01
245         yrem4 = 4.551e-01*(amexp5-amexp6)/self.eimf
246         yrem5 = 1.35e+00*(amexp6-amexp7)/self.eimf
247         yrem6 = 1.40e+00*(amexp7-amexp8)/self.eimf
248         yrem7 = 6.5e+01*(amexp8-amexp9)/self.eimf/6.0
249
250
251         yr = self.anorm1*(yrem1-yrem2-yrem3-yrem4-yrem5-yrem6+yrem7)
252

```

```

253     if(self.nsch == 1.0):
254         sexp = (1.0-yr)/self.tau1
255     else:
256         sexp = (1.0-yr)/self.tau1/self.robr0**(self.nsch-1.0)
257
258     F = zeros(1,type=Float64)
259     F[0]=(-sexp*(rho_g[0])**self.nsch+self.esnor*self.spn(a)/\
260 self.robr0)*self.dt_dz(z)/a**2.0
261     #print'Python', self.spn(a),a
262     return F
263
264 def SFR(self):
265     print'Inicio do Calculo da Taxa Cosmica de Formacao Estelar'
266     #Normalizacao da taxa cosmica de formacao estelar
267     rho_g0 = array([1.0e-9])
268     a0 = self.ascale[0]
269     nf = len(self.ascale)-1
270     af=self.ascale[nf]
271     step = (af-a0)/100.
272
273     Aarray,Hx=self.__geraXarray(a0,af,step)
274     A,R_g=cs.csfr(self.eimf,self.eimf0,self.amsup1,self.aminf1,\
275 self.anorm1,self.tau1,self.robr0,self.nsch,\
276 self.omegab,self.omegam,self.omegal,self.h,\
277 self.cc,self.ascale,self.abt2,self.esnor,\
278 rho_g0,Hx,Aarray)
279
280
281     ng = len(A)-1
282
283     if(self.nsch == 1):
284         roes = R_g[ng]/self.tau1
285     else:
286         roes = (R_g[ng]**self.nsch)/self.tau1/self.robr0**(self.nsch-1.0)
287
288     self.esnor = 1.62593696e-2/roes
289
290     #Calculando a taxa cosmica de formacao estelar normalizada
291     print'Normalizacao'
292
293     rho_g0 = array([1.0e-9])
294     a0 = 1.0/(self.zmax+1.0)
295     nf = len(self.ascale)-1
296     af=self.ascale[nf]
297     step = (af-a0)/5000.
298     Aarray,Hx=self.__geraXarray(a0,af,step)
299     A,R_g=cs.csfr(self.eimf,self.eimf0,self.amsup1,self.aminf1,\
300 self.anorm1,self.tau1,self.robr0,self.nsch,\
301 self.omegab,self.omegam,self.omegal,self.h,\
302 self.cc,self.ascale,self.abt2,self.esnor,\
303 rho_g0,Hx,Aarray)
304
305
306     rho_s = self.R_es(R_g)
307
308
309     Z =self.Z_r(A)
310
311
312     X=[[Z[i],R_g[i],rho_s[i]] for i in range(len(A))]
313
314     X2 = array(X)
315     arq = StringIO()
316     comentario="""Essa matriz contem os seguintes vetores, respectivamente por coluna:
317 redshif, densidade de gas em estruturas, taxa cosmica de formacao estelar
318 """
319     io.mfwrite(arq,X2,comment=comentario,field='real')
320
321     self.db.cosmicformation.insert(Parametro=self.loc,Matriz=arq.getvalue)
322     self.db.commit()
323     arq.close()
324     print" "
325     print"Taxa cosmica de formacao estelar calculada"
326     print" "
327
328     return rho_s,R_g,A
329

```

```

330     def __geraXarray(self, x0, xf, h):
331         x=[]
332         hx=[]
333         hx.append(h)
334         x.append(x0)
335         while(x0<xf):
336             h=min(h,xf-x0)
337             x0+=h
338             x.append(x0)
339             hx.append(h)
340         return array(x),array(hx)

```

B.1.1.4 Classe smbh

```

1  #!/usr/bin/python
2  #-*- coding: utf-8 -*-
3  __author__='Eduardo dos Santos Pereira'
4  __date__='31/05/2011'
5  __version__='1.0'
6
7
8  """
9      This file is part of PyGraWC.
10     copyright : Eduardo dos Santos Pereira
11     31 mar. 2011.
12
13     PyGraWC is free software: you can redistribute it and/or modify
14     it under the terms of the GNU General Public License as published by
15     the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
16     PyGraWC is distributed in the hope that it will be useful,
17     but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
18     MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
19     GNU General Public License for more details.
20
21     You should have received a copy of the GNU General Public License
22     along with Foobar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
23
24     Aplicativo: PyGraWC
25     versao: 1.0
26     Autor : Eduardo dos Santos Pereira (Pereira; E. S.)
27     data: 31/05/2011
28
29     obs.:
30     Parte do Projeto de Doutorado em Astrofísica pelo Instituto Nacional
31     de Pesquisas Espaciais -INPE.
32
33     Objetivo do modulo corrente:
34     Modulo contendo a classe
35     DensityMassSMBH(CSFR)
36     Os metodos dessa classe são descritos no artigo de Pereira e Miranda
37     2011 publicado no MNRAS Letters 2011.
38     """
39     from csfr import *
40     from diferencial import *
41     from Extras_pack import *
42     from numpy.numarray import Float64,zeros,array
43     import math
44
45     class DensityMassSMBH(csfr):
46         """
47         Class DensityMassSMBH: Descreve a historia da funcao de massa de
48         buracos negros supermassivos ( $\rho_{BH}(z)$ ) e sua derivada,
49         a densidade de luminosidade ( $dU/dt$ ) de quasares, a função Duty
50         Cycle, que descreve a fracao entre buracos negros ativos e
51         inativos. spi.romberg(self.drho_bhstar_dz,z,self.zini)
52         Os parametros de entrada sao:
53
54         omegab = 0.04,
55         omegam = 0.24,
56         omegal = 0.73,
57         h = 0.76,
58         lmin = 6.0,
59         zmax = 20.0,
60         locfile=str(os.getcwd())+"/trabalho",
61         eimf = 1.35,

```

```

62     tau0 = 4.0,
63     nsch = 1,
64     np=-1.0,
65     z_s=3.0,
66     mmed=1.0
67     """
68     def __init__(self,db,np=-1.0,n1=1.81,n2=1.96,ts=5.40e9,z_tau=17.0,\
69                 omegab = 0.04, omegam = 0.24, omegal = 0.73, h = 0.76,\
70                 lmin = 6.0, zmax = 20.0,\
71                 eimf = 1.35, tau0 = 2.0,nsch = 1 ):
72         """
73         omegab = 0.04,
74         omegam = 0.24,
75         omegal = 0.73,
76         h = 0.76,
77         lmin = 6.0,
78         zmax = 20.0,
79         locfile=str(os.getcwd())+"trabalho",
80         eimf = 1.35,
81         tau0 = 4.0,
82         nsch = 1,
83         np=-1.0,
84         z_s=3.0,
85         """
86
87
88     csfr.__init__(self,omegab,omegam,omegal,h,lmin,zmax,db,\
89                 eimf,tau0,nsch)
90
91
92
93     self.vl = 3.0e+5 #Velocidade da luz em km/s
94     self.Gnew = 1.30e26 #Const. gravit. km3/ano2/Msolar
95     self.vl2= self.vl**2.0
96     self.rho_bh0 = (5.9*self.h**(3.0))*1e5 # MsolarMpc-3
97     self.Mmax=1.e9
98     self.Mmin=1.0e3
99     self.Mk = 1.0/3.08e19 # Converter km para Mpc
100    self.tsalp = 4.2e7 #yr Tempo de Salpeter
101    self.tmini=self.tsalp#
102
103
104    # Parametros usados pela funcao f= $\bar{\eta}/(1-\bar{\eta})$ 
105    self.n1=n1
106    self.n2=n2
107    self.ts=ts
108    #print 'Verificando parentros de Entrada em ogc_smbh'
109    #print 'np=%2f,n1=%2f,n2=%2f,ts=%3.3e' %(np,n1,n2,ts)
110
111
112    self.zini=zmax
113    self.np= np
114    self.age0=self.age(self.zini)
115    self.eta0=0.1
116    self.z_tau=z_tau
117
118
119
120
121
122    if(self.np == -1.0):
123        self.B=1.0/(self.age(0.0)-self.tmini)
124    else:
125        self.B= (self.np+2.0)/(self.age(0.0)**(self.np+2.0)\
126                -self.tmini**(self.np)+2.0)
127
128
129    self.CO = self.rho_bh0/spi.romberg(self.drho_bhstar_dz,0.0,\
130                self.zini)
131
132    def p_bh(self,z):
133        """
134        Funcao de probabilidade de acrescencia de materia por buracos
135        negros supermassivos,
136        Tem a forma de  $P(t_{-}\{d\})=B*t_{-}^{\{n\}}_{-}\{d\}$ , com  $t_{-}\{d\}=$ 
137         $\int^{zini}_{z}(dt/dz)'dz'$ 
138        """

```

```

139     td = self.age(z)-self.age0
140
141     if td == 0.0:
142         return 0.0
143     else:
144         return self.B*(td)**self.np
145
146
147
148     def drho_bhstar_dz(self, z1):
149         """
150         Funcao que conecta a taxa cosmica de formacao estelar com a
151         funcao de massa de buracos negros
152         supermassivos, e a funcao a ser integrada e tem a forma:
153         \frac{\dot{\rho}_*(z)}{(1+z)}P(t_d)(dt/dz)
154         """
155         a = 1.0/(1.0+z1)
156         P=self.p_bh(z1)
157
158         f = self.rho_star(z1)*P*self.dt_dz(z1)*a
159         return f
160
161     def rho_bh(self, z):
162         """
163         Retorna a densidade de massa de buracos negros supermassivos
164         para um dado redshift. E normalizada para
165         o presente, tem a forma:
166         \rho_{BH}=\rho^0_{BH}
167         \frac{\rho^*_{BH}(z)}{\rho^*_{BH}(z=0)}
168         """
169         f=self.C0*spiro.romberg(self.drho_bhstar_dz, z, self.zini)
170
171         return f
172
173     def drho_bh_dz(self, z):
174         """
175         Retorna a derivada da densidade de massa de buracos negros
176         supermassivos com o tempo um dado
177         redshiftm tem a forma de:
178         \dot{\rho}_{BH}=\frac{\rho^0_{BH}}{\rho^*_{BH}(z=0)}
179         \frac{\dot{\rho}_*(z)}{(1+z)}P(t_d)
180         """
181         f=self.C0*self.rho_star(z)*self.p_bh(z)/(1.0+z)
182         return f
183
184     def dU_dt(self, z):
185         """
186         Funcao que retorna a densidade de luminosidade de quasar
187         em unidade de
188         L_{\odot}Mpc^{-3}.
189         tem a forma de :
190         \dot{U}=c^2\frac{\bar{\eta}\{1-\bar{\eta}\}\dot{\rho}_{BH}}
191         """
192
193         f=self.g(z)*self.f(z, self.n1, self.n2, self.ts)
194
195         return f
196
197     def g(self, z):
198         """
199         Representa a derivada da densidade de massa de buracos negros
200         supermassivos com o tempo multiplicado pela velocidade da luz
201         ao quadrado eredimensionada para fornecer unidade de
202         L_{\odot}Mpc^{-3} para a funçãŁo densidade de luminosidade
203         """
204         vl=3.0e+8 #m/s
205         vl2=vl*vl
206         Lso=3.94e26 #watt
207         Ano=31556926 #segundos
208         Msol=1.99e30 #kg
209
210         com=(Msol/Ano)/Lso #kg/s
211         drdz=com*vl2*self.C0*self.rho_star(z)*self.p_bh(z)/(1.0+z)
212         return drdz
213
214     def f(self, z, n1, n2, ts):
215         """

```

```

216     E a forma funcional de  $\frac{\bar{\eta}}{1-\bar{\eta}}$ , sendo
217      $\bar{\eta}$  a eficiencia radiativa media.
218
219     """
220     b=1.0
221     c0=self.eta0/(1.0-self.eta0)
222     C0= c0*((self.age(0.0)/ts)**n1+(ts/self.age(0.0))**n2)**b
223     f=C0/((self.age(z)/ts)**n1+(ts/self.age(z))**n2)**b
224     return f
225
226 def eta_z(self,z):
227     """
228     E a eficiencia radiativa media,  $\bar{\eta}$ , obtida a partir de
229     self.f
230     """
231     F=self.f(z,self.n1,self.n2,self.ts)/(1.0+self.f(z,self.n1,\
232     self.n2,self.ts))
233     return F
234
235 def dotm(self,z):
236     """
237     E a taxa media de acrecao admensional de buracos negros
238     supermassivos
239     ponderada pela massa de Eddington.
240     Tem a forma de:
241      $\langle \dot{m} \rangle = \frac{t_s}{\rho_{BH}} \frac{1-\bar{\eta}}{\rho_{BH}}$ .
242      $\frac{\dot{\rho}_{BH}}{\rho_{BH}}$ .
243     """
244     f=(self.tsalp/(1-self.eta_z(z)))*\
245     (self.drho_bh_dz(z)/self.rho_bh(z))
246     return f
247
248 def tau(self,z):
249     """
250     E o tempo de vida ativa de Buracos negros supermassivos
251     ponderada pela
252     taxa media de acrecao admensional. E dada pela integral
253     de  $\langle \dot{m} \rangle$ 
254     de um  $z_{ini}$  ate um z qualquer.
255     """
256     def dotM(z):
257         f=self.dotm(z)*self.dt_dz(z)
258         return f
259     f=spi.romberg(dotM,z,self.z_tau)
260     return f
261
262 def dutycycle(self,z):
263     """
264     Duty cycle de buracos negros supermassivos.
265     E a razao entre o tempo de vida ativa de Buracos negros
266     supermassivos ponderada pela
267     taxa media de acrecao admensional pela idade do universo em
268     um dado z.
269     """
270     f=self.tau(z)/self.age(z)
271     return f
272
273 def mbh_m(self,z):
274     ndh=self.numerical_density_halos(z)
275     rhobh=self.rho_bh(z)
276     f=rhobh/ndh
277     print ndh,rhobh
278     return f

```

B.1.2 Compilador dos códigos FORTAN

```

1  #!/usr/bin/env python
2  from numpy import f2py
3
4  f2py.compile(open('csfrF77.f','r').read(),'csfrF77')
5  f2py.compile(open('cosmol1.f','r').read(),'cosmol1')
6  f2py.compile(open('cosmol2.f','r').read(),'cosmol2')

```

B.1.3 PyGraWC- Códigos FORTRAN

B.1.3.1 Módulo cosmoll

```
1  c   This file is part of PyGraWC.
2  c   copyright : Eduardo dos Santos Pereira
3  C   31 mar. 2011.
4
5  C   PyGraWC is free software: you can redistribute it and/or modify
6  C   it under the terms of the GNU General Public License as published by
7  C   the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
8
9  C   PyGraWC is distributed in the hope that it will be useful,
10 C   but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
11 C   MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
12 C   GNU General Public License for more details.
13
14 C   You should have received a copy of the GNU General Public License
15 C   along with FooBar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
16
17 c Aplicativo: cosmoll
18 c versao: 1.0
19 cAutor : Eduardo dos Santos Pereira (Pereira; E. S.)
20 c data: 31/05/2011
21 c obs.:
22 c Parte do Projeto de Doutorado em Astrofísica pelo Instituto
23 c Nacional de Pesquisas Espaciais -INPE.
24
25 c Objetivo do modulo corrente:
26
27 c file:cosmoll.f
28     subroutine sigma(anorm,alfai,beta1,gama1,ct2,kmass,km,sg,n)
29 C     external rombint,func
30     integer i,n
31     real*8 anorm,kmass(n),sg(n),km(n)
32     real*8 a,b,tol
33     real*8 i1,i2,i3,i4
34     real*8 alfa1,beta1,gama1
35     real*8 escala,alfa,beta,gama
36     real*8 t0,t1,t2,t3,t4
37     common/dados/ escala,alfa,beta,gama
38 C     common/d2/a,b,rb
39 cf2py intent(in) :: anorm,ct2,alfa,beta,gama
40 cf2py intent(in) :: kmass
41 cf2py intent(out) :: sg,km
42 cf2py integer intent(hide), depend(kmass) :: n
43 cf2py real*8 intent(in) :: rombint,func
44     alfa=alfai
45     beta=beta1
46     gama=gama1
47     tol=1.45d-8
48
49     do i=1,n
50         escala = (kmass(i)/ct2)**(1.0/3.0)
51         km(i) = dlog10(kmass(i))
52
53
54         t0=dlog(1.0d-7/escala)
55         t1=dlog(1.0d-3/escala)
56         t2=dlog(1.0/escala)
57         t3=dlog(10.0/escala)
58         t4=dlog(100.0/escala)
59
60
61         a=t0
62         b=t1
63
64         call rombint(a,b,i1,tol)
65
66         a=t1
67         b=t2
68         call rombint(a,b,i2,tol)
69
70         a=t2
71         b=t3
72         call rombint(a,b,i3,tol)
```

```

73
74     a=t3
75     b=t4
76     call rombint(a,b,i4,tol)
77
78
79
80     sg(i)=dsqrt(anorm*(i1+i2+i3+i4))
81
82
83
84
85
86
87     enddo
88     end
89 c
90 c Metodo romberg de integracao
91 c
92 C     real*8 function rombint(tol)
93     subroutine rombint(a,b,integral,tol)
94 C     external func
95     integer MAXITER, MAXJ
96     real*8 g(6)
97 C     real*8 func
98     real*8 integral
99     real*8 h,a,b,g0,g1,gmax,error,fourj,tol,r1,r2
100    integer i,j,k,jmax,nint
101 C     common/d2/a,b,rb
102
103    maxiter=30
104    maxj=5
105
106 c
107
108    h=0.5d0*(b-a)
109    call func(a,r1)
110    call func(b,r2)
111    gmax=h*(r1+r2)
112
113
114
115    g(1)=gmax
116    nint=1
117    error=1.0d20
118    i=0
119 10    i=i+1
120        if (i.gt.MAXITER.or.(i.gt.5.and.abs(error).lt.tol))
121 2    go to 40
122 -----
123 c
124 c Calculate next trapezoidal rule approximation to integral.
125     g0=0.0d0
126     do 20 k=1,nint
127         call func(a+(k+k-1)*h,r1)
128         g0=g0+r1!*func(a+(k+k-1)*h)
129 20    continue
130     g0=0.5d0*g(1)+h*g0
131     h=0.5d0*h
132     nint=nint+nint
133     jmax=min(i,MAXJ)
134     fourj=1.0d0
135     do 30 j=1,jmax
136 -----
137 c
138 c Use Richardson extrapolation.
139     fourj=4.0d0*fourj
140     g1=g0+(g0-g(j))/(fourj-1.0d0)
141     g(j)=g0
142     g0=g1
143 30    continue
144     if (abs(g0).gt.tol) then
145         error=1.0d0-gmax/g0
146     else
147         error=gmax
148     end if
149     gmax=g0

```



```

150         g(jmax+1)=g0
151     go to 10
152 40     integral=g0
153     if (i.gt.MAXITER.and.abs(error).gt.tol)
154     2     write(*,*) 'Rombint failed to converge; integral, error=',
155     3     integral,error
156     return
157     end
158
159 C     real*8 function func(kl)
160     subroutine func(kl,valor)
161     real*8 kl,k,x,pk1,pk2,pdmk,valor
162     real*8 escala,alfa,beta,gama
163     common/dados/ escala,alfa,beta,gama
164     k = dexp(kl)
165     x = escala*k
166
167     pk1 = 1.0+(alfa*k+(beta*k)**1.5+(gama*k)**2.0)**1.13
168     pk2 = 1.0/pk1
169     pdmk = pk2*(k**3.0)
170     valor=pdmk*(3.0*(dsin(x) - x*dcos(x))/(x**3.0))**2.0
171     return
172     end

```

B.1.3.2 Módulo cosmol2

```

1 c This file is part of PyGraWC.
2 c copyright : Eduardo dos Santos Pereira
3 C 31 mar. 2011.
4
5 C PyGraWC is free software: you can redistribute it and/or modify
6 C it under the terms of the GNU General Public License as published by
7 C the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
8
9 C PyGraWC is distributed in the hope that it will be useful,
10 C but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
11 C MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
12 C GNU General Public License for more details.
13
14 C You should have received a copy of the GNU General Public License
15 C along with Foobar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
16
17 c Aplicativo:
18 c versao: 1.0
19 cAutor : Eduardo dos Santos Pereira (Pereira; E. S.)
20 c data: 31/05/2011
21
22 c obs.:
23 c Parte do Projeto de Doutorado em Astrofísica pelo Instituto
24 c Nacional de Pesquisas Espaciais -INPE.
25
26 c Objetivo do modulo corrente:
27
28 C file:cosmol2.f
29
30     subroutine timerho(omegab,omegam,omegal,h,rhdm0,rhob0,deltac,
31     & d_c2,rdm2,rbr2,t_z,zred,n)
32
33     external age,grow,rhdm,rhobr
34     integer i,n
35     real*8 omegab,omegam,omegal,h
36     real*8 omegab1,omegam1,omegal1,h1
37     real*8 rhdm0,rhob0
38     real*8 rhdm1,rhob1
39     real*8 r0,r1,r2,r3
40     real*8 t1,t2,t3,t4
41     real*8 z0,z1,z2,z3
42     real*8 z
43     real*8 d_c2(n),rdm2(n),rbr2(n),t_z(n)
44     real*8 zred(n)
45     real*8 age,grow,rhdm,rhobr
46
47
48     common/m1/ rhdm1,r0,z0
49     common/m2/ rhob1,r1,z1

```

```

50         common/cparam/ omegab1,omegam1,omegal1,h1
51         common/ager/r2,z2
52         common/grc/r3,z3
53     c
54 Cf2py intent(in) :: omegab,omegam,omegal,h
55 Cf2py intent(in) :: rhodm0,rhob0,deltac
56 Cf2py intent(in) :: zred
57 Cf2py intent(out) :: d_c2,rdm2,rbr2,t_z
58 Cf2py integer intent(hide), depend(zred) :: n
59     c
60     c
61     c         Inicilizando as constantes do bloco comum de memoria
62         omegab1=omegab
63         omegam1=omegam
64         omegal1=omegal
65         h1=h
66         rhodm1=rhodm0
67         rhob1=rhob0
68         r2=0
69         r3=0
70     c
71         do i=1,n
72
73             z=zred(i)
74             z0=z
75             z1=z
76             z2=z
77             z3=z
78             t1= age(z)
79             t2=grow(z)
80             t3=rhodm(z)
81             t4=rhobr(z)
82             t_z(i) =r2
83             d_c2(i) = deltac/r3
84             rdm2(i)= r0
85             rbr2(i)=r1
86         enddo
87     c
88     end
89
90     real*8 function age(z)
91     real*8 z
92     real*8 a,a3,fct
93     real*8 omegalm,hsl
94     real*8 omegab1,omegam1,omegal1,h1
95     real*8 r2,z2
96     common/cparam/ omegab1,omegam1,omegal1,h1
97     common/ager/r2,z2
98
99     c
100 Cf2py intent(in) :: z
101 Cf2py intent(out) :: age
102     c
103
104         omegalm=omegal1/omegam1
105         hsl=h1*sqrt(omegal1)
106         a=1.0/(1.0+z)
107         a3=a**3.0
108         fct=omegalm*a3
109         age= 6.522916d+09*dlog(dsqrt(fct)+dsqrt(fct+1.0))/hsl
110         r2=age
111         return
112     end
113     c
114     c
115     real*8 function grow(z)
116     real*8 z
117     real*8 a,a2,a3,a4
118     real*8 ea,dz1,pi,s2pi
119     real*8 omegamz,omegalz
120     real*8 omegab1,omegam1,omegal1,h1
121     real*8 r3,z3
122     common/cparam/omegab1,omegam1,omegal1,h1
123     common/grc/r3,z3
124
125
126     c

```

```

127 Cf2py intent(in) :: z
128 Cf2py intent(out) :: grow
129 c
130
131     pi=3.14159265
132     s2pi=pi*sqrt(2.0)
133     a=1.0/(1.0+z)
134     a2=a*a
135     a3=a2*a
136     a4=a3*a
137     ea = omegam1*a+omegali*a4
138     omegamz=omegam1*a/ea
139     omegalz=omegali*a4/ea
140     dz1= (1.0-omegalz)+(omegamz**(4.0/7.0))+(omegamz/2.0)
141     r3=(2.5*omegamz*a/dz1)/s2pi
142     grow=(2.5*omegamz*a/dz1)/s2pi
143
144     return
145 end
146
147 real*8 function rhodm(z)
148     real*8 z
149     real*8 a,a2,a3
150     real*8 rhodm1,r0,z0
151     common/m1/ rhodm1,r0,z0
152 c
153 Cf2py intent(in) :: z
154 cf2py intent(out) :: rhodm
155 c
156     a=1.0/(1.0+z)
157     a2=a*a
158     a3=a2*a
159     r0=rhodm1/a3
160     rhodm=rhodm1/a3
161     return
162 end
163 c
164 c
165 real*8 function rhobr(z)
166     real*8 z
167     real*8 a,a3
168     real*8 rhob1,r1,z1
169     common/m2/ rhob1,r1,z1
170 c
171 Cf2py intent(in) :: z
172 Cf2py intent(out) :: rhobr
173 c
174     a=1.0/(1.0+z)
175     a3=a*a*a
176     r1=rhob1/a3
177     rhobr=rhob1/a3
178     return
179 end

```

B.1.3.3 Módulo SGM

```

1 c This file is part of PyGraWC.
2 c copyright : Eduardo dos Santos Pereira
3 C 31 mar. 2011.
4
5 C PyGraWC is free software: you can redistribute it and/or modify
6 C it under the terms of the GNU General Public License as published by
7 C the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
8
9 C PyGraWC is distributed in the hope that it will be useful,
10 C but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
11 C MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
12 C GNU General Public License for more details.
13
14 C You should have received a copy of the GNU General Public License
15 C along with Foobar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
16
17 c Aplicativo:
18 c versao: 1.0
19 cAutor : Eduardo dos Santos Pereira (Pereira; E. S.)

```

```

20 c data: 31/05/2011
21
22 c obs.:
23 c Parte do Projeto de Doutorado em Astrofísica pelo Instituto
24 c Nacional de Pesquisas Espaciais -INPE.
25
26 c Objetivo do modulo corrente:
27
28 c file:SGM.f
29     subroutine sigma(anorm,alfa1,beta1,gama1,ct2,kmass,km,sg,n)
30     external rombint,func
31     integer i,n
32     real*8 anorm,kmass(n),sg(n),km(n),func
33     real*8 a,b,tol
34     real*8 i1,i2,i3,i4
35     real*8 alfa1,beta1,gama1,rb
36     real*8 escala,alfa,beta,gama
37     common/dados/ escala,alfa,beta,gama
38     common/d2/a,b,rb
39     cf2py intent(in) :: anorm,ct2,alfa,beta,gama
40     cf2py intent(in) :: kmass
41     cf2py intent(out) :: sg,km
42     cf2py integer intent(hide), depend(kmass) :: n
43     alfa=alfa1
44     beta=beta1
45     gama=gama1
46     tol=1.45d-8
47
48     do i=1,n
49         escala = (kmass(i)/ct2)**(1.0/3.0)
50         km(i) = dlog10(kmass(i))
51
52
53         t0=log(1.0d-7/escala)
54         t1=log(1.0d-3/escala)
55         t2=log(1.0/escala)
56         t3=log(10.0/escala)
57         t4=log(100.0/escala)
58
59
60         a=t0
61         b=t1
62         i1=rombint(tol)
63         i1=rb
64
65         a=t1
66         b=t2
67         i2=rombint(tol)
68         i2=rb
69
70         a=t2
71         b=t3
72         i3=rombint(tol)
73         i3=rb
74
75         a=t3
76         b=t4
77         i4=rombint(tol)
78         i4=rb
79
80
81
82         sg(i)=dsqrt(anorm*(i1+i2+i3+i4))
83
84
85
86
87
88
89     enddo
90     end
91 c
92 c Metodo romberg de integracao
93 c
94     real*8 function rombint(tol)
95     external func
96     integer MAXITER, MAXJ

```

```

97     real*8 g(6)
98     real*8 func
99     real*8 h,a,b,g0,g1,gmax,error,fourj,tol,rb
100    integer i,j,k,jmax,nint
101    common/d2/a,b,rb
102
103    maxiter=30
104    maxj=5
105
106    c
107
108    h=0.5d0*(b-a)
109    gmax=h*(func(a)+func(b))
110
111
112
113    g(1)=gmax
114    nint=1
115    error=1.0d20
116    i=0
117 10    i=i+1
118        if (i.gt.MAXITER.or.(i.gt.5.and.abs(error).lt.tol))
119            2    go to 40
120
121    c-----
122    c Calculate next trapezoidal rule approximation to integral.
123    g0=0.0d0
124        do 20 k=1,nint
125            g0=g0+func(a+(k+k-1)*h)
126 20    continue
127    g0=0.5d0*g(1)+h*g0
128    h=0.5d0*h
129    nint=nint+nint
130    jmax=min(i,MAXJ)
131    fourj=1.0d0
132        do 30 j=1,jmax
133
134    c-----
135    c Use Richardson extrapolation.
136        fourj=4.0d0*fourj
137        g1=g0+(g0-g(j))/(fourj-1.0d0)
138        g(j)=g0
139        g0=g1
140 30    continue
141        if (abs(g0).gt.tol) then
142            error=1.0d0-gmax/g0
143        else
144            error=gmax
145        end if
146        gmax=g0
147        g(jmax+1)=g0
148        go to 10
149 40    rombint=g0
150    rb=g0
151    if (i.gt.MAXITER.and.abs(error).gt.tol)
152        2    write(*,*) 'Rombint failed to converge; integral, error=',
153        3    rombint,error
154    return
155    end
156
157    real*8 function func(kl)
158    real*8 kl,k,x,pk1,pk2,pdmk
159    real*8 escala,alfa,beta,gama
160    common/dados/ escala,alfa,beta,gama
161    k = dexp(kl)
162    x = escala*k
163
164    pk1 = 1.0+(alfa*k+(beta*k)**1.5+(gama*k)**2.0)**1.13
165    pk2 = 1.0/pk1
166    pdmk = pk2*(k**3.0)
167    func=pdmk*(3.0*(dsin(x) - x*dcos(x))/(x**3.0))**2.0
168    return
169    end

```

B.1.3.4 Módulo csfrF77

```

1  c   This file is part of PyGraWC.
2  c   copyright : Eduardo dos Santos Pereira
3  C   31 mar. 2011.
4
5  C   PyGraWC is free software: you can redistribute it and/or modify
6  C   it under the terms of the GNU General Public License as published by
7  C   the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
8
9  C   PyGraWC is distributed in the hope that it will be useful,
10 C   but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
11 C   MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
12 C   GNU General Public License for more details.
13
14 C   You should have received a copy of the GNU General Public License
15 C   along with FooBar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
16 c Aplicativo:
17 c versao: 1.0
18 c Autor : Eduardo dos Santos Pereira (Pereira; E. S.)
19 c data: 31/05/2011
20
21 c obs.:
22 c Parte do Projeto de Doutorado em Astrofisica pelo Instituto
23 c Nacional de Pesquisas Espaciais -INPE.
24
25 c Objetivo do modulo corrente:
26 C file:run_kut4f.f
27 C Integration of Cosmic Star formation rate
28 C (Pereira and Miranda 2010, MNRAS,401,1924) using Runge Kutta 4th method
29   subroutine csfr(eimf1,eimf0,amsup1,aminf1,
30   &               anorm1,tau1,robr0,nsch1,
31   &               omegab1,omegam1,omegal1,h1,
32   &               cc,ascale,abt2,esnor1,
33   &               y,hx,Xarray,Yarray,n,n2,n3)
34
35   real*8 y(1),fun(1)
36   real*8 hp
37   real*8 x
38   real*8 k0,k1,k2,k3,r,temp(1),temp1
39   integer i,n,n2
40   real*8 hx(n),Xarray(n),Yarray(n)
41   real*8 cc(n2),ascale(n2),abt2(n3)
42
43   real*8 eimf1,eimf0,amsup1,aminf1
44   real*8 anorm1,tau1,robr0,nsch1
45   real*8 omegab1,omegam1,omegal1,h1
46
47
48   real*8 eimf,eimf0,amsup1,aminf1
49   real*8 anorm1,tau1,robr0,nsch
50   real*8 omegab,omegam,omegal,h
51
52   common/csf1/eimf,eimf0,amsup1,aminf1
53   common/csf2/anorm1,tau1,robr0,nsch,esnor
54   common/cparam/ omegab,omegam,omegal,h
55
56 Cf2py intent(in) :: fun,y
57 Cf2py intent(in) :: eimf1,eimf0,amsup1,aminf1
58 Cf2py inten(in) :: anorm1,tau1,robr0,nsch1
59 Cf2py intent(in) :: omegab1,omegam1,omegal1,h1
60 Cf2py intent(in) :: cc,ascale,abt2
61 Cf2py integer intent(hide),depend(ascale) :: n2
62 cf2py integer intent(hide),depend(abt2) :: n3
63 Cf2py intent(in) :: hx
64 Cf2py intent(in,out) :: Xarray
65 Cf2py intent(out) :: Yarray
66 Cf2py integer intent(hide), depend(Xarray) :: n
67
68   eimf=eimf1
69   eimf0=eimf01
70   amsup1=amsup11
71   aminf1=aminf11
72
73   anorm1=anorm11
74   tau1=tau11
75   robr0=robr01
76   nsch=nsch1
77   esnor=esnor1

```

```

78
79      omegab=omegab1
80      omegam=omegam1
81      omegal=omegal1
82      h=h1
83      Yarray(1)=y(1)
84
85      do i=2,n
86          Yarray(i)=y(1)
87          x=Xarray(i)
88          hp=hx(i)
89
90          temp=y(1)
91      c
92          call fcn(x,temp,cc,ascale,abt2,fun,n2,n3)
93          k0=hp*fun(1)
94
95
96          temp=y(1)+k0/2.0
97          temp1=x+hp/2.0
98          call fcn(temp1,temp,cc,ascale,abt2,fun,n2,n3)
99          k1=hp*fun(1)
100
101          temp=y(1)+k1/2.0
102          temp1=x+hp/2.0
103          call fcn(temp1,temp,cc,ascale,abt2,fun,n2,n3)
104          k2=hp*fun(1)
105
106          temp=y(1)+k2
107          temp1=x+hp
108          call fcn(temp1,temp,cc,ascale,abt2,fun,n2,n3)
109          k3=hp*fun(1)
110
111          r= (k0+2.0*k1+2.0*k2+k3)/6.0
112      c
113          y(1)=y(1)+r
114
115
116
117      enddo
118  end
119  C
120  C*****
121  c
122  c Cosmic Star formation rate by Pereira and Miranda 2010.
123  c
124  C*****
125  C
126      subroutine fcn(x,y,cc,ascale,abt2,f,n,n1)
127
128          real*8 x
129          real*8 y(1),f(1)
130          integer n,n1
131
132
133
134
135          real*8 tage,age01,age02,mi_1
136          real*8 amexp1,amexp2,amexp3,amexp4,amexp5
137          real*8 amexp6,amexp7,amexp8,amexp9
138          real*8 yrem1,yrem2,yrem3,yrem4,yrem5,yrem6,yrem7
139          real*8 yr,sexp,z,spn2,dt_dz
140          real*8 cc(n),ascale(n),abt2(n1)
141
142          real*8 eimf,eimf0,amsup1,aminf1
143          real*8 anorm1,tau1,robr0,nsch
144          common/csf1/eimf,eimf0,amsup1,aminf1
145          common/csf2/anorm1,tau1,robr0,nsch,esnor
146
147
148
149  c
150  Cf2py intent(in) :: x,y,n2
151  Cf2py intent(in) :: cc,ascale,abt2
152  Cf2py integer intent(hide), depend(ascale) :: n
153  cfp2 integer intent(hide), depend(abt2) :: n1
154  Cf2py intent(out) :: f

```

```

155  c
156      z=1.0/x-1.0
157      if(z<0.0) then
158          z=0.0
159      endif
160
161      call age(z,tage)
162
163      age01 = 4.0*dlog10(tage)-2.704d+01
164      age02 = (3.6-dsqrt(age01))/2.0
165
166      mi_1 = 1.0d+01**age02
167      amexp1 = (1.0/mi_1)**eimf0
168      amexp2 = (1.0/amsup1)**eimf0
169      amexp3 = (1.0/8.0)**eimf0
170      amexp4 = (1.0/aminf1)**eimf0
171      amexp5 = (1.0/mi_1)**eimf
172      amexp6 = (1.0/8.0)**eimf
173      amexp7 = (1.0/10.0)**eimf
174      amexp8 = (1.0/aminf1)**eimf
175      amexp9 = (1.0/amsup1)**eimf
176
177      yrem1 = (amexp1-amexp2)/eimf0
178      yrem2 = 1.156d-01*(amexp1-amexp3)/eimf0
179      yrem3 = 1.3d+01*(amexp4-amexp2)/eimf0/2.4d+01
180      yrem4 = 4.551d-01*(amexp5-amexp6)/eimf
181      yrem5 = 1.35d+00*(amexp6-amexp7)/eimf
182      yrem6 = 1.40d+00*(amexp7-amexp8)/eimf
183      yrem7 = 6.5d+01*(amexp8-amexp9)/eimf/6.0
184
185
186      yr = anorm1*(yrem1-yrem2-yrem3-yrem4-yrem5-yrem6+yrem7)
187
188      if(nsch == 1.0) then
189          sexp = (1.0-yr)/tau1
190      else
191          sexp = (1.0-yr)/tau1/robr0**(nsch-1.0)
192      endif
193
194      call spn(x,spn2,cc,ascale,abt2,n,n1)
195
196      call dtdz(z,dt_dz)
197      f(1)=-sexp*(y(1)**nsch+esnor*spn2/robr0)*dt_dz/x**2.0
198  end
199  C
200  C*****
201  C Interpolacao, via cub spline, da taxa de acrescencia de barions em e
202  C Estruturas.
203  C
204  C*****
205  C
206      subroutine spn(a,spn2,cc,ascale,abt2,n,n1)
207          real*8 a,spn2
208          integer avalia,j,n,n1,er
209          real*8 cc(n),ascale(n),abt2(n1)
210  cf2py intent(in) :: a,n
211  cf2py intent(in) :: cc,ascale,abt2
212  cf2py integer intent(hide), depend(ascale) :: n
213  cf2py integer intent(hide), depend(abt2) :: n1
214  cf2py intent(out) :: spn2
215          er=1
216
217          j=0
218          avalia=1
219
220
221
222          do while(avalia == 1)
223
224              j=j+1
225
226              if( a >= 1) then
227                  spn2=ascale(n)
228                  avalia=0
229
230
231              elseif( a < ascale(j+1) .and. a >= ascale(j) .and.

```



```

232      &          j <= (n-3) then
233
234          avalia=0
235
236          spn2 = (cc(j)/6.0)*(((a-ascala(j+1))**3.0)/
237      & (ascala(j)-ascala(j+1))-(a-ascala(j+1))*(ascala(j)-ascala(j+1)))
238      & -(cc(j+1)/6.0)*(((a-ascala(j))**3.0)/(ascala(j)-ascala(j+1)))
239      & -(a-ascala(j))*(ascala(j)-ascala(j+1)))+(abt2(j)*(a-ascala(j+1))
240      & -abt2(j+1)*(a-ascala(j)))/(ascala(j)-ascala(j+1))
241
242
243
244      c
245      c
246          elseif(j >=(n-2) .and. j <= n) then
247              spn2= abt2(j)
248              avalia=0
249
250
251      c
252      c
253          elseif(a < ascale(1)) then
254              er=0
255              avalia=0
256              write(*,*)'Erro, a menor que ascale(1)'
257              stop
258          endif
259      enddo
260      end
261      C
262      C*****
263      CFuncao que fornece a idade do universo para um dado redshift
264      C
265      C*****
266      subroutine age(z,tage)
267          real*8 z,tage
268          real*8 a,a3,fct
269          real*8 omegalm,hsl
270          real*8 omegab,omegam,omegal,h
271          common/cparam/ omegab,omegam,omegal,h
272
273      c
274      Cf2py intent(in) :: z
275      Cf2py intent(out) :: tage
276      c
277
278          omegalm=omegal/omegam
279          hsl=h*sqrt(omegal)
280          a=1.0/(1.0+z)
281          a3=a**3.0
282          fct=omegalm*a3
283          tage= 6.522916d+09*dlog(dsqrt(fct)+dsqrt(fct+1.0))/hsl
284      end
285      C*****
286      C Retorna a variacao do tempo com o redshift
287      C*****
288
289      subroutine dtdz(z,dtz)
290          real*8 ct3,dtz,z
291          real*8 omegab,omegam,omegal,h
292          common/cparam/ omegab,omegam,omegal,h
293      Cf2py intent(in) :: z
294      Cf2py intent(out) :: dtz
295
296          ct3=9.78d+09/h
297
298          dtz=ct3/((1.0+z)*dsqrt(omegal+omegam*(1.0+z)**3.0))
299      end

```

B.2 StarForm - Código fonte

```

1  #!/usr/bin/env python
2  #-*- coding: utf-8 -*-
3  __author__='Eduardo dos Santos Pereira'
4  __version__='1.0'

```

```

5  __date__='31/05/2011'
6
7
8
9  '''
10  This program is free software: you can redistribute it and/or modify
11  it under the terms of the GNU General Public License as published by
12  the Free Software Foundation, either version 3 of the License, or
13  any later version.
14
15  This program is distributed in the hope that it will be useful,
16  but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
17  MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
18  GNU General Public License for more details.
19
20  You should have received a copy of the GNU General Public License
21  along with this program. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
22
23
24
25  Aplicativo: StarCosmo
26  versÃ£o: 1.0
27  Autor : Eduardo dos Santos Pereira (Pereira; E. S.)
28  data: 31/05/2011
29
30  obs.:
31  Parte do Projeto de Doutorado em Astrofísica pelo Instituto Nacional
32  de Pesquisas Espaciais -INPE.
33
34  Objetivo do modulo corrente: Criar a interface grafica (GUI)
35  de interacao entre o usuario e o modelo de taxa cosmica de
36  formacao estelar.
37  '''
38
39  from pygrawc.csfr import csfr
40  import os
41  from cStringIO import StringIO
42  import scipy.io as io
43  import multiprocessing as mpg
44
45  #matplotlib.use('TkAgg')
46
47  import matplotlib
48  import matplotlib.pyplot
49
50  from matplotlib.figure import Figure
51  from matplotlib.backends.backend_tkagg import FigureCanvasTkAgg
52  from matplotlib.backends.backend_tkagg import NavigationToolbar2TkAgg
53
54
55  import tkinter
56  from tkinter import *
57  from tkinter.commondialog import Dialog
58
59  import databasemodel as dtb
60
61
62  class MyApp:
63      '''Define a aparência e as funcionalidades da janela principal
64      do Aplicativo StarCosmo'''
65
66      def __init__(self,parent):
67
68
69          self.parent = parent
70          self.parent.title("StarCosmo V1.0")
71          self.frame0 = Frame(self.parent) #Usado como divisor
72          self.frame0.grid(row = 0)
73          self.frame = Frame(self.parent)
74          self.frame.grid(row=1,column=1)
75          self.frame1 = Frame(self.parent)
76          self.frame1.grid(row=2,column=1)
77          self.frame01 = Frame(self.parent) #Usado como divisor
78          #self.frame01.grid(row=2,column=1)
79          self.frame2 = Frame(self.parent)
80          self.frame2.grid(row=2,column=0)
81          #self.frame3 = Frame(self.parent)

```

```

82     #self.frame3.grid(row=3,column=0)
83     self.frame4=Frame(self.parent)
84     self.frame4.grid(row=1,column=0)
85
86     self.locdire = str(os.getcwd())+'/trabalho' #obtem o diretorio local
87     #print self.locdire
88
89     menubar = Menu(parent)
90     filemenu = Menu(menubar)
91
92     filemenu.add_command(label="Mudar Diretorio",command = self.escolha_diret)
93     filemenu.add_separator()
94     menubar.add_cascade(label="Arquivo", menu=filemenu)
95
96     helpmenu = Menu(menubar)
97     helpmenu.add_command(label='Sobre',command=self.sobre)
98     helpmenu.add_separator
99     menubar.add_cascade(label='Ajuda',menu=helpmenu)
100    parent.config(menu=menubar)
101
102    self.SMBH = 0.0
103    self.CSFR = 0.0
104
105    #Labels de informaÃ§Ã£o da interface:
106
107    self.Lp = Label(self.frame0,width=35, anchor=E,font=("Helvetica",16))
108    self.Lp.grid()
109    self.Lp1 = Label(self.frame01,width=35, anchor=E,font=("Helvetica",16))
110    self.Lp1.grid()
111
112
113
114    #Definindo Label:
115
116    self.L8 = Label(self.frame,text=u'\u03A9_b :')
117    self.L1= Label(self.frame ,text=u'\u03A9_m :')
118    self.L2= Label(self.frame , text=u'\u03A9_\u0398 :')
119    self.L3= Label(self.frame , text='h:')
120    self.L4= Label(self.frame ,text='z_ini:')
121    self.L9 = Label(self.frame ,text='l_min:')
122    self.L11 = Label(self.frame ,text='x:')
123    self.L12 = Label(self.frame ,text=u'\u03c4 :')
124    self.L13 = Label(self.frame ,text='nsch:')
125
126    #Definindo entradas
127
128    self.e8 = Entry(self.frame)
129    self.e1= Entry(self.frame)
130    self.e2= Entry(self.frame)
131    self.e3 = Entry(self.frame)
132    self.e4 = Entry(self.frame)
133    self.e9 = Entry(self.frame)
134    #self.e5 = Entry(self.frame3)
135    #self.e10= Entry(self.frame3)
136    self.e11 = Entry(self.frame)
137    self.e12 = Entry(self.frame)
138    self.e13 = Entry(self.frame)
139    self.e0 = Entry(self.frame)
140
141
142    #Posicionando Label e Entry
143    self.L8.grid(row=0,column=0)
144    self.e8.grid(row=0,column=1)
145
146    self.L1.grid(row=1,column=0)
147    self.e1.grid(row=1,column=1)
148
149    self.L2.grid(row=2,column=0)
150    self.e2.grid(row=2,column=1)
151
152    self.L3.grid(row=3,column=0)
153    self.e3.grid(row=3,column=1)
154
155    self.L4.grid(row=0,column=3)
156    self.e4.grid(row=0,column=4)
157
158    self.L9.grid(row=1,column=3)

```

```

159     self.e9.grid(row=1, column=4)
160
161     #self.L5.grid(row=6, column=0)
162     #self.e5.grid(row=6, column=1)
163
164     #self.L10.grid(row=7, column=0)
165     #self.e10.grid(row=7, column=1)
166
167     self.L11.grid(row=2, column=3)
168     self.e11.grid(row=2, column=4)
169
170     self.L12.grid(row=3, column=3)
171     self.e12.grid(row=3, column=4)
172
173     self.L13.grid(row=4, column=3)
174     self.e13.grid(row=4, column=4)
175
176
177
178
179     #Gerando botoes de Executar o modelo, Gerar Gráficos e Limpar entradas.
180     #self.b= Button(self.frame1)
181     #self.b.configure(text='SMBH', width=10)
182     #self.b.grid(row=0, column=2)
183     #self.b.bind("<Button-1>", self.rodar_grow_bh_i)
184
185     self.b8 = Button(self.frame1)
186     self.b8.configure(text="CSFR", width=10)
187     self.b8.grid(row=0, column=2)
188     self.b8.bind("<Button-1>", self.rodar_csfr)
189
190
191     self.b1 = Button(self.frame1)
192     self.b1.configure(text="Limpar", width=10)
193     self.b1.grid(row=0, column=3)
194     self.b1.bind("<Button-1>", self.clean)
195
196     #self.b2 = Button(self.frame1)
197     #self.b2.configure(text="Gráficos log(MBH(z))", width=18)
198     #self.b2.grid(row=3, column=2)
199     #self.b2.bind("<Button-1>", self.Graf)
200
201     self.b3 = Button(self.frame1)
202     self.b3.configure(text="Gráfico t(z)", width=18)
203     self.b3.grid(row=4, column=2)
204     self.b3.bind("<Button-1>", self.Graf2)
205
206     self.b4 = Button(self.frame1)
207     self.b4.configure(text="Gráfico M", width=18)
208     self.b4.grid(row=5, column=2)
209     self.b4.bind("<Button-1>", self.Graf3)
210
211     self.b5 = Button(self.frame1)
212     self.b5.configure(text="Gráfico c(z)", width=18)
213     self.b5.grid(row=6, column=2)
214     self.b5.bind("<Button-1>", self.Graf4)
215
216     self.b6=Button(self.frame1)
217     self.b6.configure(text="Gráfico DM(z)", width=18)
218     self.b6.grid(row=4, column=3)
219     self.b6.bind("<Button-1>", self.Graf5)
220
221     self.b7=Button(self.frame1)
222     self.b7.configure(text="Gráfico b(z)", width=18)
223     self.b7.grid(row=5, column=3)
224     self.b7.bind("<Button-1>", self.Graf6)
225
226     self.b9 = Button(self.frame1)
227     self.b9.configure(text="Gráfico CSFR", width=18)
228     self.b9.grid(row=6, column=3)
229     self.b9.bind("<Button-1>", self.Graf7)
230
231     self.canvas = Canvas(self.frame2, width=300, height=90)
232     self.canvas.grid(row=0, column=0)#pack(expand=YES, fill= BOTH)
233     self.logo = PhotoImage(file='../Imagens/OGCOSM0_log_2.gif')
234     self.canvas.create_image(100, 0, image=self.logo, anchor=NW)
235     self.canvas.update()

```

```

236
237     self.f = Figure(figsize = (8,5), dpi=80)
238     self.canvas2= FigureCanvasTkAgg(self.f, master = self.frame4)
239     self.toolbar = NavigationToolbar2TkAgg(self.canvas2, self.frame4)
240
241     self.canvas2.get_tk_widget().pack()
242
243     os.chdir('./bancodados')
244
245     dtb.databasesmodel(dtb.db)
246
247     self.dtb=dtb.db
248
249
250
251
252
253
254 #####
255 class GraApp():
256     '''Classe cria as janelas usadas pelo graficos.'''
257     def __init__(self, frame, db, arq, canvas, fig, toolbar, parametros):
258         self.arq=arq
259         self.nwin=frame
260         self.f=fig
261         #Posicao do grÃ¡fico
262         self.a = self.f.add_subplot(111)
263         self.canvas = canvas
264         self.toolbar = toolbar
265         self.Para=parametros
266         self.db=db
267
268     def time_z(self):
269         DadosMatriz= self.db(self.db.cosmology.Parametro == self.arq ).select()[0]
270         sgtz = StringIO(DadosMatriz.Matriz)
271         data = io.mmread(sgtz)
272
273         X = [data[i,1] for i in range(len(data))]
274         Y = [data[i,0] for i in range(len(data)) ]
275
276         self.a.plot(X,Y, label=r'$\Omega_{b}=$'+str(self.Para[0])+\
277             ', $\Omega_{m}=$'+str(self.Para[1])+' , $\Omega_{\Lambda}=$ '\
278             +str(self.Para[2])+' , $h = $'+str(self.Para[4]))
279         self.a.set_title('Tempo x Redshift')
280         self.a.set_xlabel(r'z')
281         self.a.set_ylabel(r't')
282         self.a.legend()
283         self.canvas.show()
284         self.canvas.get_tk_widget().pack()
285
286         self.toolbar.update()
287         self.canvas._tkcanvas.pack()
288         sgtz.close()
289
290
291
292     def sigma(self):
293         DadosMatriz= self.db(self.db.cosmology.Parametro == self.arq ).select()[0]
294
295
296
297         sgtz = StringIO(DadosMatriz.Matriz)
298
299         data = io.mmread(sgtz)
300
301         X = [data[i,2] for i in range(len(data))]
302         Y = [data[i,3] for i in range(len(data))]
303
304
305         self.a.plot(X,Y, label=r'$\Omega_{b}=$'+str(self.Para[0])+\
306             ', $\Omega_{m}=$'+str(self.Para[1])+' , $\Omega_{\Lambda}=$ '\
307             +str(self.Para[2])+' , $h = $'+str(self.Para[4]))
308
309         self.a.set_title(r'$\sigma(M)$ x log(M)')
310         self.a.set_xlabel(r'$\log(M)$')
311         self.a.set_ylabel(r'$\sigma(M)$')
312         self.a.legend()

```

```

313         self.canvas.show()
314         self.canvas.get_tk_widget().pack()
315         self.toolbar.update()
316         self.canvas._tkcanvas.pack()
317         sgtz.close()
318
319     def d_c(self):
320         DatosMatriz= self.db(self.db.cosmology.Parametro == self.arq ).select()[0]
321
322
323
324         sgtz = StringIO(DatosMatriz.Matriz)
325
326         data = io.mmread(sgtz)
327
328         X = [data[i,2] for i in range(len(data))]
329         Y = [data[i,4] for i in range(len(data))]
330
331
332         self.a.plot(X,Y,label=r'$\Omega_{b}=$ '+str(self.Para[0])+\
333         ', $\Omega_{m}=$ '+str(self.Para[1])+' , $\Omega_{\Lambda}=$ '\
334         +str(self.Para[2])+' , $h = $ '+str(self.Para[4]))
335
336
337
338         self.a.set_title(r'$\delta_{c}$ x $z$')
339         self.a.set_xlabel(r'$z$')
340         self.a.set_ylabel(r'$\delta_{c}$')
341         self.a.legend()
342         self.canvas.show()
343         self.canvas.get_tk_widget().pack()
344         self.toolbar.update()
345         self.canvas._tkcanvas.pack()
346
347         sgtz.close()
348
349
350     def rdm(self):
351         DatosMatriz= self.db(self.db.cosmology.Parametro == self.arq ).select()[0]
352
353
354
355         sgtz = StringIO(DatosMatriz.Matriz)
356
357         data = io.mmread(sgtz)
358         X = [data[i,2] for i in range(len(data))]
359         Y = [data[i,5] for i in range(len(data))]
360
361         self.a.plot(X,Y,label=r'$\Omega_{b}=$ '+str(self.Para[0])+\
362         ', $\Omega_{m}=$ '+str(self.Para[1])+' , $\Omega_{\Lambda}=$ '\
363         +str(self.Para[2])\
364         +', $h = $ '+str(self.Para[4]))
365         self.a.set_title(r'$\rho_{DM}$ x $z$')
366         self.a.set_xlabel(r'$z$')
367         self.a.set_ylabel(r'$\rho_{DM}$')
368         self.a.legend()
369         self.canvas.show()
370         self.canvas.get_tk_widget().pack()
371         self.toolbar.update()
372         self.canvas._tkcanvas.pack()
373
374         sgtz.close()
375
376
377     def rbr(self):
378         DatosMatriz= self.db(self.db.cosmology.Parametro == self.arq ).select()[0]
379
380
381
382         sgtz = StringIO(DatosMatriz.Matriz)
383
384         data = io.mmread(sgtz)
385
386         X = [data[i,2] for i in range(len(data))]
387         Y = [data[i,6] for i in range(len(data))]
388
389         self.a.plot(X,Y,label=r'$\Omega_{b}=$ '+str(self.Para[0])+\

```

```

390         ', $\Omega_{m}=$ '+str(self.Para[1])+' , $\Omega_{\Lambda}=$ '\
391 +str(self.Para[2])+' , $h = $ '+str(self.Para[4])
392
393     self.a.set_title(r'$\rho_{b}$ x $z$')
394     self.a.set_xlabel(r'$z$')
395     self.a.set_ylabel(r'$\rho_{b}$')
396     self.a.legend()
397     self.canvas.show()
398     self.canvas.get_tk_widget().pack()
399     self.toolbar.update()
400     self.canvas._tkcanvas.pack()
401
402     sgtz.close()
403
404     def sfr(self):
405
406         DadosMatriz= self.db(self.db.cosmicformation.Parametro == self.arq ).select()[0]
407         Dados= StringIO(DadosMatriz.Matriz)
408
409
410
411         data = io.mmread(Dados)
412
413
414         X = [data[i,0] for i in range(len(data))]
415         Y = [data[i,2] for i in range(len(data))]
416
417
418         self.a.plot(X,Y,label=r'$\Omega_{b}=$ '+str(self.Para[0])+\
419 ', $\Omega_{m}=$ '+str(self.Para[1])+' , $\Omega_{\Lambda}=$ '\
420 +str(self.Para[2])+' , \n $ln(M_{min})=$ '+str(self.Para[3])\
421 +', $h = $ '+str(self.Para[4])+' , \n $tau=$'+str(self.Para[5])\
422 +'Gyr , $x=$ '+str(self.Para[6])+' , $n=$ '+str(self.Para[0])
423     self.a.set_title('CSFR x z')
424     self.a.set_xlabel(r'$z$')
425     self.a.set_ylabel(r'$\dot{\rho}_{*}$')
426     self.a.legend()
427     self.canvas.show()
428     self.canvas.get_tk_widget().pack()
429     self.toolbar.update()
430     self.canvas._tkcanvas.pack()
431     Dados.close()
432
433     #####
434
435     def err_com(self):
436         mensagem= '''Erro: Verifique parametros de entrada, local de leitura do arquivo
437 ou se o grafico desejado corresponde a um modelo ja executado.
438 '''
439         tkMessageBox.showerror(title="Erro",\
440                                message=mensagem)
441     def InfoGeral(self,Wname,Info):
442         tkMessageBox.showinfo(Wname,Info)
443
444
445
446     def InSFR(self,omegab,omegam,omegal,h,lmin,zmax,db,eimf,tau0,nsch):
447
448
449         self.CSFR =csfr(omegab,omegam,omegal,h,lmin,zmax,db,eimf,tau0,nsch)
450
451
452
453
454     def rodar_csfr(self,event):
455         '''Funcao que chama o modelo de evolucao da densidade de gAjs em
456 estruturas e da taxa cosmica de formacao estelar'''
457
458
459         try:
460             omegam=float(self.e1.get())
461             omegal=float(self.e2.get())
462             h=float(self.e3.get())
463             zini = float(self.e4.get())
464             lmin = float(self.e9.get())
465             omegab= float(self.e8.get())
466             eimf = float(self.e11.get())

```

```

467         tau0 = float(self.e12.get())
468         nsch = float(self.e13.get())
469         db = self.dtb
470
471
472
473         subprocess=[]
474
475
476         q = mpg.Queue()
477         p=mpg.Process(target=self.InSFR,\
478             args=(omegab,omegam,omegal,h,lmin,zini,db,eimf,\
479                 tau0,nsch))
480         p.start()
481         subprocess.append(p)
482
483         while subprocess:
484             subprocess.pop().join()
485
486
487
488
489     except:
490         self.err_com()
491         self.Tesi=False
492
493
494
495
496     def Graf2(self,event):
497         try:
498             omegam=float(self.e1.get())
499             omegal=float(self.e2.get())
500             h=float(self.e3.get())
501             zini = float(self.e4.get())
502             lmin = float(self.e9.get())
503             omegab= float(self.e8.get())
504             locfile = str(self.locdire)
505             eimf = float(self.e11.get())
506             tau0 = float(self.e12.get())
507             nsch = float(self.e13.get())
508
509             arq="sigma_tz_"+str(omegab)+"_"+str(omegam)+"\
510                 "_+str(omegal)+"_"+str(h)+"_"+str(lmin)+"\
511                 "_+str(zini)
512
513             self.f.clear()
514             parametros=[omegab,omegam,omegal,lmin,h,tau0,eimf,nsch]
515
516             mbhg = self.GraApp(self.frame4,self.dtb,arq,self.canvas2,self.f,\
517                 self.toolbar,parametros)
518             mbhg.time_z()
519
520         except:
521             self.err_com()
522
523     def Graf3(self,event):
524         try:
525             omegam=float(self.e1.get())
526             omegal=float(self.e2.get())
527             h=float(self.e3.get())
528             zini = float(self.e4.get())
529             lmin = float(self.e9.get())
530             omegab= float(self.e8.get())
531             eimf = float(self.e11.get())
532             tau0 = float(self.e12.get())
533             nsch = float(self.e13.get())
534
535             parametros=[omegab,omegam,omegal,lmin,h,tau0,eimf,nsch]
536
537             arq="sigma_tz_"+str(omegab)+"_"+str(omegam)+"\
538                 "_+str(omegal)+"_"+str(h)+"_"+\
539                 str(lmin)+"_"+str(zini)
540             self.f.clear()
541             sig=self.GraApp(self.frame4,self.dtb,arq,self.canvas2,self.f,\
542                 self.toolbar,parametros)
543             sig.sigma()

```



```

544         except:
545             self.err_com()
546
547     def Graf4(self, event):
548         try:
549             omegam=float(self.e1.get())
550             omegal=float(self.e2.get())
551             h=float(self.e3.get())
552             zini = float(self.e4.get())
553             lmin = float(self.e9.get())
554             omegab= float(self.e8.get())
555             eimf = float(self.e11.get())
556             tau0 = float(self.e12.get())
557             nsch = float(self.e13.get())
558
559             arq="sigma_tz_"+str(omegab)+"_"+str(omegam)+"\
560                "+str(omegal)+"_"+str(h)+"_"+str(lmin)+"_"+str(zini)
561             self.f.clear()
562             parametros=[omegab,omegam,omegal,lmin,h,tau0,eimf,nsch]
563             sig = self.GraApp(self.frame4,self.dtb,arq,self.canvas2,\
564                 self.f,self.toolbar,parametros)
565             sig.d_c()
566         except:
567             self.err_com()
568
569     def Graf5(self, event):
570         try:
571             omegam=float(self.e1.get())
572             omegal=float(self.e2.get())
573             h=float(self.e3.get())
574             zini = float(self.e4.get())
575             lmin = float(self.e9.get())
576             omegab= float(self.e8.get())
577             eimf = float(self.e11.get())
578             tau0 = float(self.e12.get())
579             nsch = float(self.e13.get())
580
581
582
583             arq="sigma_tz_"+str(omegab)+"_"+str(omegam)+"\
584                "+str(omegal)+"_"+str(h)+"_"+str(lmin)+"_"+str(zini)
585             self.f.clear()
586             parametros=[omegab,omegam,omegal,lmin,h,tau0,eimf,nsch]
587             sig = self.GraApp(self.frame4,self.dtb,arq,self.canvas2,self.f,\
588                 self.toolbar,parametros)
589             sig.rdm()
590         except:
591             self.err_com()
592
593
594     def Graf6(self, event):
595         try:
596             omegam=float(self.e1.get())
597             omegal=float(self.e2.get())
598             h=float(self.e3.get())
599             zini = float(self.e4.get())
600             lmin = float(self.e9.get())
601             omegab= float(self.e8.get())
602             eimf = float(self.e11.get())
603             tau0 = float(self.e12.get())
604             nsch = float(self.e13.get())
605
606
607
608             arq="sigma_tz_"+str(omegab)+"_"+str(omegam)+"\
609                "+str(omegal)+"_"+str(h)+"_"+str(lmin)+"_"+str(zini)
610             self.f.clear()
611             parametros=[omegab,omegam,omegal,lmin,h,tau0,eimf,nsch]
612             sig = self.GraApp(self.frame4,self.dtb,arq,self.canvas2,self.f,\
613                 self.toolbar,parametros)
614             sig.rbr()
615         except:
616             self.err_com()
617
618     def Graf7(self, event):
619         try:
620             omegam=float(self.e1.get())

```

```

621         omegal=float(self.e2.get())
622         h=float(self.e3.get())
623         zini = float(self.e4.get())
624         lmin = float(self.e9.get())
625         omegab= float(self.e8.get())
626         eimf = float(self.e11.get())
627         tau0 = float(self.e12.get())
628         nsch = float(self.e13.get())
629
630
631         arq="CSFR_"+str(omegab)+"_"+str(omegam)+"\
632         "+"_"+str(omegal)+"_"+str(h)+"_"+str(zini)+"_"+str(eimf)+"\
633         "'_'+str(tau0)+'_'+str(nsch)
634         self.f.clear()
635         parametros=[omegab,omegam,omegal,lmin,h,tau0,eimf,nsch]
636         sig = self.GraApp(self.frame4,self.dtb,arq,self.canvas2,self.f,\
637         self.toolbar,parametros)
638         sig.sfr()
639     except:
640         self.err_com()
641
642
643
644     def sobre(self):
645         win = Toplevel(self.parent)
646         L0 = Label(win,text='Versão 1.0.\n Autor: Pereira, E. S. \n Maio 2011')
647         L1 = Label(win,bitmap="@./Imagens/og.xbm")
648         win.wm_title('Sobre')
649         L0.pack()
650         L1.pack()
651
652     def clean(self,event):
653         '''Funcao que limpa as entradas de dado e a mensagem de execucao.'''
654         self.e0.delete(0,END)
655         self.e1.delete(0,END)
656         self.e2.delete(0,END)
657         self.e3.delete(0,END)
658         self.e4.delete(0,END)
659         self.e8.delete(0,END)
660         self.e9.delete(0,END)
661         self.e11.delete(0,END)
662         self.e12.delete(0,END)
663         self.e13.delete(0,END)
664         self.f.clear()
665
666
667     #####
668     class Escolha(Dialog):
669         '''Classe que cria o menu de escolha do directorio'''
670
671
672         command = "tk_chooseDirectory"
673
674         def _fixresult(self, widget,result):
675             if result:
676                 self.options["initialdir"]=result
677                 self.directory = result
678                 return result
679     #####
680
681     def escolha_diret(self,**options):
682         self.locdire = apply(self.Escolha, (), options).show()
683         return self.locdire
684
685
686
687
688
689     #Inicio do programa
690     if __name__=="__main__":
691
692         win = Tk()
693         myapp = MyApp(win)
694         win.mainloop()

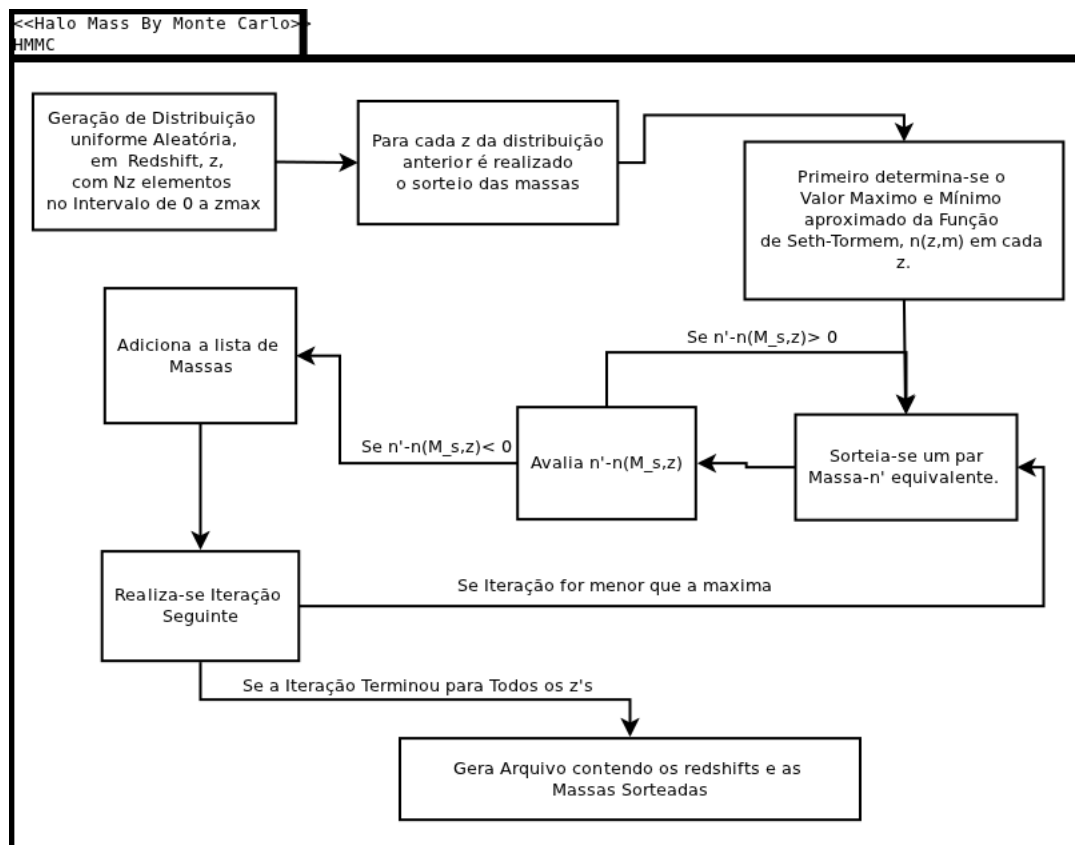
```

B.3 Modelo de Banco de Dados

```
1 from gluon import *
2
3 db=DAL("sqlite://bancodados//massfunc.sqlite")
4
5 def databasemodel(db):
6
7     db.define_table('cosmology',Field('Parametro'),Field('Matriz'))
8
9     db.cosmology.Parametro.requires=IS_NOT_EMPTY()
10    db.cosmology.Matriz.requires=IS_NOT_EMPTY()
11
12
13    db.define_table('pressschechter',Field('Parametro'),Field('Matriz'))
14    db.pressschechter.Parametro.requires=IS_NOT_EMPTY()
15    db.pressschechter.Matriz.requires=IS_NOT_EMPTY()
16
17
18
19    db.define_table('cosmicformation',Field('Parametro'),Field('Matriz'))
20    db.cosmicformation.Parametro.requires=IS_NOT_EMPTY()
21    db.cosmicformation.Matriz.requires=IS_NOT_EMPTY()
22
23
24    db.define_table('lambdamean',Field('Parametro'),Field('Matriz'))
25
26    db.lambdamean.Parametro.requires=IS_NOT_EMPTY()
27    db.lambdamean.Matriz.requires=IS_NOT_EMPTY()
28
29
30    db.define_table('fmassbh',Field('Parametro'),Field('Matriz'))
31    db.fmassbh.Parametro.requires=IS_NOT_EMPTY()
32    db.fmassbh.Matriz.requires=IS_NOT_EMPTY()
```


APÊNDICE C - Simulação Monte Carlo

Exemplo de uso da função de massa do formalismo tipo Press-Schechter para a geração sintética de halos de matéria escura com o *redshift*. Na Figura C é apresentado o esquema do processo de tal simulação.



Abaixo encontra-se o código fonte desse simulador, que utiliza como base o *framework* PyGraWC.

```

1  #!/usr/bin/env python
2
3  # -*- coding: utf-8 -*-
4  __author__ = 'Eduardo dos Santos Pereira'
5  __version__ = '1.1'
6  __date__ = '01/10/2011'
7
8  '''
9      File hmass.py.
10     copyright : Eduardo dos Santos Pereira
11     01 setembro. 2011.
12
13     hmass is free software: you can redistribute it and/or modify
14     it under the terms of the GNU General Public License as published by
15     the Free Software Foundation, either version 3 of the License.
16     PyGraWC is distributed in the hope that it will be useful,
17     but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
18     MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
19     GNU General Public License for more details.
20

```

```

21     You should have received a copy of the GNU General Public License
22     along with Foobar. If not, see <http://www.gnu.org/licenses/>.
23
24
25
26     #####Setembro de 2011#####
27     #####Versao 1.0#####
28     ##-----
29     ##Autor: Eduardo dos Santos Pereira.
30     ##email:duducosmo@das.inpe.br, duducosmos@hotmail.com
31     ##versao: 1.0
32     ##-----
33
34     ''
35
36
37     import sys
38     import os
39     import random
40
41     try:
42
43         from pygrawc.ps import PressSchechter
44     except:
45         sys.path.append('pygrawc.egg')
46         from pygrawc.ps import PressSchechter
47
48
49
50     import scipy.io as io
51     import numpy as np
52     import math
53
54
55     try:
56         os.mkdir('resultados')
57     except:
58         pass
59
60
61     def hmassMC(z,li,lf,nl,MyEstru):
62         """
63         Dark Halo mass by Monte Carlo Simulation:
64         This Function return a group of dark halo mass using Mote Carlo Simulation
65         has as base a like Press-Schechter mass function as a probability distribution function (PDF).
66         """
67
68         #Passo 1 determinar a area que engloba a funcao no intervalo [li,lf] usando o maximo da PDF
69         lf=float(lf)
70         li=float(li)
71
72         deltal=(lf-li)/float(1000)
73
74         print'Os limites de l', li,lf
75
76         l=[li+float(i)*deltal for i in range(1000)]
77
78         #print"Calculando a funcao de massa, para determinacao do maximo"
79
80         fm=[ MyEstru.fmast(li2,z) for li2 in l]
81         Vmax=np.max(fm)
82         Vmin=np.min(fm)
83
84
85
86         print'Minimo e Maximo de fm',Vmax,Vmin
87
88         cont=0
89         Stop=0
90         Mrand=[]
91         print "Inicio do Monte Carlo para z=%1.2f" %z
92         while(Stop == 0):
93
94             nrand=random.uniform(Vmin,Vmax)
95             mrand=random.uniform(li,lf)
96
97             Np=MyEstru.fmast(mrand,z)

```

```

98     T=nrnd-Np
99
100
101
102     if(T<=0.0):
103         VH=MyEstru.V_halo(z,10.0**(mrand))
104         Mrand.append([z,10.0**(mrand),VH])
105
106
107         cont+=1
108         if(cont == nl):
109             Stop=1
110     return Mrand
111
112
113 if __name__ == '__main__':
114     omegab=input('Qual o valor de omega barionico do presente?: ')
115     omegam=input('Qual o valor de omega da materia escura do presente?: ')
116     omegal=input('Qual o valor de omega energia escura do presente?: ')
117     h=input('Qual o valor de h(hubble exp: 0.7) presente?: ')
118     lmin=float(input('Qual o log da massa minima dos halos de materia escura?: '))
119     zmax=float(input('Qual redshift inicial (z=20,30,40): '))
120     nz=int(input('Quantos pontos em z voce quer calcular (ex: 500)?: '))
121     nl=int(input('Quantos pontos em log(M_halo) voce quer calcular (ex: 500)?: '))
122
123     if(nz == 0 or nz ==None):
124         nz=500
125     if(nl == 0 or nl == None):
126         nl=500
127
128
129     locfile='./resultados/'
130     print' '
131     print' Os dados de saida estarao no diretorio ./resultados/hmassMC.dat'
132
133     MyEstru=PressSchechter(omegab,omegam,omegal,h,6.0,zmax,locfile)
134
135     mmax=1.0e+18
136     lmax =np.log10(mmax/10.0)
137
138     deltaz=zmax/float(nz)
139
140     Z=[float(i)*deltaz for i in range(nz)]
141
142     z=[random.uniform(0.0,zmax) for i in Z]
143
144     fm=[ hmassMC(zj,lmin,lmax,nl,MyEstru) for zj in z]
145
146
147     print"Monte Carlo Terminado , gerando arquivo de saida"
148
149
150     arq1=open(locfile+'hmassMC.dat','w')
151
152
153     for fi in fm:
154         for fj in fi:
155             lin='%3.9e %3.9e %3.9e \n' %(fj[0],fj[1],fj[2])
156             arq1.write(lin)
157
158     arq1.close()
159
160     print ""
161     Foi gerado o arquivo: hmassMC.dat
162     Matriz contendo os valores das massas dos halos geradas por Monte Carlo.
163     A primeira linha e o redshift, a segunda a massa do halo e
164     a terceira linha o volume do halo
165     ""

```

