



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

INPE-11255-TDI/947

**ANÁLISE DO MODELO DE MISTURA NÃO GAUSSIANA PARA O
CAMPO DE FLUTUAÇÕES DA RADIAÇÃO
CÓSMICA DE FUNDO**

Ana Paula de Almeida Andrade

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica , orientada pelos Drs.
Carlos Alexandre Wuensche de Souza e André Luis Batista Ribeiro, aprovada em
02 de junho de 2003.

524.88

ANDRADE, A. P. A.

Análise do modelo de mistura não gaussiana para o campo de flutuações da radiação cósmica de fundo /

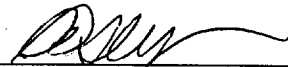
A.P.A.Andrade.- São José dos Campos: INPE, 2003.

224p. – (INPE-11255-TDI/947).

1.Cosmologia. 2.Plasma cosmológico. 3.radiação de fundo. 4.Distribuição de densidade. 5.Modelos. 6.Campo misto. 7.Distribuições estatísticas. 8.Simulação numérica.
I.Título.

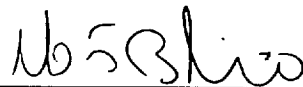
Aprovada pela Banca Examinadora em
cumprimento a requisito exigido para a
obtenção do Título de **Doutora em
Astrofísica.**

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza



Orientador/Presidente/INPE-SJC/SP

Dr. André Luís Batista Ribeiro



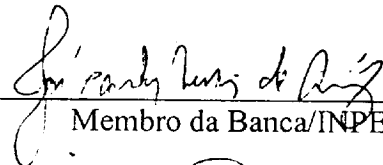
Orientador/Universidade Santa Cruz
Ilhéus/BA

Dr. Thyrsó Villela Neto



Membro da Banca/INPE-SJC/SP

Dr. José Carlos Neves de Araújo



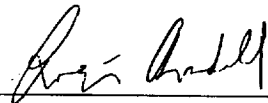
Membro da Banca/INPE-SJC/SP

Dr. Patrício Aníbal Letelier Sotomayor



Membro da Banca
Convidado IMECC/UNICAMP
Campinas/SP

Dr. Rogério Rosenfeld



Membro da Banca
Convidado IFT/UNESP
São Paulo/SP

Candidato (a): Ana Paula de Almeida Andrade

São José dos Campos, 2 de junho de 2003.

À memória de meu pai

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza e ao Dr. André Luís Batista Ribeiro que dedicadamente orientaram este trabalho transmitindo segurança, compreensão e amizade.

Ao coordenador do grupo de Cosmologia Observacional do INPE, Dr. Thyrso Villela Neto, pelo trabalho de orientação acadêmica e a todos os integrantes do grupo pelas frutíferas discussões.

Aos colegas Kilder Leite Ribeiro, Agenor Pina Silva, Jorge Mejia, Rodrigo Leonardi, Rogério de Souza, Márcia de Oliveira e Cristiane Souza, pelas discussões e colaborações durante a elaboração deste estudo; e a todos os colegas que, direta ou indiretamente, contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

Aos participantes do Grupo Temático de Cosmologia e Formação de Estruturas (IAG/USP & DAS/INPE), pelas discussões e proveitosas sugestões.

Aos integrantes do corpo docente da divisão de Astrofísica do INPE, que consolidaram as bases deste trabalho, e a todos os funcionários da divisão, pela agradável convivência.

Ao Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio e pela bolsa concedida.

E, em especial, agradeço à minha família, que muito me apoiou em todos os momentos difíceis.

RESUMO

Estudos estatísticos das flutuações primordiais de densidade podem oferecer um importante teste para os modelos cosmológicos que descrevem a origem e a evolução dessas flutuações. Basicamente, o campo de flutuações de densidade pode ser classificado em duas categorias distintas: uma delas descrita por uma estatística *gaussiana* e outra que engloba todas as estatísticas não *gaussianas*. De um lado, encontra-se o modelo inflacionário que prevê um espectro de flutuações adiabáticas distribuídas seguindo uma estatística *gaussiana* e, de outro, modelos de defeitos topológicos que descrevem um mecanismo para a geração de flutuações de isocurvatura que obedecem a uma distribuição não *gaussiana*. Este trabalho tem como objetivo investigar, no contexto das flutuações da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), as características básicas do modelo de campo misto entre flutuações de origem adiabática e de isocurvatura, cuja função de distribuição é descrita por uma estatística não *gaussiana*. A investigação das propriedades do campo misto de flutuações foi realizada por meio de simulações Monte Carlo das anisotropias da RCF assumindo inicialmente um espectro misto de flutuações, com estatística ligeiramente não *gaussiana* e considerando a evolução linear dos campos de flutuações desde o Universo primordial até o momento do desacoplamento entre fótons e matéria. As características do modelo de mistura foram investigadas no espectro de potência angular da RCF e na simulação, em pequenas escalas angulares, dos mapas de temperatura, ambos gerados assumindo um espectro de potência misto e uma distribuição não *gaussiana* para o campo de flutuações. Os resultados obtidos indicam traços marcantes no espectro de potência da RCF, ainda que considerada apenas uma pequena fração de mistura entre os campos (da ordem de 0,1%). As alterações observadas claramente indicam a transferência de potência de flutuações em escalas angulares intermediárias (~ 1 grau) para flutuações em pequenas escalas angulares (1-5 minutos de arco). Nós interpretamos este resultado como a indicação de fortes correlações para as flutuações em escalas inferiores ao horizonte de Hubble. A descrição estatística do campo misto de flutuações foi realizada por meio do estudo, no contexto não *gaussiano*, da função de correlação média do campo e da função de correlação entre picos de grande amplitude. Esta descrição nos permite mostrar o aumento da função de correlação média para o campo de densidade em função da componente não *gaussiana*. Este trabalho apresenta resultados originais na descrição do comportamento do espectro de potência angular da RCF quando adicionada uma componente não *gaussiana* ao campo original. Este estudo pode auxiliar a compreensão dos efeitos das contribuições não *gaussianas* para o campo de flutuações da RCF e servir de referência para estudos futuros referentes aos processos físicos vigentes no Universo primordial que deram origem às flutuações de densidade. As previsões do modelo de campo misto, uma vez confrontadas com as observações da RCF em pequenas escalas angulares, podem ajudar a revelar a natureza das flutuações primordiais.

MIXED NON-GAUSSIAN MODEL IN COSMIC BACKGROUND RADIATION FLUCTUATIONS FIELD

ABSTRACT

Statistical studies of primordial density fluctuations offer a crucial test for cosmological models which intend to describe their origin and evolution. Basically we can divide the density fluctuations field in two distinct classes: one of them described by a gaussian statistics and the other encompassing all the other, non-gaussian, cases. In one side, we find the inflationary model, which predicts an angular power spectrum with gaussian, adiabatic fluctuations. On the other side, there are various models based upon topological defects which predicts spectra generated by isocurvature fluctuations obeying one or more non-gaussian statistics. This work investigates the basic characteristics of a mixed field model, composed by adiabatic and isocurvature fluctuations, with a probability distribution function (PDF) described by a non-gaussian statistics, in the context of the Cosmic Microwave Background Radiation (CMBR). The investigation of the mixed field's properties were carried out using Monte Carlo simulations of the CMBR temperature field, assuming an initially mixed (slightly non-gaussian) power spectrum and a linear evolution from the very early Universe until the decoupling epoch. The characteristics of the mixed model were studied in the CMBR angular power spectrum distribution and in the simulated, small angular scale, CMBR temperature maps, both generated assuming a mixed power spectrum and non-gaussian distribution for the fluctuations. The results indicate clear features in the CMBR power spectrum, even considered a very small mixing fraction ($\sim 0,1\%$). Observed alterations clearly indicate the transfer of power in the fluctuations from intermediate angular scale (~ 1 degree) to small scale ($\sim 1-5$ arcminutes). We interpret this result as an indication of stronger correlations for fluctuations inside the Hubble radius. The statistical description of fluctuations in a mixed field was carried out studying, in a non-gaussian context, both the average correlation function for a given field and the correlation function for high amplitude peaks. This description allows us to show the increase of the average correlation function for the density field as a function of the non-gaussian component. This work presents an original result describing the behavior of the CMBR angular power spectrum when adding a non-gaussian component to the original gaussian field. It can be used to understand the effects of non-gaussian contributions to the CMBR fluctuation field and also as a reference for future studies concerning physical processes which generated the density fluctuations in the early Universe. The predictions of the mixed field model, compared to the CMBR measurements in small angular scales can help to reveal the very nature of the primordial density fluctuations.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
CAPÍTULO 1 - O CAMPO DE FLUTUAÇÕES PRIMORDIAIS	23
1.1 - Introdução.....	23
1.2 - O Universo Primordial e o Modelo Cosmológico Padrão.....	26
1.3 - O Campo de Flutuações.....	29
1.3.1 - Algumas Previsões da Teoria de Perturbação Linear.....	31
1.3.2 - O Processo de Formação de Estruturas.....	35
1.4 - Espectro de Flutuações <i>Gaussianas</i>	36
1.5 - Campo de Flutuações <i>Gaussianas</i> na RCF.....	41
1.5.1 - O Espectro de Potência da RCF.....	45
1.5.2 - Espectro de Polarização da RCF.....	51
1.6 - As Observações do Campo de Flutuações.....	54
CAPÍTULO 2 - O MODELO NÃO GAUSSIANO DE CAMPO MISTO ...	57
2.1 - Campos de Flutuações não <i>Gaussianas</i>	57
2.2 - O Modelo de Mistura.....	62
2.3 - O Modelo de Mistura em Escala.....	66
2.4 - O Modelo de Mistura na RCF.....	70
2.4.1 - A Evolução das Flutuações Primordiais no Modelo de Campo Misto.....	71
2.4.2 - As Simulações do Modelo de Mistura.....	74
CAPÍTULO 3 - AS PREVISÕES DO MODELO DE MISTURA PARA A RCF	79
3.1 - O Modelo CDM Padrão de Campo Misto.....	79
3.2 - O Modelo de Mistura e os Parâmetros Cosmológicos.....	92
3.3 - O Fator de Normalização e as estimativas de α_0 na RCF.....	101
3.4 - Principais Resultados e Conclusões.....	109

CAPÍTULO 4 - OS MAPAS DAS FLUTUAÇÕES DE TEMPERATURA DA RCF E SUAS IMPLICAÇÕES	111
4.1 - As Medidas e os Mapas da RCF.....	111
4.2 - Os Mapas da RCF no Contexto de Mistura.....	114
4.3 - Ajuste do Espectro de Potência aos Mapas da RCF.....	131
4.4 - A Função de Correlação Angular.....	142
4.5 - Principais Resultados e Conclusões.....	147
CAPÍTULO 5 - ESTUDO DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO DO CAMPO MISTO	149
5.1 - A Descrição Estatística do Campo de Flutuações.....	149
5.1.1 - O Campo de Variáveis Aleatórias.....	150
5.1.2 - Correlação entre Variáveis Aleatórias.....	152
5.1.3 - A Função de Correlação do Campo de Flutuações.....	154
5.2 - Processos <i>Gaussianos</i> no Campo de Flutuações.....	155
5.3 - A Função de Correlação em Campos não <i>Gaussianos</i>	158
5.3.1 - Correlação Aproximada para o Campo Mistto.....	160
5.3.2 - O Fator de Correção para a Correlação de Campos não <i>Gaussianos</i>	170
5.4 - Principais Resultados e Conclusões.....	180
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	181
6.1. Conclusões.....	181
6.2. Resultados do WMAP.....	184
6.3. Perspectivas Futuras.....	187
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	191
APÊNDICE A – MEDIDAS DAS FLUTUAÇÕES DE TEMPERATURA DA RCF	207

APÊNDICE B – CÁLCULO DA PROBABILIDADE BIDIMENSIONAL DOS PICOS DE ALTA DENSIDADE EM UM CAMPO GAUSSIANO.....	211
APÊNDICE C – CÁLCULO DA PROBABILIDADE BIDIMENSIONAL DOS PICOS DE ALTA DENSIDADE EM CAMPOS NÃO GAUSSIANOS.....	219

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 - Espectro da RCF medido pelo experimento FIRAS / COBE.....	42
1.2 - Função de correlação de dois pontos estimada pelas medidas do experimento DMR / COBE.....	45
1.3 - Espectro de potência da Radiação Cósmica de Fundo estimado pelas observações dos experimentos BOOMERANG, MAXIMA, DASI, CAT e CBI.....	47
1.4 - Estimativas da amplitude da componente polarizada da RCF inferidas a partir de medidas obtidas por diversos experimentos.....	53
2.1 - Simulações numéricas de um aglomerado de galáxias apresentadas juntamente com uma versão gerada aleatoriamente desprezando as informações de fase dos modos de perturbação.....	58
2.2 - Distribuição de probabilidade das flutuações iniciais de densidade para os modelos de espectro gaussiano, não gaussiano com assimetria positiva, não gaussiano com assimetria negativa e com assimetria positiva e negativa obtidos por meio das transformações tipo $M_p(\delta)$ e $M_n(\delta)$, no modelo de Weinberg e Cole.....	60
2.3 - Abundância de aglomerados de galáxias no modelo de campo em duas componentes para $\Omega_m = 0,2$ e $\Omega_m = 0,1$, ajustados ao modelo misto com $\alpha = 0,9990$ e $\alpha = 0,9999$	65
2.4 - Distorção do campo <i>gaussiano</i> para diferentes componentes de mistura.....	69
3.1 - Espectro de potência angular para as flutuações de temperatura da RCF estimado para o modelo Λ - CDM padrão, com campo misto de flutuações <i>gaussianas</i> e <i>log-normal</i> , em diferentes coeficientes de mistura.....	80
3.2 - Espectro de potência angular para a componente polarizada no modo E da RCF estimado para o modelo Λ - CDM padrão, com campo misto de flutuações <i>gaussianas</i> e <i>log-normal</i> , em diferentes coeficientes de mistura.....	81
3.3 - Percentual de polarização da RCF estimado para o modelo de mistura entre flutuações <i>gaussianas</i> e <i>log-normal</i> , em diferentes níveis de mistura.....	83

3.4 - Flutuações de temperatura correspondente às intensidades total e polarizada da RCF simuladas para o campo misto de flutuações <i>gaussianas</i> e <i>log-normal</i> , em diferentes níveis de mistura.....	84
3.5 - Média das flutuações de temperatura da RCF estimada para o modelo de mistura entre distribuições <i>gaussiana</i> e <i>log-normal</i> para diferentes níveis de mistura.....	86
3.6 - Espectro de potência angular da RCF simulado para o modelo de campo misto em diferentes combinações de mistura, considerando o modelo Λ -CDM padrão, com coeficiente de mistura $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$	88
3.7 - Amplitude relativa dos picos acústicos de 1 ^a , 2 ^a e 3 ^a ordem no espectro de temperatura para o modelo Λ -CDM misto <i>gaussiano</i> e <i>log-normal</i>	90
3.8 - Espectro de potência de temperatura estimado para o modelo Λ -CDM com campo puramente adiabático (<i>gaussiano</i>), combinando um amplo espaço de parâmetros cosmológicos.....	94
3.9 - Espectro de potência de temperatura estimado para o modelo Λ -CDM com campo puramente adiabático (<i>gaussiano</i>), combinando os parâmetros: $\Omega_b = 0,03$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, enquanto o índice espectral varia de 0,8 a 1,2.....	96
3.10 - Espectro de potência de temperatura estimado para o modelo Λ -CDM de campo misto (adiabático e de <i>isocurvatura</i>) com distribuição <i>gaussiana</i> e <i>log-normal</i> , combinando os parâmetros: Ω_b , Ω_{CDM} , Ω_Λ e H_0 . O índice espectral é fixo em 1,1 e o coeficiente de mistura em $\alpha_0 = 1,5 \times 10^{-3}$	99
3.11 - Flutuações de temperatura da RCF obtidas por diversos experimentos e as estimativas do modelo de mistura para um campo de flutuações adiabáticas (<i>gaussianas</i>) e de <i>isocurvatura</i> (<i>log-normal</i>), normalizadas por diferentes valores de Q, com definição de parâmetros: $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$; $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_0 = 1$; $\Omega_\Lambda = 0,7$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_b = 0,03$ e $n = 1,1$	102
3.12 - Flutuações de temperatura da RCF obtidas por diversos experimentos e as melhores estimativas teóricas para o modelo de campo misto.....	108
4.1 - Mapas das flutuações de temperatura da RCF obtidos nos quatro anos de observação do satélite COBE, nas frequências de 53 e 90 GHz, representados em coordenadas galácticas, nas projeções Aitoff (esfera completa) e Gnomônica (hemisférios norte e sul galáctico).....	113

4.2 - Mapa das flutuações de temperatura da RCF obtidos nas observações do satélite MAP, durante o ano de 2002, já corrigido do sinal galáctico.....	114
4.3 - Mapas das flutuações de temperatura da RCF, em intensidade total e polarizada, simulados com condições iniciais <i>gaussianas</i> ($\alpha_0 = 0$), para um campo de flutuações adiabáticas, do tipo Λ -CDM-padrão.....	119
4.4 - Mapas das flutuações de temperatura da RCF, em intensidade total e polarizada, simulados com condições iniciais não <i>gaussianas</i> ($\alpha_0 = 1$), para um campo de flutuações de <i>isocurvatura</i> , do tipo Λ -CDM-padrão..	120
4.5 - Mapas das flutuações de temperatura da RCF, em intensidade total e polarizada, simulados com condições iniciais do modelo de mistura para um campo de flutuações adiabáticas e de <i>isocurvatura</i> , do tipo Λ -CDM-padrão, com distribuição mista e razão de mistura: $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$	121
4.6 - Mapa das flutuações de temperatura da RCF simulados para um campo hipotético com espectro plano, $l(l+1)C_l = 1$	122
4.7 - Médias das flutuações de temperatura da RCF estimadas a partir dos mapas simulados com condições de mistura entre distribuições <i>gaussiana</i> e exponencial para diferentes níveis de mistura	125
4.8 - Histograma das flutuações de temperatura estimado nas simulações da RCF para os modelos: <i>gaussiano</i> puro com flutuações adiabáticas, $\alpha_0 = 0$; modelo misto de flutuações adiabáticas e de <i>isocurvatura</i> , com distribuição <i>gaussiana</i> e exponencial para: $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$; $\alpha_0 = 1,5 \times 10^{-3}$; $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$	126
4.9 - Histograma das flutuações na componente polarizada estimado nas simulações da RCF para os modelos: <i>gaussiano</i> puro com flutuações adiabáticas, $\alpha_0 = 0$; modelo misto de flutuações adiabáticas e de <i>isocurvatura</i> , com distribuição <i>gaussiana</i> e exponencial para $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$	127
4.10 - Histograma das flutuações de temperatura estimado nas simulações da RCF para os modelos: <i>gaussiano</i> puro com flutuações adiabáticas, $\alpha_0 = 0$; flutuações de espectro plano, $l(l+1)C_l = 1$, com distribuição <i>gaussiana</i> , $\alpha_0 = 0$, e com distribuição exponencial, $\alpha_0 = 1$; e flutuações de <i>isocurvatura</i> com distribuição exponencial, $\alpha_0 = 1$	127
4.11 - Espectro de potência da RCF, $C_l^{\text{saída}}$, extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para $\alpha_0 = 0$	133

4.12 - Espectro de potência da RCF, $C_1^{saída}$, extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$	133
4.13 - Espectro de potência da RCF, $C_1^{saída}$, extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para $\alpha_0 = 1,5 \times 10^{-3}$	134
4.14 - Espectro de potência da RCF, $C_1^{saída}$, extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$	134
4.15 - Espectro de potência da RCF, $C_1^{saída}$, extraído do mapa das flutuações na componente polarizada da RCF, simulado para $\alpha_0 = 0$	135
4.16 - Espectro de potência da RCF, $C_1^{saída}$, extraído do mapa das flutuações na componente polarizada da RCF, simulado para $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$	136
4.17 - Espectro de potência, $C_1^{saída}$, extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para o modelo de <i>isocurvatura</i> com $\alpha_0=1$	136
4.18 - Espectro de potência, $C_1^{saída}$, extraído das simulações dos mapa das flutuações de temperatura considerando espectro plano.....	137
4.19 - Histograma dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas estimados dos mapas das flutuações de temperatura para os modelos de <i>isocurvatura</i> , $\alpha_0 = 1$, e os modelos hipotéticos com espectro plano e distribuição <i>gaussiana</i> , $\alpha_0 = 0$, ou distribuição exponencial, $\alpha_0 = 1$...	139
4.20 - Histograma dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas estimados dos mapas das flutuações de temperatura da RCF para os modelos: <i>gaussiano</i> puro com flutuações adiabáticas, $\alpha_0 = 0$; modelo misto de flutuações adiabáticas e de <i>isocurvatura</i> , com distribuição mista <i>gaussiana</i> e exponencial, para $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$; $\alpha_0 = 1,5 \times 10^{-3}$; $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$	140
4.21 - Histograma dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas estimados dos mapas das flutuações de temperatura na componente polarizada da RCF para os modelos de mistura <i>gaussiana</i> e exponencial com razões: $\alpha_0 = 0$; $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$	141
4.22 - Função de correlação angular estimada a partir dos polinômios de Legendre e do espectro de potência simulado, $C_1^{entrada}$, para o modelo de campo misto com razões de mistura: $\alpha_0 = 0$ (para flutuações adiabáticas ou de <i>isocurvatura</i>); $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$; $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$; $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$; $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 4 \times 10^{-3}$	144
4.23 - Função de correlação angular estimada a partir do espectro de potência extraído dos mapas simulados, $C_1^{saída}$, para o modelo de campo misto.....	145

5.1 - Comportamento da função de correlação média entre dois pontos separados por uma distância R/R_0 , considerando campos de flutuações com distribuição <i>gaussiana</i> e exponencial, à razão de mistura: $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$	165
5.2 - Comportamento da função de correlação média entre dois pontos separados por uma distância R/R_0 , considerando campos com distribuição <i>gaussiana</i> e exponencial, às razões de mistura: $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$; $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$	166
5.3 - Comportamento da função de correlação entre picos com densidade $\eta = 3\sigma$, ξ_{η}^{Mix} , para a composição de mistura <i>gaussiana</i> e exponencial com coeficiente de mistura $\alpha_0 = 2.2 \times 10^{-3}$	168
5.4 – Comportamento de ξ_{η}^{Mix} para diferentes componentes não <i>gaussianas</i> com coeficiente de mistura: $\alpha_0 = 2.2 \times 10^{-3}$ e $\eta = 3\sigma$	169
5.5 – Comportamento de C_{η}^{NG} em função de η , fixando a correlação média do campo em $\xi_r \sim 1$	174
5.6 - Estimativa do fator de correção C_{η}^{NG} para o campo misto de flutuações com distribuição <i>gaussiana</i> e exponencial com razão de mistura $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$	176
5.7 - Comportamento da função de correlação entre flutuações de densidade 2σ , estimada para as considerações de campo puramente <i>gaussiano</i> , $\xi_{\eta}^{\text{Gauss}}$, campo misto com correlações <i>gaussianas</i> , ξ_{η}^{Mix} , e campo misto com correlações não <i>gaussianas</i> , $\xi_{\eta}^{\text{Mix}} + C_{\eta}^{\text{NG}}$	177
5.8 - Estimativa do incremento não <i>gaussiano</i> para a consideração de correlações superiores no contexto de mistura do campo de flutuações.....	179
6.1 - Espectro de potência estimado para as flutuações de temperatura da RCF a partir das observações do WMAP.....	185
6.2 - Função de correlação angular estimada para as flutuações de temperatura da RCF a partir das observações do WMAP.....	185

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 - Média das flutuações de temperatura estimada para diversas combinações de mistura, normalizada pelas flutuações do COBE em 13 μ K.....	87
3.2 - Amplitude relativa dos picos acústicos de 1 ^a , 2 ^a e 3 ^a ordem e a média das flutuações de temperatura estimadas para diversos modelos Λ -CDM com espectro puramente <i>gaussiano</i> (adiabático).....	98
3.3 - Amplitude relativa dos picos acústicos de 1 ^a , 2 ^a e 3 ^a ordem e a média das flutuações de temperatura estimadas para diversos modelos Λ -CDM de campo misto com distribuição <i>gaussiana</i> e <i>log-normal</i> com razão de mistura $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$	100
3.4 - Valores de <i>qui-quadrado</i> reduzido, χ^2_{ν} , e as correspondentes médias de flutuações estimados para a melhor combinação de parâmetros Q e α_0 para diversos modelos cosmológicos simulados.....	106
4.1 - Combinações de fase dos coeficientes a_{lm} para um espectro de flutuações com distribuição <i>gaussiana</i>	130
A1 - Medidas das Flutuações de Temperatura da RCF.....	207

CAPÍTULO 1

O CAMPO DE FLUTUAÇÕES PRIMORDIAIS

1.1 - INTRODUÇÃO

As flutuações de temperatura observadas na Radiação Cósmica de Fundo (RCF) em diferentes escalas angulares provêm uma forte evidência para a existência de flutuações primordiais em torno de uma densidade média de matéria (Smoot et al., 1992). De acordo com o modelo padrão de formação de estruturas, essas inhomogeneidades de matéria são consideradas as sementes das estruturas em grandes escalas, que teriam evoluído, devido às instabilidades gravitacionais, formando as *macroestruturas* observadas no Universo atual. Um dos maiores desafios da cosmologia contemporânea é determinar a origem dessas flutuações primordiais.

No cenário cosmológico padrão, e.g. Kolb e Turner (1994), o modelo mais aceito para descrever a origem das perturbações primordiais é o modelo inflacionário. No modelo inflacionário padrão, as flutuações primordiais de densidade são descritas a partir da amplificação de flutuações quânticas presentes no campo escalar, ϕ , que teria governado a dinâmica do Universo durante a fase de expansão inflacionária. Esse processo inflacionário seria resultante de uma transição de fase seguida da quebra espontânea de simetria da grande unificação de forças, ocorridos quando a temperatura do Universo atingiu 10^{25} K (Guth, 1981; Guth e Pi, 1982; Bardeen, Steinhardt e Turner, 1983). As flutuações geradas nesse processo de amplificação de ruídos quânticos são flutuações adiabáticas (conservam a entropia por unidade de partícula), aleatórias, independentes e com espectro aproximadamente invariante em escalas da ordem de $(1 - 2)^\circ$. De acordo com o teorema central do limite, um campo de flutuações aleatórias e independentes tende a obedecer a uma distribuição *gaussiana* (Feller, 1971).

Modelos inflacionários alternativos, como o modelo inflacionário caótico envolvendo múltiplos campos escalares (Salopek, Bond e Bardeen, 1989), os modelos envolvendo campos escalares massivos (Koyama, Soda e Taruya, 1999; Allen, Grinstein e Wise, 1987), e os modelos com campos de flutuações nos quais são permitidas variações no parâmetro de Hubble (Barrow e Coles, 1990), também descrevem a amplificação de flutuações de origem quântica, porém correlacionadas, seguindo uma distribuição com significativos desvios de *gaussianidade*. O modelo inflacionário com campo escalar massivo, por exemplo, sugere um espectro de flutuações com distribuição *qui-quadrado*, χ^2 .

Outras classes de modelos não inflacionários também descrevem a geração de flutuações primordiais com distribuição não *gaussiana*. Os modelos de formação de estruturas baseados na teoria de defeitos topológicos consideram que as inhomogeneidades primordiais de matéria são decorrentes de uma rede de núcleos ativos de energia (denominados defeitos topológicos) criados durante uma transição de fase ocorrida quando a temperatura do Universo atingiu cerca de 10^{15} - 10^{16} K, rompendo a unificação das forças *eletrofracas* (Kibble, 1976; Magueijo e Brandenberger, 1999). Esses defeitos podem ser unidimensionais, ditos monopolos (Barriola e Vilenkin, 1989), bidimensionais, ditas cordas cósmicas (Zeldovich, 1980), tridimensionais, ditas paredes de domínio, ou sem dimensão no espaço-tempo, ditas texturas (Turok, 1989). No cenário de defeitos topológicos, as flutuações geradas são flutuações de *isocurvatura* (conservam a densidade de energia no espaço-tempo), que não podem ser consideradas independentes e, portanto, o campo de flutuações obedece à estatística não *gaussiana*.

Modelos híbridos consideram o surgimento de defeitos topológicos ao final do período inflacionário que, juntamente com as flutuações quânticas amplificadas no período inflacionário, gerariam as perturbações primordiais de densidade (Battye e Weller, 1998; Magueijo, Contaldi e Hindmarsh, 1998). O campo resultante é obtido por uma combinação ponderada dos campos individuais independentes e o espectro sugerido obedece a uma distribuição *log-normal* (Battye, Magueijo e Weller, 1999). Bolhas de vácuo verdadeiro também podem ser criadas ao final do período inflacionário, somado-

se às flutuações quânticas e contribuindo para a geração das inhomogeneidades primordiais, cujo campo resultante tende a obedecer a uma distribuição com significativos desvios de *gaussianidade* (Corasaniti, Amendola e Occhionero, 2003). Outros modelos, como o modelo de topologia hiperbólica do Universo (Inoue, 2000) e os modelos que descrevem a formação de galáxias a partir da fragmentação de *protoaglomerados* (Peebles, 1983) ou por meio da amplificação explosiva de estrelas primitivas de grande massa (Ostriker e Cowie, 1981), também descrevem espectros de flutuações com distribuições não *gaussianas*.

Uma análise comparativa entre esses diversos modelos cosmológicos pode ser feita a partir do estudo das propriedades estatísticas do campo de densidades primordiais. Neste sentido, a RCF é considerada a melhor ferramenta para a investigação da natureza das flutuações de densidade, visto que as flutuações de temperatura observadas em $\delta T/T$ possuem as propriedades estatísticas intrínsecas das perturbações cosmológicas primordiais (Verde et al., 2000; 2001). Assim sendo, o estudo de desvios de *gaussianidade* na RCF pode ajudar a discriminar modelos cosmológicos de formação de estruturas.

O objetivo deste trabalho é investigar os efeitos de uma possível mistura de componentes no campo de flutuações de densidade associado às anisotropias da RCF, com o intuito de auxiliar o processo de discriminação dos mecanismos de geração das flutuações primordiais. Os temas abordados neste trabalho estão divididos nos seguintes itens: no Capítulo 1, são abordadas as propriedades genéricas das flutuações primordiais, as flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo e as observações recentes do campo de flutuações; no Capítulo 2, são apresentadas as características básicas do modelo de mistura para um campo de flutuações não *gaussianas* e a descrição do processo de simulação das anisotropias da RCF; no Capítulo 3, são apresentados e discutidos os resultados das simulações numéricas do espectro de potência de temperatura e polarização da RCF para o modelo de mistura entre flutuações adiabáticas com distribuição *gaussiana* e flutuações de *isocurvatura* com distribuição *log-normal*, χ^2_1 (*qui-quadrado* com um grau de liberdade),

maxwelliana, exponencial e *Rayleigh*; no Capítulo 4, são apresentados e analisados os mapas das flutuações de temperatura previstos pelo modelo de mistura; no Capítulo 5, são discutidas as propriedades da função de correlação de mistura para flutuações de alta densidade; e, no Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras deste trabalho.

1.2 - O UNIVERSO PRIMORDIAL E O MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

Segundo o modelo cosmológico padrão (MCP) e a física de partículas elementares, as propriedades do Universo observável podem ser descritas a partir de uma singularidade, denominada big-bang, ocorrida quando as condições de temperatura e densidade eram extremamente elevadas, e.g. Kolb e Turner (1994); Peacock (1999). A partir desta singularidade, o Universo entrou numa fase de expansão isotrópica que pode ser descrita como uma sucessão de estados de *quasi-equilíbrio* térmico com temperatura proporcional a $a^{-1}(t)$, sendo $a(t)$ o fator de escala do Universo. A taxa de variação da temperatura é associada ao fator de expansão do Universo, sendo $H(t) = -\dot{T}/T(t)$. A evolução térmica do Universo também pode ser descrita em função do deslocamento Doppler (*redshift* z) decorrente da expansão do Universo, sendo $(1 + z) \propto a^{-1}(t)$.

Na medida em que o Universo se resfriou, uma sucessão de transições de fase e quebras de simetria entre as forças de interação envolvidas permitiu o surgimento de perturbações no campo de densidades, semeando o Universo primordial. A evolução destas perturbações deu origem às *macroestruturas*, tais como galáxias e aglomerados. A teoria de Universo em expansão é suportada, principalmente, pelas observações atuais das velocidades de recessão das galáxias.

Durante a fase de expansão adiabática, o Universo primordial era dominado pela radiação e o processo de interação dominante era o de *interconversão* de partículas. Neste processo, ocorre a conversão de fótons energéticos em pares de partícula e

antipartícula. Durante este período, um grande número de pares se aniquilou e aquelas espécies que possuem menor seção de choque de aniquilação, e que conseguiram sobreviver, acabaram introduzindo no Universo uma densidade inicial de matéria. Uma vez que este processo ocorre rapidamente, sendo a taxa de reação superior à taxa de expansão do Universo, o equilíbrio termodinâmico do Universo é assegurado e a entropia por volume *comóvel* é conservada. A geração de um excesso de matéria em relação à antimatéria é explicada por meio de possíveis reações em que não há conservação do número *bariônico*.

À medida que o Universo se expande e se resfria, a taxa de interação entre as partículas tende a diminuir até o momento em que uma espécie de partícula pode ser considerada fora do equilíbrio termodinâmico do plasma primordial e independente deste. A partir de então, quando $\Gamma \leq H$ (sendo Γ a taxa de interação suficiente para manter o equilíbrio termodinâmico), a espécie de partículas é considerada desacoplada do plasma primordial. Estima-se que, em $T \sim 10^{11}$ K, tenha ocorrido o desacoplamento dos neutrinos relativísticos.

Quando a temperatura do Universo atinge 10^{10} K, tem início a nucleossíntese primordial, com a formação dos núcleos leves de H, ^3He , ^4He e ^7Li , mas, nesta época, a dinâmica do Universo ainda era dominada pela radiação. A síntese do deutério ocorre a partir da reação: nêutron + próton \rightarrow D + raio γ . Os núcleos de D, entretanto, são instáveis para temperaturas acima de 10^9 K e se desintegram facilmente. Quando a temperatura do Universo atinge cerca de 10^9 K, os núcleos de deutério se tornam mais estáveis, possibilitando as reações: D + D \rightarrow ^3He + nêutron, e ^3He + D \rightarrow ^4He + próton. Para $T \sim 10^9$ K, essas reações ocorrem espontaneamente, uma vez que o núcleo de D é mais fracamente ligado que os núcleos de ^3He e ^4He . Assim, núcleos mais pesados são sintetizados a partir de núcleos mais leves. Acredita-se que este processo de nucleossíntese tenha levado à formação dos núcleos de H e ^4He , a uma fração de massa correspondente a 74% e 25%, respectivamente, e pequenas quantidades de D, ^3He e ^7Li . Entretanto, não existe energia suficiente para formar núcleos mais pesados que o ^7Li . Esses são sintetizados mais tarde, a partir de reações ocorridas no meio interestelar e nas

explosões de supernovas. As considerações do MCP para a abundância dos elementos leves como o H e He são bastante coerentes com as linhas espectrais observadas em galáxias e estrelas velhas.

Em $T \sim 10^4$ K, a densidade de matéria se iguala à densidade da radiação, ocorrendo o chamado momento da Equipartição de Energia, que marca o início da era de dominação da matéria. Nesta época, quando a energia do Universo é inferior à energia de ionização do átomo de hidrogênio, ocorre a recombinação entre prótons e elétrons, formando os primeiros átomos de H (em $z \sim 1300$). Esta época é conhecida como Época da Recombinação.

Em $T \sim 10^3$ K, cerca de 100.000 anos após o big-bang, a densidade de elétrons livres se torna muito baixa e a taxa de espalhamento Thomson entre fótons e elétrons livres é reduzida significativamente, tornando o livre caminho médio dos fótons superior ao raio de Hubble (horizonte de partículas da época considerada). É neste momento que começa o desacoplamento entre matéria e radiação, em $T_{\text{dec}} \sim 3000$ K. A Radiação Cósmica de Fundo, observada em comprimentos de onda milimétricos, corresponde aos fótons liberados no desacoplamento entre matéria e radiação que, devido à expansão do Universo, se resfriaram e encontra-se hoje à temperatura de cerca de 2,7 K. A superfície hipotética, a partir da qual os fótons podem ser considerados independentemente da matéria, é dita *Superfície do Último Espalhamento* (SUE), sendo $z_{\text{SUE}} \sim 1100$. Esta superfície marca o fim da história em equilíbrio térmico do Universo primordial.

Até o momento do desacoplamento dos fótons, matéria e radiação coexistiam fortemente acopladas. Após o desacoplamento, as inhomogeneidades de matéria se destacam do fluido cosmológico e evoluem no processo de colapso gravitacional, dando início ao processo de formação de estruturas (Padmanabhan, 1993; Peebles, 1980).

1.3 - O CAMPO DE FLUTUAÇÕES

Sabemos que o nosso Universo não é perfeitamente homogêneo, especialmente nas regiões mais próximas ($z < 3$). Pode-se notar, a partir da distribuição de luminosidade das galáxias observáveis, que existe uma distribuição não uniforme de matéria no Universo, de modo que é possível definir um campo de densidade no instante t , $\rho(\vec{x}, t)$, tal que $\nabla\rho(\vec{x}, t) \neq 0$.

Os desvios de uniformidade no campo de densidade são usualmente discutidos em termos de um contraste de densidade, $\delta(\vec{x})$, definido como:

$$\delta(\vec{x}) \equiv \frac{\delta\rho(\vec{x})}{\bar{\rho}} = \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (1.1)$$

sendo $\bar{\rho}$ a densidade média do Universo, $\langle \rho \rangle$, e $\rho(\vec{x})$ a densidade de matéria local.

O Universo primordial, de acordo com as observações da RCF (Smoot et al., 1991; 1992), era quase homogêneo, apresentando apenas pequenas flutuações de densidade, cuja evolução resultou nas *macroestruturas* observadas atualmente. A descrição quantitativa da evolução das inhomogeneidades primordiais do Universo é feita por meio da teoria de perturbação linear (TPL), e.g. Padmanabhan (1993). Na TPL é assumido que o Universo primordial apresenta pequenos desvios de homogeneidade que são considerados apenas uma pequena perturbação na métrica do espaço-tempo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) e na fonte de momento-energia. Desta forma, as equações de Einstein podem ser linearizadas de modo a se obter um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem, chamadas equações de perturbação de densidade, envolvendo as variáveis: S , entropia, e δ , contraste de densidade.

Uma consideração básica para a descrição do processo de evolução das perturbações de densidade é estabelecer, a partir de estimativas, a composição do Universo. Observações atuais evidenciam que o Universo seja constituído por quatro componentes distintos:

bárions, matéria escura (*Dark Matter*), radiação e energia de vácuo. A cada um destes componentes pode ser associada uma densidade, tal como: ρ_B , ρ_{DM} , ρ_R e ρ_Λ , respetivamente. O conteúdo de matéria escura, ρ_{DM} , é ainda subdividido em matéria escura quente (ρ_{HDM}), constituída por neutrinos relativísticos; e matéria escura fria (ρ_{CDM}), constituída por partículas com massa e de baixa interação, denominadas *WIMPs* (*Weak Interactive Massive Particles*), e neutrinos não relativísticos. Uma vez que cada componente se comporta de maneira diferenciada, sendo cada qual especificada por uma equação de estado adequada, a densidade de cada componente deve ser tratada separadamente na teoria de evolução das perturbações de densidade.

As equações da teoria de perturbação descrevem as relações entre os termos que se opõem ao crescimento dos contrastes de densidade (como o movimento de expansão do Universo e a pressão de suporte do fluido) e o termo de contração gravitacional, que favorece o crescimento das flutuações. Resolvendo estas equações para os diferentes componentes envolvidos obtém-se uma função que descreve a evolução dos contrastes de densidade com o tempo. O limite de validade da teoria de perturbação linear é para valores de $\delta \leq 1$.

Quando um contraste de densidade, em determinada escala, se expande e atinge o limite de $\delta \sim 1$, o regime de evolução das flutuações de densidade passa a ser não linear. É nesta fase que o contraste de densidade se desacopla da expansão do Universo e começa a se contrair gravitacionalmente formando estruturas tais como galáxias e aglomerados. Perturbações negativas na densidade de matéria também evoluem. Devido à expansão do Universo, regiões com densidade de matéria inferior à média, $\delta < 0$, sofrem o processo de rarefação, dando origem às regiões denominadas “vazios”.

Uma vez que a evolução das flutuações no Universo primordial ($\delta \ll 1$) é descrita em termos das equações da teoria de perturbação linear, uma perturbação de densidade $\delta(\vec{x})$, contida num certo volume V , pode ser convenientemente expressa como uma expansão de Fourier em ondas planas, associadas a um vetor de onda, \mathbf{k} , do tipo:

$$\delta(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \delta_{\vec{k}} \approx \frac{V}{(2\pi)^3} \int_V \delta_{\vec{k}} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{k}, \quad (1.2)$$

$$\text{sendo } \delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \int_V \delta(\vec{x}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (1.3)$$

Um modo de perturbação característico de um número de onda k , δ_k , pode ainda ser expresso em termos de uma amplitude, $|\delta_k|$ e uma fase, ϕ_k , tal como:

$$\delta_k = \text{Re } \delta_k + i \text{Im } \delta_k = |\delta_k| \exp(i\phi_k). \quad (1.4)$$

Um modo de perturbação, δ_k , é também associado a um certo comprimento de onda, δ_λ , sendo $\lambda \equiv (2\pi / k)$.

1.3.1 – ALGUMAS PREVISÕES DA TEORIA DE PERTURBAÇÃO LINEAR

Genericamente, pode-se dizer que a teoria de perturbação se aplica ao campo de flutuações de densidade em dois passos (Padmanabhan, 1993). Dado um certo modo λ e conhecido o tempo, $t_{\text{enter}}(\lambda)$, em que este modo entra no raio de Hubble (d_H), tem-se:

1 - para um certo $t < t_{\text{enter}}(\lambda) \Rightarrow (\lambda > d_H)$, é aplicada a teoria de perturbação nas equações da relatividade geral para evoluir $\delta_\lambda(t)$ de um tempo inicial $t = t_i$ a $t = t_{\text{enter}}$.

2 - Para $t > t_{\text{enter}}(\lambda) \Rightarrow (\lambda < d_H)$, a evolução de $\delta_\lambda(t)$ é descrita a partir da aproximação Newtoniana, uma vez que, neste limite de pequenas dimensões, a pressão do fluido não relativístico é muito menor que a densidade média do meio, podendo ser ignorada.

Durante a fase de domínio da radiação, as previsões da teoria de perturbação linear relativística nos dizem que apenas os modos com $\lambda > d_H$ podem evoluir de maneira significativa. A solução encontrada em δ_{Rel} , considerando unicamente a componente de densidade relativística (radiação + HDM), é proporcional às funções esféricas de Bessel, de modo que a natureza da solução depende da razão (d_H / λ). Para $\lambda \ll d_H$, o termo dominante na solução é uma função oscilatória, muito rápida e com amplitude

constante, sendo, portanto, $\langle \delta_{\text{Rel}} \rangle = 0$. Ou seja, a componente relativística é suavemente distribuída em regiões com tamanhos muito menores que d_H . Para $\lambda \gg d_H$, o modo dominante é o modo crescente de δ_{Rel} que evolui com $\delta_{\text{Rel}} \propto a(t)^2$, sendo $a(t)$ o fator de escala do Universo.

Quando resolvidas as equações de perturbação para um fluido de duas componentes (radiação e matéria escura) ainda para modos com $\lambda < d_H$, a solução encontrada na componente radiativa, δ_R , é novamente do tipo oscilatória, enquanto na componente de matéria escura, δ_{DM} , a solução apresenta dois termos, um do tipo oscilatório e um termo de crescimento logarítmico em $a(t)$. Ou seja, não ocorre nenhum crescimento significativo nas perturbações em δ_{DM} . Neste caso, não é a pressão da radiação que impede o crescimento, mas sim a rápida expansão do Universo.

Outra previsão da teoria de perturbação linear é a existência de dois tipos de flutuações de densidade durante a Era Radiativa para modos que ainda não entraram no raio de Hubble ($\lambda \gg d_H$). São elas: as flutuações adiabáticas, ou flutuações de curvatura, em que a entropia por partícula de matéria é conservada, mas a curvatura do Universo varia; e as flutuações de *isocurvatura*, em que a densidade de energia no espaço-tempo é conservada e, conseqüentemente, a curvatura do Universo não é alterada. Estas previsões saem naturalmente quando são resolvidas, ainda que numericamente, as equações relativísticas em duas componentes, radiação e poeira. Neste caso, obtém-se um conjunto de quatro soluções independentes para S e δ , em modos adiabáticos e de *isocurvatura*. As soluções nos modos adiabáticos caracterizam-se pelas soluções do tipo $\delta_R = \frac{3}{4}\delta_M$, sendo $S = 0$, para $t \ll t_{\text{eq}}$. Para as soluções nos modos de *isocurvatura*, a consideração em $\delta_R + \delta_M = 0$ é válida para $t \ll t_{\text{eq}}$.

As perturbações de origem adiabática evoluem aproximadamente com: $\delta_M \propto a(t)^2$, $\delta_R \propto (4/3)a(t)^2$ e $S = 0$, enquanto as perturbações de *isocurvatura* não evoluem significativamente e apresentam uma variação de entropia do tipo $S \propto a(t)$. Assim, o

processo de evolução preserva a distinção entre os tipos de perturbação durante a Era Radiativa, o que não ocorre quando o Universo entra na Era da Matéria.

A partir da fase de domínio da matéria, a teoria de perturbação linear nos diz que todos os modos capazes de vencer a pressão de suporte do fluido, para flutuações na componente de matéria, evoluem proporcionalmente ao fator de escala $a(t)$ (e não mais $\propto a(t)^2$), desde que $\delta \leq 1$. As soluções encontradas para a evolução dos tipos de perturbação adiabática e de *isocurvatura* quando o Universo passa a ser dominado pela matéria é do tipo $\delta \sim S \propto a(t)$. Neste caso, não existe mais a distinção entre as perturbações de origem adiabática e de *isocurvatura*. Costuma-se dizer que, após a Equipartição de Energia, as perturbações adiabáticas e de *isocurvatura* evoluem juntas.

A solução encontrada para as flutuações na densidade de matéria relativística, δ_{Rel} , durante a fase dominada pela matéria, para modos com $\lambda > d_H$ é novamente do tipo $\delta_{\text{Rel}} \propto a(t)$, bem como as soluções em δ_{DM} da equação relativística para um fluido de poeira e matéria escura. Para $\lambda \ll d_H$, a solução encontrada na componente de matéria escura também evolui proporcionalmente ao fator de escala. Lembrando que, durante a fase de domínio da radiação, as componentes δ_{DM} e δ_{R} , dentro do raio de Hubble, apresentavam um comportamento ondulatório, com um lento crescimento em δ_{DM} . Com a transição da Era Radiativa para a Era da Matéria, este comportamento se altera. No momento da Equipartição de Energia, a matéria escura se desacopla do fluido cosmológico e passa a evoluir com $a(t)$. Entretanto, a componente da radiação, δ_{R} , continua apresentando comportamento ondulatório. Assim, os modos em δ_{R} , para $\lambda < d_H$, não apresentam nenhuma evolução com o tempo, seja na era dominada pela radiação ou pela matéria.

Outros modos que não apresentam crescimento com o tempo durante a Era Radiativa até o momento do desacoplamento dos fótons são os modos de perturbações na componente de matéria bariônica, δ_{B} , para $\lambda < d_H$. Neste caso, a solução em δ_{B} é do tipo oscilatória,

porém com amplitude decrescente. Neste caso, as oscilações na densidade de bárions se comportam como vibrações acústicas no meio.

Após o desacoplamento dos fótons, quando $t \gg t_{\text{dec}}$, a solução encontrada em δ_B também evolui com $a(t)$, e mais, $\delta_B \rightarrow \delta_{\text{DM}}$. Ou seja, as perturbações bariônicas, que só podem crescer após o desacoplamento dos fótons, a partir de então, evoluem rapidamente até alcançar as amplitudes das perturbações na matéria escura, quando, finalmente, ambas evoluem juntas.

As perturbações de densidade também podem ser suprimidas durante a fase de evolução linear. Perturbações em pequenos comprimentos de onda são dissolvidas no fluido cosmológico em função dos processos dissipativos ocorridos no fluxo de matéria escura e fótons. A dissipação dos neutrinos (e outros candidatos a *WIMPs*) ocorre devido ao livre deslocamento (*free streaming*) dos mesmos. Este processo de dissipação é mais intenso quanto mais energéticos forem os neutrinos (ou *WIMPs*). Assim, no modelo de matéria escura quente, espera-se pouca potência no espectro de flutuações em pequenas escalas.

Dissipações na densidade de fótons e bárions também ocorrem no fluido cosmológico em função da difusão dos fótons de regiões superdensas para regiões subdensas, arrastando partículas carregadas e apagando as perturbações de densidades no fluido acoplado de fótons e bárions em pequenas escalas. O efeito da difusão dos fótons é conhecido como *Amortecimento de Silk*.

As perturbações que conseguem sobreviver aos processos de dissipação e expansão do Universo, quando atingem a amplitude de $\delta \sim 1$, entram no regime de evolução não linear. Ao atingirem o limite de expansão máxima, $\delta \sim 1,77$; as flutuações começam a se contrair, iniciando o processo de formação de estruturas (Kolb e Turner, 1994). O tempo estimado para o processo de colapso de uma perturbação de matéria, $\Delta\rho_m/\rho_m$, presente na Época da Recombinação (z_{rec}) é da ordem de (Rowan-Robinson, 1981):

$$t_c \sim 10^6 h^{-1} \Omega_0^{-1/2} \left(\frac{z_{rec}}{1000} \right)^{-3/2} \left(\frac{\Delta \rho_m}{\rho_m} \right)^{-3/2} \text{ anos.} \quad (1.5)$$

De acordo com a expressão acima, quanto maior for o contraste de densidade, mais rápido é o tempo de colapso.

1.3.2 – O PROCESSO DE FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS

O modelo mais simples para descrever o colapso de uma concentração inicial de densidade após a época da recombinação é o modelo de instabilidade de Jeans, e.g. Padmanabhan (1993). Neste modelo, o colapso gravitacional de simetria esférica é contrabalançado pela pressão de suporte do fluido. Neste caso, a contração irá ocorrer quando a escala de tempo de reajuste da pressão interna for menor que a escala de tempo de contração gravitacional. A condição de instabilidade considera que o crescimento de um modo de perturbação com massa característica M é suprimido se $M < M_J$, sendo:

$$M_J \sim 10^6 (\Omega_0 h^2)^{-1/2} M_0, \quad (1.6)$$

sendo M_0 a massa solar ($1,99 \times 10^{30}$ Kg).

Flutuações de massa ligeiramente superiores a M_J irão se colapsar em poucos milhões de anos. Essas flutuações podem se colapsar originando buracos negros ou podem se fragmentar em estrelas, ainda durante o processo de colapso, formando aglomerados globulares.

Dois modelos distintos descrevem o processo de formação de aglomerados e galáxias, são eles: o modelo *top-down*, de matéria escura quente, e o modelo *bottom-up*, de matéria escura fria. No modelo *top-down*, as primeiras estruturas a se formar têm dimensões típicas de superaglomerados. Isto porque o movimento dos neutrinos relativísticos, antes do seu desacoplamento, suprime as perturbações de baixa massa, de

modo que as grandes condensações ($M \sim 10^{15} M_0$) colapsam primeiro. As estruturas colapsadas não são necessariamente esféricas, ao contrário, as configurações são filamentosas ou achatadas. Estruturas menores, como aglomerados, galáxias e estrelas, são formadas posteriormente por fragmentação.

No cenário *bottom-up*, no qual a matéria escura é constituída de *WIMPs*, o processo de dissipação é menos significativo, e as primeiras estruturas formadas possuem massa da ordem de M_J , comparável à massa de aglomerados globulares ($M \sim 10^6 M_0$). Estruturas maiores se formam posteriormente por agregação gravitacional. Este modelo é também chamado de Aglomeração Hierárquica.

Uma vez que um fragmento de *protogaláxia* se separa da expansão do Universo, suas propriedades finais dependem do quão eficiente é o processo de formação estelar durante a fase de colapso. Se todo o gás do fragmento se transforma em estrelas antes que o fragmento se colapse como um todo, então uma galáxia elíptica é formada; caso contrário forma-se uma galáxia espiral.

Um dos problemas encontrados no modelo *top-down* de matéria escura quente com flutuações iniciais adiabáticas é que este modelo prevê o início da formação de galáxias em $z \leq 1$. Entretanto, as observações mostram a existência de quasares e galáxias em $z \sim 5$, e.g. Weymann et al. (1998). Já no modelo *bottom-up*, a dificuldade encontrada é que este modelo não consegue explicar o número observado de estruturas em grandes escalas. Observações da RCF e das estruturas em grandes escalas sugerem que a composição Λ -CDM é a que melhor se ajusta ao Universo observável, e.g. Turner (1998); Efstathiou (2001).

1.4 - ESPECTRO DE FLUTUAÇÕES GAUSSIANAS

A teoria de perturbação linear é capaz de descrever a evolução dos modos de perturbação no espaço de Fourier. Entretanto, nenhuma informação é dada a respeito da

superposição desses modos com diferentes amplitudes e fases. Devido à ausência de informação a respeito das condições iniciais dos contrastes de densidade, o processo de formação de estruturas no Universo é descrito em função do comportamento estatístico do campo de flutuações, considerando-se aleatórias as variáveis $\delta(x)$ e δ_k .

Um espectro de perturbações iniciais do tipo *gaussiano*, considerando o Universo homogêneo e isotrópico (FRW), é aquele para o qual a função de distribuição dos modos de perturbação, $P[\delta_k]$, pode ser decomposta em um produto de N distribuições individuais:

$$P[\delta_k, t] = \prod_k g_k(\delta_k, t). \quad (1.7)$$

Esta condição é satisfeita quando $g_k(\delta_k, t)$ descreve uma distribuição *gaussiana* (Adler, 1981). Neste caso, expressando $\delta_k = |\delta_k| \exp(i\phi_k)$ tem-se:

$$\begin{aligned} g_k[|\delta_k|, \phi_k, t] d\phi_k d|\delta_k| &= \frac{1}{2\pi\mu_k^2(t)} \exp\left(-\frac{|\delta_k|^2}{2\mu_k^2(t)}\right) |\delta_k| d|\delta_k| d\phi_k \\ &= \frac{2|\delta_k| d|\delta_k| d\phi_k}{\sigma_k^2(t) 2\pi} \exp\left(-\frac{|\delta_k|^2}{\sigma_k^2(t)}\right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

sendo $\sigma_k^2 = 2\mu_k^2$. Assim, para ângulos de fase, ϕ_k , independentes, aleatórios e uniformemente distribuídos no intervalo entre $[0, 2\pi]$, e amplitudes dos modos de perturbação com distribuição Rayleigh (Coles e Lucchin, 1995):

$$P(|\delta_k|) = \frac{|\delta_k|}{\sigma_k^2} \exp\left(-\frac{|\delta_k|^2}{\sigma_k^2}\right), \quad (1.9)$$

sendo $\langle |\delta_k|^2 \rangle = 2\mu_k^2$, a distribuição dos modos de perturbação será:

$$P[\delta_k, t] = N \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_k \frac{|\delta_k^2|}{\sigma_k^2(t)}\right). \quad (1.10)$$

Nestas condições, os modos de perturbação, δ_k , são ditos variáveis *gaussianas* aleatórias, não correlacionadas, com média nula, sendo a função de distribuição completamente especificada a partir dos seus momentos:

$$\begin{aligned} \langle \delta_k \rangle &= 0, \\ \langle |\delta_k|^2 \rangle &= \sigma_k^2 = P(\mathbf{k}), \\ \langle \delta_k \delta_p \rangle &= 0, \quad (\text{para } k \neq p). \end{aligned} \tag{1.11}$$

A função variância, σ_k^2 , ou $P(\mathbf{k})$, que possui informações a respeito da amplitude das flutuações de densidade para cada escala k , é usualmente chamada de espectro de potência das flutuações de densidade. Considerando o Universo homogêneo e isotrópico, $P(\mathbf{k})$ deve depender apenas da amplitude do vetor de onda, $|\mathbf{k}|$, a partir de agora, definido somente como k e $P(k)$.

Usualmente, considera-se que o espectro de potência primordial obedeça a uma lei de potência do tipo $P(k) \propto k^n$, sendo n denominado índice espectral. O modelo inflacionário padrão prevê perturbações de densidade de origem adiabática, incoerentes, com fases aleatórias e espectro invariante em escala, denominado espectro de Harrison-Zeldovich (Bardeen, Steinhardt e Turner, 1983; Salopek, Bond e Bardeen, 1989), sendo $P(k) \propto k$ ($n = 1$). Por outro lado, os modelos de defeitos topológicos prevêem um espectro de flutuações primordiais de *isocurvatura*, com fases correlacionadas e, conseqüentemente, com espectro não *gaussiano* (Magueijo e Brandenberger, 1999; Battye e Weller, 1998). Do ponto de vista matemático, uma distribuição de flutuações *gaussianas* com espectro descrito por uma lei de potência representa a mais simples das condições iniciais aplicadas na teoria de formação de estruturas.

No espaço real, a transformada de Fourier de $|\delta_k|^2$ leva à representação de $P[\delta(\mathbf{x});t]$:

$$P[\delta(\mathbf{x}), t] = N \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_k \iint dxdy \delta(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{y}) \frac{e^{+i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})}}{\sigma_k^2(t)} \right). \tag{1.12}$$

Observa-se, na expressão acima, que $P[\delta(x),t]$ não pode ser expressa como um produto de funções de probabilidades em cada ponto do espaço e, portanto, sua distribuição difere de uma *gaussiana*. Assim, as perturbações $\delta(x)$ em diferentes pontos no espaço real, ao contrário dos modos de perturbação no espaço de Fourier, não são independentes. A independência dos modos de perturbação para um campo de flutuações *gaussianas* faz do espaço de Fourier a representação mais conveniente para a descrição dos processos evolutivos no estudo de formação de estruturas.

As informações para a distribuição espacial de $\delta(\vec{x})$, num determinado volume V , são obtidas a partir da função de correlação entre dois pontos separados por uma distância \vec{x} , $\xi(\vec{x})$, definida como a transformada de Fourier do espectro de potência $|\delta_k|^2$:

$$\xi(\vec{x}) = \langle \delta(\vec{y} + \vec{x})\delta(\vec{y}) \rangle = \int \frac{V}{(2\pi)^3} |\delta_k|^2 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{k}. \quad (1.13)$$

Invertendo a expressão acima, lembrando que $P(k) = \langle |\delta_k|^2 \rangle$, tem-se:

$$P(k) = V^{-1} \int \xi(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x}. \quad (1.14)$$

Uma vez que σ_k^2 especifica uma propriedade estatística, $\xi(\vec{x})$ contém as mesmas informações. O primeiro zero da função $\xi(\vec{x})$ especifica o valor da dimensão típica de uma região super ou subdensa. Considerando o Universo homogêneo e isotrópico, $\xi(\vec{x})$ pode ser referenciada apenas como $\xi(x)$. O valor quadrático médio das flutuações no espaço real também pode ser inferido a partir do espectro de potência σ_k^2 , sendo:

$$\langle \delta^2(x) \rangle = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} P(k) = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk. \quad (1.15)$$

Conforme descrito na seção 1.3.2, a difusão dos fótons de regiões superdensas para regiões subdensas, arrastando partículas carregadas teria ocasionado a dissipação dos modos de perturbação em pequenos comprimentos de onda. Assim, quanto mais cedo um modo de perturbação entra no raio de Hubble, mais potência é dissipada do espectro

inicial. A função que descreve a variação ocorrida no espectro das flutuações primordiais desde os primórdios do Universo é denominada função de transferência, $T(k)$ (Gawiser e Silk, 1998). Esta função, determinada empiricamente, especifica como um espectro de perturbações primordiais, $P(k)$, se correlaciona com o espectro de potência atual obtido, por exemplo, por meio das observações das inhomogeneidades na distribuição de matéria, $P_0(k)$, sendo:

$$P_0(k) = T^2(k)P(k). \quad (1.16)$$

A determinação de $T(k)$ para o modelo cosmológico considerado (com matéria escura quente ou fria e perturbações adiabáticas ou de *isocurvatura*) é feita a partir de um ajuste entre o espectro de potência primordial estimado, $P(k)$, e a função de correlação extraída das observações da distribuição de massa em grandes escalas.

Quando um contraste de densidade atinge o limiar $\delta \sim 1$, o acoplamento entre os modos de perturbação passa a ser significativo, e a teoria de perturbação linear não mais é válida. Nessa fase, o estudo da evolução das perturbações de densidade é feito por meio do processo de interação de N-corpos. Neste processo, simulações são feitas a partir de aproximações para as condições iniciais, tratando o sistema como um conjunto de N-partículas que interagem entre si apenas gravitacionalmente. Durante o regime de evolução não linear, o espectro de flutuações atinge desvios significativos de *gaussianidade*, devido aos fatores de acoplamento entre os modos de perturbação.

Uma vez que a evolução dos processos não lineares leva ao incremento de correlações não *gaussianas* no espectro de flutuações, o estudo da função de distribuição do espectro primordial pode ser mais preciso quando aplicado às flutuações ainda no regime de evolução linear. É nesta condição que se enquadram as flutuações observadas na RCF.

1.5 – CAMPO DE FLUTUAÇÕES GAUSSIANAS NA RCF

Descoberta em 1965 (Penzias e Wilson, 1965), a Radiação Cósmica de Fundo em Microondas representa uma das mais fortes evidências a favor do modelo do big-bang e a mais importante fonte de informação a respeito do Universo primordial, e.g. Bartlett (1999). Isto porque esta radiação apresenta em seu espectro, sua distribuição angular e seu sinal de polarização informações preciosas a respeito dos processos físicos vigentes no Universo primordial (Hu e Dodelson, 2001).

Observações precisas da RCF confirmam as previsões do MCP. O espectro da RCF medido pelo satélite *Cosmic Background Explorer* (COBE)¹ apresenta características próprias de um espectro de corpo negro à temperatura de $T_0 = (2,726 \pm 0,001)$ K. O desvio estimado de um espectro de corpo negro ideal, para observações no intervalo de comprimentos de onda entre (0,5 - 10) mm, é de apenas 0,03%. Esta estimativa reforça a teoria de evolução térmica do Universo descrito pela métrica homogênea e isotrópica de FRW. Os pequenos desvios observados no espectro da RCF podem ser atribuídos ao espalhamento dos fótons no meio intergaláctico, ou ao desvio da radiação ocasionado por lentes gravitacionais. O espectro medido pelo experimento *Far Infrared Absolute Spectrophotometer* (FIRAS) (Mather et al., 1990), a bordo do satélite COBE, é ilustrado na Figura 1.1. A densidade estimada para os fótons da RCF é de aproximadamente 411 fótons/cm³, equivalente a densidade de massa de $4,5 \times 10^{-34}$ g/cm³. O *redshift* estimado é de aproximadamente $z_{SUE} = 1100$ correspondendo a $T_{SUE} = 3000$ K.

¹ http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html

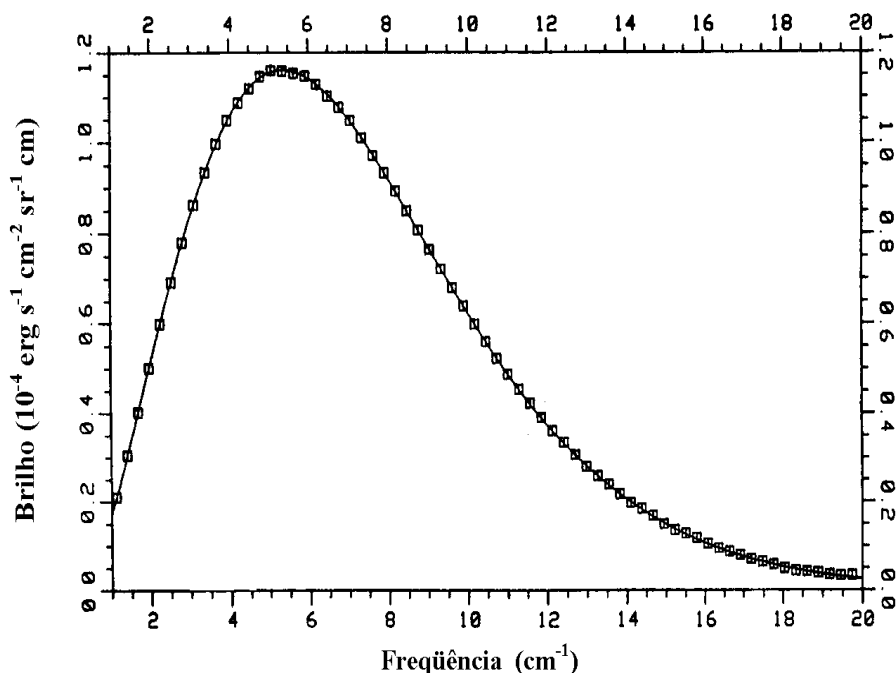


FIGURA 1.1 - Espectro da RCF medido pelo experimento FIRAS / COBE.
 FONTE: Mather et al. (1990, p. 3).

De acordo com o MCP, o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Assim, como fótons e matéria estavam fortemente acoplados até a Superfície do Último Espalhamento, a RCF também deve apresentar uma forte isotropia no céu. Isto realmente é observado, embora tenham sido medidas flutuações de temperatura da ordem de $\delta T/T = 10^{-5}$, nas observações da RCF em escalas angulares que vão de vários graus até alguns minutos de arco. Estas flutuações imprimem em T_0 uma dependência tipo $T_0 = T_0(\theta, \phi)$, ainda que o espectro permaneça Planckiano em qualquer direção que se observe (Smoot et al., 1992). As variações na distribuição angular da RCF são denominadas anisotropias.

O procedimento adotado para o estudo das anisotropias da RCF consiste na expansão dos valores medidos das flutuações de temperatura observadas em toda a esfera celeste

em termos de um conjunto ortonormal completo de funções de base. Devido à simetria esférica, as funções de base usualmente escolhidas são as harmônicas esféricas, $Y_{lm}(\theta, \phi)$. Assim, tem-se:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right) \equiv S(\theta, \phi) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.17)$$

$$\text{sendo } Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (1.18)$$

P_l^m são os polinômios associados de Legendre:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad (1.19)$$

e os coeficientes da expansão são estimados a partir da expressão:

$$a_{lm} = \int Y_{l,m}^*(\theta, \phi) S(\theta, \phi) d\Omega, \quad (1.20)$$

em que l e m são números inteiros tais que: $l \geq 0$ e $|m| \leq l$ (Jackson, 1975).

As flutuações de temperatura da RCF estão diretamente relacionadas às perturbações na densidade de matéria na Superfície de Último Espalhamento. A função $S(\theta, \phi)$, função característica das inomogeneidades do Universo, reflete as propriedades do campo de densidade primordial e pode ser expressa como uma superposição linear das flutuações de densidade no espaço de fase, δ_k , (Bunn, 1996). Para um espectro primordial com distribuição *gaussiana*, $S(\theta, \phi)$ será uma superposição de variáveis *gaussianas* aleatórias, com média nula, sendo a distribuição dos coeficientes a_{lm} completamente especificada a partir dos momentos:

$$\begin{aligned} a_{lm} &\propto \sum_k \delta_k \Rightarrow \langle a_{lm} \rangle = 0, \\ \langle |a_{lm}|^2 \rangle &= C_l, \\ \langle a_{lm} a_{l'm}^* \rangle &= C_l \delta_{ll'} \delta_{mm}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Assim, a função $S(\theta, \phi)$ e os coeficientes a_{lm} serão também variáveis *gaussianas* aleatórias, ditas *variáveis gaussianas multivariadas* (Adler, 1981).

O comportamento das funções harmônicas esféricas corresponde a oscilações senoidais no domínio do ângulo θ , cujos zeros são espaçados em $\Delta\theta = \pi / l$. Este comportamento define a resolução angular na expansão das anisotropias da RCF. Para um dado l , os valores de C_l são determinados pelas flutuações em escalas angulares de $\theta \approx (\pi / l)$. Portanto, os momentos de multipolo, C_l , expressam o valor quadrático médio das amplitudes das flutuações de temperatura, $\langle |a_{lm}|^2 \rangle$, em escalas angulares determinadas por (π / l) .

As informações estatísticas do campo de flutuações na RCF podem ser obtidas por meio da hierarquia dos momentos da variável aleatória $\delta T/T$. Usualmente, as informações a respeito de $S(\theta, \phi)$ são extraídas da função de correlação entre dois pontos separados por um ângulo α , tal que $C(\alpha) = \langle S(\mathbf{n})S(\mathbf{m}) \rangle$, sendo \mathbf{n} e \mathbf{m} vetores unitários orientados nas coordenadas θ e ϕ . Esta função é definida função de correlação angular, sendo:

$$C(\alpha) = \langle S(\mathbf{n})S(\mathbf{m}) \rangle = \sum_{lm} \sum_{l'm'} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta', \phi') \quad (1.22)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\cos \alpha), \quad (1.23)$$

$$\text{para } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (1.24)$$

P_l são os polinômios de Legendre de ordem l , e os coeficientes C_l são os chamados momentos de multipolo da expansão.

A Figura 1.2 ilustra a função de correlação angular da RCF estimada a partir das medidas realizadas pelo experimento *Differential Microwave Radiometers* (DMR), a bordo do satélite COBE (Hinshaw et al., 1996).

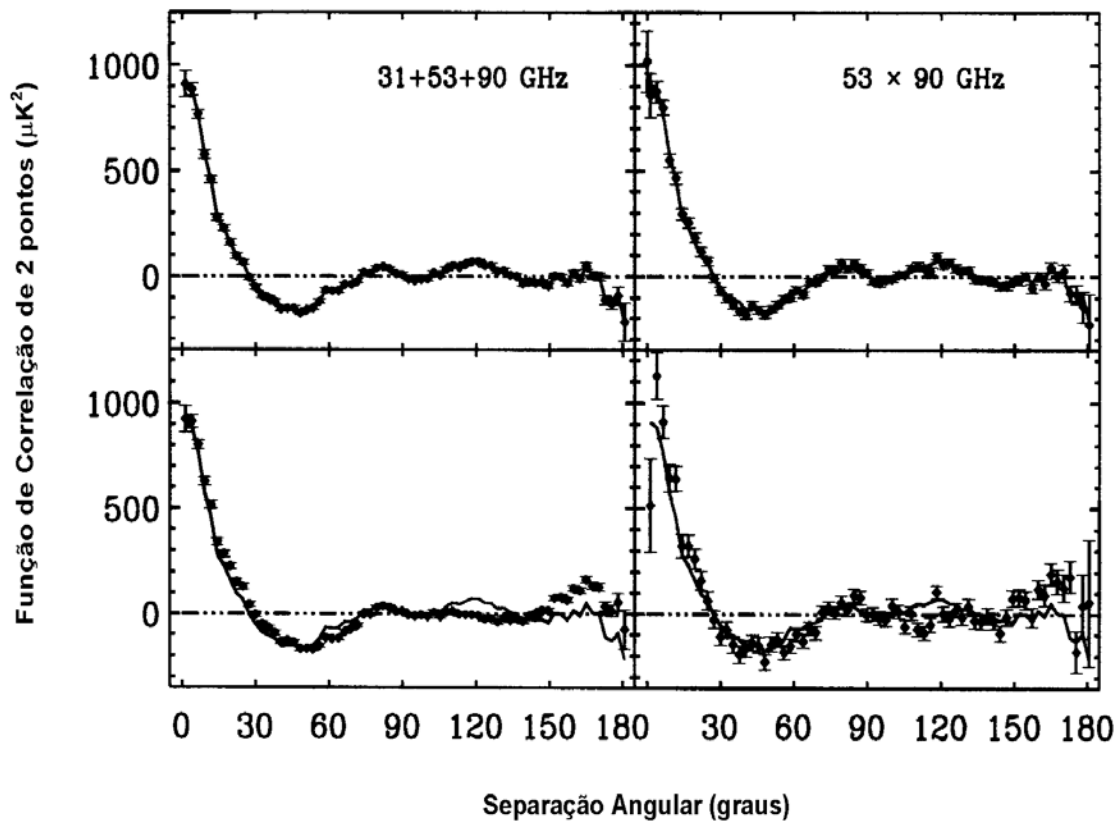


FIGURA 1.2 – Função de correlação de dois pontos estimada pelas medidas do experimento DMR/COBE. No quadro de cima, à esquerda, é apresentada a função de correlação estimada a partir do mapa ponderado nas frequências de 31, 53 e 90 GHz; à direita a correlação estimada a partir da soma ponderada dos mapas nas frequências de 53 e 90 GHz. Abaixo, a correlação estimada a partir do mapa ponderado, subtraindo: à esquerda, o melhor ajuste para a emissão galáctica, e à direita, o melhor ajuste para o cancelamento da emissão galáctica *livre-livre*.

FONTE: Hinshaw et al. (1996, p. L26).

1.5.1 - O ESPECTRO DE POTÊNCIA DA RCF

O padrão de anisotropia da RCF pode ser sumarizado por meio da representação gráfica dos momentos de multipolo, C_l em função da escala l . Este gráfico é chamado de espectro de potência angular das flutuações da RCF.

Pode-se mostrar que, para um espectro primordial do tipo lei de potência, $P(k) = \beta k^n$, o valor dos momentos de multipolo, C_l , podem ser estimados por (White, Scott e Silk, 1994):

$$C_l \propto \beta 2^n \pi^2 \frac{\Gamma(3-n)}{\Gamma^2\left(\frac{4-n}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(l + \frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(l + \frac{5-n}{2}\right)}. \quad (1.25)$$

No caso do espectro tipo Harrison-Zeldovich ($n = 1$), tem-se:

$$C_l \propto \frac{\beta}{l(l+1)}. \quad (1.26)$$

Assim sendo, o termo $[l(l+1)C_l]$ representa uma grandeza invariante em escala para $n = 1$. Usualmente, o espectro de potência da RCF expressa o termo $[l(l+1)C_l]$ em função de l .

De acordo com o modelo inflacionário padrão, o qual prevê espectro tipo Harrison-Zeldovich para flutuações acima do raio de Hubble, em grandes escalas angulares, deve haver um patamar no espectro de potência angular da RCF, relativo às flutuações invariantes em escalas. A Figura 1.3 ilustra o espectro de potência estimado pelas medidas recentes dos experimentos BOOMERANG (de Bernardis et al., 2000); MAXIMA (Hanany et al., 2000), DASI (Halverson et al., 2002), CAT (Stompor et al., 2001) e CBI (Mason et al., 2002; Pearson et al., 2002). Os valores medidos por estes experimentos estão resumidos na Tabela 1 do Apêndice A.

A extensão da escala angular observada na RCF é subdividida em três classes: grandes escalas angulares ($\theta > 1^\circ$), escalas intermediárias ($10' < \theta < 1^\circ$) e pequenas escalas angulares ($\theta < 10'$). Esta subdivisão foi estabelecida com base no raio de Hubble na época do desacoplamento (Padmanabhan, 1993):

$$\theta_H \equiv \theta(d_H) \cong 0,87^\circ \Omega^{1/2} \left(\frac{z_{dec}}{1100}\right)^{-1/2} \approx 1^\circ. \quad (1.27)$$

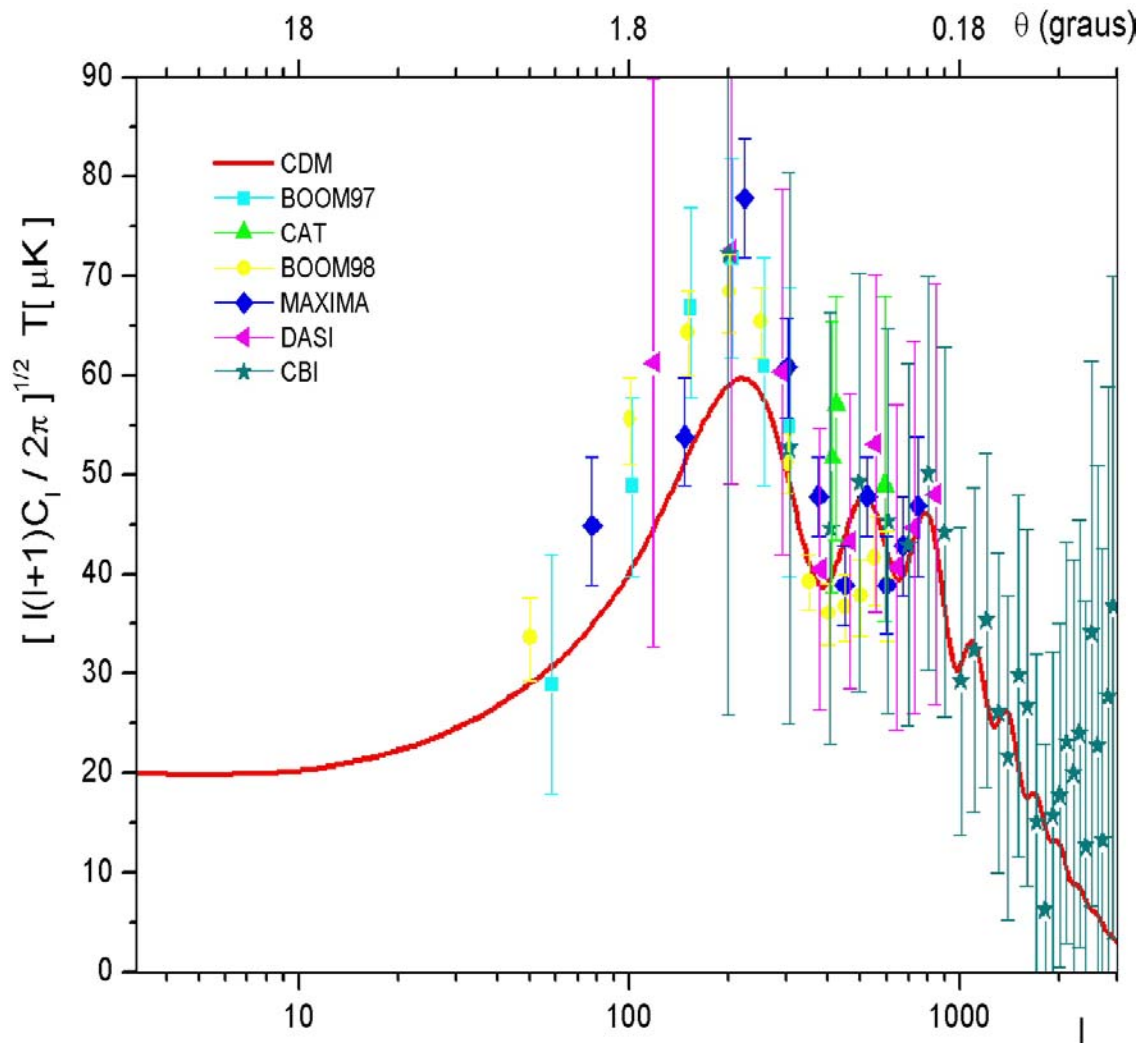


FIGURA 1.3 – Espectro de potência da Radiação Cósmica de Fundo estimado pelas observações dos experimentos BOOMERANG, MAXIMA, DASI, CAT e CBI. A linha vermelha corresponde à previsão do modelo Λ -CDM padrão: $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_0 = 1$; $\Omega_\Lambda = 0,7$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_b = 0,03$; $n = 1,1$ e $Q = 13 \text{ } \mu\text{K}$.

Uma separação angular maior que 1° no céu atual corresponde a uma região maior que o raio de Hubble na época do desacoplamento e, portanto, não pode haver relação causal entre os extremos desta região. Essa região, correspondente aos multipolos de ordem inferior a 100, é denominada *patamar* do espectro de potência. Nesta região, o sinal observado da RCF corresponde a uma superposição de infinitos modos de perturbação –

considerando-se o Universo infinito – cujos comprimentos de onda são maiores que o raio de Hubble e, portanto, devem ser representados por modos de perturbação incoerentes. Neste caso, o teorema central do limite assegura que a superposição resultante apresentará uma distribuição *gaussiana*.

Multipolos com $l \geq 100$ correspondem às regiões de intermediárias e pequenas escalas angulares, nas quais observa-se uma série de picos de flutuações. Esta região é denominada região dos picos acústicos. Nesta região, prevalecem os efeitos das interações físicas das flutuações de densidade responsáveis pelas anisotropias observadas na RCF. Basicamente, as flutuações são decorrentes de sete processos físicos distintos, cada qual ocorrendo em escalas angulares diferentes, e.g. Bunn (1996); White, Scott e Silk (1994); Hu e Dodelson (2001). Os efeitos resultantes são listados a seguir:

1- *Efeito Dipolar*: se o observador possuir algum movimento em relação ao referencial da RCF, então os fótons que alcançam o observador, provenientes de diferentes direções em relação à direção de movimento do observador, sofrerão diferentes desvios Doppler (*redshifts*), contribuindo em grande parte para o termo de dipolo ($l = 1$) da expansão em harmônicas esféricas, sendo:

$$\frac{\delta T(\theta)}{T_0} \cong \frac{v}{c} \cos \theta , \quad (1.28)$$

em que v é a velocidade peculiar do observador e θ é o ângulo entre a direção de movimento do observador e a direção de incidência do fóton. A anisotropia dipolar observada na RCF é da ordem de $\delta T/T \sim 10^{-3}$, sendo a velocidade peculiar estimada em $v_{ob} \sim 365$ km/s na direção $l = (264,4^\circ \pm 0,3^\circ)$, $b = (48,4^\circ \pm 0,5^\circ)$ (Smoot et al. 1991; 1992). Esta velocidade é atribuída aos movimentos: da Terra ao redor do Sol; do Sol na Via Láctea; da Via Láctea na direção de Andrômeda no Grupo Local e ao movimento do Grupo Local em relação ao referencial da RCF.

2 – *Efeito Doppler*: se a matéria que espalhou a radiação na nossa direção também tivesse uma velocidade peculiar com relação ao referencial *comóvel*, o efeito Doppler devido a este movimento peculiar também deve estar impresso no espectro da RCF. Uma vez que a velocidade peculiar da matéria pode ter sido diferente para diferentes regiões na Superfície do Último Espalhamento (devido à existência das flutuações primordiais) então, estas diferentes regiões contribuiriam de forma diferenciada para as anisotropias da RCF em escalas angulares intermediárias. As flutuações de temperatura na RCF devido ao efeito Doppler são da ordem de:

$$\frac{\delta T(\theta)}{T_0} = \frac{V}{c}, \quad (1.29)$$

sendo V a velocidade peculiar da matéria na SUE.

3 – *Efeito Sachs-Wolfe*: se o potencial gravitacional local na Superfície do Último Espalhamento tiver sido diferente em diferentes localizações, então os fótons teriam que vencer diferentes poços de potencial e experimentar, assim, diferentes desvios Doppler. Este processo deve ter ocorrido no plasma de radiação e matéria no momento da formação dos primeiros átomos de hidrogênio, dando origem a regiões de compressão e rarefação no fluido, correspondendo, respectivamente, às regiões de alta e baixa densidade, ocasionando flutuações no potencial gravitacional em escalas angulares grandes e intermediárias. As flutuações observadas devido ao efeito Sachs-Wolfe são expressas por:

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta \phi}{3c^2} \approx \frac{\delta \rho}{2\rho}, \quad (1.30)$$

4 – *Picos Acústicos*: a densidade de energia da radiação na Superfície do Último Espalhamento pode conter também uma inomogeneidade intrínseca $\delta_R = (\delta\rho_R/\rho_R)$, imprimindo uma flutuação de temperatura dominante em escalas angulares pequenas e intermediárias. Isto porque as perturbações primordiais de origem quântica teriam atraído gravitacionalmente o fluido acoplado de fótons e bárions, confinando-o em poços de potencial criados por regiões de alta densidade. A pressão dos fótons,

resistindo à compressão e tentando restaurar a condição de equilíbrio, daria origem às oscilações acústicas no fluido adiabático, gerando uma série harmônica de picos de flutuações de temperatura, chamada série de picos acústicos. A dependência em $\delta T/T$ neste caso é estimada em:

$$\frac{\delta T}{T} \approx \frac{1}{4} \frac{\delta \rho_R(t_{dec})}{\rho_R} = \frac{1}{3} \frac{\delta \rho_B(t_{dec})}{\rho_B}, \quad (1.31)$$

na qual $\rho_B(t_{dec})$ é a densidade de bárions no momento do desacoplamento. Os picos ímpares, contados da esquerda para a direita, ocorrem devido à compressão no fluido, enquanto os picos pares ocorrem devido à rarefação no fluido.

As oscilações relativas aos picos acústicos não são observadas nos espectros da RCF para campos de flutuações de *isocurvatura*. Isso porque essas flutuações não apresentam coerência de fase e, portanto, as oscilações dos picos acústicos são parcialmente destruídas pela interferência destrutiva. As anisotropias induzidas pelas oscilações num fluido com flutuações de *isocurvatura* são muito baixas, estimadas em:

$$\frac{\delta T}{T} \approx -\frac{1}{3} \delta S, \quad (1.32)$$

sendo δS a variação de entropia no fluido.

5 - *Efeito Sunyaev-Zeldovich (SZ)*: neste efeito, considera-se que os fótons da RCF podem ser espalhados pelos elétrons energéticos de um gás aquecido, na região de aglomerados de galáxias ou no meio intergaláctico, e deslocados para regiões de frequências mais altas do espectro. Este efeito se manifesta nas anisotropias em pequenas escalas angulares, sendo sua contribuição estimada em:

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{2kT_e}{m_e c^2}, \quad (1.33)$$

na qual T_e representa a temperatura e m_e a massa do elétron.

6 - Processos ocorridos durante a trajetória dos fótons, tais como: potenciais gravitacionais dependentes do tempo, responsáveis pelo efeito *Sachs-Wolfe Integrado (SWI)*, e os desvios devido às lentes gravitacionais também afetam a distribuição angular da RCF. O efeito SWI se manifesta em escalas intermediárias e grandes, enquanto os efeitos das lentes gravitacionais se manifestam em pequenas escalas angulares.

7 – Processos ocorridos após o desacoplamento dos fótons também podem contribuir para apagar as anisotropias existentes. Por exemplo, se a matéria no Universo se re-ionizou em algum *redshift* z_{ion} ($z_{\text{ion}} < z_{\text{SUE}}$), então os fótons poderiam ter interagido com estas partículas carregadas e, portanto, o último espalhamento dos fótons não seria mais em z_{SUE} , e sim em z_{ion} , apagando, assim, as anisotropias produzidas em z_{SUE} . Outro efeito considerável que pode ter destruído parte das anisotropias intrínsecas na Superfície do Último Espalhamento é o *Amortecimento de Silk*. Neste efeito, considera-se que o desacoplamento dos fótons não deve ter ocorrido instantaneamente, mas sim, num intervalo de $\Delta z \approx 80$ no espaço dos *redshifts*. Isso permitiria aos fótons percorrer um caminho aleatório durante o intervalo ($z_{\text{SUE}}, z_{\text{SUE}} + \Delta z$) apagando as flutuações originais de temperatura em escalas angulares inferiores a $5'$, correspondendo a l acima de 3000.

1.5.2 – ESPECTRO DE POLARIZAÇÃO DA RCF

Existe uma forte razão para acreditar que uma fração da RCF seja linearmente polarizada (Kosowsky, 1999; White, 1998). A polarização é esperada em razão do espalhamento Thomson (mecanismo responsável pela termalização da radiação), o qual apresenta seção de choque de interação dependente do ângulo de incidência dos fótons. Assim, os efeitos causadores de anisotropia na Superfície do Último Espalhamento, quando associados ao espalhamento Thomson dos fótons, imprimem um certo grau de polarização na RCF. Flutuações escalares no campo de densidade somente contribuem

para a polarização da RCF no modo **E**, de acordo com a representação invariante dos parâmetros de Stokes (Spergel e Zaldarriaga, 1997).

Estima-se que o grau de polarização da RCF deve ser baixo, uma vez que a ionização residual na SUE não deve ser alta. O grau de polarização estimado para a RCF deve ser inferior a 10% em uma escala característica de $10'$. A Figura 1.4 resume as estimativas para a amplitude da componente polarizada da RCF estimadas por diversos autores baseado em medidas de diversos experimentos (de Oliveira-Costa et al., 2002). As flutuações de temperatura estimadas para a componente polarizada da RCF são inferiores a $10 \mu\text{K}$. Também são apresentadas as previsões do modelo CDM, inclusive para modelos de reionização do Universo.

Medidas de polarização da RCF são de difícil acesso devido à baixa intensidade da componente polarizada e devido aos efeitos de contaminação da emissão síncrotron da Galáxia. Entretanto, medidas precisas da componente polarizada da RCF podem ser extremamente úteis no entendimento do Universo primordial. Isso porque as medidas de polarização fornecem um mapeamento preciso da Superfície do Último Espalhamento, ao contrário das medidas de anisotropia que são influenciadas pelos processos de interação dos fótons ocorridos ao longo de sua evolução desde a época do desacoplamento, como por exemplo, os efeitos SWI e os desvios ocasionados por lentes gravitacionais. Medidas precisas da componente polarizada da RCF em pequenas escalas angulares são esperadas nas missões dos satélites americano WMAP² (*Microwave Anisotropy Probe*), atualmente em órbita, e o satélite europeu Planck³, com lançamento previsto para 2007.

² <http://map.gsfc.nasa.gov>

³ <http://astro.estec.esa.nl/Planck/>

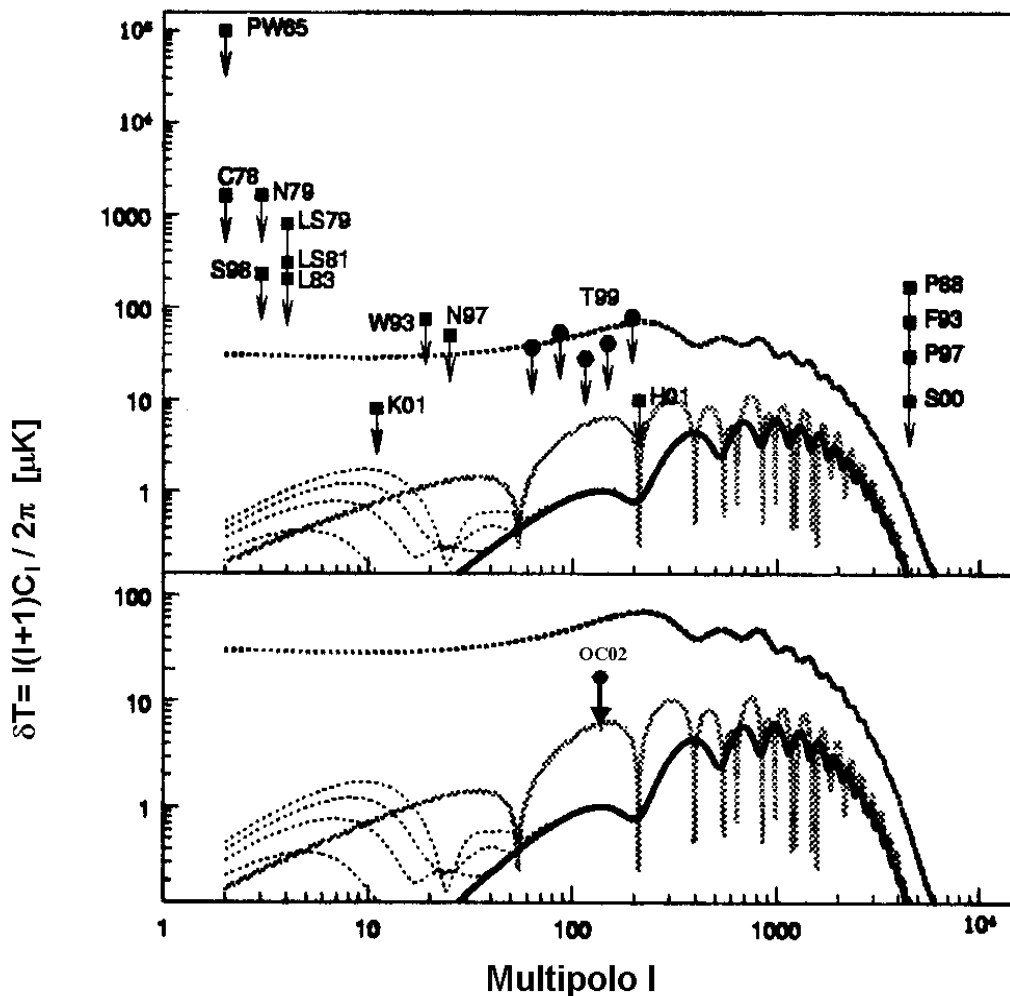


FIGURA 1.4 – Estimativas da amplitude da componente polarizada da RCF inferidas a partir de medidas obtidas por diversos experimentos. As curvas apresentadas indicam as previsões do modelo CDM para as flutuações de temperatura não polarizada (curva superior), flutuações polarizadas (curva do meio) e a correlação de componentes polarizada e não polarizada (curva inferior). As curvas pontilhadas finas indicam as previsões dos modelos de reionização para $\tau = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$. No quadro inferior é mostrado o limite (OC02) estimado por de Oliveira-Costa et al. (2002). Os limites impressos no quadro superior correspondem a: PW65 (Penzias e Wilson, 1965), C78 (Caderni, 1978), N79 (Nanos, 1979), LS79 (Lubin e Smoot, 1979), LS81 (Lubin e Smoot, 1981), S98 (Sironi et al., 1997), L83 (Lubin, Melese e Smoot, 1983), W93 (Wollack, 1993), N97 (Netterfield, 1997), T99 (Torbet, 1999), P88 (Partridge, 1988), F93 (Fomalont et al., 1993), P97 (Partridge, 1997), S00 (Subrahmanyan et al., 2000), H01 (Hedman et al., 2001) e K01 (Keating et al., 2001).

FONTE: de Oliveira-Costa et al. (2002, p. 7).

1.6 - AS OBSERVAÇÕES DO CAMPO DE FLUTUAÇÕES

As primeiras observações das anisotropias da RCF foram realizadas pelo experimento *Differential Microwave Radiometer* do satélite COBE da NASA, mapeando toda a esfera celeste em 6144 elementos com resolução angular de 7° e sensibilidade de $1 \mu\text{K}$, observando nas frequências de 31,5; 53 e 90 GHz, (Smoot et al., 1991). As medidas do COBE reforçam as considerações feitas pelo modelo inflacionário de flutuações *gaussianas* com espectro aproximadamente invariante em escala, sendo o índice espectral estimado em $n = (1,1 \pm 0,5)$ (Smoot et al., 1992). Desde então, diversas ferramentas vêm sendo desenvolvidas e aplicadas aos dados do COBE de modo a reforçar estas considerações e caracterizar as propriedades estatísticas das flutuações primordiais.

As investigações realizadas na análise das flutuações da RCF envolvem o cálculo de indicadores estatísticos no espaço real, por meio da contagem de picos (Futamase e Takada, 2000; Martínéz-González et al., 2000), da análise dos funcionais de Minkowski (Novikov, Feldman e Shandarin, 1999), do cálculo de *genus* e *extrema* (Phillips e Kogut, 2001), e da análise de correlação em altas ordens, como o *biespectro* (Phillips e Kogut, 2001; Coles e Chiang, 2000; Verde, 2000); e análise de *triespectro* (Verde e Heavens, 2001). Indicadores estatísticos também são analisados no espaço das transformadas (Novikov, Schmalzing e Mukhanov, 2000; Lewin, Albrecht e Magueijo, 1999; Barreiro et al., 2000; Aghanim, Forni e Bouchet, 2001).

Apesar de tanto esforço e da eficiência comprovada de várias técnicas de análise, os resultados ainda não foram conclusivos a respeito da estatística das flutuações na RCF. Ferreira, Magueijo e Górski (1998) e Magueijo (2000), por meio da análise de *biespectro*, atestaram o carácter não *gaussiano*, com limite de confiança superior a 98%, nos dados observados durante quatro anos pelo experimento COBE-DMR. Novikov, Feldman e Shandarin (1999), por meio da análise dos funcionais de Minkowski, obtiveram um resultado similar, apesar de pouco conclusivo, analisando o mesmo

conjunto de dados. Entretanto, a conclusão de Ferreira, Magueijo e Górski (1998) foi, mais tarde, fortemente contestada por Banday, Zaroubi e Górski (2000) que argumentam que esse resultado é governado pelos dados de observação na frequência de 53GHz, e concluem, portanto, que a não *gaussianidade* observada pode ser inerente à sistemática de observação, ou à extração de fontes indesejáveis, e não de origem cosmológica. Os estudos de Bromley e Tegmark (2000) também contestam o carácter não *gaussiano* nos dados do COBE e atribuem os desvios observados ao ruído do detetor.

Observações recentes da RCF realizadas pelos experimentos *Balloon Observations of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics* - BOOMERANG (de Bernardis et al., 2000); e pelo experimento *Millimeter Anisotropy Experiment Imaging Array* - MAXIMA (Hanany et al., 2000), em escalas angulares intermediárias, bem como as observações dos experimentos *Degree Angular Scale Interferometer* – DASI (Halverson et al., 2002); *Cosmic Anisotropy Telescope* - CAT (Stompor et al., 2001); *Cosmic Background Imager* – CBI (Mason et al., 2002; Pearson et al., 2002), observando em pequenas escalas angulares também estão de acordo com as previsões do modelo inflacionário padrão. No Apêndice A são apresentados alguns dos valores medidos para as flutuações de temperatura da RCF baseado na observação de diversos experimentos em diferentes escalas angulares.

Apesar da baixa resolução angular do experimento DMR, as observações do COBE constituem, ainda hoje, uma das principais referências para o estudo das anisotropias da RCF. Isso porque as observações do COBE cobrem completamente a esfera celeste, ao contrário das observações recentes em baixas escalas angulares que cobriram apenas parcialmente a esfera celeste. Com o advento dos experimentos com melhor relação sinal ruído, melhor resolução angular e maior cobertura do céu, resultados mais precisos são esperados na investigação estatística da RCF. São aguardados os dados do satélite MAP, que em 2002 mapeou a esfera celeste nas frequências de 23, 33, 41, 61 e 94 GHz, observando em escalas angulares da ordem de $0,2^\circ$ - $0,9^\circ$, e do satélite Planck que irá

operar em frequências no intervalo de 25 - 900 GHz, com resolução angular de $0,2^\circ$ ($1 \sim 1000$).

Estudos também procuram traços de não *gaussianidade* na distribuição de objetos a moderados *redshifts*, a partir da análise da função de correlação de massa (Weinberg e Cole, 1992; Fan e Bardeen, 1992); e por meio da abundância de aglomerados de galáxias (Robinson e Baker, 2000; Verde e Heavens, 2001; Matarrese, Verde e Jimenez, 2000; Ribeiro, Wuensche e Letelier, 2000). Resultados indicam que modelos não *gaussianos* são mais eficientes na estimativa da evolução de aglomerados do que os modelos *gaussianos* (Robinson e Baker, 2000; Ribeiro, Wuensche e Letelier, 2000). O número crescente de galáxias observadas em altos *redshifts*, e.g. Weymann et al. (1998), desfavorece o modelo inflacionário padrão, o qual prevê uma densidade muito baixa de tais objetos.

Embora as observações da RCF favoreçam o modelo inflacionário padrão, as previsões dos modelos *gaussianos* para a distribuição de estruturas em grandes escalas não são condizentes com as observações recentes. Uma solução alternativa aplicável aos modelos de formação de estruturas seria a consideração de pequenos desvios de *gaussianidade* no campo de flutuações. É neste contexto que surgem os modelos *quasi-gaussianos*.

CAPÍTULO 2

O MODELO NÃO GAUSSIANO DE CAMPO MISTO

2.1 - CAMPOS DE FLUTUAÇÕES NÃO GAUSSIANAS

O conceito de não *gaussianidade* implica em um número infinito de modelos estatísticos possíveis. Genericamente, pode-se caracterizar um espectro de flutuações com função de distribuição não *gaussiana* pelos termos não nulos de correlações de ordens superiores a dois:

$$\langle \delta_1 \delta_2 \dots \delta_n \rangle \neq 0, \quad \text{para } (n \geq 3). \quad (2.1)$$

Uma distribuição não *gaussiana* pode ser expressa como a superposição de uma distribuição *gaussiana* e de infinitos termos de correlações superiores (Gnedenko e Kolmogorov, 1968).

As correlações no campo de flutuações de densidade têm influência significativa nos modelos de formação de estruturas. Os acoplamentos – ou correlações – de fase decorrentes dos processos de interação gravitacional com evolução não linear, por exemplo, alteram as condições iniciais *gaussianas* gerando estruturas aglomeradas com morfologia característica. Esta afirmação pode ser inferida, por exemplo, a partir das simulações numéricas ilustradas por Coles (2001), e reproduzidas na Figura 2.1, as quais mostram a importância das correlações de fase para o campo de flutuações de densidade. As estruturas apresentadas em ambos os quadros da Figura 2.1 apresentam exatamente o mesmo espectro de potência, $P(k) \propto |\delta_k|^2$. Entretanto, no quadro apresentado a direita, as informações das fases das perturbações são desprezadas. O quadro a esquerda, o qual contém informações completas dos modos de perturbação, para o mesmo conjunto de simulações, ilustra uma estrutura aglomerada com morfologia completamente distinta do quadro a direita.

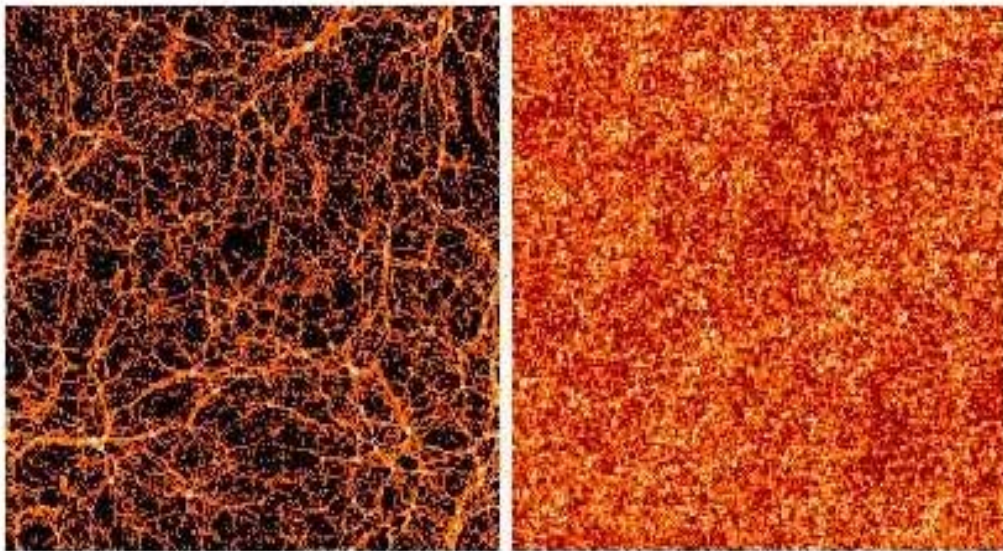


FIGURA 2.1 – Simulações numéricas de um aglomerado de galáxias (quadro a esquerda) apresentadas juntamente com uma versão gerada aleatoriamente desprezando as informações de fase dos modos de perturbação (quadro a direita).
FONTE: Coles (2001, p. 17).

As simulações ilustradas por Coles representam os desvios de *gaussianidade* (ou acoplamentos de fases) adquiridos no processo de evolução não linear do campo de flutuações. Entretanto, em determinadas classes de modelos cosmológicos, o acoplamento entre os modos de perturbação ocorre em função do processo de geração das perturbações primordiais, criando campos com flutuações correlacionadas em diversas ordens (Watts e Coles, 2003). Para tais modelos, a função distribuição do campo de flutuações é sempre não *gaussiana*.

Muitas são as dificuldades encontradas na determinação das condições iniciais do Universo e na descrição concisa dos processos físicos vigentes na fase primordial. Por esta razão, a investigação dos efeitos resultantes de campos de flutuações não *gaussianas* consiste basicamente na análise de determinadas classes de modelos. Em geral, modelos não *gaussianos* são descritos a partir da definição de operadores

matemáticos que transformam campos *gaussianos* em campos não *gaussianos* de acordo com certas regras específicas para cada modelo.

Weinberg e Cole (1992) estudaram uma certa classe de modelos não *gaussianos* construídos a partir de um campo *gaussiano*, $F_G(r)$, aplicando sobre este uma transformação monotônica não linear, $M(F)$, de modo a obter um campo distorcido $D(r) = M[F_G(r)]$. Neste caso, a função de distribuição do campo distorcido é dada por:

$$P_D(F) = P(F_G) \left| \frac{dM}{dF_G} \right|^{-1}. \quad (2.2)$$

Desse modo, a função de distribuição resultante pode assumir qualquer forma de acordo com uma escolha adequada da função $M(F_G)$. Duas transformações foram aplicadas nesse estudo:

$$M_p(\delta) = \left[e^{a\delta} - e^{a^2/2} \right] \left[e^{2a^2} - e^{a^2} \right]^{-1/2}, \quad (2.3)$$

e

$$M_n(\delta) = - \left[e^{-a\delta} - e^{a^2/2} \right] \left[e^{2a^2} - e^{a^2} \right]^{-1/2}, \quad (2.4)$$

sendo a um parâmetro livre ajustável ao modelo.

Para as transformações $M_p(\delta)$ e $M_n(\delta)$, supondo $P(\delta)$ *gaussiano*, a função de distribuição do campo resultante é ilustrada na Figura 2.2. Pode-se observar que o efeito da transformação $M_p(\delta)$ equivale a uma deformação da distribuição *gaussiana* original para valores positivos de δ , correspondendo a um incremento na probabilidade de picos de alta densidade, enquanto que a transformação $M_n(\delta)$ equivale a uma deformação da distribuição *gaussiana* para valores negativos de δ , correspondendo a um incremento nos picos de baixa densidade. O modelo no qual é aplicada a transformação $M_p(\delta)$ corresponde a um modelo de assimetria (*skewness*) positiva, ao passo que a transformação $M_n(\delta)$ gera um modelo de assimetria negativa.

O parâmetro de assimetria, ou desvio, no campo de flutuações de densidade é freqüentemente usado na descrição de modelos não *gaussianos*. Modelos com assimetria positiva geram estruturas aglomeradas de mais alta densidade do que os modelos puramente *gaussianos* (assimetria zero), enquanto os modelos de assimetria negativa geram mais estruturas vazias. Modelos alargados simétricos, com desvios positivo e negativo, também podem ser construídos.

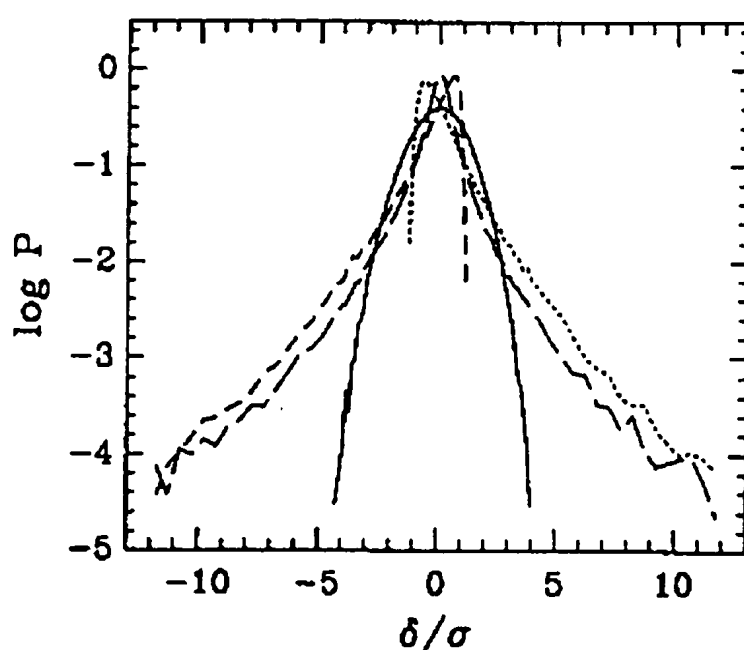


FIGURA 2.2 - Distribuição de probabilidade das flutuações iniciais de densidade para os modelos de espectro *gaussiano* (linha sólida), não *gaussiano* com assimetria positiva (linha pontilhada), não *gaussiano* com assimetria negativa (linha tracejada menor) e com assimetria positiva e negativa (linha tracejada maior) obtidos por meio das transformações tipo $M_p(\delta)$ e $M_n(\delta)$, no modelo de Weinberg e Cole.
 FONTE: Weinberg e Cole (1992, p. 656).

Fan e Bardeen (1992), motivados pelo modelo inflacionário de campo escalar duplo, discutem um modelo não *gaussiano* de assimetria positiva, cujo campo de flutuações, ξ , resulta da combinação de dois campos *gaussianos* independentes, ϕ_1 e ϕ_2 , compondo um campo χ^2_1 :

$$\xi = \phi_1 + \phi_2^2. \quad (2.5)$$

Falk, Rangarajan e Srenicki (1993) e Gangui et al. (1994) discutem os efeitos de transformações locais não lineares no campo de flutuações *gaussianas*, ϕ , descritas como uma expansão de Taylor, do tipo:

$$\xi(x) = F[\phi] \equiv \lambda_1 \phi(x) + \lambda_2 \phi(x)^2 + \dots \quad (2.6)$$

Matarrese, Verde e Jimenez (2000) investigam os efeitos quadráticos e cúbicos no campo primordial *gaussiano*, ϕ , sob a forma:

$$\psi(x) = \alpha \phi(x) + \varepsilon (\phi^2(x) - \langle \phi^2 \rangle) + \varepsilon \beta \phi^3(x). \quad (2.7)$$

O termo em $\langle \phi^2 \rangle$ assegura que o campo resultante terá média nula.

Outras transformações de campos *gaussianos* para campos não *gaussianos* com assimetria positiva foram investigadas por Coles e Barrow (1987) e Moscardini et al. (1991). Entre elas, a transformação de campos *gaussianos*, ϕ , em campos não *gaussianos*, ψ , com distribuição *Rayleigh*:

$$\psi(x) = A[\phi_1^2(x) + \phi_2^2(x)]^{1/2}, \quad (2.8)$$

com distribuição *maxwelliana*:

$$\psi(x) = A[\phi_1^2(x) + \phi_2^2(x) + \phi_3^2(x)], \quad (2.9)$$

ou campos com distribuição *log-normal*:

$$\psi(x) = A e^{\phi(x)}, \quad (2.10)$$

Ribeiro, Wuensche e Letelier (2000) consideram um modelo misto de flutuações *gaussianas* e *log-normal*, cujo campo pode ser descrito pela transformação:

$$\psi(x) = F[\phi] = \alpha \phi(x) + (1 - \alpha) e^{\phi(x)}, \quad (2.11)$$

sendo α o parâmetro de mistura definido no intervalo $[0, 1]$.

2.2 - O MODELO DE MISTURA

A dificuldade encontrada em estabelecer um possível desvio de *gaussianidade* nas flutuações primordiais (sobretudo quando analisados os dados da RCF) é um forte indício de que este desvio, se existir, deve ser muito pequeno. Os modelos não *gaussianos* mais estudados no cenário cosmológico atual descrevem um campo de flutuações inicialmente *gaussiano*, mas apenas ligeiramente distorcido.

Em particular, Ribeiro, Wuensche e Letelier (2000) consideraram um modelo no qual o campo de densidade é representado por uma variável aleatória, cuja distribuição é representada por uma função densidade de probabilidade do tipo:

$$P(\delta) = \alpha_1 f_1(\delta) + \alpha_2 f_2(\delta) + \dots + \alpha_n f_n(\delta) \quad (\delta \in \mathfrak{R}), \quad (2.12)$$

para:

$$\alpha_j > 0; \quad j = 1, \dots, n; \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1;$$

$$f_n(\delta) \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathfrak{R}} f_j(\delta) d\delta = 1$$

Neste caso, diz-se que δ tem uma distribuição de mistura finita, sendo $f_n(\delta)$ as componentes de mistura e α_n os pesos da mistura. Uma vez que o número das componentes de mistura é finito e os pesos da mistura são diferenciados ($\alpha_i \neq \alpha_j$), essa superposição considerada não deve convergir para uma distribuição *gaussiana*.

A função de distribuição proposta por Ribeiro, Wuensche e Letelier (RWL) poderia ser usada, por exemplo, para descrever a densidade de probabilidade do espectro de flutuações do modelo inflacionário híbrido (Battye e Weller, 1998). Neste modelo, as flutuações de densidade são semeadas por uma combinação ponderada de perturbações adiabáticas, amplificadas durante o período de expansão inflacionária, e perturbações de *isocurvatura*, introduzidas no decaimento de cordas cósmicas ao final do período inflacionário. Neste caso, o campo misto de flutuações apresenta uma distribuição do tipo:

$$P(\delta) = \alpha f_1(\delta) + (1 - \alpha) f_2(\delta), \quad (2.13)$$

sendo que $f_1(\delta)$ representa o campo inflacionário com distribuição *gaussiana* e $f_2(\delta)$ representa o campo genérico de defeitos topológicos com distribuição não *gaussiana*, podendo $f_2(\delta)$ deformar o campo *gaussiano* para valores positivos ou negativos de δ . A importância da distribuição f_2 para o campo misto é definida pelo parâmetro α , cujo valor foi inicialmente determinado a partir de um ajuste sobre uma pequena amostra de aglomerados de galáxias.

No modelo de campo misto, a deformação do campo inicialmente *gaussiano*, representada pela distribuição $f_2(\delta)$, pode ser justificada em função dos termos de acoplamento das fases dos modos de perturbação no espaço de Fourier. Conforme definição do espectro de flutuações *gaussianas*, modos de Fourier com distribuição de fases aleatória, porém correlacionada, gera um espectro de flutuações com distribuição não *gaussiana*. O acoplamento de fases no modelo de campo misto pode decorrer do processo de decaimento dos defeitos topológicos e de um possível acoplamento entre os campos adiabático e de *isocurvatura*.

O campo aleatório gerado pela distribuição dual no modelo de mistura é representado por $\delta_k^2 = P(k)v^2$, sendo v um número aleatório cuja distribuição é dada por 2.13. Neste caso, o valor quadrático médio das flutuações será:

$$\langle \delta^2(\bar{x}) \rangle = \frac{V^{-1}}{(2\pi)^3} \int_k P(k) \left[\int_v [\alpha f_1(v) + (1-\alpha)f_2(v)] v^2 dv \right] d^3k, \quad (2.14)$$

e o espectro de potência das flutuações de campo misto, $P^{Mix}(k)$, é definido como:

$$P^{Mix}(k) \equiv M^{Mix} P(k), \quad (2.15)$$

sendo $P(k)$ o espectro de potência do campo puramente *gaussiano*, do tipo βk^n , segundo o modelo padrão, e M^{Mix} é definido como um termo de mistura:

$$M^{Mix} \equiv \int_v [\alpha f_1(v) + (1-\alpha)f_2(v)] v^2 dv. \quad (2.16)$$

Resolvendo a integral acima, considerando f_1 um campo *gaussiano*, podemos representar M^{Mix} como um funcional de f_2 :

$$M^{Mix}(\alpha) = \alpha + (1-\alpha) \int_v f_2(v) v^2 dv. \quad (2.17)$$

As considerações iniciais do modelo de mistura estudado por RWL são para um modelo de assimetria positiva, no qual a distribuição f_2 atua de forma a representar um certo número de picos raros nas flutuações de densidade positivas ($\delta > 0$). Uma combinação particular analisada corresponde aos campos *gaussiano*, f_1 , e *log-normal*, f_2 :

$$f_1(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}v^2} \quad \text{e} \quad f_2(v) = \frac{1}{v\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\ln v)^2}, \quad (2.18)$$

considerando variância unitária, e sendo o termo de mistura estimado em:

$$M^{Mix} = \left[\alpha + \frac{e^2}{2}(1-\alpha) \right]. \quad (2.19)$$

Para o caso $\alpha \approx 1$, o espectro misto será $P^{Mix}(k) \approx P(k)$ e $\sigma^{Mix}(R) = \sigma(R)$, prevalecendo um campo *gaussiano*.

Os valores para o parâmetro de ponderação, α , ajustados a uma função de distribuição da densidade de objetos por intervalo de massa, para determinado *redshift*, correspondem a $(1-\alpha) \sim 10^{-3}$ a 10^{-4} . Apesar da pequena contribuição do campo não

gaussiano, o ajuste das curvas de distribuição de aglomerados é extremamente sensível ao incremento do segundo campo, como pode ser observado na Figura 2.3. Os resultados obtidos indicam que mesmo pequenos desvios de *gaussianidade* apresentam um papel fundamental na evolução da abundância de aglomerados, somando-se positivamente às previsões do modelo puramente *gaussiano*.

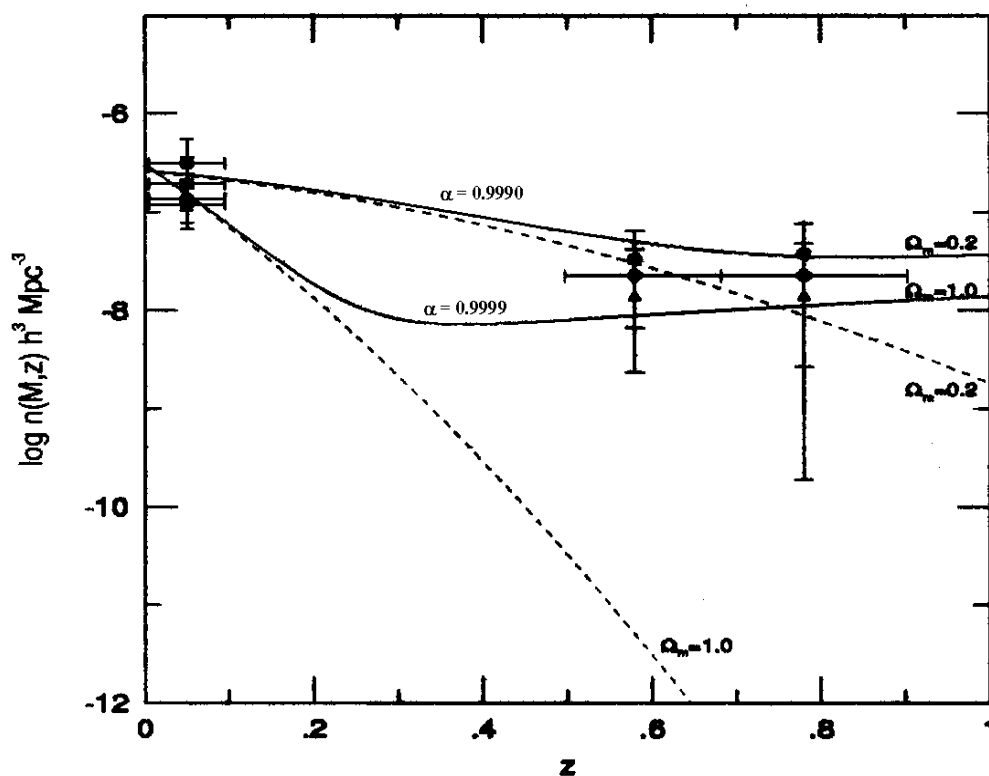


FIGURA 2.3 - Abundância de aglomerados de galáxias no modelo de campo em duas componentes para $\Omega_m=0,2$ e $\Omega_m=0,1$, ajustados ao modelo misto (linhas sólidas) com $\alpha=0,9990$ e $\alpha=0,9999$. As estimativas do modelo puramente *gaussiano* ($\alpha=1$) correspondem às linhas tracejadas.

FONTE: Ribeiro, Wuensche e Letelier, (2000, p. 3).

A escolha de RWL pela distribuição *log-normal* encontra justificativa na literatura. Coles e Jones (1991) já defendiam modelos com distribuição de massa *log-normal*, para a descrição da distribuição de matéria no regime de evolução fracamente não linear, quando Plionis e Valdarnini (1995), estudando a função densidade de probabilidade de aglomerados de galáxias dos catálogos Abell e ACO (Abell, 1958; Abell, Corwin e Olowin, 1989), concluíram que a distribuição de aglomerados no regime não linear é consistente com uma distribuição *log-normal*. Estudos recentes (Kayo, Taruya e Suto, 2001) também reforçam esta idéia. A distribuição *log-normal* é ainda proposta para descrever a distribuição das flutuações de cordas cósmicas no modelo inflacionário híbrido (Battye, Magueijo e Weller, 1999).

Os estudos de RWL indicam que uma pequena contribuição do campo não *gaussiano* pode ter conseqüências bastante significativas na descrição da evolução de aglomerados de galáxias e, conseqüentemente, na distribuição de massa do Universo. Motivado por esta conclusão, este trabalho investiga os efeitos de uma possível mistura no campo de flutuações da RCF (não invocando, a princípio, os mecanismos físicos responsáveis por tais efeitos). Nosso objetivo é descrever os efeitos observáveis nas flutuações da RCF, em diferentes componentes e diferentes frações de mistura, para futura comparação com dados observacionais das flutuações de temperatura em pequenas escalas angulares.

2.3 - O MODELO DE MISTURA EM ESCALA

Assim como no modelo híbrido, no cenário de mistura, assumimos que o campo de flutuações primordiais é constituído por duas componentes, uma de flutuações adiabáticas, de origem inflacionária, e outra de flutuações de *isocurvatura*, possivelmente geradas por defeitos topológicos (também chamadas sementes de densidade) durante uma transição de fase ocorrida ao final do período inflacionário. Entretanto, o modelo de mistura considera uma possível correlação entre os campos adiabáticos e de *isocurvatura* que teria efeito somente no Universo pós inflacionário. Assim sendo, as flutuações em escalas superiores ao horizonte devem ser definidas de

modo que nunca houve relação causal entre os campos considerados e, portanto, nessas escalas, as flutuações devem ser independentes. No contexto de mistura, as correlações entre os campos são permitidas apenas dentro do horizonte de partículas. Como consequência, as flutuações na RCF em escalas maiores que o raio de Hubble são descritas predominantemente em função do campo inflacionário (adiabático – *gaussiano*), ao passo que as flutuações em escalas pequenas e intermediárias são descritas sob a influência dos campos (adiabático / *gaussiano* e *isocurvatura* / não *gaussiano*), sendo permitidas as correlações entre ambos. Deste modo, tem-se:

$$P(k) = \begin{cases} P(k) & \text{para } \theta > \theta_H \\ P^{Mix}(k) & \text{para } \theta < \theta_H \end{cases} \quad (2.20)$$

Para introduzir esta idéia, de modo a manter uma transição contínua no campo de flutuações, propomos o conceito de mistura em escala, definindo $\alpha \equiv \alpha(k)$. Para a escolha da função $\alpha(k)$, os critérios básicos são: suavidade, continuidade e crescimento *monotônico* em k . Para $k \rightarrow 0$ (flutuações fora do raio de Hubble $\Rightarrow \lambda \rightarrow \infty$), $\alpha(k)$ deve tender a 1. Assim sendo, por simplicidade matemática, definimos:

$$\alpha(k) = 1 - \alpha_0 k, \quad (2.21)$$

sendo α_0 denominado coeficiente de mistura, definido em unidades de Mpc. Neste caso, o termo de mistura, M^{Mix} , também será uma função de α_0 e k :

$$M^{Mix}(\alpha_0, k) \equiv 1 - \alpha_0 k + \alpha_0 k \int_{\nu} f_2(\nu) \nu^2 d\nu. \quad (2.22)$$

O espectro de potência de mistura será do tipo:

$$\begin{aligned} P^{Mix}(k) &\equiv M(\alpha_0, k)P(k) \\ &\propto k^n + M(\alpha_0)k^{n+1}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

sendo que $M(\alpha_0)$ representa apenas a dependência com o coeficiente de mistura:

$$M^{Mix}(\alpha_0) = \alpha_0 \left(\int_{\nu} f_2(\nu) \nu^2 d\nu - 1 \right). \quad (2.24)$$

No caso de um campo puramente *gaussiano*, $\alpha_0 \approx 0$, o espectro de mistura será expresso por uma simples lei de potência. No caso de um campo misto, a contribuição do segundo campo será estimada pela integral 2.23 em escalas definidas pela expressão 2.21. Para o modelo de mistura em escala, a função distribuição do campo de flutuações definida no espaço de Fourier será:

$$P(\delta_k) = (1 - \alpha_0 k) f_1(\delta_k) + \alpha_0 k f_2(\delta_k). \quad (2.25)$$

No estudo da influência do campo misto, para as flutuações de temperatura da RCF, as distribuições investigadas na representação do campo de flutuações de *isocurvatura* são: *log-normal* (equação 2.18), *maxwelliana*:

$$f_2(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\nu}} \nu^2 e^{-\frac{\nu^2}{2}}, \quad (2.26)$$

$$\text{Rayleigh: } f_2(\nu) = \nu e^{-\frac{\nu^2}{2}}, \quad (2.27)$$

$$\chi^2_1: f_2(\nu) = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\nu}{2}} \frac{e^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad (2.28)$$

$$\text{e exponencial: } f_2(\nu) = e^{-\nu}. \quad (2.29)$$

Essas distribuições, definidas para flutuações de densidade positiva, são capazes de compor um modelo não *gaussiano* de assimetria positiva, contribuindo significativamente para a probabilidade de picos de alta densidade. Em todas estas distribuições, a variância considerada equivale a uma unidade. A Figura 2.4 ilustra a assimetria máxima do campo misto ($k = 1$), para diferentes distribuições, com coeficiente de mistura estimado em $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$. Algumas dessas distribuições já foram investigadas na composição de modelos não *gaussianos* simples (Coles e Barrow, 1987), sendo agora investigadas no contexto dos modelos de campo misto.

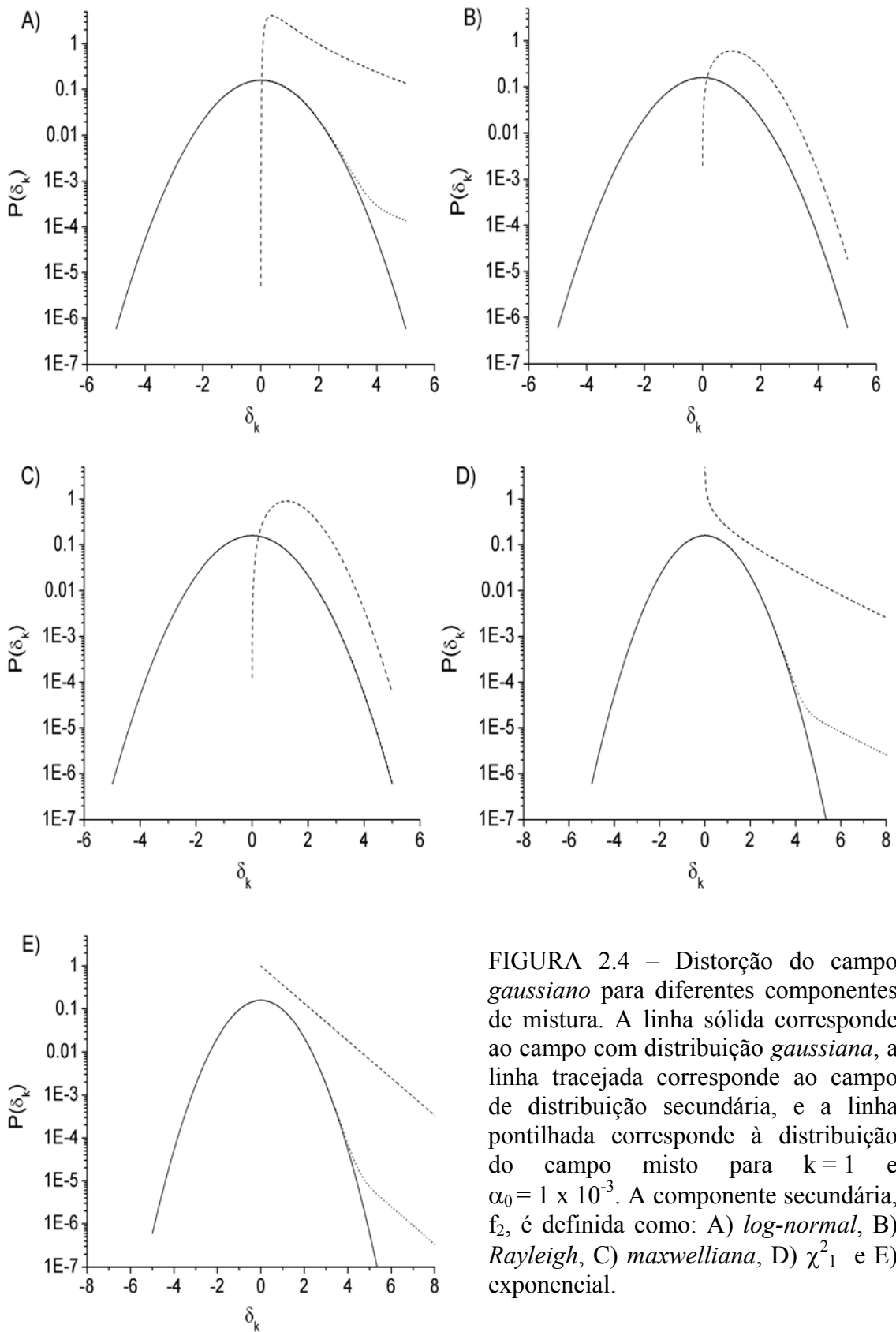


FIGURA 2.4 – Distorção do campo *gaussiano* para diferentes componentes de mistura. A linha sólida corresponde ao campo com distribuição *gaussiana*, a linha tracejada corresponde ao campo de distribuição secundária, e a linha pontilhada corresponde à distribuição do campo misto para $k=1$ e $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$. A componente secundária, f_2 , é definida como: A) *log-normal*, B) *Rayleigh*, C) *maxwelliana*, D) χ^2_1 e E) exponencial.

Podemos observar pela Figura 2.4-B e 2.4-C que a distorção do campo misto envolvendo as componentes com distribuição *maxwelliana* e *Rayleigh* com razão de mistura da ordem de $\alpha_0 \approx 1 \times 10^{-3}$ é praticamente imperceptível. Entretanto, de acordo com as definições do modelo de mistura, a influência média do segundo campo, estimada pelo termo de mistura, $M^{Mix}(\alpha_0)$, é não nula, sendo:

$$- M^{Mix}(\alpha_0) = \alpha_0 \left(\frac{e^2}{2} - 1 \right), \text{ para } f_2 \text{ log-normal}, \quad (2.30)$$

$$- M^{Mix}(\alpha_0) = \alpha_0(2-1), \text{ para } f_2 \text{ Rayleigh}, \quad (2.31)$$

$$- M^{Mix}(\alpha_0) = \alpha_0 \left(3\sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1 \right), \text{ para } f_2 \text{ maxwelliana}, \quad (2.32)$$

$$- M^{Mix}(\alpha_0) = \alpha_0(3-1), \text{ para } f_2 \chi^2_1, \quad (2.33)$$

$$- M^{Mix}(\alpha_0) = \alpha_0(2-1), \text{ para } f_2 \text{ exponencial}. \quad (2.34)$$

De acordo com as estimativas do termo de mistura, é possível antecipar uma característica importante do modelo de campo misto, quando aplicado a RCF, trata-se da degenerescência do espectro de flutuações em relação à função de distribuição do espectro primordial. Como pode ser observado nas relações 2.20 e 2.23, as distribuições *Rayleigh* e exponencial apresentam a mesma expressão para o termo de mistura, apesar de resultarem em diferentes distorções no espectro inicialmente *gaussiano*. Entretanto, a contribuição média de ambas as distribuições para o campo misto é idêntica, resultando em espectros idênticos para as flutuações de temperatura na RCF.

2.4 - O MODELO DE MISTURA NA RCF

A investigação dos efeitos resultantes de campos não *gaussianos* sob as anisotropias da RCF é realizada por meio de simulações numéricas. Simulações cosmológicas são de suma importância no estudo de formação de estruturas, visto que as teorias cosmológicas não podem ser testadas experimentalmente, mas apenas validadas

mediante comparação entre previsões teóricas e resultados observacionais. Dentre os principais ingredientes dos algoritmos que descrevem a evolução do campo de flutuações da RCF, estão incluídos o regime de evolução (linear ou não), o tipo de flutuações (adiabáticas ou de *isocurvatura*) e o espectro de flutuações (tipo lei de potência com índice espectral constante ou não). Para o modelo de campo misto, o qual prevê mistura correlacionada de flutuações em escala, as previsões teóricas podem apresentar diferenças significativas em relação às previsões clássicas. Nessa seção, são descritos o processo de evolução das perturbações no modelo de campo misto e as considerações básicas do processo de simulação das anisotropias da RCF no contexto de mistura.

2.4.1 – A EVOLUÇÃO DAS FLUTUAÇÕES PRIMORDIAIS NO MODELO DE CAMPO MISTO

Para estimar o espectro das flutuações de temperatura da RCF, precisamos inicialmente evoluir as flutuações geradas no Universo primordial durante toda a Era Radiativa, passando pela Época da Recombinação e o conseqüente desacoplamento entre fótons e matéria. Para o modelo de campo misto, cuja distribuição resultante é não *gaussiana*, é necessário considerar a evolução dos campos adiabático e de *isocurvatura*, e um possível fator de acoplamento entre ambos os campos. Do fator de acoplamento resulta a correlação de fases e a deformação do campo primordial *gaussiano*.

No modelo de mistura, no qual são permitidos apenas pequenos desvios de *gaussianidade*, correspondendo a uma baixa correlação no espaço de fases, pode-se, a princípio, considerar que a evolução do fator de acoplamento entre os campos, se existir, deve ser muito baixa. Neste caso, para o processo de evolução das perturbações de densidade, pode-se considerar apenas a evolução das amplitudes dos modos de Fourier, no contexto da teoria de perturbação linear. Assim, a evolução dos campos de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura* pode ser considerada em processos independentes e, se não há evolução no acoplamento dos campos, a correlação efetiva

pode ser considerada apenas no momento do desacoplamento dos fótons da RCF, ou seja, na Superfície do Último Espalhamento.

Essa abordagem de evolução independente dos campos de flutuações primordiais, durante a Era Radiativa, inseridos no contexto de mistura, é sustentada pelas previsões da teoria de perturbação linear. Conforme apresentado no capítulo anterior (seção 1.2.1), a TPL estima que, durante a Era Radiativa, apenas os modos de perturbação do tipo adiabático com comprimentos de onda maiores que o raio de Hubble apresentam evolução significativa, sendo a amplitude dos modos proporcional ao quadrado do fator de escala do Universo. Para os modos de *isocurvatura*, nenhuma amplificação é esperada fora do raio de Hubble. Para flutuações dentro do raio de Hubble, a solução encontrada na componente radiativa é do tipo oscilatória, enquanto na componente de matéria escura as perturbações apresentam crescimento logarítmico com o fator de escala do Universo.

No modelo de mistura em escala, as flutuações acima do raio de Hubble são puramente de origem inflacionária, do tipo adiabático, para as quais nenhum fator de correlação é necessário. Apenas dentro do raio de Hubble é que as flutuações adiabática e de *isocurvatura* se misturam. Entretanto, conforme previsto pela TPL, não há evolução significativa das flutuações dentro do raio de Hubble durante a Era radiativa. O plasma de fótons, bárions e matéria escura fria impede a evolução das perturbações e, a princípio, não há razão para esperar a evolução do fator de acoplamento das fases. Assim, a aproximação de evolução independente, mesmo para flutuações mistas com fases correlacionadas, deve ser válida.

Já na Era da Matéria, a TPL indica que a amplitude da componente de matéria escura fria é proporcional ao fator de escala do Universo, seja dentro ou fora do raio de Hubble, enquanto as componentes radiativa e *bariônica* continuam a oscilar dentro do raio de Hubble. A evolução dos bárions começa um pouco mais tarde, somente após o desacoplamento dos fótons. Portanto, durante a Era da Matéria, os efeitos de acoplamento entre os campos de flutuações podem ser significativos, sobretudo após o

desacoplamento dos fótons. Mas, durante a Era Radiativa, quando as perturbações coexistem fortemente acopladas, não há indícios aparentes de evolução no acoplamento dos modos. Essas considerações reforçam a aproximação feita na estimativa da correlação entre as componentes de mistura apenas na Superfície do Último Espalhamento.

A consideração de evolução independente no modelo de mistura é ainda fortalecida pelos estudos de Press e Vishniac (1980) e Vishniac (1982). Press e Vishniac investigaram a propagação de flutuações adiabáticas antes, durante e após a recombinação, e concluíram que nenhuma amplificação significativa é esperada no campo de flutuações. Vishniac ainda investigou os efeitos não lineares (com fracas correlações) nas perturbações cosmológicas de evolução adiabática, e constatou que, para um espectro inicial invariante em escala, com flutuações dentro do raio de Hubble, a inclusão dos efeitos não lineares de dissipação ou amplificação de flutuações é imperceptível na estimativa do espectro de potência do campo de flutuações até a Época da Recombinação. Vishniac concluiu finalmente que as informações das fases das flutuações durante a Era Radiativa são de origem primordial, e não de origem evolutiva.

A evolução linear das flutuações primordiais de baixa amplitude, ainda que correlacionadas, também é considerada no estudo das perturbações de *isocurvatura* geradas por sementes discretas de massa. Scherrer e Bertschinger (1991) investigaram a função de distribuição dos modelos de flutuações tipo sementes de *isocurvatura*, a partir da evolução linear das flutuações durante a Era Radiativa, e concluíram que tais modelos geram flutuações correlacionadas em altas ordens, resultando numa distribuição não *gaussiana* de assimetria positiva. As perturbações tipo sementes de *isocurvatura* (ou sementes discretas de massa) podem ter sido geradas por buracos negros primordiais ou defeitos topológicos tipo texturas, cordas cósmicas ou monopolos. Segundo Scherrer e Bertchinger (1991), flutuações deste tipo apresentam distribuição espacial não *gaussiana*, porém, durante a Era Radiativa, quando as amplitudes das flutuações são baixas, o processo de acreção de matéria pelas sementes é independente, o que justifica a evolução linear das flutuações primordiais. As funções

de distribuição sugeridas na descrição do campo de flutuações gerado pelas sementes de *isocurvatura* são as distribuições Bessel modificada, *gama* e exponencial (caso particular da distribuição *gama*).

Os pequenos desvios permitidos, a dependência em escala e a correlação dos campos na Superfície do Último Espalhamento são as características diferenciais entre o modelo de mistura e o modelo inflacionário híbrido considerado por Battye e Weller (1998). Neste último, o espectro de potência do campo resultante e o espectro das anisotropias da RCF são considerados como uma simples superposição ponderada dos efeitos independentes causados pelos campos inflacionário (adiabático) e o campo de cordas cósmicas (*strings*), sendo:

$$P^{tot}(k) = \alpha P^{adi} + (1 - \alpha) P^{str} \quad \text{e} \quad C_l^{tot} = \alpha C_l^{adi} + (1 - \alpha) C_l^{str}, \quad (2.35)$$

para valores típicos de α da ordem de: 0,25; 0,50 e 0,75.

Embora desconsiderada no modelo híbrido, a correlação entre os campos de flutuações, no contexto de mistura, tem importância fundamental nas flutuações da RCF em pequenas escalas angulares (conforme será visto no capítulo seguinte), mesmo quando são permitidos apenas pequenos desvios de *gaussianidade*.

2.4.2 - AS SIMULAÇÕES DO MODELO DE MISTURA

As previsões do modelo de mistura para as anisotropias da RCF foram obtidas por meio do conjunto de simulações cosmológicas COSMICS (*Cosmological Initial Conditions and Microwave Anisotropy Codes*). Este conjunto, de domínio público¹, foi elaborado por Bertschinger (1999) e provê algumas ferramentas úteis para simulações cosmológicas, tais como a evolução linear das perturbações de densidade, o espectro de potência das anisotropias da RCF, o cálculo da função de transferência, o espectro de

¹ <http://arcturus.mit.edu/cosmics/>

potência das flutuações de massa e a geração de condições iniciais *gaussianas* para simular o processo não linear de formação de estruturas.

A evolução independente dos campos de flutuações adiabático e de *isocurvatura* foi obtida por meio do código LINGER (*Linear General Relativity*) do conjunto COSMICS. Esta função integra o conjunto de equações linearizadas de Einstein, Boltzmann e as equações de fluidos que governam a evolução das perturbações escalares na métrica e no campo de densidade dos fótons, bárions e matéria escura, para valores discretos de k , desde a Era Radiativa até determinado *redshift* especificado pelo usuário. A métrica considerada é a de Friedman-Robertson-Walker, para um universo plano (incluindo constante cosmológica). As flutuações são evoluídas no sistema de coordenadas espaciais *lagrangianas* (*gauge synchronous*), cujo referencial é fixo na componente de matéria escura (Ma e Bertschinger, 1995).

O código LINGER estima a função de densidade dos fótons e a função de transferência de polarização (na componente de campo elétrico) que são utilizadas pelo código DELTAT para o cálculo do espectro de flutuações de temperatura da RCF. Para um alcance l característico e espectros de potência do tipo $P(k) \propto k^n$, os momentos de multipolo são obtidos por meio da integração:

$$C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle = 4\pi \int_0^{k_{\max}} P(k) \Delta_l^2(k, \tau) d^3k, \quad (2.36)$$

sendo $\Delta_l^2(k, \tau)$ a função que descreve as perturbações na temperatura dos fótons da RCF, no espaço de Fourier, somada em todas as polarizações, em determinada escala angular, l , e no tempo conforme, τ . Essa função é obtida pelo código LINGER a partir da solução das equações de perturbação de Einstein-Boltzmann, as quais descrevem a evolução das flutuações primordiais.

As adaptações do código COSMICS ao modelo de mistura incluem a substituição do espectro de potência $P(k)$ por $P^{Mix}(k)$ e a função $\Delta_l^2(k, \tau)$ por $[\Delta_l^{Mix}(k, \tau)]^2$:

$$C_l^{Mix} = 4\pi \int_0^{k_{max}} P^{Mix}(k) [\Delta_l^{Mix}(k, \tau)]^2 d^3k, \quad (2.37)$$

sendo $P^{Mix}(k)$ o espectro definido em 2.23, e:

$$\Delta_l^{Mix}(k) \equiv (1 - \alpha_0 k) \Delta_l^{Adi}(k) + \alpha_0 k \Delta_l^{Iso}(k). \quad (2.38)$$

As funções Δ_l^{Adi} e Δ_l^{Iso} correspondem às densidades dos fótons estimadas pelo código LINGER para condições iniciais de flutuações adiabáticas e sementes de *isocurvatura*, respectivamente.

Inserindo 2.38 em 2.37, obtém-se, na estimativa do espectro de potência da RCF, um campo misto de flutuações adiabáticas (*gaussianas*) e flutuações de *isocurvatura* (não *gaussianas*). Da definição (2.38) surgem os termos de correlação entre os campos independentes, (Δ_l^{Adi} e Δ_l^{Iso}), que expressam o acoplamento dos campos na Superfície do Último Espalhamento com razão de mistura definida por α_0 , em escalas definidas por $\alpha_0 k$, tal como:

$$\begin{aligned} [\Delta_l^{Mix}(k)]^2 = & [\Delta_l^{Adi}]^2 + \alpha_0^2 k^2 \left([\Delta_l^{Iso}]^2 + [\Delta_l^{Adi}]^2 - 2\Delta_l^{Iso} \Delta_l^{Adi} \right) \\ & + 2\alpha_0 k \Delta_l^{Adi} \Delta_l^{Iso} - 2\alpha_0 k [\Delta_l^{Adi}]^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Através das expressões 2.37 e 2.39, a idéia de correlação no campo misto fica ainda mais evidente. Essas expressões mostram que as flutuações impressas na intensidade dos fótons, em determinada escala k , são consideradas superposições de dois campos independentes correlacionados naquela escala, $\langle \delta_k^{Adi} \delta_k^{Iso} \rangle \neq 0$, ao contrário dos modelos de correlação evolutiva, nos quais os modos de perturbação são correlacionados em diferentes escalas, $\langle \delta_k \delta_l \rangle \neq 0$.

A solução discretizada nos modos de perturbação, associada ao tratamento detalhado dos processos físicos vigentes no Universo primordial até a Superfície do Último Espalhamento, faz do conjunto de códigos COSMICS uma das mais precisas

ferramentas para a descrição do Universo primordial. As flutuações são evoluídas durante a Era Radiativa considerando as componentes *bariônica* e matéria escura fria (CDM) como fluidos perfeitos interagentes e não interagentes, respectivamente, enquanto os fótons e neutrinos são descritos a partir da distribuição no espaço de fase governados pela equação de transporte de Boltzmann. São considerados os efeitos de difusão dos fótons (*Amortecimento de Silk*) e dos neutrinos (*free streaming*), além da interação Thomson entre fótons e elétrons, considerando as taxas de ionização do He e H. Na estimativa das flutuações de temperatura da RCF, são considerados os processos causadores de anisotropia primária devido aos efeitos Sachs-Wolfe, efeito Doppler e picos acústicos, excluindo apenas os efeitos secundários, tipo Sunyaev-Zeldovich, os efeitos de reionização do Universo e os desvios ocasionados por lentes gravitacionais.

Os parâmetros de entrada para o código LINGER são as densidades de matéria *bariônica*, Ω_b , matéria escura fria, Ω_{CDM} , densidade de vácuo, Ω_Λ , e densidade de neutrinos massivos, Ω_ν ; o valor atual da constante de Hubble, H_0 , a temperatura da RCF, T_{CMB} , a fração da massa de Hélio em relação aos bárions, Y_{He} , o número de neutrinos massivos, e a opção do tipo de flutuações: adiabáticas ou de *isocurvatura*. Nas simulações do modelo de mistura, ambas as componentes de energia (fótons, bárions e CDM) são descritas no contexto de mistura adiabática e *isocurvatura*, contrariamente aos modelos que descrevem flutuações de *isocurvatura* apenas na densidade de neutrinos ou bárions (Bucher et al., 2000a; 2000b).

Os parâmetros de entrada para o código DELTAT são: a ordem de multipolo máximo, l_{max} , e o índice espectral, n , sendo $n = 1$ para o espectro invariante em escala (Harrison-Zel'dovich). As simulações realizadas apresentam *discretização* de 5000 comprimentos de onda, no intervalo entre $k_{\text{min}} = 0$ e $k_{\text{max}} = 0,5 \text{ Mpc}^{-1}$. O erro de integração estimado para simulações com esta discretização é de 0,15% para o espectro de anisotropia da RCF até l aproximadamente 3000.

No capítulo seguinte, serão apresentados os resultados das simulações das anisotropias da RCF no contexto de mistura, considerando diferentes combinações de parâmetros para os modelos cosmológicos de Universo plano, tipo Λ - CDM.

CAPÍTULO 3

AS PREVISÕES DO MODELO DE MISTURA PARA A RCF

3.1 - O MODELO Λ -CDM PADRÃO DE CAMPO MISTO

Neste capítulo, são apresentados e discutidos os resultados das simulações dos espectros de potência de temperatura da RCF, em intensidade total e polarizada, estimados pelo conjunto de simulações COSMICS, alterado para as condições de mistura discutidas no capítulo anterior. As funções de distribuição analisadas para o modelo de campo misto são compostas por misturas entre as distribuições *gaussiana*, *log-normal*, χ^2_1 , *maxwelliana* e exponencial. Nesta seção, são apresentadas as previsões para as anisotropias da RCF considerando-se o modelo cosmológico padrão de matéria escura fria mais constante cosmológica: $H_0 = 70 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_0 = 1$; $\Omega_b = 0,03$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $n = 1,1$. Um novo conjunto de simulações do modelo Λ - CDM de campo misto, considerando um amplo espaço de parâmetros cosmológicos, é apresentado e discutido na seção 3.2. Na seção 3.3, são discutidos os efeitos de normalização do espectro primordial e apresentados os melhores ajustes do modelo de mistura para as observações atuais da RCF.

As Figuras 3.1 e 3.2 apresentam, respectivamente, os espectros de potência de temperatura em intensidade total e intensidade da componente polarizada no modo E da RCF, estimados para o primeiro conjunto de mistura simulado com componentes *gaussiana* e *log-normal* com diferentes coeficientes de mistura, α_0 . As flutuações de temperatura apresentadas nesta e na seção seguinte são normalizadas pela amplitude do termo de quadrupolo da expansão em harmônicas esféricas estimada pelas observações do experimento COBE / DMR, sendo:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_0^2 = \frac{5}{4\pi} C_2 e^{-2\theta_c^2} = (0,48 \pm 0,15) \times 10^{-5}. \quad (3.1)$$

O termo $e^{-2\theta_c^2}$ representa a função resposta *gaussiana* para um detetor com resolução angular finita, θ_c , estimada em $\theta_c^2 = (\theta_{FWHM}^2 / 8 \ln 2)$. Para o experimento DMR / COBE, resolução angular média de aproximadamente 7° (Smoot et al, 1992), tem-se $\theta_c^{COBE} \cong 0,052$ rad. Substituindo θ_c^{COBE} em 3.1, o valor normalizado do momento de quadrupolo do espectro de potência de temperatura no modelo de mistura será $C_2^{Mix} = C_2^{COBE} = 5,82 \times 10^{-11} \text{ K}^2$, correspondendo a $(\Delta T)_0 = 13 \mu\text{K}$.

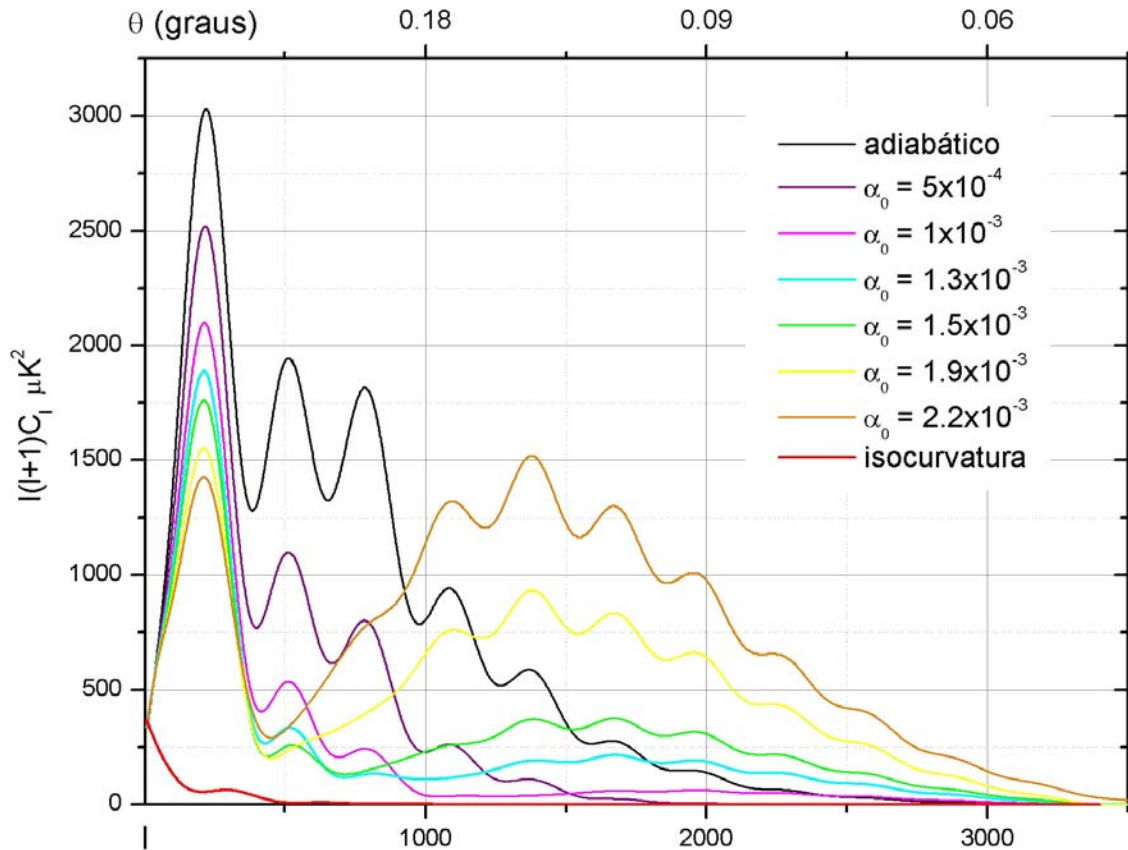


FIGURA 3.1 – Espectro de potência angular para as flutuações de temperatura da RCF estimado para o modelo Λ -CDM padrão, com campo misto de flutuações *gaussianas* e *log-normal*, em diferentes coeficientes de mistura.

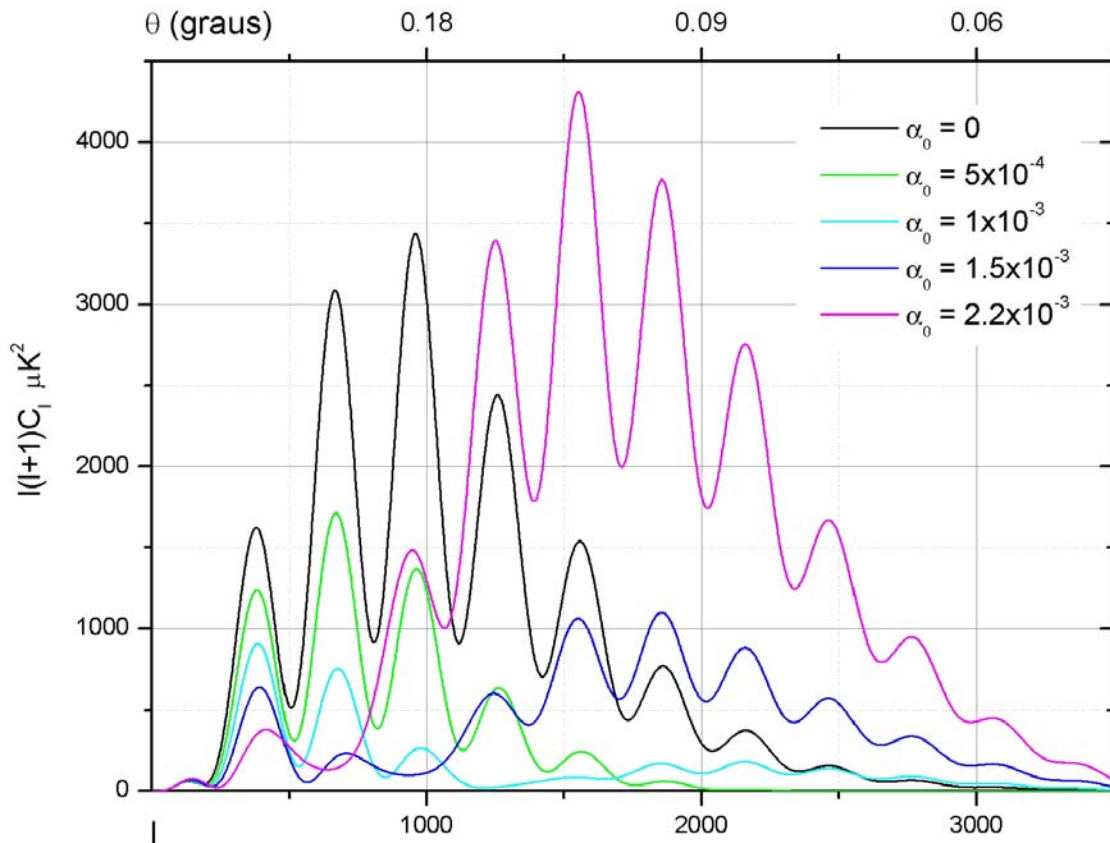


FIGURA 3.2 – Espectro de potência angular para a componente polarizada no modo E da RCF estimado para o modelo Λ - CDM padrão, com campo misto de flutuações *gaussianas* e *log-normal*, em diferentes coeficientes de mistura.

A Figura 3.1 ilustra como a forma e a amplitude do espectro de flutuações da RCF são influenciadas pela mistura correlacionada de campos, mesmo quando considerados baixos coeficientes de mistura ($\alpha_0 \sim 10^{-4} - 10^{-3}$). Observa-se que a intensidade dos picos é claramente sensível à mistura, embora a distinção entre os picos de ordens superiores (2° , 3° ...) não seja evidente para valores elevados da razão de mistura ($\alpha_0 \geq 2 \times 10^{-3}$), devido ao efeito de sobreposição dos picos acústicos. Entretanto, a alteração da amplitude dos picos é evidente para níveis crescentes de mistura. O efeito observável ao aumentar o coeficiente de mistura é a transferência de potência de regiões de escalas intermediárias ($1 \sim 200$) para escalas angulares menores ($l > 1000$), enquanto as

flutuações em grandes escalas não são afetadas. De acordo com as definições em 2.21 e 2.23, o efeito da função linear de mistura, $\alpha(k)$, para o campo misto resultante, só é perceptível para flutuações dentro do raio de Hubble ($l \geq 200$).

As alterações observadas no comportamento dos picos acústicos para o espectro de potência no modelo de mistura podem ser justificadas pelas alterações de fase das perturbações de densidade no campo misto. Conforme discutido no Capítulo 1 (seção 1.4.1), os picos acústicos são observados no espectro de potência de flutuações adiabáticas em decorrência das variações no campo de densidade dos fótons, descrevendo oscilações harmônicas no fluido cosmológico. Para um campo de flutuações de *isocurvatura*, as perturbações na densidade de matéria e na densidade dos fótons não apresentam coerência de fase, e o padrão oscilatório não é observado. No modelo de campo misto, observa-se que as flutuações de *isocurvatura*, correlacionadas com as flutuações adiabáticas em pequenas escalas angulares, tendem a destruir parcialmente as relações de fase entre matéria e radiação, reduzindo, portanto, a intensidade e alargando os picos acústicos. A sobreposição dos picos, sobretudo para aqueles de altas ordens (4^{o} , 5^{o} ...), resulta na geração de um fundo de flutuações incoerentes, em pequenas escalas, causando o efeito de transferência de potência no campo de flutuações.

A relação entre a intensidade dos picos e α_0 pode ser considerada um importante resultado do modelo de mistura, visto que esta relação representa uma previsão peculiar do modelo de campo misto, passível de comparação com dados observacionais. A relação entre as amplitudes dos picos acústicos no contexto de mistura oferece um teste simples e eficiente para comparações com as observações em pequenas escalas angulares, especialmente as realizadas pelas missões dos satélites MAP e PLANCK. Ambos irão mapear as flutuações da RCF em pequenas escalas angulares, correspondentes ao intervalo em l no qual as alterações do campo misto são pronunciadas proporcionando um teste valioso para o modelo proposto neste trabalho.

O aumento de potência nas flutuações em pequenas escalas angulares também é observado no espectro de potência da componente polarizada da RCF (Figura 3.2). O percentual de polarização também varia em função da mistura entre os campos, como pode ser observado na Figura 3.3. A componente polarizada varia entre (4,3 – 7,7) % da intensidade total para coeficientes de mistura no intervalo entre $10^{-4} \leq \alpha_0 \leq 10^{-3}$.

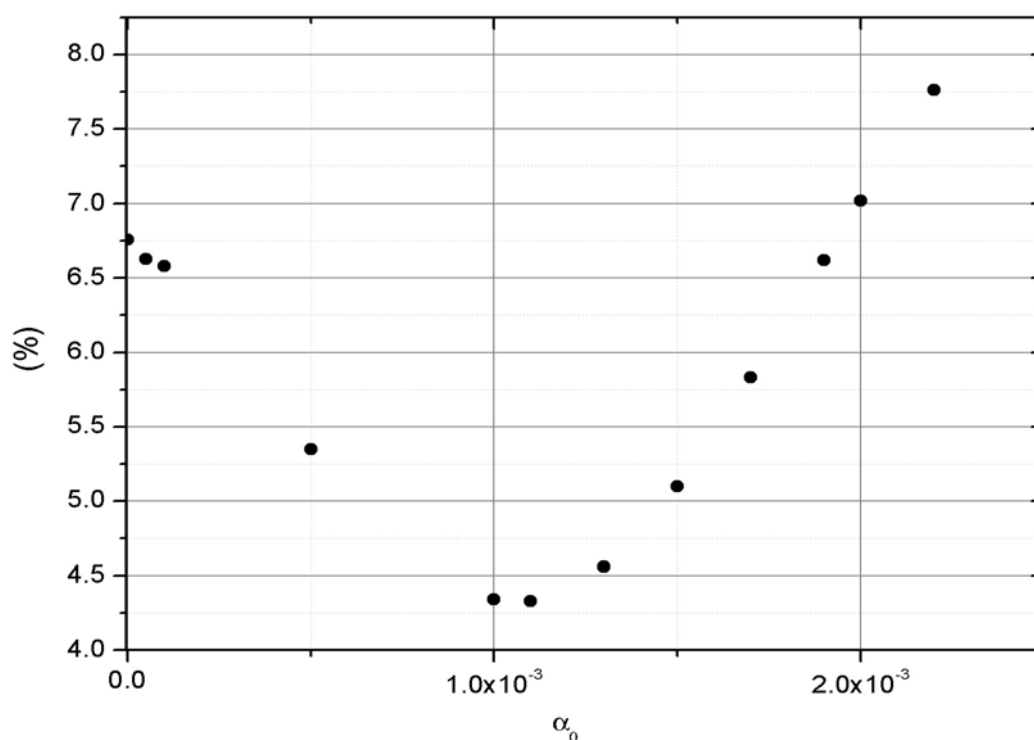


FIGURA 3.3 – Percentual de polarização da RCF estimado para o modelo de mistura entre flutuações *gaussianas* e *log-normal*, em diferentes níveis de mistura.

As previsões do modelo de mistura no contexto da RCF tornam-se mais claras quando apresentadas as estimativas para as flutuações de temperatura. As flutuações de temperatura correspondentes ao espectro de potência para o modelo de campo misto são estimadas pela relação:

$$\Delta T^{mix} = \left(\frac{l(l+1)C_l^{mix}}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} T [\mu K]. \quad (3.2)$$

A Figura 3.4 ilustra a variação em escala para as flutuações de temperatura, em intensidade total e polarizada, estimada para o modelo de campo misto *gaussiano* e *log-normal* com diferentes níveis de mistura. Pode-se observar que a amplitude máxima da componente polarizada da RCF, para valores de α_0 até 2×10^{-3} , é inferior aos limites estimados em $\Delta T_p < 10 \mu K$, inferidos por diversas observações, conforme os valores publicados por de Oliveira-Costa et al. (2002) e reproduzidos na Figura 1.3.

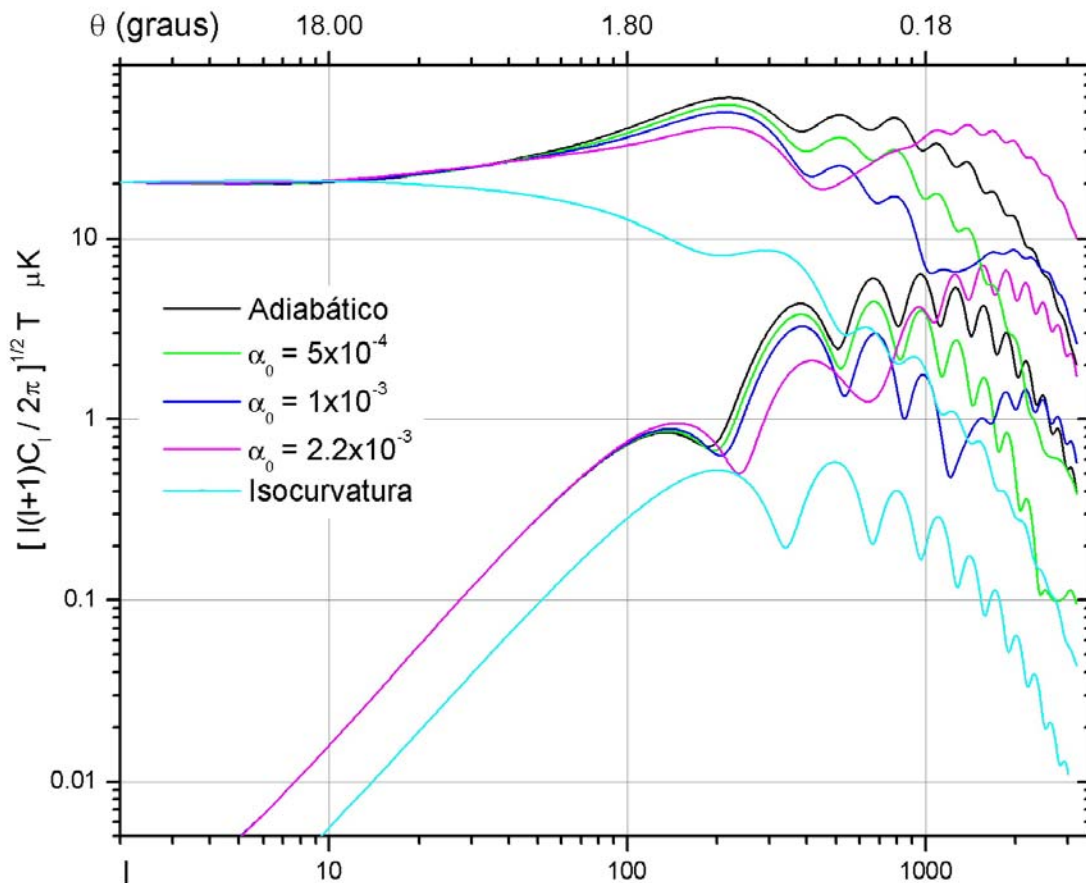


FIGURA 3.4 – Flutuações de temperatura correspondente às intensidades total e polarizada da RCF simuladas para o campo misto de flutuações *gaussianas* e *log-normal*, em diferentes níveis de mistura.

O comportamento médio das flutuações de temperatura da RCF, $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{rms}^{mix}$, estimado para o modelo de campo misto em diferentes combinações para a função de distribuição pode ser inferido por meio da expressão:

$$\left(\frac{\Delta T^{mix}}{T}\right)_{rms}^2 = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=2} (2l+1) C_l^{mix}. \quad (3.3)$$

A média das flutuações de temperatura, $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{rms}^{mix}$, estimada para o modelo de mistura *gaussiana e log-normal* está ilustrada na Figura 3.5. O comportamento de $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{rms}^{mix}$ no domínio de validade do coeficiente de mistura apresenta características distintas para baixos valores do coeficientes de mistura, $0 \leq \alpha_0 \leq 2 \times 10^{-3}$, para valores intermediários, $2 \times 10^{-3} \leq \alpha_0 \leq 5 \times 10^{-3}$, e altos coeficientes de mistura, $\alpha_0 \geq 5 \times 10^{-3}$.

Para baixos coeficientes de mistura, observa-se uma pequena redução na média das flutuações, devido à redução na amplitude dos primeiros picos acústicos, ocasionada pela inserção das flutuações de *isocurvatura*. Para valores intermediários, o aumento de correlação entre os campos caracteriza a transferência de potência e o conseqüente acréscimo na média das flutuações. Para grandes valores de α_0 ($\alpha_0 > 3 \times 10^{-3}$), observa-se um rápido acréscimo na média das flutuações de temperatura, conseqüência provável do excesso de correlação no espaço de fases entre os campos adiabático e de *isocurvatura*, resultando num excesso de potência em pequenas escalas angulares. Baseando-se no comportamento de $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{rms}^{mix}$, é possível inferir um limite físico aceitável para o coeficiente de mistura $0 \leq \alpha_0 \leq 5 \times 10^{-3}$.

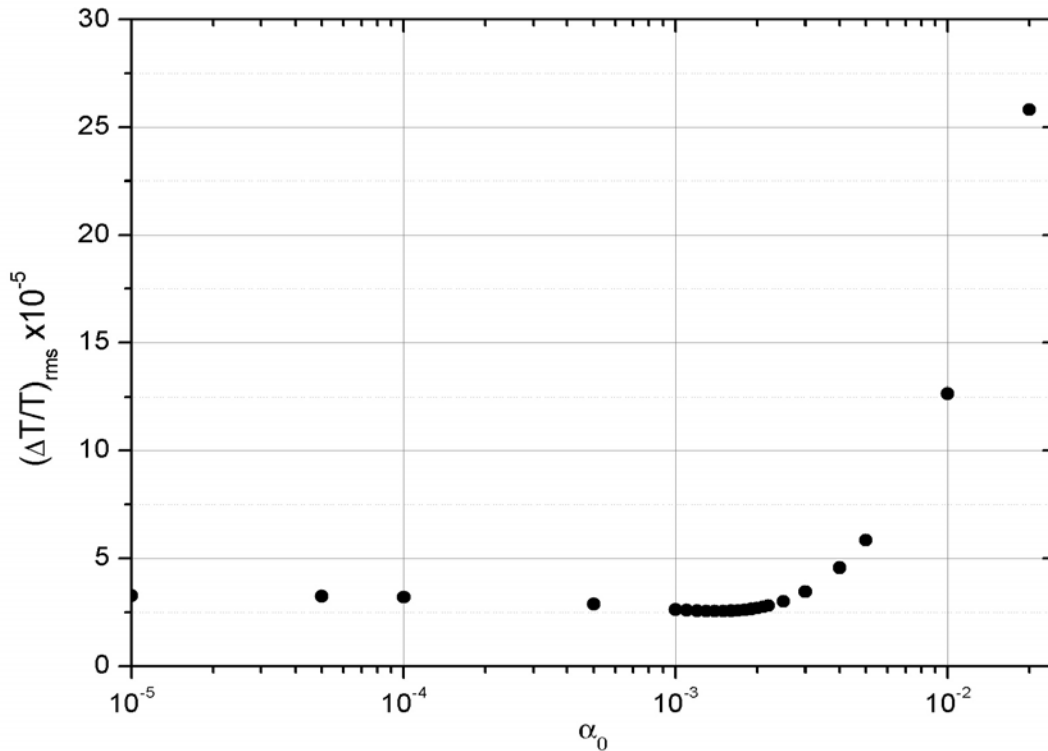


FIGURA 3.5 – Média das flutuações de temperatura da RCF estimada para o modelo de mistura entre distribuições *gaussiana* e *log-normal* para diferentes níveis de mistura.

Os valores estimados para as médias das flutuações de temperatura para diferentes coeficientes de mistura e combinações entre as distribuições: *gaussiana*, exponencial, *log-normal*, *maxwelliana* e χ^2_1 encontram-se impressos na Tabela 3.1. Como pode ser observado, a diferença entre a média das flutuações para várias combinações de mistura é quase insignificante, quando existente. A semelhança no comportamento das médias das flutuações para diferentes combinações de mistura também pode ser observada na superposição dos espectros de potência de campo misto ilustrados na Figura 3.6, com coeficiente de mistura $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$.

TABELA 3.1 – Média das flutuações de temperatura estimada para diversas combinações de mistura, normalizada pelas flutuações do COBE em 13 μK .

$(\Delta T / T)_{rms} \times 10^{-5}$				
α_0	$G + Exp$	$G + LN$	$G + Max$	$G + \chi^2$
0	3,2941	3,2941	3,2942	3,2942
$1,0 \times 10^{-5}$	3,2848	3,2847	3,2848	3,2848
$5,0 \times 10^{-5}$	3,2478	3,2478	3,2480	3,2480
$1,0 \times 10^{-4}$	3,2028	3,2027	3,2028	3,2028
$5,0 \times 10^{-4}$	2,8850	2,8850	2,8850	2,8850
$1,0 \times 10^{-3}$	2,6250	2,6247	2,6251	2,6251
$1,3 \times 10^{-3}$	2,5603	2,5595	2,5605	2,5605
$1,5 \times 10^{-3}$	2,5591	2,5579	2,5594	2,5593
$1,7 \times 10^{-3}$	2,5915	2,5899	2,5919	2,5919
$1,9 \times 10^{-3}$	2,6564	2,6543	2,6569	2,6568
$2,1 \times 10^{-3}$	2,7517	2,7487	2,7519	2,7518
$2,5 \times 10^{-3}$	3,0184	3,0195	3,0195	3,0193
$5,0 \times 10^{-3}$	5,8409	5,8323	5,8433	5,8422
$1,0 \times 10^{-2}$	12,6310	12,6413	12,6417	12,6371
$6,0 \times 10^{-2}$	62,4921	62,7690	62,7797	62,6557
$1,0 \times 10^{-1}$	79,8232	80,3811	80,4025	80,1531

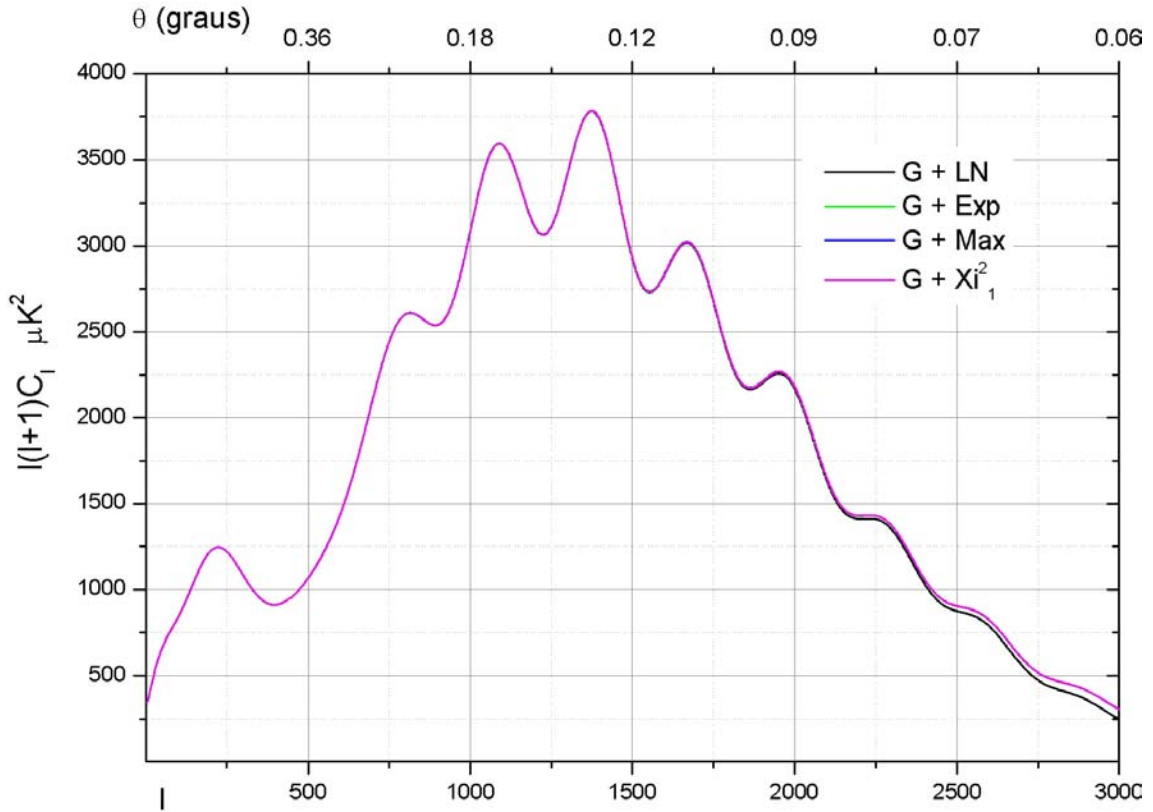


FIGURA 3.6 – Espectro de potência angular da RCF simulado para o modelo de campo misto em diferentes combinações de mistura, considerando o modelo Λ -CDM padrão, com coeficiente de mistura $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$.

A grande semelhança entre os espectros e as médias das flutuações de temperatura para diferentes combinações de mistura pode ser explicada em função da pequena diferença entre os espectros de potência, $P^{\text{Mix}}(k)$, para as várias componentes no nível de mistura considerado, $\alpha_0 \sim 10^{-3}$, sendo o termo de mistura, $M(\alpha_0)$, também da ordem de 10^{-3} . Na estimativa de C_l , o termo de mistura é multiplicado por $k^{n+1} (\sim 10^{-1})^{n+1}$ e integrado em dk , e, portanto, a diferença entre as diferentes componentes é da ordem de $10^{-4} - 10^{-5}$, muito baixa quando comparada à incerteza das simulações na estimativa de C_l , $\sigma_{C_l} \sim 10^{-3}$ (em escalas de μK^2). Entretanto, a diferença entre os espectros de temperatura e polarização para modelos puros e mistos, para diferentes níveis de mistura, é evidente. Mas o comportamento similar do modelo de campo misto para diferentes combinações

de mistura indica que o fator principal da transferência de potência no espectro de campo misto é a mistura correlacionada, considerada na Superfície do Último Espalhamento, entre flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, e não o tratamento estatístico das flutuações.

No contexto da RCF, a baixa influência do tratamento estatístico nas flutuações de temperatura é justificada pela própria interpretação estatística do espectro de potência, para o qual as flutuações de temperatura são descritas em termos do comportamento médio das flutuações em determinada escala. O espectro de potência representa a amplitude média das flutuações, $C_1 = \langle |a_{lm}|^2 \rangle$, que, por sua vez, é proporcional ao termo de mistura, $M^{\text{Mix}}(\alpha_0, f_2)$, o qual expressa o comportamento médio da segunda componente do campo. Portanto, a degenerescência do espectro de potência da RCF em relação à função de distribuição do espectro primordial pode ser ainda mais acentuada do que o efeito discutido no Capítulo 2 (seção 2.2), sobretudo quando considerados pequenos desvios de *gaussianidade*.

Apesar da pouca influência da função de distribuição do espectro primordial para a média das flutuações na RCF, os efeitos da mistura em escala entre flutuações adiabáticas e de *isocurvatura* são bastante evidentes, facilitando a comparação entre previsões teóricas e dados observacionais. Os parâmetros indicadores de mistura entre os campos adiabático e de *isocurvatura* são: a intensidade da componente polarizada, apresentada na Figura 3.3; a média estimada para as flutuações de temperatura, impressa na Tabela 3.1; e as relações de intensidade entre os picos acústicos no espectro de potência da RCF, ilustradas na Figura 3.7 para os três primeiros picos acústicos do espectro de potência de temperatura considerando o modelo de mistura *gaussiana e log-normal*.

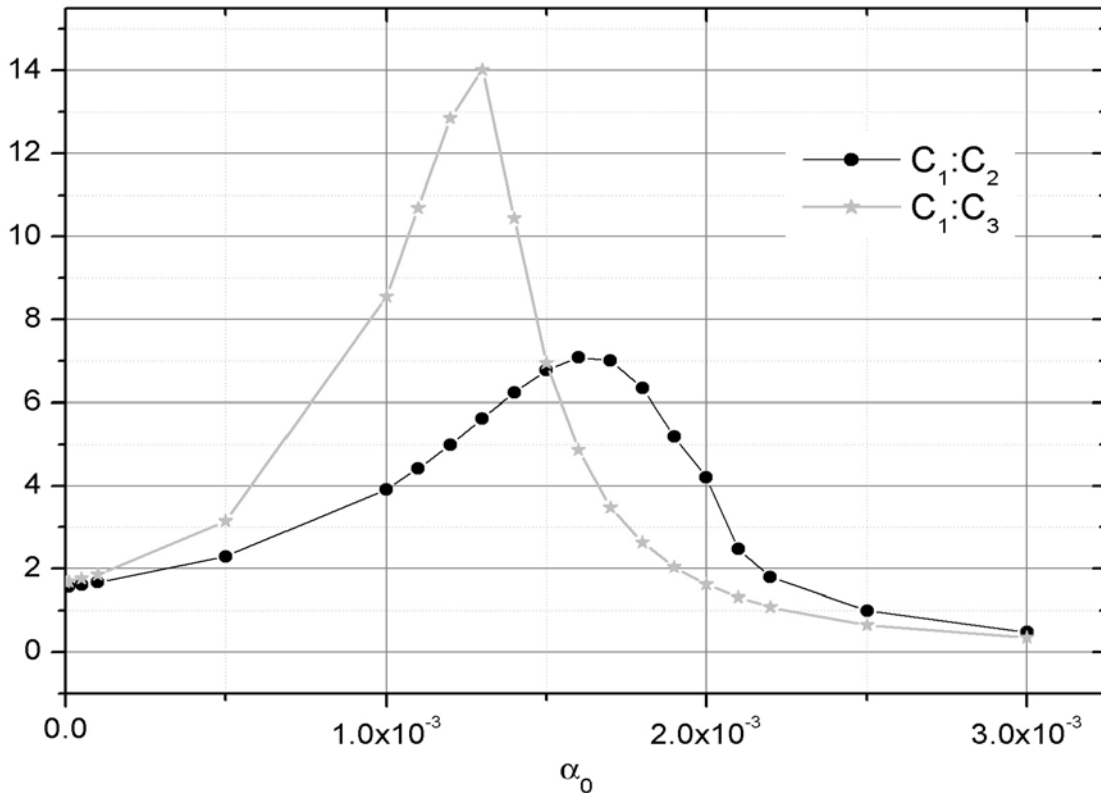


FIGURA 3.7 – Amplitude relativa dos picos acústicos de 1ª, 2ª e 3ª ordem no espectro de temperatura para o modelo Λ -CDM misto *gaussiano* e *log-normal*. $C_i:C_j$ representa a razão entre as amplitudes do i -ésimo sobre o j -ésimo pico acústico.

Na Figura 3.7, pode-se observar claramente a variação relativa de intensidade entre os três primeiros picos acústicos para $\alpha_0 < 3 \times 10^{-3}$. Este comportamento abre uma nova possibilidade para a extração de informações na RCF a respeito do espectro de flutuações primordiais, a possibilidade de identificar um campo misto de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura* fracamente correlacionadas, identificar a razão de mistura e, a partir desta, estimar os desvios de *gaussianidade*, ainda que não seja possível identificar exatamente a função de distribuição do espectro primordial resultante.

Modelos não *gaussianos* envolvendo múltiplas componentes (fótons, bárions, CDM e neutrinos) descritas como flutuações adiabáticas e de *isocurvatura* já foram investigados

no contexto da RCF. Bucher et al (2000a; 2000b) investigaram dois modelos CDM de flutuações primordiais de *isocurvatura* na densidade de neutrinos. No primeiro modelo, a razão de neutrinos em relação aos fótons varia espacialmente, enquanto a variação de densidade resultante é nula. No segundo modelo, fótons e bárions apresentam uma variação de velocidade em relação ao fluido de neutrinos, sendo nula a densidade de momento resultante. Os modos CDM de perturbação adiabática, as perturbações de *isocurvatura* nas densidades de bárions, de matéria escura fria, e dos neutrinos evoluem de acordo com a teoria de perturbação linear, sendo a descrição considerada totalmente independente para os modos de perturbação. As previsões do modelo de flutuações na densidade de neutrinos impressas nas flutuações da RCF também descrevem o acúmulo de potência nas regiões de pequenas escalas angulares para diferentes espectros de potência iniciais. Para os modos de flutuações de *isocurvatura*, quando consideradas as variações na velocidade dos neutrinos, a amplitude dos picos acústicos é consideravelmente elevada para grandes divergências no campo de velocidade, resultado das significativas alterações de fase entre os campos de densidade e velocidade.

Modelos híbridos investigados no contexto da RCF com flutuações correlacionadas dos tipos adiabática e de *isocurvatura* também indicam uma variação peculiar na amplitude dos picos acústicos em relação ao patamar das grandes escalas angulares. Langlois e Riazuelo (1999) investigaram um modelo híbrido de quatro espécies de energia (fótons, bárions, matéria escura e neutrinos) para o qual uma das espécies consideradas apresentava flutuações de *isocurvatura*, sendo o potencial gravitacional do campo resultante do tipo $\Phi = \Phi_{\text{adi}} + \Phi_{\text{iso}}$. Gordon (2000) e Amendola et al. (2001) investigaram a correlação entre campos ortogonais de flutuações adiabáticas, \hat{R} , e *isocurvatura*, \hat{S} , com espectros iniciais descritos pelas leis de potência:

$$\begin{aligned} \hat{R} &= A_r K^{n_1} \hat{a}_r + A_s K^{n_2} \hat{a}_s \\ \hat{S} &= BK^{n_3} \hat{a}_s \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo o termo de correlação $\cos \Delta = \frac{\text{sinal}(B)A_s K^{n_3}}{\sqrt{A_r^2 k^{2n_1} + A_s^2 k^{2n_3}}}$

Os resultados obtidos por Bucher et al. (2000a; 2000b), Langlois e Riazuelo (1999), Amendola et al. (2001) e Gordon (2000) indicam possíveis acréscimos na amplitude dos picos acústicos e possíveis reduções na amplitude das flutuações em grandes escalas na RCF. No modelo de mistura em escala, observa-se um comportamento similar na região dos picos acústicos, porém, sem alterações significativas na região do patamar.

As previsões do modelo de mistura, além de proporcionarem uma melhor concordância com as medidas das flutuações de temperatura em grandes escalas angulares, vão um pouco mais adiante no entendimento do espectro de flutuações primordiais. Isso porque o modelo de mistura correlacionada em escala permite não somente identificar traços de mistura, mas também quantificar a contribuição da componente de *isocurvatura*. Esta contribuição, ainda que com um percentual muito baixo, é extremamente influente no campo misto de flutuações quando considerados os efeitos de correlação.

3.2 – O MODELO DE MISTURA E OS PARÂMETROS COSMOLÓGICOS

Uma questão importante a respeito do modelo de mistura é saber até que ponto o efeito de transferência de potência para as flutuações de temperatura em pequenas escalas angulares pode ser diferenciado dos efeitos ocasionados pela influência dos parâmetros cosmológicos para as anisotropias da RCF. Com o intuito de responder esta questão e quantificar os efeitos das incertezas na estimativa de parâmetros para o modelo de mistura, foi realizada uma série de simulações do modelo Λ - CDM de Universo plano, com ampla variação de parâmetros cosmológicos para modelos puramente *gaussianos* e modelos com espectro misto de flutuações.

As observações da RCF estão, a princípio, em boa concordância com as estimativas do modelo inflacionário padrão: geometria plana ($\Omega_0 \sim 1$) e espectro aproximadamente invariante em grandes escalas ($n \sim 1$) (Wu et al. 2001; Polenta et al., 2002). Entretanto, a degenerescência no espaço de parâmetros dificulta a determinação precisa de outros parâmetros importantes, como: Ω_b , Ω_{CDM} , Ω_Λ e H_0 , e.g. Turner (1998); Efstathiou

(2001). Observações da RCF (Stompor et al, 2001; Turner, 1998) e das estruturas em grandes escalas (Efstathiou et al, 2001) sugerem que o valor da constante de Hubble deve estar no intervalo $(60 < H_0 < 70) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; e o valor da constante cosmológica no intervalo $0,65 < \Omega_\Lambda < 0,85$. A densidade de massa de bárions, estimada pela teoria da nucleossíntese primordial, é limitada em $\Omega_b = (0,0019 \pm 0,01)h^{-2}$, cuja estimativa está em boa concordância com as observações da RCF (Stompor et al., 2001).

Recentemente, as medidas das observações da RCF em pequenas escalas angulares, realizadas pelo satélite WMAP, confirmaram as previsões clássicas a respeito do modelo Λ -CDM padrão. A análise dos dados do WMAP são coerentes com as previsões de Universo plano, $\Omega_0 = (1,02 \pm 0,02)$, constituído por bárions, matéria escura fria e constante cosmológica, nas proporções: 4; 23 e 73%, respectivamente. A taxa de expansão do Universo foi estimada em 71 km/sMpc. O espectro primordial estimado apresenta-se aproximadamente independente em escala, $n = (0,93 \pm 0,03)$ (Spergel et. al., 2003).

Para testar as previsões do modelo de mistura em relação às incertezas na estimativa de parâmetros cosmológicos, foram realizadas simulações, inicialmente para o modelo Λ - CDM puramente *gaussiano*, considerando o espaço de parâmetros limitado pelos intervalos: $(60 < H_0 < 80) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $0,8 < n < 1,2$; $0,015 < \Omega_b < 0,03$ e $0,6 < \Omega_\Lambda < 0,8$. Assumindo a consistência das observações da RCF com as previsões do modelo inflacionário padrão em escalas grandes e intermediárias, o Universo considerado apresenta geometria plana, $\Omega_0 \sim 1$. Neste caso, a variação na componente de matéria escura ($\Omega_{\text{CDM}} = 1 - \Omega_b - \Omega_\Lambda$) é limitada ao intervalo $0,017 < \Omega_{\text{CDM}} < 0,385$. As previsões do espectro de potência de temperatura para a RCF, considerando o modelo CDM para amplas estimativas de parâmetros estão ilustradas nas Figuras 3.8 e 3.9.

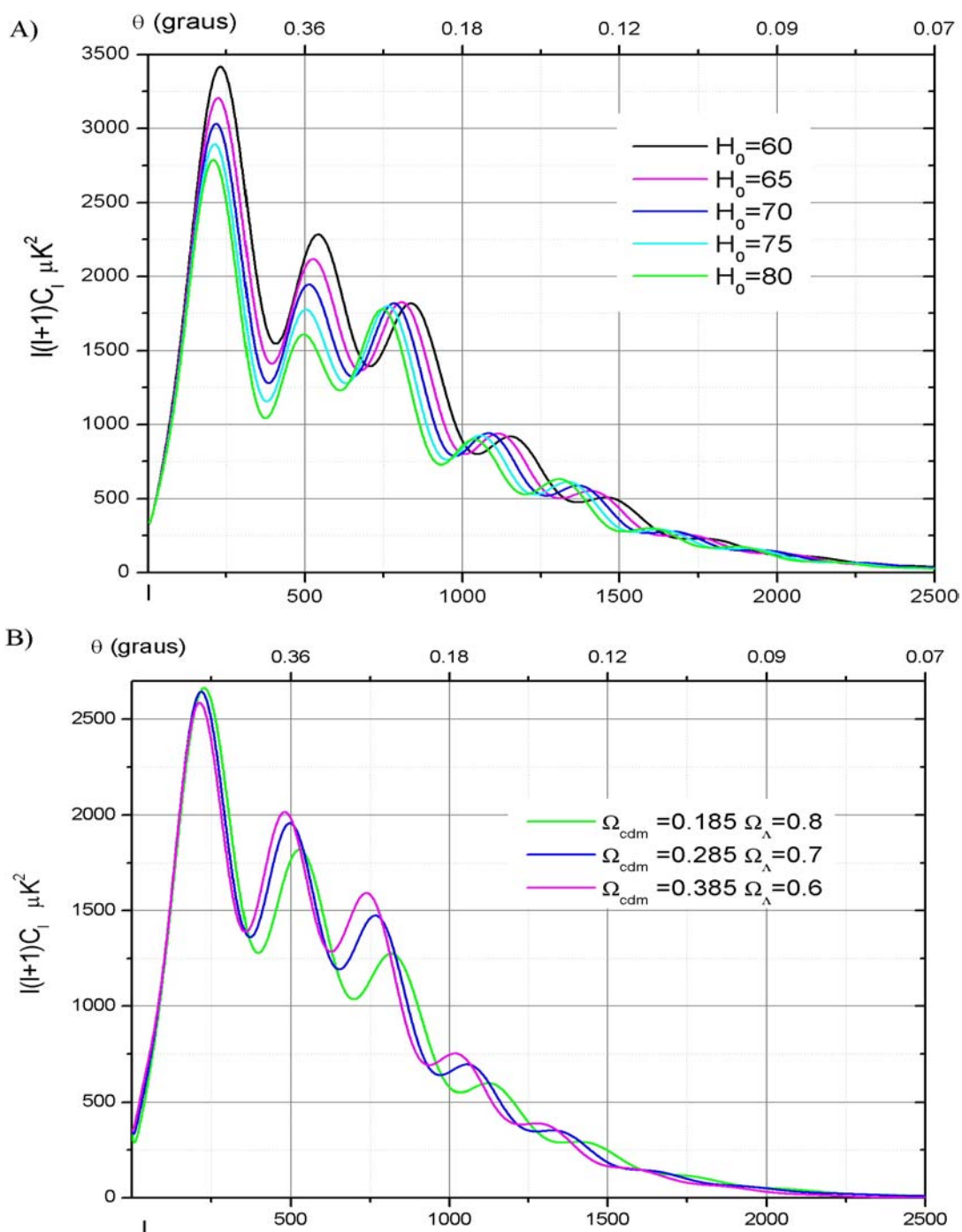


FIGURA 3.8 – Espectro de potência de temperatura estimado para o modelo Λ -CDM com campo puramente adiabático (*gaussiano*), combinando um amplo espaço de parâmetros cosmológicos. Em A) os espectros mostram a variação na constante de Hubble, para o conjunto de parâmetros: $\Omega_b = 0,03$, $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_{\Lambda} = 0,7$ e $n = 1,1$. Em B), C) e D), Ω_b é ajustado a 0,015; 0,023 e 0,03; respectivamente; as variações em Ω_{CDM} e Ω_{Λ} são indicadas nas legendas, enquanto n e H_0 estão fixos em 1,1 e 70 km/ s Mpc, respectivamente. (Continua)

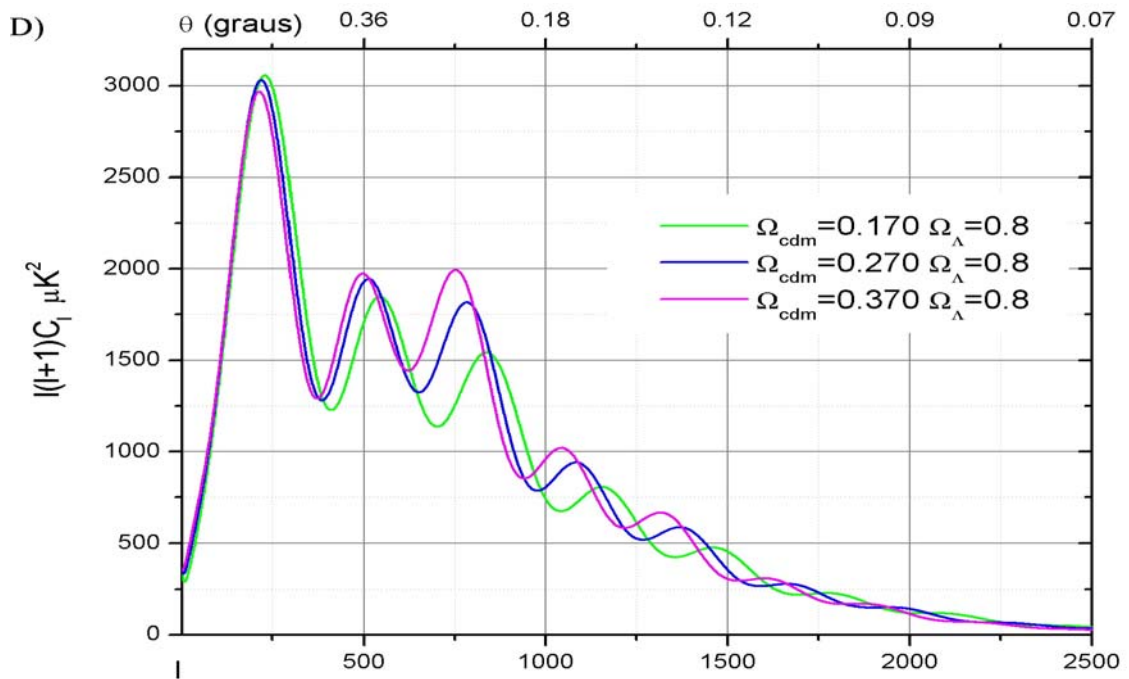
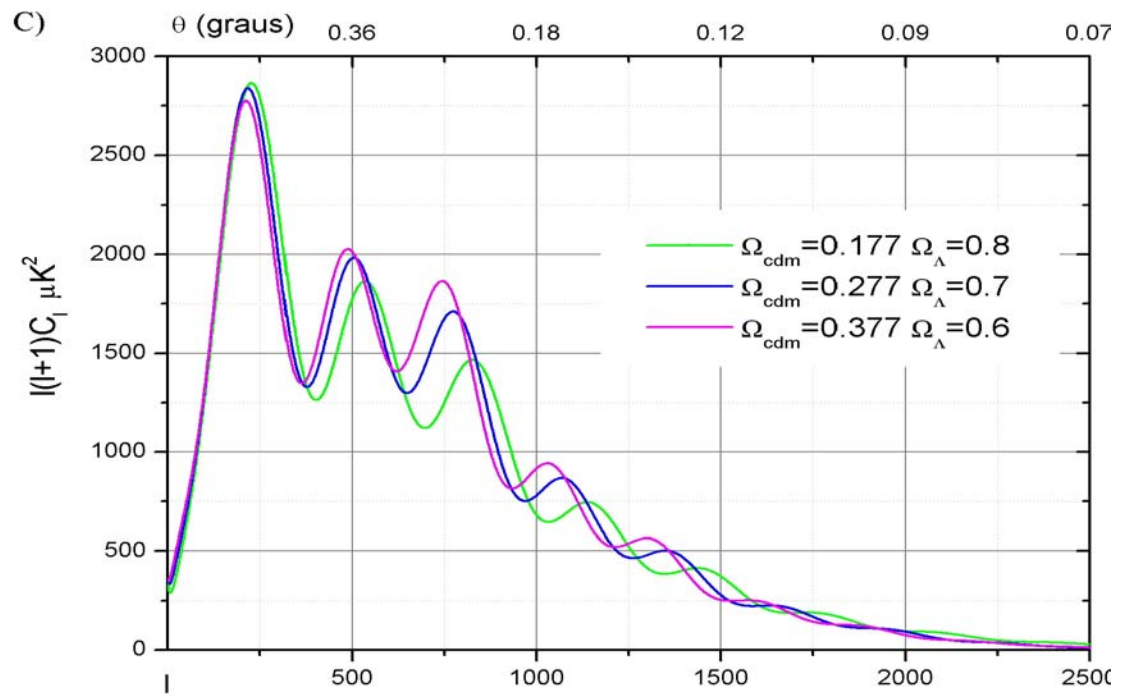


FIGURA 3.8 – (Conclusão)

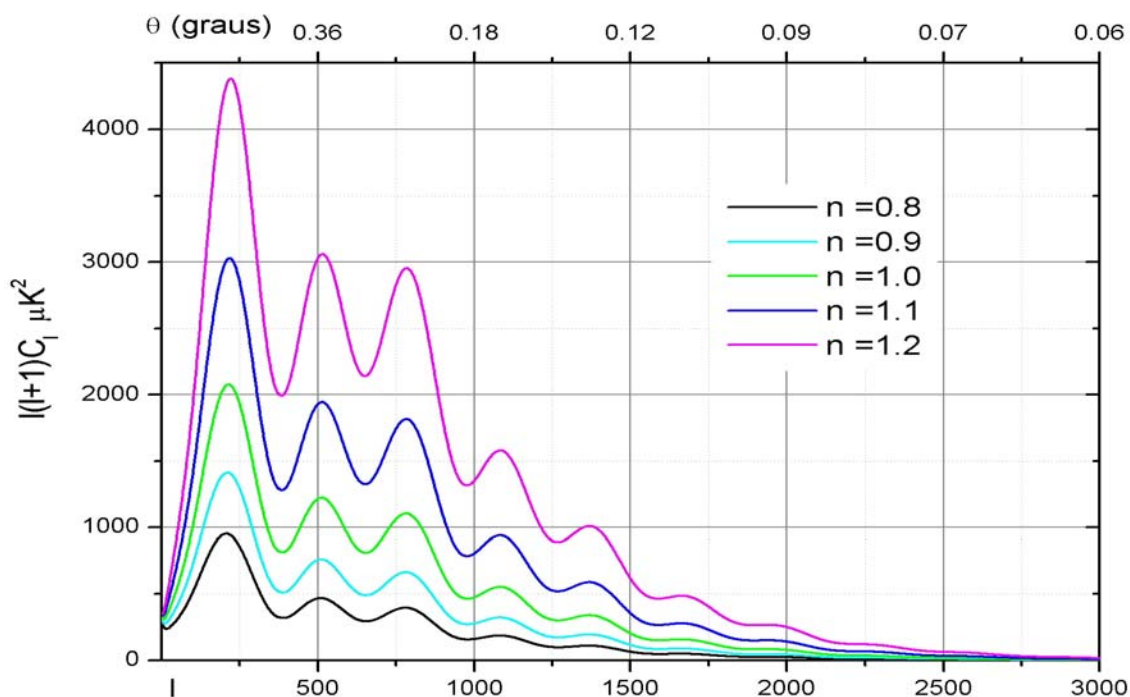


FIGURA 3.9 – Espectro de potência de temperatura estimado para o modelo Λ -CDM com campo puramente adiabático (*gaussiano*), combinando os parâmetros: $\Omega_b = 0,03$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_\Lambda = 0,7$ e $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, enquanto o índice espectral varia de 0,8 a 1,2; conforme legenda.

Na Figura 3.8-A, é mostrado o efeito da variação do espectro de potência em relação à estimativa da constante de Hubble. Para valores mais elevados de H_0 , observa-se que a posição central dos picos acústicos é consideravelmente deslocada para regiões de maiores escalas angulares (menores ls), enquanto a amplitude dos picos é reduzida significativamente. Para valores fixos de Ω_b , os efeitos resultantes do acréscimo na estimativa de Ω_{CDM} , e a conseqüente redução de Ω_Λ , são: o deslocamento dos picos acústicos de ordens superiores (2^{o} , 3^{o} , ...) para as regiões de pequenas escalas e a elevação significativa das amplitudes dos mesmos, enquanto a amplitude do primeiro pico é fracamente alterada. O primeiro pico acústico tem a menor intensidade para valores elevados de Ω_{CDM} (baixos valores de Ω_Λ), enquanto os picos secundários apresentam maiores intensidades, como pode ser confrontado nas Figuras 3.8-B, 3.8-C e 3.8-D.

Os efeitos resultantes no espectro de potência da RCF devido às incertezas nas estimativas do índice espectral são ilustrados na Figura 3.9. O acréscimo na estimativa de n resulta na amplificação de todo o espectro de flutuações e um ligeiro desvio para as regiões de menores ls .

Para todas as combinações de parâmetros cosmológicos avaliadas foram estimadas a média das flutuações de temperatura e a amplitude relativa dos três primeiros picos acústicos, cujas estimativas estão expostas na Tabela 3.2. Comparando diretamente os valores estimados, pode-se observar que as amplitudes relativas dos picos analisados são inferiores a um fator 2, para a vasta classe de parâmetros Λ -CDM simulados. Para as simulações do modelo de mistura, o comportamento observado para as amplitudes relativas é consideravelmente diferenciado, sendo as amplitudes relativas superiores ao fator 2, ainda para pequenas razões de mistura, $5 \times 10^{-4} < \alpha_0 < 2,1 \times 10^{-3}$.

Portanto, o critério de diferenciação entre os modelos Λ - CDM de campo simples e de campo misto pela amplitude relativa dos picos não pode ser confundido com os efeitos de variação nas estimativas de parâmetros cosmológicos para um Universo plano. Ainda para um amplo espaço de parâmetros, este critério permanece válido como um teste para as estimativas do espectro de flutuações primordiais na RCF.

A Figura 3.10 ilustra os espectros de potência de temperatura simulados para o modelo de campo misto, com uma razão de mistura $\alpha_0 = 1,5 \times 10^{-3}$, considerando diferentes combinações de parâmetros cosmológicos. Neste novo conjunto de simulações, observa-se novamente os efeitos de variação na amplitude dos picos acústicos com a transferência de potência para regiões de pequenas escalas, enquanto o comportamento das flutuações em grandes escalas permanece inalterado. Dessas simulações, conclui-se que o modelo de mistura não é fortemente afetado pela estimativa dos parâmetros cosmológicos, sendo as características impressas nas flutuações de temperatura em pequenas escalas angulares próprias da correlação entre os campos de flutuações.

TABELA 3.2 – Amplitude relativa dos picos acústicos de 1^a, 2^a e 3^a ordem e a média das flutuação de temperatura estimadas para diversos modelos Λ -CDM com espectro puramente adiabático (*gaussiano*). $C_i : C_j$ representa a razão entre as amplitudes do *i*-ésimo sobre o *j*-ésimo pico acústico.

Modelo	H₀ Km/sMpc	Ω_b	Ω_Λ	n	C₁:C₂	C₁: C₃	($\Delta T / T$)_{rms} x 10⁻⁵
1	60	0,030	0,7	1,1	1,50	1,88	3,454
2	65	0,030	0,7	1,1	1,51	1,76	3,368
3	70	0,015	0,6	1,1	1,28	1,62	3,148
4	70	0,015	0,7	1,1	1,35	1,79	3,121
5	70	0,015	0,8	1,1	1,46	2,09	3,057
6	70	0,023	0,6	1,1	1,37	1,49	3,255
7	70	0,023	0,7	1,1	1,43	1,66	3,221
8	70	0,023	0,8	1,1	1,54	1,95	3,157
9	70	0,030	0,6	1,1	1,50	1,49	3,326
10	70	0,030	0,7	0,8	2,03	2,40	2,004
11	70	0,030	0,7	0,9	1,86	2,12	2,349
12	70	0,030	0,7	1,0	1,70	1,88	2,773
13	70	0,030	0,7	1,1	1,56	1,67	3,295
14	70	0,030	0,7	1,2	1,43	1,48	3,929
15	70	0,030	0,8	1,1	1,65	1,98	3,226
16	75	0,030	0,7	1,1	1,63	1,61	3,226
17	80	0,030	0,7	1,1	1,73	1,57	3,170

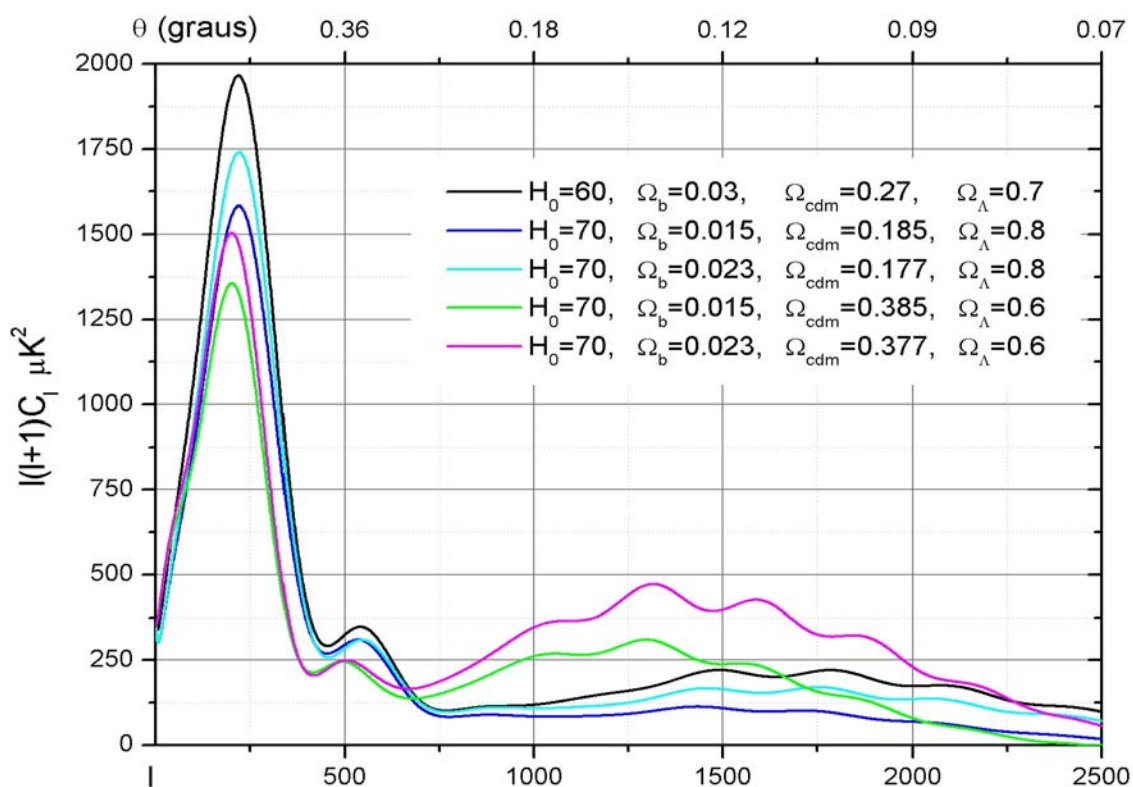


FIGURA 3.10 - Espectro de potência de temperatura estimado para o modelo Λ -CDM de campo misto (adiabático e de *isocurvatura*) com distribuição *gaussiana* e *log-normal*, combinando os parâmetros: Ω_b , Ω_{CDM} , Ω_Λ e H_0 . O índice espectral é fixo em 1,1 e o coeficiente de mistura em $\alpha_0 = 1,5 \times 10^{-3}$.

A média das flutuações de temperatura e a amplitude relativa dos três primeiros picos acústicos correspondentes aos modelos Λ -CDM de campo misto, simulados com coeficiente de mistura $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$, são descritas na Tabela 3.3. Comparando diretamente os valores descritos nas Tabelas 3.2 e 3.3, observa-se que, mesmo para uma vasta combinação de parâmetros, a transferência de potência característica do modelo de mistura pode ser identificada a partir da intensidade relativa dos picos acústicos. Assim sendo, a idéia de utilizar a relação entre as amplitudes dos picos como um teste para discriminar modelos puros e de mistura sugere uma aplicação tecnicamente viável.

TABELA 3.3 - Amplitude relativa dos picos acústicos de 1^a, 2^a e 3^a ordem e a média das flutuações de temperatura estimadas para diversos modelos Λ -CDM de campo misto (adiabático e de *isocurvatura*) com distribuição *gaussiana* e *log-normal*, com razão de mistura $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$. $C_i : C_j$ representa a razão entre as amplitudes do *i*-ésimo sobre o *j*-ésimo pico acústico.

Modelo	H_0 km/sMpc	Ω_b	Ω_Λ	n	$C_1:C_2$	$C_1 : C_3$	$(\Delta T / T)_{rms}$ $\times 10^{-5}$
1	60	0,030	0,7	1,1	2,07	3,32	2,604
2	65	0,030	0,7	1,1	2,16	3,20	2,565
3	70	0,015	0,6	1,1	1,87	3,19	2,391
4	70	0,015	0,7	1,1	1,91	3,33	2,386
5	70	0,015	0,8	1,1	2,00	3,64	2,366
6	70	0,023	0,6	1,1	2,05	2,95	2,503
7	70	0,023	0,7	1,1	2,07	3,10	2,472
8	70	0,023	0,8	1,1	2,14	3,44	2,449
9	70	0,030	0,6	1,1	2,30	2,97	2,587
10	70	0,030	0,7	0,8	3,00	4,55	1,695
11	70	0,030	0,7	0,9	2,74	4,02	1,930
12	70	0,030	0,7	1,0	2,50	3,55	4,664
13	70	0,030	0,7	1,1	2,29	3,15	2,557
14	70	0,030	0,7	1,2	2,11	2,79	2,976
15	70	0,030	0,8	1,1	2,33	3,51	2,513
16	75	0,030	0,7	1,1	2,49	3,14	2,547
17	80	0,030	0,7	1,1	2,76	3,18	2,565

Na expectativa de determinações mais precisas para os parâmetros cosmológicos e de medidas precisas das flutuações da RCF em pequenas escalas angulares, foi feita uma estimativa preliminar para a influência do campo de *isocurvatura* no contexto de mistura correlacionada na RCF. Os resultados desta estimativa são apresentados na seção seguinte.

3.3 - O FATOR DE NORMALIZAÇÃO E AS ESTIMATIVAS DE α_0 NA RCF

Outro parâmetro importante na estimativa dos espectros de potência da RCF é a constante de normalização do espectro. A lei de potência assumida para o espectro de flutuações primordiais apresenta um parâmetro livre para o ajuste do espectro, uma constante multiplicativa, β , tal que $P^{Mix}(k) = \beta [k^n + M(\alpha_0)k^{n+1}]$. Assim sendo, a estimativa de C_l^{Mix} (equação 2.37) é obtida por:

$$C_l^{Mix} = 4\pi\beta \int_0^{k_{max}} P^{Mix}(k) [\Delta_l^{Mix}(k, \tau)]^2 d^3k. \quad (3.5)$$

Usualmente, a constante β é obtida a partir da comparação entre os espectros teóricos e as medidas observacionais. Para os espectros de flutuação da RCF, o parâmetro usual de normalização é o termo de quadrupolo estimado pelas medidas do DMR / COBE, $Q_{rms} = (13 \pm 4) \mu K$ (Smoot et al., 1992). Nas simulações apresentadas nas seções anteriores, os espectros de potência obtidos apresentavam normalização equivalente ao valor central estimado pelo COBE, $Q = 13 \mu K$.

O efeito do fator de normalização para o espectro de flutuações na RCF é simplesmente deslocar a amplitude do espectro, mantendo inalterados o comportamento em escala das flutuações. Entretanto, para o modelo de mistura, o deslocamento de amplitude ocasionado pela alteração no termo de quadrupolo pode ter influência significativa nas estimativas do modelo de campo misto a partir dos dados da RCF, ainda que a intensidade relativa dos picos acústicos e a fração de polarização permaneçam

inalterados. A importância do fator de normalização para as previsões do modelo de mistura no campo de flutuações da RCF é mais facilmente percebida quando observada a Figura 3.11. Nesta Figura, são indicados alguns valores observacionais das flutuações de temperatura, em intermediárias e pequenas escalas, e estimadas as flutuações correspondentes para os modelos de mistura *gaussiana* e *log-normal* com razão de mistura de $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$.

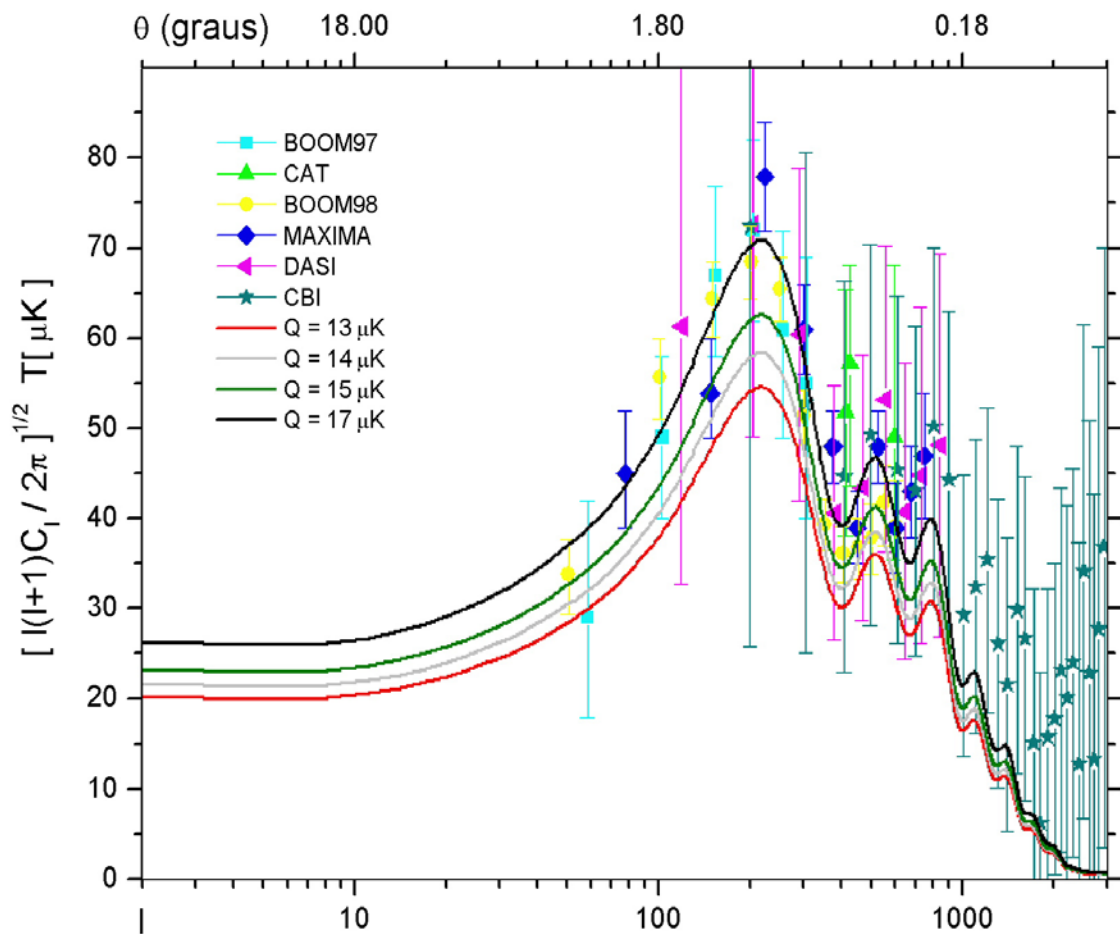


FIGURA 3.11 – Flutuações de temperatura da RCF obtidas por diversos experimentos e as estimativas do modelo de mistura para um campo de flutuações adiabáticas (*gaussianas*) e de *isocurvatura* (*log-normal*), normalizadas por diferentes valores de Q , com definição de parâmetros: $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$; $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_0 = 1$; $\Omega_\Lambda = 0,7$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_b = 0,03$ e $n = 1,1$. Os valores observacionais referem-se às medidas listadas no Apêndice A.

Analisando a Figura 3.11, observa-se o quão importante pode ser o fator de normalização do espectro primordial na estimativa das flutuações da RCF. Uma vez que o modelo de mistura altera a intensidade das flutuações da RCF apenas em pequenas escalas, região em que se concentra a maior parte das observações, as incertezas na estimativa do fator de normalização, em grandes escalas angulares, podem acabar comprometendo o ajuste do espectro de campo misto aos dados observacionais. Normalizando os espectros de mistura pelo valor central da medida de quadrupolo do COBE, $Q = 13 \mu\text{K}$, as previsões do modelo de mistura divergem consideravelmente das observações, o que não ocorre para valores de $Q \sim 17 \mu\text{K}$.

Visando a melhor estimativa para o fator de mistura, α_0 , a partir das observações atuais da RCF, realizamos um teste *qui-quadrado* reduzido, χ^2_v , para o ajuste entre as medidas observacionais e os espectros de potência dos dezessete modelos simulados com variações em Ω_b , Ω_{CDM} , Ω_Λ , H_0 e n , considerando quinze valores de normalização, no intervalo $13 \mu\text{K} < Q < 20 \mu\text{K}$, para cinco valores de α_0 : 0 ; 5×10^{-4} ; 1×10^{-3} ; $1,3 \times 10^{-3}$ e $1,5 \times 10^{-3}$. Para o total de 1275 simulações, foi estimado o valor do χ^2_v para a qualificação dos ajustes entre as simulações e as medidas observacionais.

O teste do χ^2_v se baseia na hipótese de que a descrição otimizada de um conjunto de dados é aquela que minimiza a soma ponderada dos desvios entre os dados y_i e a função ajustada $y(x_i)$. A soma é caracterizada pela variância do ajuste s^2 , estimado a partir da variância amostral σ^2 . Considerando que a probabilidade de obter uma determinada medida $y(x_i)$ obedece a uma distribuição *gaussiana* com desvio padrão σ_i , para uma função com n coeficientes a ajustar aos N pontos observacionais, tem-se (Bevington, 1969):

$$s^2 = \frac{\frac{1}{N-n-1} \sum_i \left\{ \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - y(x_i)]^2 \right\}}{\frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (3.6)$$

A variância do ajuste s^2 é uma variável que obedece à distribuição χ^2 .

$$\chi^2 \equiv \sum_i \left\{ \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - y(x_i)]^2 \right\}. \quad (3.7)$$

A relação entre χ^2 e s^2 é descrita pela variável *qui-quadrado* reduzido, χ^2_v :

$$\chi^2_v = \frac{\chi^2}{v} = \frac{s^2}{\bar{\sigma}_i}, \quad (3.8)$$

sendo v o grau de liberdade da distribuição, e $\bar{\sigma}_i$ a média das variâncias individuais:

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2}}. \quad (3.9)$$

A variância dos dados, σ^2 , é uma característica da dispersão dos dados, enquanto a variância estimada para o ajuste, s^2 , é uma característica não somente da dispersão dos dados mas também da precisão do ajuste sobre os dados. A definição de χ^2 como a razão entre as variâncias estimadas o torna um indicador conveniente para a otimização do ajuste. Para obter um bom ajuste, a variância estimada, s^2 , deve concordar bem com a variância amostral, σ^2 , sendo o valor do χ^2_v aproximadamente 1. Valores elevados de χ^2_v ocorrem para grandes desvios dos resíduos em χ^2 , sendo a variância estimada muito alta, caracterizando assim um ajuste menos apropriado.

Os valores estimados para o teste χ^2_v aplicado aos 1275 casos simulados estão apresentados no Apêndice B. Nesta seção serão apenas discutidos os resultados obtidos e apresentadas as curvas dos melhores ajustes. Adotando o critério de $\chi^2_v \sim 1$, modelos mistos com elevados fatores de mistura, $\alpha_0 \geq 1,2 \times 10^{-3}$, não se ajustam adequadamente às observações, sendo os valores obtidos para χ^2_v significativamente maiores que 1, mesmo para altos valores de $Q \sim (19 - 20) \mu\text{k}$. Este resultado já era esperado, em virtude da redução significativa da amplitude dos três primeiros picos acústicos, região em que há maior concentração de medidas observacionais. Portanto, de acordo com as medidas

atuais das anisotropias da RCF, modelos com fatores de mistura $\geq 1,2 \times 10^{-3}$ não descrevem adequadamente as observações. A Tabela 3.4 apresenta os melhores ajustes obtidos para a combinação de parâmetros Q e α_0 nos dezessete modelos cosmológicos simulados, e a média correspondente para as flutuações de temperatura, $(\Delta T/T)_{\text{rms}}$.

Observando os valores impressos na Tabela 3.4, podemos concluir que os modelos com baixo índice espectral, $n \sim 0,8 - 0,9$ (modelos 10 e 11), sejam para campos puros ou mistos, não se ajustam adequadamente às observações da RCF, de acordo com o teste χ^2_{ν} . Para estes modelos, a amplitude das flutuações de temperatura é muito baixa, necessitando altos valores para a normalização em Q ($\sim 19 - 20$) μK , o que entraria em conflito com as observações do COBE. Elevados valores para o índice espectral, $n \sim 1,2$ (modelo 14), para o modelo de campo único, também não se ajustam adequadamente às observações, sendo o valor de χ^2_{ν} estimado em 3,10; ao passo que a concordância para o modelo de mistura nesta mesma combinação de parâmetros e com $\alpha_0 \sim 5 \times 10^{-4}$ é mais compatível com as observações, $\chi^2_{\nu} \sim 0,93$.

Com exceção do modelo 17 ($H_0 = 80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_b = 0,030$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_{\Lambda} = 0,7$ e $n = 1,1$), do modelo 10 ($n = 0,8$), do modelo 11 ($n = 0,9$) e dos modelos 6 e 12, cujas estimativas de normalização, $Q = 17,5$ e $19 \mu\text{K}$, estão acima da medida do COBE, o restante dos 12 modelos de campo misto, simulados para diferentes combinações de parâmetros cosmológicos, com razão de mistura equivalente a 5×10^{-4} e parâmetros de normalização compatível com o limite das observações do COBE, apresentam ajustes melhores que o modelo de campo único correspondente.

TABELA 3.4 – Valores de *qui-quadrado* reduzido, χ^2_v , e as correspondentes médias de flutuações estimados para a melhor combinação de parâmetros Q e α_0 para os diversos modelos cosmológicos simulados.

Modelo	$\alpha_0 = 0$			$\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$		
	Q [μK]	χ^2_v	$(\Delta T / T)_{\text{rms}}$ $\times 10^{-5}$	Q [μK]	χ^2_v	$(\Delta T / T)_{\text{rms}}$ $\times 10^{-5}$
1	13	1,58	3,453	15	1,07	3,499
2	13	1,38	3,369	15	1,03	3,396
3	14	2,07	3,368	17	1,25	3,559
4	14	1,83	3,337	17	1,13	3,569
5	14,5	1,63	3,386	16,5	1,14	3,447
6	14	1,75	3,482	17,5	1,00	3,765
7	14	1,55	3,447	16	1,03	3,454
8	14	1,39	3,379	16,5	1,01	3,547
9	13,5	1,39	3,431	16	0,99	3,516
10	20	3,60	3,063	20	7,34	2,820
11	19,5	1,06	3,496	20	2,87	3,252
12	17,5	1,00	3,707	19	1,00	3,592
13	13,5	1,21	3,397	15,5	1,00	3,416
14	13	3,10	3,928	14	0,93	3,617
15	14	1,22	3,452	16,5	1,04	3,624
16	14	1,13	3,451	16	1,07	3,448
17	14,5	1,02	3,510	16,5	1,16	3,490

Além dos resultados já apresentados, as estimativas de χ^2_v também favorecem outros modelos de mistura, para os quais o teste χ^2_v indica um ajuste melhor ou equivalente para valores de $\alpha_0 \sim 1 \times 10^{-3}$ em relação ao ajuste de campo único, $\alpha_0 = 0$, são eles: modelo 1 ($H_0 = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_b = 0,030$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_\Lambda = 0,7$; $n = 1,1$ e $Q = 17,5$) com $\chi^2_v = 1,50$; modelo 3 ($H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_b = 0,015$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,385$; $\Omega_\Lambda = 0,6$, $n = 1,1$ e $Q = 20$) com $\chi^2_v = 2,07$; modelo 4 ($H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $\Omega_b = 0,015$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,285$; $\Omega_\Lambda = 0,7$; $n = 1,1$ e $Q = 20$) com $\chi^2_v = 1,57$; e modelo 5 ($H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_b = 0,015$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,185$; $\Omega_\Lambda = 0,8$; $n = 1,1$ e $Q = 19,5$) com $\chi^2_v = 1,48$.

Outra constatação que pode ser extraída desta análise é a tendência de ajuste entre observações e modelos com média de flutuações de temperatura em torno de $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{rms} = (3,4 - 3,7) \times 10^{-5}$. A Figura 3.12 ilustra as flutuações de temperatura previstas para os dois modelos de mistura correlacionada que melhor se ajustam as observações da RCF: modelo 8 ($H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_b = 0,023$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,177$; $\Omega_\Lambda = 0,8$; $n = 1,1$ e $Q = 16,5$) com $\chi^2_v = 1,01$ e modelo 13 (Λ -CDM padrão $\Rightarrow H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_b = 0,03$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_\Lambda = 0,7$; $n = 1,1$ e $Q = 15,5$) com $\chi^2_v = 1,00$.

Apesar dos resultados favoráveis no ajuste do espectro de potência de campo misto às observações da RCF, a estimativa da contribuição do campo de flutuações de *isocurvatura* a uma razão de $\alpha_0 \sim 5 \times 10^{-4}$ no contexto de mistura correlacionada não pode ser conclusiva, visto que as observações da RCF ainda apresentam um grande dispersão de medidas e elevados desvios.

Entretanto, a boa concordância entre o modelo de mistura correlacionada e as observações, apresentada e discutida nesta seção, estimula ainda mais os esforços de compreensão e desenvolvimento do modelo de campo misto, na expectativa de

futuramente auxiliar na estimativa da natureza do campo de flutuações primordiais a partir de observações mais precisas da RCF.

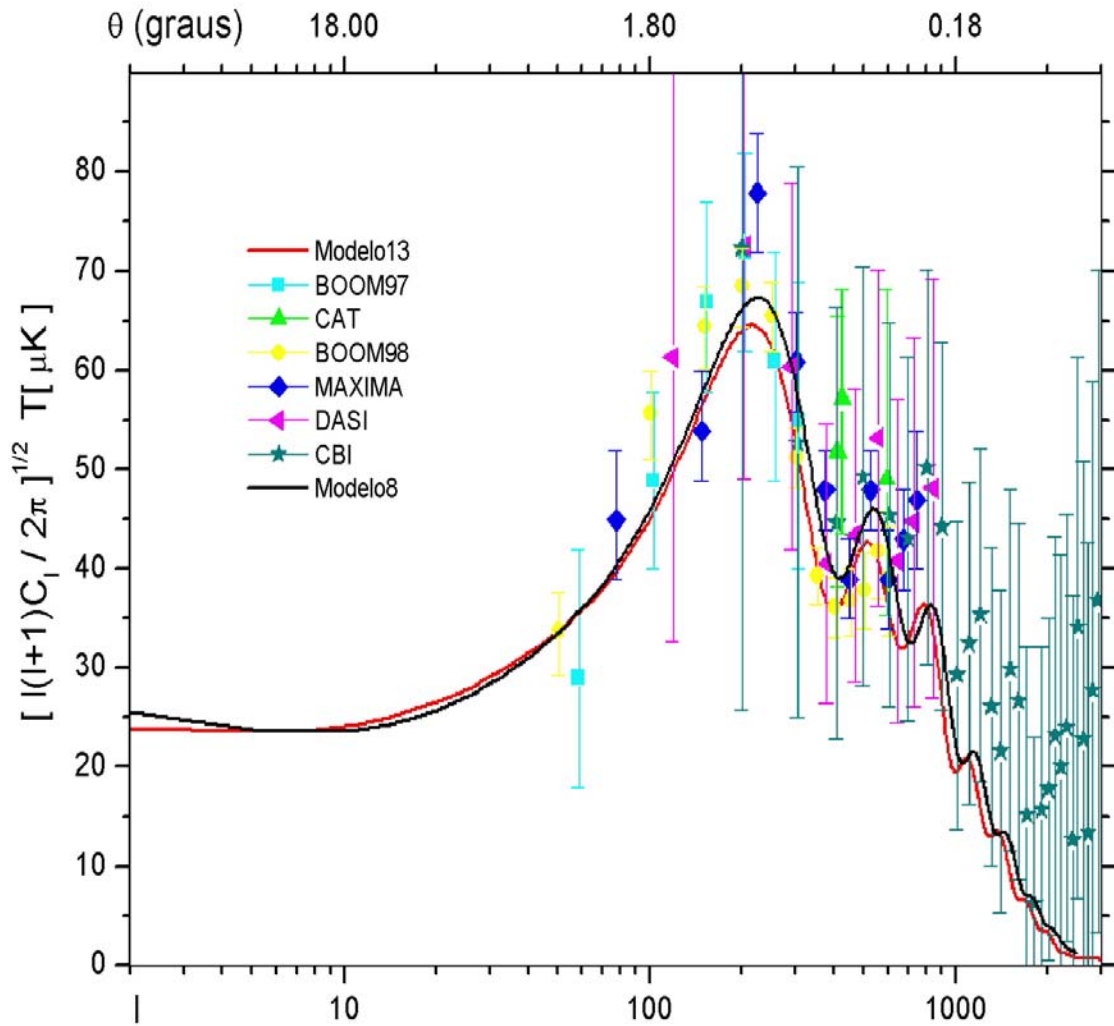


FIGURA 3.12 – Flutuações de temperatura da RCF obtidas por diversos experimentos e as melhores estimativas teóricas para o modelo de campo misto. As linhas vermelha e preta correspondem, respectivamente, às flutuações estimadas para o modelo de mistura *gaussiana* e *log-normal*, com $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4}$ e parâmetros cosmológicos: modelo 8 ($H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_b = 0,023$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,177$; $\Omega_\Lambda = 0,8$; $n = 1,1$ e $Q = 16,5$) com $\chi^2_v = 1,01$; e modelo 13 Λ -CDM padrão ($H_0 = 70 \text{ km/sMpc}$; $\Omega_b = 0,03$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_\Lambda = 0,7$; $n = 1,1$ e $Q = 15,5$) com $\chi^2_v = 1,00$.

3.4 – PRINCIPAIS RESULTADOS E CONCLUSÕES

As simulações do modelo de mistura para as anisotropias da RCF prevêem alterações significativas no espectro de potência angular para campos com razão de mistura da ordem de aproximadamente 10^{-4} a 10^{-3} . As alterações observadas se devem principalmente à mistura no tipo de flutuações – adiabáticas e de *isocurvatura* – e não à mistura na função de distribuição do campo de flutuações. A consideração de mistura em escala resulta na transferência de potência de escalas angulares intermediárias para pequenas escalas, sem fortes alterações no espectro em escalas superiores ao raio de Hubble.

As alterações observadas no espectro de potência angular da RCF descrevem características próprias do modelo de mistura, como por exemplo, as alterações na amplitude dos picos acústicos em função da razão de mistura. Observa-se ainda que este comportamento independe das estimativas dos parâmetros cosmológicos, evidenciando o caráter próprio do modelo de campo misto. Alterações são observadas tanto no espectro das flutuações de temperatura em intensidade total quanto na componente polarizada. Este comportamento permite não somente discriminar o modelo, mas também quantificar a contribuição do campo não *gaussiano*. Observações atuais da RCF não excluem a possibilidade de uma segunda componente no campo de flutuações primordiais com razão de mistura da ordem de 10^{-3} .

CAPÍTULO 4

OS MAPAS DAS FLUTUAÇÕES DE TEMPERATURA DA RCF E SUAS IMPLICAÇÕES

4.1 – AS MEDIDAS E OS MAPAS DA RCF

A princípio, medidas da distribuição angular da RCF podem ser inferidas a partir de uma série de medidas absolutas em diferentes regiões do céu. Entretanto, medidas mais precisas são obtidas por meio da técnica de medida diferencial (Partridge, 1995). Esta técnica consiste em achar diferenças na intensidade da RCF entre duas direções distintas. Deste modo, nenhuma informação direta é obtida para a temperatura média T_0 , mas por outro lado, muitos dos erros sistemáticos inerentes às medidas absolutas são reduzidos significativamente. Através da técnica de medida diferencial, é possível obter atualmente medidas da distribuição angular da RCF com precisão de algumas partes em 10^6 . Com as observações da RCF obtidas por meio da técnica de medidas diferenciais é possível construir mapas das flutuações de temperatura em escalas de μK .

As medidas de polarização são inferidas por meio dos parâmetros de Stokes: I, que mede o fluxo total; V, que mede o grau de polarização circular; Q e U, que medem a amplitude e a direção angular da polarização linear, sendo:

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (4.1)$$

Os parâmetros Q e U são obtidos a partir da temperatura observada em direções perpendiculares.

Uma das maiores dificuldades encontradas na observação da RCF é extrair do sinal medido as contribuições de fontes indesejáveis, tais como: a radiação emitida na atmosfera e superfície terrestre, as fontes astronômicas locais ou pontuais e as fontes

difusas como a nossa própria Galáxia (Tegmark e Efstathiou; 1996). Estes sinais indesejáveis podem ser mais de cinco ordens de grandeza mais intensos que os sinais da RCF. A contaminação proveniente da nossa Galáxia é parcialmente corrigida nas medidas da RCF a partir dos mapas disponíveis de emissão Galáctica. A partir destes mapas, a intensidade de emissão é extrapolada para a região espectral de interesse e subtraída das observações. A contribuição das fontes pontuais e de outras fontes bem conhecidas (p. ex. sol, lua) é estimada a partir da extrapolação do espectro catalogado das fontes para as frequências de observação, ou de modelos de emissão planetária, lunar e solar. Esta correção é feita inclusive na estimativa da contribuição terrestre.

Corrigidos ou eliminados os sinais para as contaminações indesejáveis, são construídos os mapas das flutuações de temperatura. Até o momento, as duas expedições capazes de mapear completamente a esfera celeste foram as missões dos satélites COBE¹, *Relikt*² e WMAP³. As observações do COBE, nas frequências de 31, 53 e 90 GHz, foram realizadas no período de 1992 a 1996, em escalas angulares da ordem de poucos graus, com as quais foram construídos os mapas de flutuações, com subdivisão em 6.144 elementos, a partir dos dados de um e de quatro anos de observação. As observações do *Relikt* foram realizadas durante os anos de 1983 e 1984, na frequência de 37 GHz, em escalas da ordem de cinco graus. As observações do WMAP foram realizadas durante o ano de 2002, nas frequências de 23, 33, 41, 61 e 94 GHz, em escalas da ordem de poucos minutos, correspondendo à subdivisão da esfera celeste em 3.145.728 elementos. Os mapas correspondentes às observações do COBE e WMAP estão ilustrados nas Figuras 4.1 e 4.2.

1 http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html

2 <http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/relikt/>

3 <http://map.gsfc.nasa.gov/>

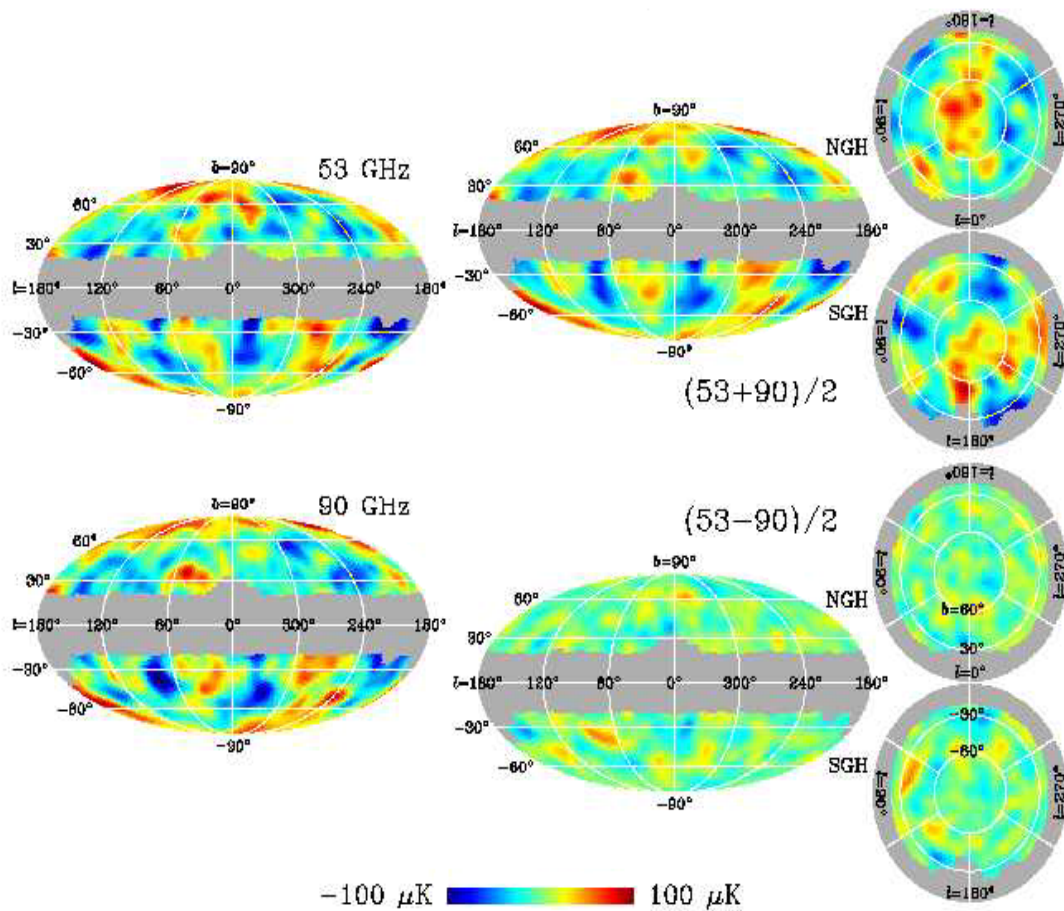


FIGURA 4.1 – Mapas das flutuações de temperatura da RCF obtidos nos quatro anos de observação do satélite COBE, nas frequências de 53 e 90 GHz, representados em coordenadas galácticas, nas projeções Aitoff (esfera completa) e Gnomônica (hemisférios norte e sul galáctico). O corte central dos mapas corresponde à subtração do sinal no plano galáctico.

FONTE:

http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/cobe_home.html

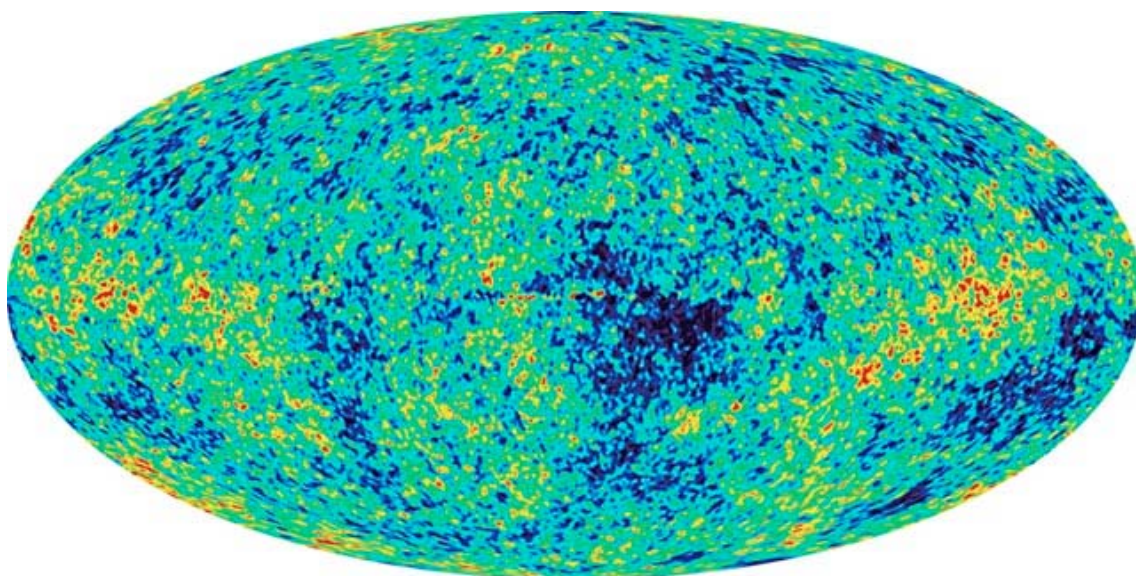


FIGURA 4.2 – Mapa das flutuações de temperatura da RCF obtidas nas observações do satélite MAP, durante o ano de 2002, já corrigido do sinal galáctico (Bennett et al., 2003). A escala de cores do mapa varia de +200 μK para os pontos vermelhos a $-200 \mu\text{K}$ para os pontos azuis.

FONTE: <http://map.gsfc.nasa.gov>

4.2 - OS MAPAS DA RCF NO CONTEXTO DE MISTURA

Conforme apresentado no Capítulo 1, o espectro de potência angular da RCF representa a média da amplitude das flutuações de temperatura observadas em escalas angulares da ordem de $\theta \approx \pi/l$ e expressas em funções harmônicas esféricas, $Y_{lm}(\theta, \phi)$. Mapas das flutuações da RCF podem ser simulados a partir da expansão completa das harmônicas esféricas, expressando as flutuações de temperatura em amplitude e escala definidas pelos momentos de multipolo, C_l . Basicamente, o processo de geração dos mapas da RCF consiste no sorteio aleatório dos coeficientes da expansão em $Y_{lm}(\theta, \phi)$, a partir de uma determinada função densidade de probabilidade.

Sendo o conjunto das funções harmônicas esféricas definido como uma base ortonormal, a descrição das flutuações de temperatura como variáveis aleatórias, independentes e não correlacionadas implica na aleatoriedade e ortogonalidade dos coeficientes a_{lm} , sendo estes considerados variáveis *gaussianas* multivariadas. Neste caso, para a confecção dos mapas da RCF com condições iniciais *gaussianas*, os coeficientes a_{lm} são sorteados de uma distribuição *gaussiana* e estimados conforme a amplitude dos multipolos C_l :

$$a_{lm} = \sqrt{2\pi C_l} \delta T_{CMB} [\mu K], \quad (4.2)$$

sendo δ uma variável aleatória *gaussiana*, com média nula e variância unitária.

No contexto de mistura, os coeficientes a_{lm}^{Mix} devem ser escolhidos de modo a representar adequadamente as propriedades estatísticas do modelo. Para a condição de mistura entre flutuações de variáveis aleatórias fracamente correlacionadas, a distribuição dos coeficientes a_{lm} também pode ser descrita por uma distribuição *gaussiana* ligeiramente distorcida, como, por exemplo, a distribuição mista:

$$P(\delta) = \alpha f_1(\delta) + (1 - \alpha) f_2(\delta), \quad (4.3)$$

na qual $f_1(\delta)$ representa uma distribuição *gaussiana* e $f_2(\delta)$ representa a segunda distribuição constituinte da mistura.

Representar a distribuição da variável δ por uma distribuição mista, como em 4.3, equivale a dizer que, para α_0 da ordem de 10^{-3} , em cada série de mil coeficientes a_{lm} , um coeficiente deve ser sorteado da segunda distribuição. A mistura crescente em escala, $\alpha \equiv \alpha_0(k)$, acontece naturalmente no processo de sorteio, visto que quanto maior a ordem do multipolo (maior $l \Rightarrow$ maior k), maior o número de coeficientes ($= 2l + 1$) e maior será a contribuição da distribuição não *gaussiana*.

Apesar da escolha arbitrária para a função de distribuição dos coeficientes a_{lm} , certas propriedades de simetria precisam ser conservadas no processo de simulação de mapas

da RCF com condições não *gaussianas*. A expansão das flutuações de temperatura em funções harmônicas esféricas considera que:

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right) = S(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (4.4)$$

tal que, os coeficientes a_{lm} são descritos como variáveis aleatórias complexas e as harmônicas esféricas são descritas em função dos polinômios associados de Legendre:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} = \lambda_l^m e^{im\phi}, \quad (4.5)$$

sendo a variável λ_l^m uma variável real, com a propriedade $\lambda_l^{-m} = (-1)^m \lambda_l^m$.

Invertendo os somatórios em 4.4 e substituindo $Y_{lm}(\theta, \phi)$ por 4.5, as variações de temperatura δT podem ser expressas pela relação (Muciaccia, Natoli e Vittorio, 1997):

$$S(\theta, \phi) = \sum_{m=-l_{\max}}^{l_{\max}} b_m(\theta) e^{im\phi}, \quad (4.6)$$

para:

$$b_m(\theta) = \sum_{l=|m|}^{l_{\max}} a_{lm}(\theta) \lambda_l^m, \quad (4.7)$$

sendo b_m um vetor complexo.

Uma vez que as flutuações na RCF refletem as propriedades do campo de flutuações primordiais, a decomposição das flutuações de temperatura no espaço das harmônicas esféricas deve respeitar as mesmas relações de isotropia impostas no campo de flutuações primordiais.

Na teoria de perturbação linear, o campo de flutuações em $\delta(\vec{x})$ é expresso como uma superposição de ondas planas no espaço de Fourier, tal que:

$$\delta(\vec{x}) = \sum_k \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \delta_k, \quad (4.8)$$

sendo δ_k uma variável complexa, do tipo $\delta_k = a_k + i b_k$. A condição de isotropia da métrica de FRW implica que os modos de perturbação devem obedecer à relação $\delta_k^* = \delta_{-k}$. Assim, tem-se: $a_k = a_{-k}$ e $b_k = -b_{-k}$, preservando a independência das perturbações em relação à orientação do vetor de onda (Padmanabhan, 1993).

Ao decompor as flutuações de temperatura na base ortonormal das harmônicas esféricas, as flutuações em δT representam a superposição dos modos de perturbação δ_k no espaço de fase das harmônicas esféricas, herdando as propriedades estatísticas do campo de flutuações primordiais. Assim sendo, é necessário que o vetor $b_m(\theta)$ também obedeça à condição de isotropia $b_m = b_{-m}^*$. Esta condição, associada à simetria em λ_l^m , implica na seguinte propriedade para os coeficientes a_{lm} :

$$a_{l,-m} = (-1)^m a_{lm}^* \Rightarrow a_{lm} = a_{l,-m}^* . \quad (4.9)$$

De acordo com a definição acima, os coeficientes a_{lm} também obedecem à condição de isotropia, tal que $a_{lm} = a_{l-m}^*$.

Ao simular a evolução das perturbações primordiais segundo a métrica de FRW e definir a dependência do espectro de potência em função apenas do módulo do vetor de onda, as simulações não *gaussianas* na RCF devem preservar esta propriedade, mantendo a coerência do modelo de Universo isotrópico.

No contexto de mistura, os coeficientes a_{lm}^{Mix} devem ser escolhidos de modo a representar adequadamente as propriedades estatísticas do modelo misto, mantendo as relações em escala e amplitude definidas no espectro de potência de mistura, C_l^{Mix} , e respeitando sempre a condição de isotropia da métrica de FRW. Nestas condições, assegura-se que as anisotropias da RCF serão afetadas apenas pelas propriedades estatísticas do campo misto de flutuações. Baseando-se nestas considerações, foram simulados os mapas das flutuações de temperatura da RCF para misturas do tipo *gaussiana* e exponencial, no modelo Λ -CDM padrão: $H_0 = 70 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$; $\Omega_0 = 1$; $\Omega_b = 0,03$; $\Omega_{\text{CDM}} = 0,27$; $\Omega_\Lambda = 0,7$; $n = 1,1$ e $Q = 15,5 \mu\text{K}$. Esta configuração de parâmetros corresponde ao melhor ajuste entre o espectro de potência do modelo de

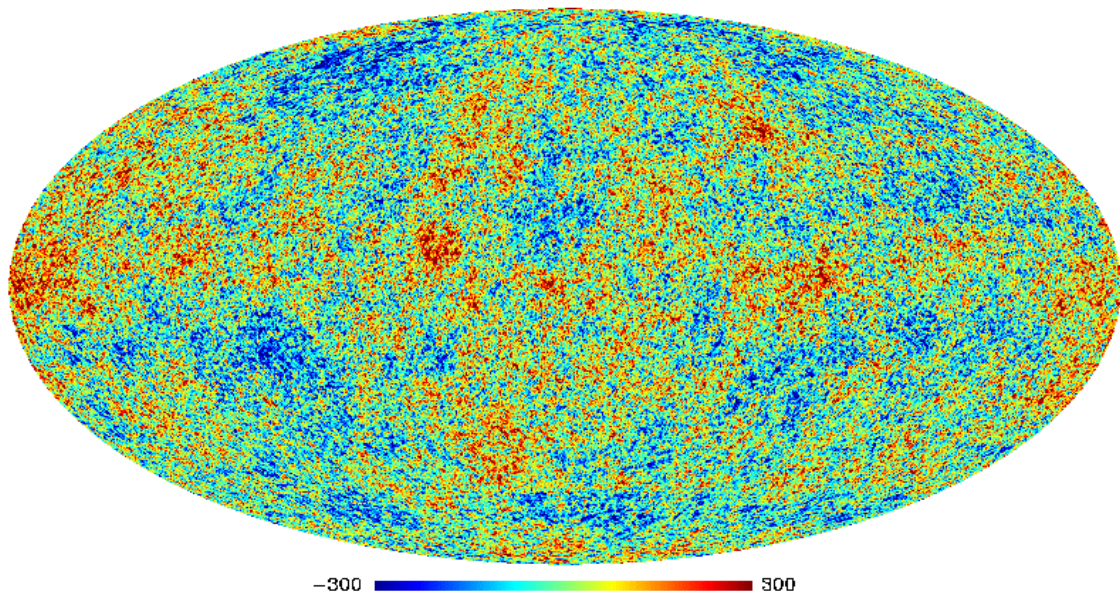
mistura e as medidas observacionais da RCF, conforme descrito na seção 3.3 do capítulo anterior.

As simulações dos mapas de anisotropias da RCF foram realizadas com uma versão modificada (incluindo uma rotina para sorteio dos coeficientes com distribuição mista) do código *cmap*, versão 1.2, desenvolvido por Evan Scannapieco, em 1997. Este código corresponde a uma adaptação do código *Fast Spherical Harmonic Analysis (FSHA)* desenvolvido por Muciaccia, Natoli e Vittorio (1997). O código *cmap* descreve mapas na projeção cilíndrica equidistante, conservando as distâncias em relação aos meridianos e à linha do equador, sendo a matriz das flutuações quadrada, com dimensão em ϕ equivalente ao dobro da dimensão em θ . Os mapas simulados para o modelo de mistura apresentam resolução angular de $5,27'$; correspondendo à subdivisão da esfera celeste em (2048 x 4096) elementos, definidos nas coordenadas angulares (θ, ϕ) , nos intervalos $[0, \pi]$ e $[0, 2\pi]$, respectivamente.

Os códigos mais recentes utilizados para a representação das anisotropias da RCF, como a representação das simulações e observações do satélite MAP, descrevem a esfera celeste subdividida em intervalos com áreas equivalentes. A conversão de mapas com a subdivisão em coordenadas (θ, ϕ) para a subdivisão de intervalos com áreas equivalentes pode ser obtida com as rotinas do conjunto de códigos Healpix (*Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelisation*⁴) para simulação, análise e projeção gráfica da RCF. Utilizando-se deste conjunto, os mapas simulados foram convertidos à nova subdivisão, correspondendo à resolução angular de $6,9'$; totalizando 3.145.728 elementos (12×512^2). Os mapas simulados para as anisotropias da RCF com condições iniciais características do modelo de mistura, nas intensidade total e polarizada, estão ilustrados nas Figuras 4.3 a 4.6. As escalas de cores dos mapas foram escolhidas de modo a representar mais claramente o padrão de estrutura correspondente e não necessariamente expressam os valores máximo e mínimo das simulações.

⁴ <http://www.eso.org/science/healpix/>

Flutuacoes de Temperatura da RCF - μK - Condiçoes Gaussianas ($\alpha=0$)



Flutuacoes da RCF - Componente Polarizada - μK - Condiçoes Gaussianas ($\alpha=0$)

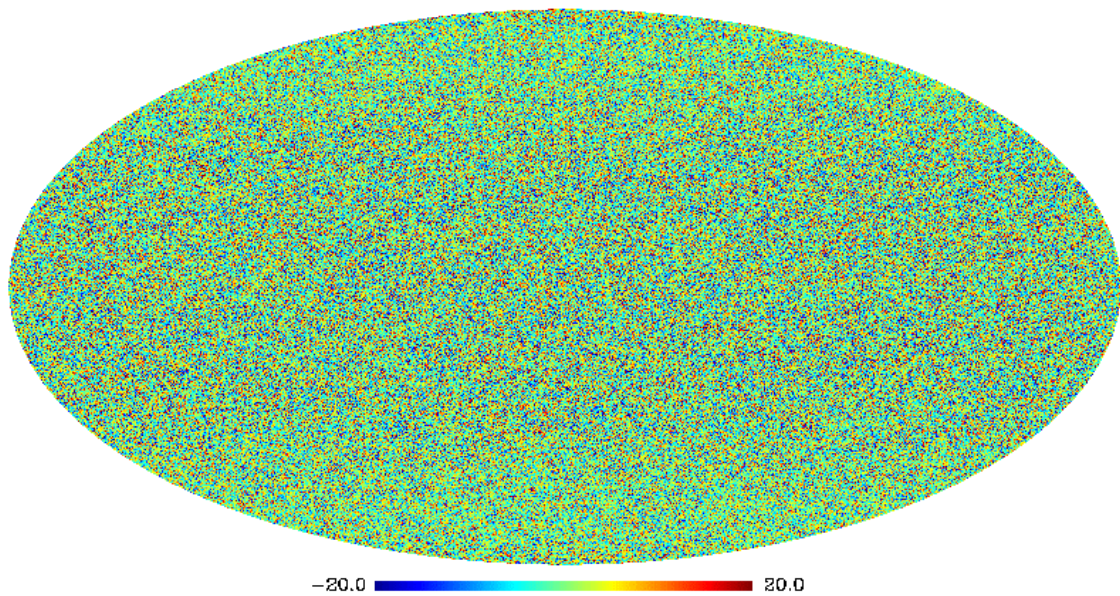
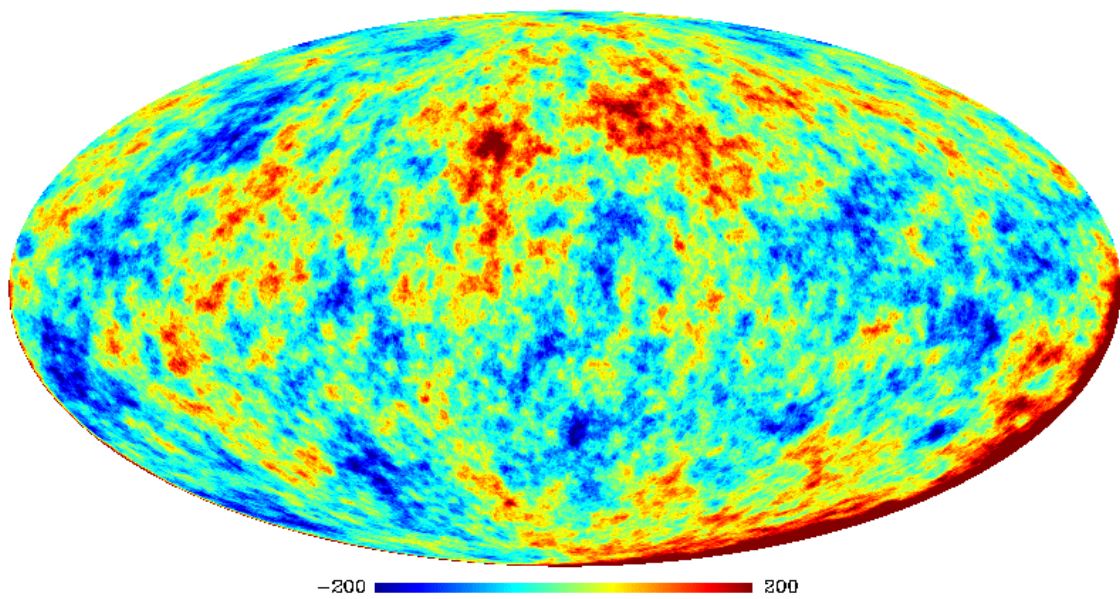


FIGURA 4.3 – Mapas das flutuações de temperatura da RCF, em intensidade total e polarizada, simulados com condições iniciais *gaussianas* ($\alpha_0 = 0$), para um campo de flutuações adiabáticas tipo Λ -CDM padrão.

Flutuacoes de Temperatura da RCF - μK - Flut. Isocurvatura ($\alpha=1$)



Flutuacoes da RCF - Componente Polarizada - μK - Flut. Isocurvatura ($\alpha=1$)

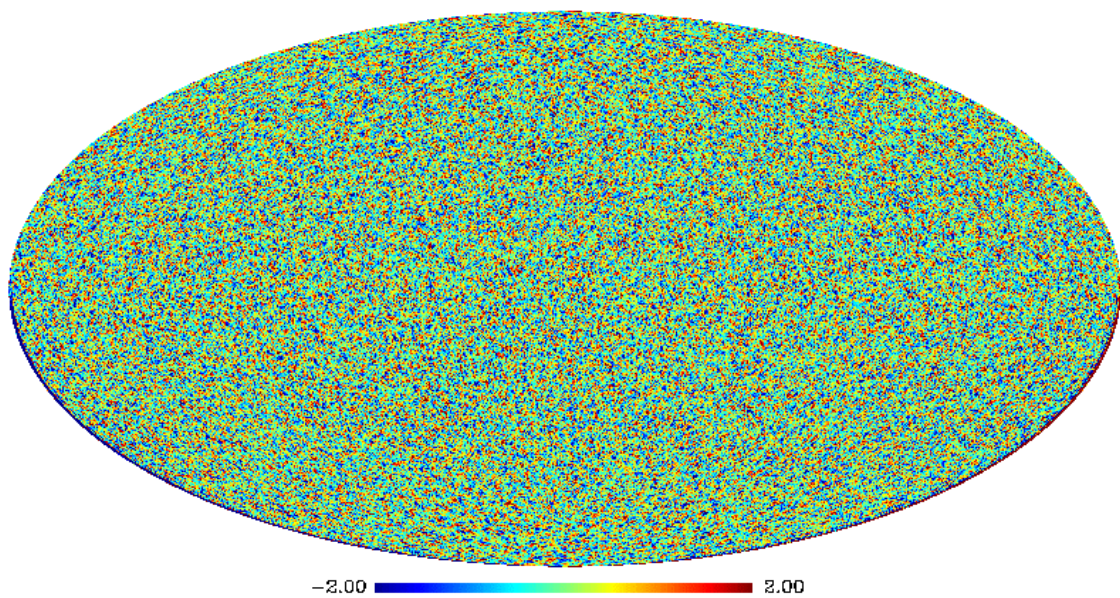
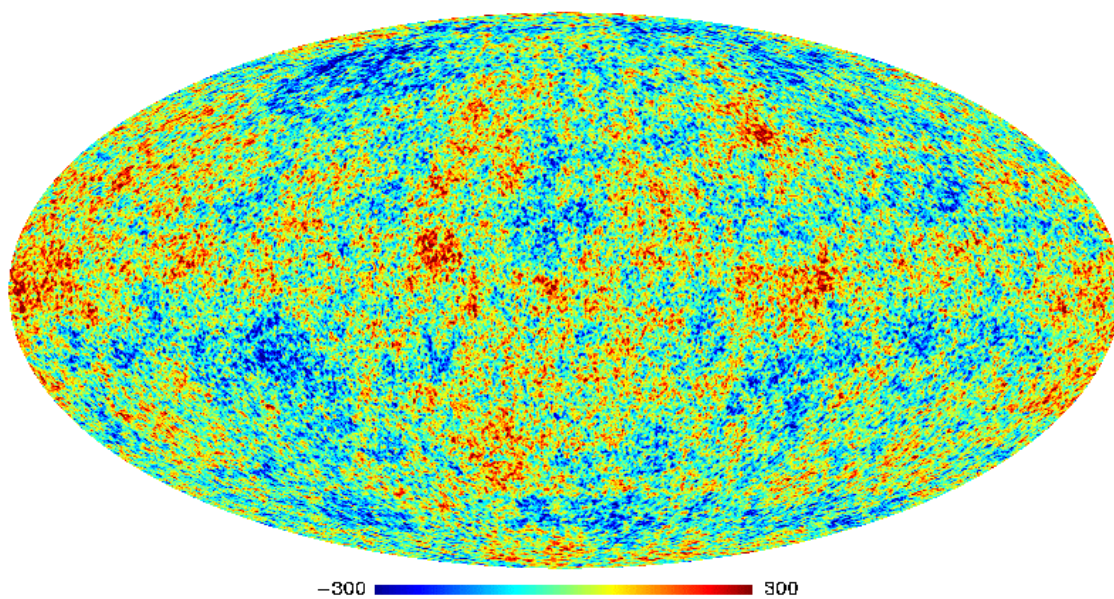


FIGURA 4.4 – Mapas das flutuações de temperatura da RCF, em intensidade total e polarizada, simulados com condições iniciais não gaussianas ($\alpha_0=1$), para um campo de flutuações de isocurvatura tipo Λ -CDM padrão. A distribuição dos coeficientes a_{lm} simulados neste mapa é do tipo exponencial.

Flutuacoes de Temperatura da RCF - μK - Mistura: Gauss + Exp(alfa=1E-3)



Flutuacoes da RCF - Componente Polarizada - μK - Mistura: Gauss + Exp(alfa=1e3)

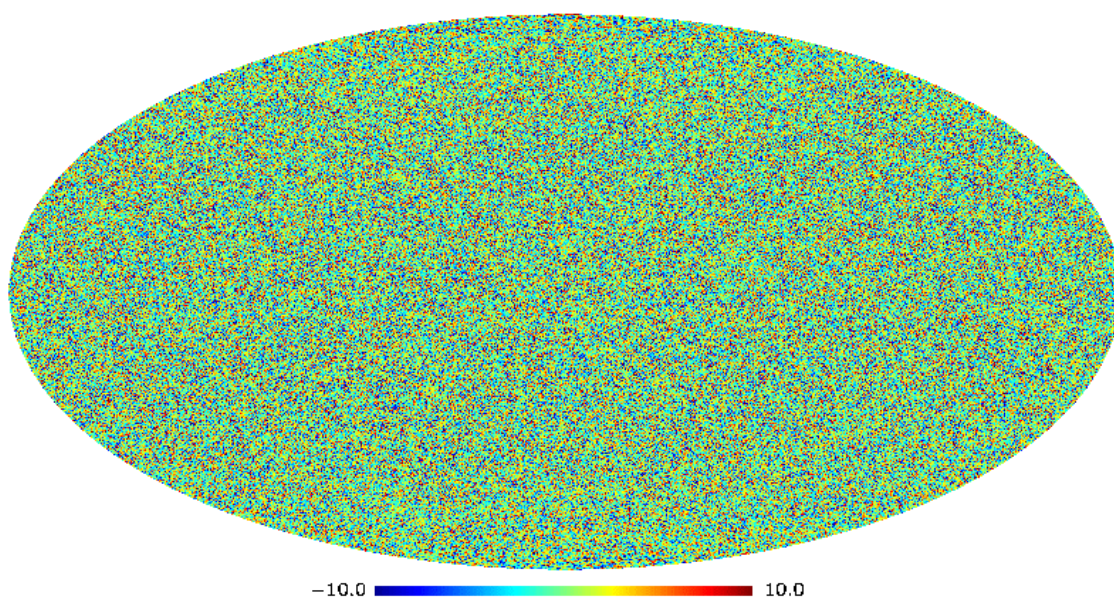
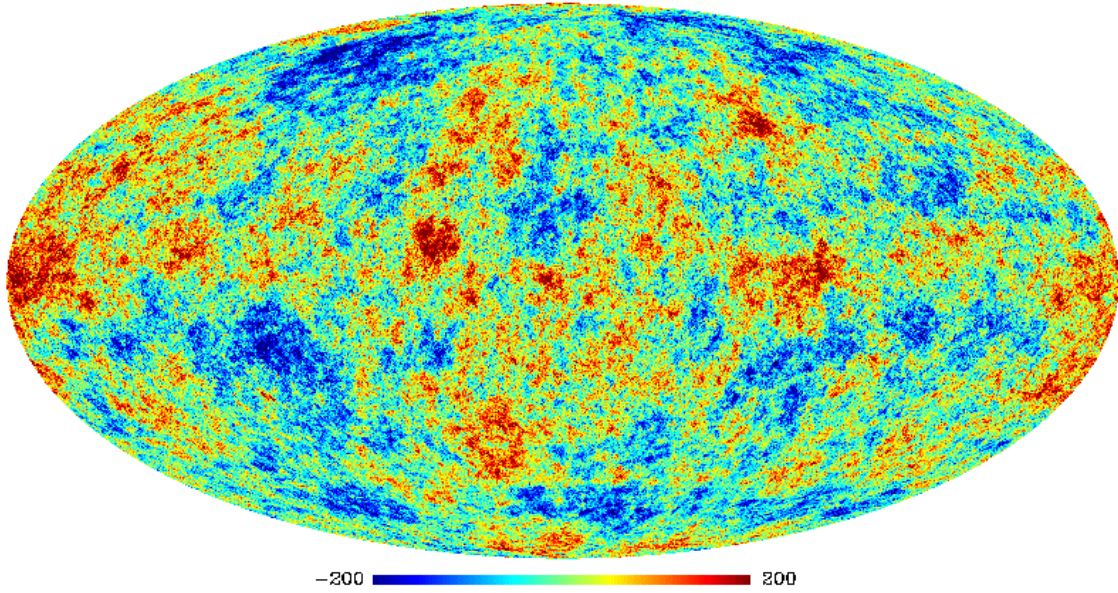


FIGURA 4.5 - Mapas das flutuações de temperatura da RCF, em intensidade e total e polarizada, simulados com condições iniciais do modelo de mistura para um campo de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, do tipo Λ -CDM padrão, com distribuição mista e razão de mistura $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$.

A)

Flutuações de Temperatura da RCF - μK - Espectro Plano ($\alpha=0$)



B)

Flutuações de Temperatura da RCF - μK - Espectro Plano ($\alpha=1$)

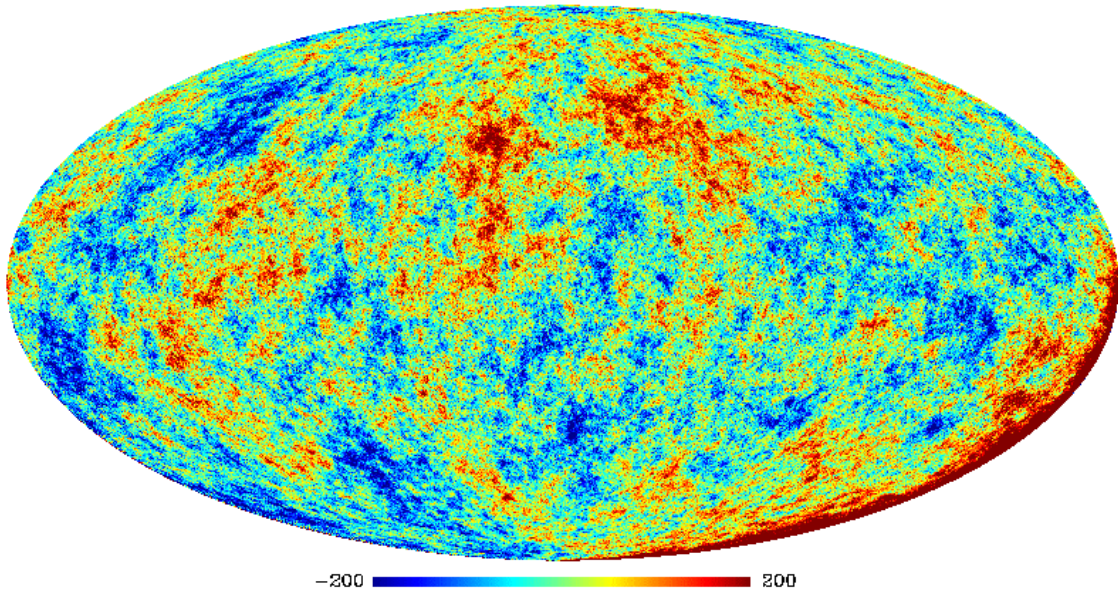


FIGURA 4.6 – Mapas das flutuações de temperatura da RCF simulados para um campo hipotético com espectro plano, $l(l+1)C_l=1$. Em A) as simulações apresentam condições iniciais *gaussianas* ($\alpha_0 = 0$) e em B) condições exponenciais ($\alpha_0 = 1$).

A Figura 4.3 ilustra os mapas das flutuações de temperatura e polarização para o modelo puramente *gaussiano*, simulados com flutuações adiabáticas e coeficiente de mistura nulo. As flutuações de temperatura correspondentes ao espectro de flutuações de *isocurvatura* com condições iniciais não *gaussianas* ($\alpha_0 = 1$) são ilustradas na Figura 4.4. A Figura 4.5 ilustra as flutuações simuladas para o modelo de mistura entre flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, considerando as distribuições *gaussiana* e exponencial com razão de mistura $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$. Também são ilustradas nas Figuras 4.4 e 4.5 as flutuações na componente polarizada. A Figura 4.6 ilustra os mapas das flutuações de temperatura simulados para um modelo hipotético com espectro plano de flutuações, sendo $l(l+1)C_l \equiv 1$, nas condições *gaussiana*, $\alpha_0 = 0$ (Figura 4.6A), e exponencial, $\alpha_0 = 1$ (Figura 4.6B).

A maior diferença observada na representação gráfica dos mapas ocorre em relação às simulações com flutuações puramente de *isocurvatura*. Neste caso, as estruturas observadas apresentam maior contraste de temperatura em dimensões muito superiores às encontradas nos mapas de flutuações puramente adiabáticas, mistas ou mesmo de flutuações com espectro plano. Este efeito é um reflexo da distribuição angular do espectro de potência das flutuações de *isocurvatura*, o qual apresenta maior potência para flutuações em maiores escalas angulares.

A diferença visual entre as simulações com coeficientes a_{lm} distribuídos segundo uma *gaussiana* ou um decaimento exponencial, para um espectro plano de flutuações (Figura 4.6) é bastante sutil. A princípio, pode-se inferir uma ligeira tendência às flutuações positivas em δT para a simulação com distribuição exponencial. Esta tendência fica evidente quando são comparadas as amplitudes das flutuações nos dois casos. Na simulação com $\alpha_0 = 0$, os valores mínimo e máximo encontrados nos mapas das flutuações de temperatura, com subdivisão em 8.388.608 pontos, foram $-433,95 \mu\text{K}$ e $+469,41 \mu\text{K}$; respectivamente. Na simulação com $\alpha_0 = 1$, os valores correspondentes foram $-906,84 \mu\text{K}$ e $+4690,47 \mu\text{K}$. Os valores estimados, nos dois casos, para a média quadrática das flutuações, $\left(\frac{\delta T}{2.726}\right)_{rms}^2$, correspondem a: $\alpha_0 = 0 \Rightarrow$

$\delta T_{\text{rms}}^2 = 878,94 \mu\text{K}^2$ e $\alpha_0 = 1 \Rightarrow \delta T_{\text{rms}}^2 = 3689,40 \mu\text{K}^2$, um aumento bastante significativo na consideração não *gaussiana*. Uma vez que as duas simulações apresentam o mesmo espectro de potência, a alteração na média quadrática das flutuações de temperatura deve ser atribuída somente à distribuição dos coeficientes sorteados no processo de simulação. O aumento de flutuações positivas para a simulação com distribuição exponencial também é observado no mapa das flutuações de *isocurvatura*, no qual foram encontradas flutuações entre $-253,16 \mu\text{K}$ e $+1432,46 \mu\text{K}$; e média quadrática de $2444,83 \mu\text{K}^2$.

Visualmente os mapas simulados no contexto de mistura não apresentam nenhuma estrutura diferenciada do mapa puramente *gaussiano*, entretanto, observa-se uma menor amplitude nas flutuações de temperatura para modelos com $\alpha_0 \neq 1$. Na simulação com $\alpha_0 = 0$ e flutuações puramente adiabáticas, os valores mínimo e máximo observados para as flutuações de temperatura foram $-743,72 \mu\text{K}$ e $+732,62 \mu\text{K}$; respectivamente. Na simulação com $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$, os valores correspondentes foram $-568,36 \mu\text{K}$ e $+530,60 \mu\text{K}$; para $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$, foram encontrados $-617,12 \mu\text{K}$ e $+565,75 \mu\text{K}$; e, para $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$, foram encontrados $-727,68 \mu\text{K}$ e $+728,33 \mu\text{K}$; A média quadrática das flutuações corresponde a: $\alpha_0 = 0 \Rightarrow \delta T_{\text{rms}}^2 = 2414,13 \mu\text{K}^2$; $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3} \Rightarrow \delta T_{\text{rms}}^2 = 1574,80 \mu\text{K}^2$; $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3} \Rightarrow \delta T_{\text{rms}}^2 = 1640,08 \mu\text{K}^2$; $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3} \Rightarrow \delta T_{\text{rms}}^2 = 2292,23 \mu\text{K}^2$ e $\alpha_0 = 4 \times 10^{-3} \Rightarrow \delta T_{\text{rms}}^2 = 3835,34 \mu\text{K}^2$.

O mesmo comportamento é observado nas simulações da componente polarizada, correspondendo aos valores mínimo, máximo e δT_{rms}^2 : $\alpha_0 = 0 \Rightarrow -46,98 \mu\text{K}$; $+45,22 \mu\text{K}$ e $9,39 \mu\text{K}^2$; $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3} \Rightarrow -38,02 \mu\text{K}$; $39,17 \mu\text{K}$ e $6,06 \mu\text{K}^2$. As flutuações na componente polarizada são bem menos intensas e não apresentam estruturas definidas.

A redução na média das flutuações de temperatura para as simulações do modelo de mistura reflete as alterações previstas no Capítulo 3, quando foram estimadas as médias das flutuações de temperatura em função do espectro de potência das flutuações (Figura 3.5). Para valores de $\alpha_0 < 3 \times 10^{-3}$, a média quadrática das flutuações tende a diminuir,

em função da redução na amplitude dos picos acústicos, apresentando valores elevados somente para $\alpha_0 \geq 3 \times 10^{-3}$, quando a transferência de potência é mais intensa. A Figura 4.7 ilustra claramente o comportamento da média quadrática das flutuações estimada a partir dos mapas simulados em função da razão de mistura.

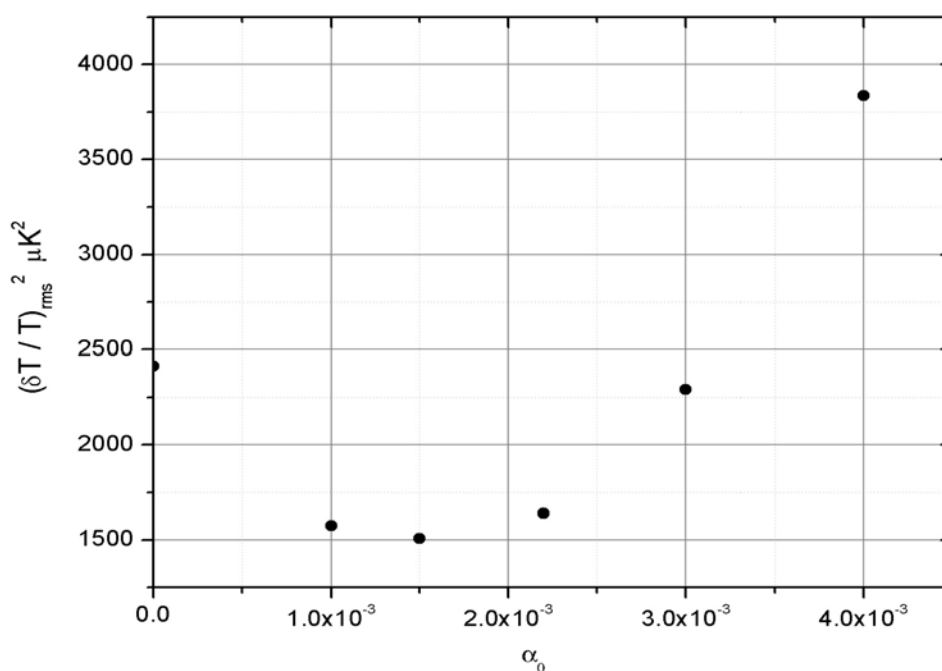


FIGURA 4.7 – Médias das flutuações de temperatura da RCF estimadas a partir dos mapas simulados com condições de mistura entre distribuições *gaussiana* e *exponencial* para diferentes níveis de mistura.

As implicações do modelo de mistura para as flutuações da RCF podem ser melhor entendidas quando são comparadas as distribuições das flutuações δT para os espectros de mistura e os espectros planos. Analisando esta distribuição, compreende-se melhor a redução na média das flutuações, visto que a distribuição das flutuações em δT é sensivelmente mais intensa, porém decai mais rapidamente para as simulações do modelo de mistura, resultando no estreitamento da distribuição, o que não ocorre para

flutuações com contribuição fortemente não *gaussiana*. Estas conclusões podem ser inferidas a partir da análise dos histogramas das flutuações em δT , ilustrados nas Figuras 4.8, 4.9 e 4.10.

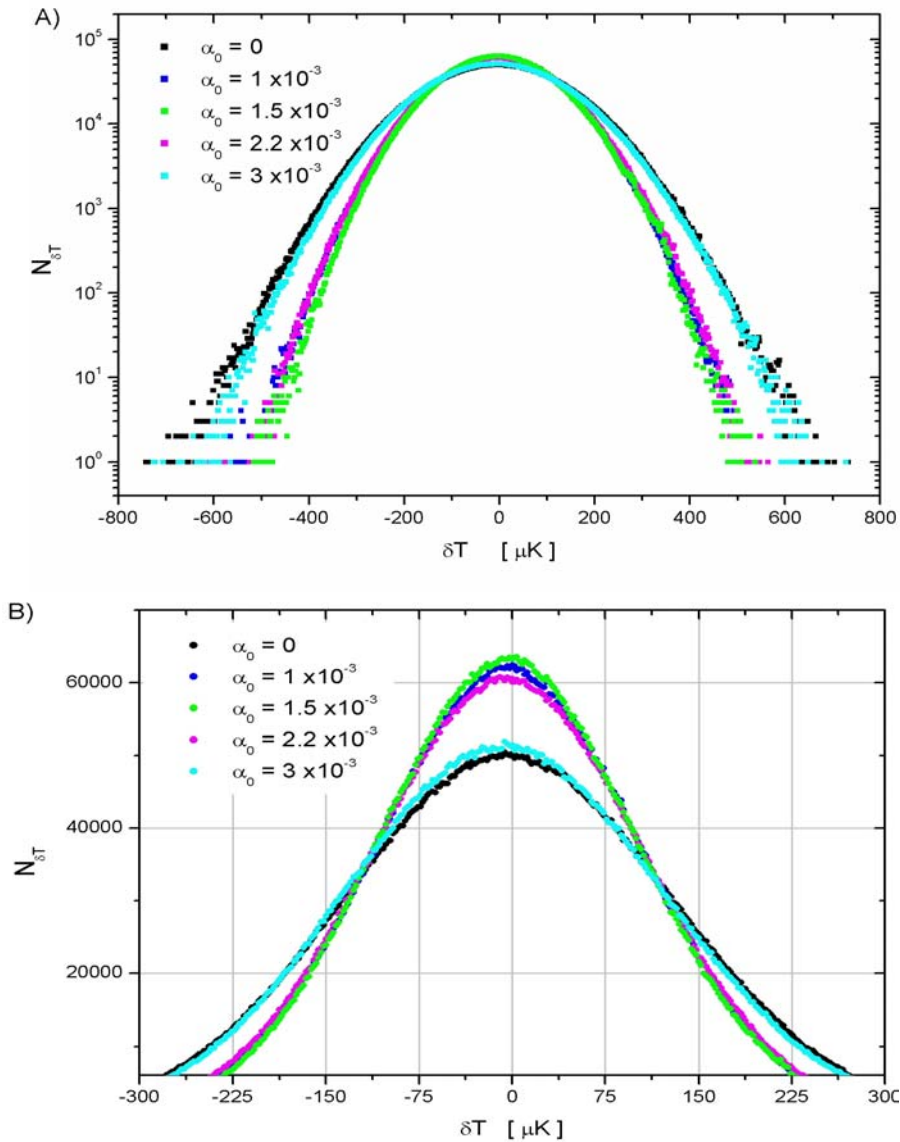


FIGURA 4.8 – Histograma das flutuações de temperatura estimado nas simulações da RCF para os modelos: *gaussiano* puro com flutuações adiabáticas, $\alpha_0 = 0$; modelo misto de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, com distribuição *gaussiana* e exponencial para: $\alpha_0 = (1 \times 10^{-3}; 1,5 \times 10^{-3}; 2,2 \times 10^{-3}$ e $3 \times 10^{-3})$. Em A) o histograma completo da distribuição e em B) o detalhamento da distribuição no intervalo de $\pm 300 \mu\text{K}$.

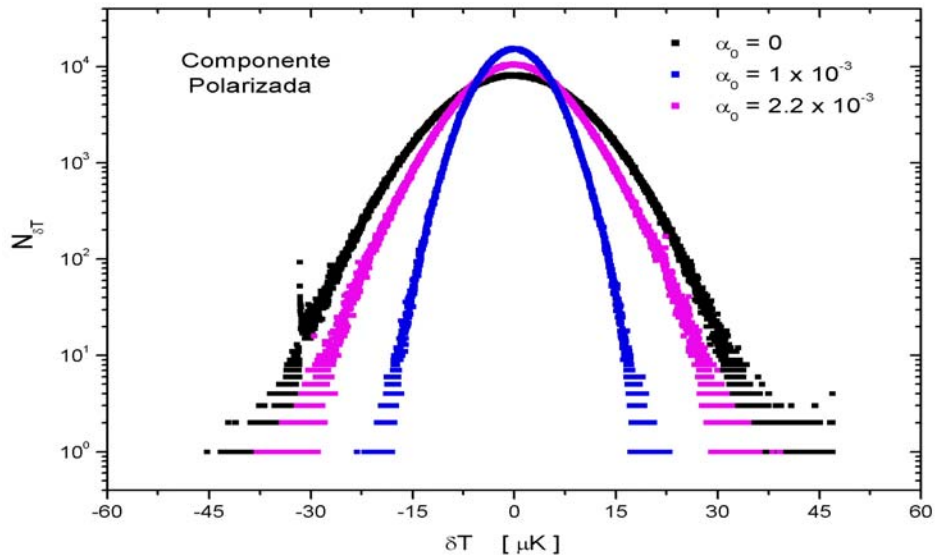


FIGURA 4.9 – Histograma das flutuações na componente polarizada estimado nas simulações da RCF para os modelos: *gaussiano* puro com flutuações adiabáticas, $\alpha_0 = 0$; modelo misto de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, com distribuição *gaussiana* e exponencial para $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$.

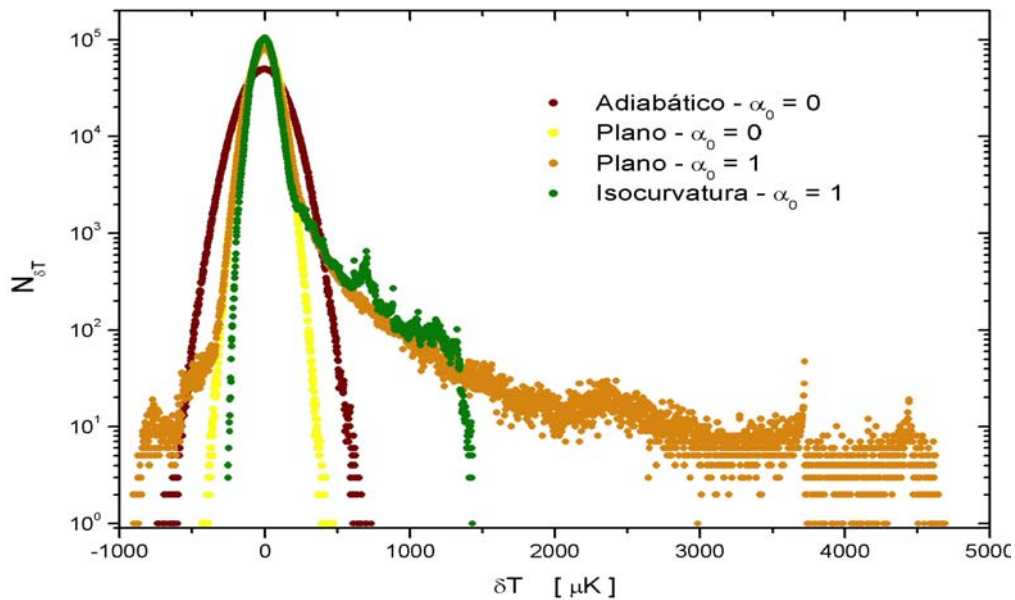


FIGURA 4.10 – Histograma das flutuações de temperatura estimado nas simulações da RCF para os modelos: *gaussiano* puro com flutuações adiabáticas, $\alpha_0 = 0$; flutuações de espectro plano, $l(l + 1)C_l = 1$, com distribuição *gaussiana*, $\alpha_0 = 0$, e com distribuição exponencial, $\alpha_0 = 1$; e flutuações de *isocurvatura* com distribuição exponencial, $\alpha_0 = 1$.

Na Figura 4.8, nota-se como a distribuição das flutuações de temperatura simuladas para a RCF se aproxima de uma *gaussiana*, mesmo para as simulações do modelo misto com razões de mistura da ordem de aproximadamente 10^{-3} . Alterações sensíveis na distribuição das flutuações δT ocorrem para valores crescentes da razão de mistura α_0 . No modelo misto, a combinação dos efeitos de transferência de potência para menores escalas angulares e a introdução de coeficientes com assimetria positiva, ocasiona uma redistribuição das flutuações com o conseqüente estreitamento da distribuição inicial. Não é observada, entretanto, nenhuma assimetria aparente para $\alpha_0 \sim 10^{-3}$. Nota-se apenas que a distribuição em δT é mais intensa que a distribuição correspondente ao modelo *gaussiano* ($\alpha_0 = 0$) no intervalo entre $\pm 120 \mu\text{K}$, correspondendo ao incremento de picos de flutuações com $|\delta T| \leq 120 \mu\text{K}$.

A ocorrência de flutuações muito intensas, $|\delta T| > 450 \mu\text{K}$, no modelo de mistura não *gaussiana*, é menos provável. Pode-se dizer que, no modelo misto de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, com distribuição *gaussiana* e exponencial, as flutuações de temperatura estão mais concentradas em torno do ponto médio da distribuição, $\langle \delta T \rangle = 0$. A redução da média quadrática das flutuações pode ser atribuída a este estreitamento da distribuição de δT em relação ao modelo puramente *gaussiano*.

O histograma da componente polarizada no modelo de mistura (Figura 4.9) apresenta o mesmo comportamento do histograma das flutuações de temperatura em intensidade total, sendo as distribuições das flutuações polarizadas para $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ mais estreitas em relação à distribuição para $\alpha_0 = 0$. Novamente, este comportamento é justificado pela redução drástica dos primeiros picos acústicos no espectro de polarização do modelo de campo misto. No intervalo entre $\pm 6,5 \mu\text{K}$; a distribuição em δT na componente polarizada é superior à correspondente distribuição em $\alpha_0 = 0$.

O histograma das flutuações de temperatura ilustra as alterações ocorridas na amplitude das flutuações para cada modelo considerado, entretanto, nenhuma informação é dada a respeito da escala em que estas alterações ocorrem. Combinando as informações do

espectro de potência e do histograma das flutuações em δT , pode-se concluir que o modelo de campo misto de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, com assimetria positiva e razão de mistura da ordem de 10^{-3} , corresponde ao incremento na probabilidade de picos de flutuações de temperatura (positivas e negativas) em pequenas escalas angulares. A caracterização de assimetrias na distribuição das flutuações, para baixas razões de mistura, é mascarada pelo comportamento aleatório da variável δ .

A condição extrema de não *gaussianidade*, presente nas simulações do espectro de potência plano com $\alpha_0 = 1$, evidencia a capacidade de distorção do modelo de assimetria positiva representado pela distribuição exponencial dos coeficientes a_{lm} . Como pode ser observado na Figura 4.10, o histograma das flutuações de temperatura com condição exponencial indica uma forte distorção, em relação à distribuição *gaussiana*, para valores positivos das flutuações. Observa-se o aumento significativo de flutuações de alta amplitude, as quais apresentavam baixa probabilidade no modelo *gaussiano*. Nas simulações do modelo de mistura, não é possível, em primeira análise, caracterizar esta assimetria, devido ao baixo teor da segunda componente da distribuição. Entretanto, o alargamento da distribuição para a simulação com espectro plano e $\alpha_0 = 1$ leva-nos a concluir que o estreitamento observado nas simulações do modelo de mistura é devido às alterações ocorridas no espectro de potência, e não à redistribuição dos coeficientes.

Observa-se também uma forte assimetria na distribuição das flutuações de temperatura simuladas para um espectro de *isocurvatura* com distribuição exponencial. Esta assimetria pode ser justificada pelas relações de assimetria das fases dos coeficientes a_{lm} , apesar das condições de isotropia impostas no vetor b_m e nos próprios coeficientes da expansão, os a_{lm} .

Nas simulações com condições iniciais gaussianas, os coeficientes a_{lm} ($\equiv x_{lm} + iy_{lm} = |a_{lm}| e^{im\phi_{alm}}$) são escolhidos de modo que as amplitudes da parte real, $|x_{lm}|$, e da parte imaginária, $|y_{lm}|$, obedecem a uma distribuição gaussiana, enquanto as fases (sinais) são sorteadas de uma distribuição plana, para todos os coeficientes com

$m > 0$. Os coeficientes a_{l-m} são obtidos a partir da relação $a_{l-m} = a_{lm}^*$. Neste caso, pode-se verificar que, na condição gaussiana, os coeficientes da expansão em harmônicas esféricas apresentam as combinações de fase listadas na Tabela 4.1 a seguir.

TABELA 4.1 - Combinações de fase dos coeficientes a_{lm} para um espectro de flutuações com distribuição *gaussiana*.

Sinal (x_{lm})	Sinal (y_{lm})	ϕ_{alm}	Sinal (x_{l-m})	Sinal (y_{l-m})	ϕ_{al-m}
+	+	+	+	-	+
-	-	+	-	+	+
+	-	-	+	+	-
-	+	-	-	-	-

De acordo com a Tabela 4.1, combinando as fases de x_{lm} e y_{lm} , obtém-se as mesmas combinações de fase ϕ_{alm} para $m > 0$ e $m < 0$, sendo que todas elas ocorrem com igual probabilidade. Ao realizar o somatório em funções harmônicas esféricas para todo o ângulo azimutal ϕ , para valores positivos e negativos do índice m , como:

$$\frac{\delta T}{T} = \sum_{m=-l_{\max}}^{l_{\max}} a_{lm} e^{im\phi} \Theta(\theta), \quad (4.10)$$

na qual $\Theta(\theta)$ representa o somatório em l do termo $\lambda_l^m P_l^m(\cos\theta)$, para cada ângulo ϕ , o somatório acima será uma superposição de flutuações positivas e negativas, resultando numa distribuição simétrica para as flutuações δT .

Na condição não gaussiana de assimetria positiva, os coeficientes a_{lm} são escolhidos de modo que $|x_{lm}|$ e $|y_{lm}|$ obedecem a uma distribuição não gaussiana (como, por exemplo, uma exponencial) enquanto as fases (sinais) são todas positivas para todos os coeficientes com $m > 0$. Assim, aos coeficientes a_{l-m} são associados apenas fases negativas. Esta condição resulta numa assimetria de fases em relação ao índice m . Ao

realizar o somatório em 4.10, as fases positivas dos a_{lm} serão *convoluídas* com outro termo de fase positiva ($e^{im\phi}$), enquanto as fases negativas dos a_{l-m} serão *convoluídas* com outro termo de fase negativa ($e^{-im\phi}$). Assim, para cada ângulo ϕ , o somatório acima será uma superposição de flutuações positivas resultando numa distribuição assimétrica para valores positivos das flutuações δT .

4.3 – AJUSTE DO ESPECTRO DE POTÊNCIA AOS MAPAS DA RCF

Uma questão importante que surge nas considerações do modelo de mistura é verificar se a introdução de coeficientes não *gaussianos* alteraria a extração dos coeficientes a_{lm} e do espectro de potência, caso as flutuações reais da RCF apresentassem comportamento não *gaussiano*. Uma vez que o espectro de potência representa a média quadrática dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas, a alteração da distribuição dos coeficientes poderia resultar na alteração da correlação de ordem dois entre os coeficientes, distorcendo o espectro de potência considerado inicialmente nas simulações dos mapas da RCF. Visando responder a esta questão, consideramos que os mapas simulados para as flutuações de temperatura poderiam corresponder a uma observação real da RCF e realizamos a extração dos coeficientes $a_{lm}^{\text{saída}}$ e o correspondente espectro de potência, $C_l^{\text{saída}}$.

A extração do espectro de potência da RCF é feita por meio da média quadrática dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas, sendo (Muciaccia, Natoli e Vittorio, 1997):

$$a_{lm} = \int_{4\pi} Y_{l,m}^*(\theta, \phi) \frac{\delta T}{T} d\Omega, \quad (4.11)$$

e o espectro de potência $C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle$. A integral acima pode ser reescrita em termos do vetor b_m e da função λ_l^m , resultando:

$$a_{lm} = \int \lambda_l^m(\theta) b_m(\theta) \sin \theta d\theta, \quad (4.12)$$

para:

$$\mathbf{b}_m(\theta) = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\delta \mathbf{T}}{T}(\theta, \phi) e^{-im\phi}. \quad (4.13)$$

A extração dos coeficientes a_{lm} foi realizada com o auxílio do código *anafast* do conjunto *Healpix* para as simulações da RCF. Os resultados obtidos para a extração do espectro de potência estão ilustrados nas Figuras 4.11 a 4.14, para o modelo de campo misto com distribuição *gaussiana* e exponencial, nas razões de mistura: $\alpha_0 = (0; 1 \times 10^{-3}; 1,5 \times 10^{-3} \text{ e } 2,2 \times 10^{-3})$. Os espectros correspondentes às flutuações na componente polarizada nos modelos: $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ estão ilustrados nas Figuras 4.15 e 4.16. Na Figura 4.17, é ilustrado o espectro de saída para a simulação de *isocurvatura* com $\alpha_0 = 1$. Para as simulações realizadas com o espectro plano de flutuações, os espectros extraídos dos mapas estão ilustrados na Figura 4.18.

Nota-se, em todos os casos analisados nas simulações dos mapas da RCF, que há no espectro estimado, $C_l^{\text{saída}}$, uma certa dispersão para multipolos de baixa ordem. Para altos multipolos o espectro de potência estimado apresenta melhor concordância com o espectro de potência considerado inicialmente no processo de simulação, C_l^{entrada} . A dispersão inicial do espectro se deve à baixa estatística dos coeficientes a_{lm} , lembrando que o número de coeficientes é proporcional à escala l , para cada $l \Rightarrow (2l + 1)$ coeficientes a_{lm} .

Visto que as flutuações da RCF correspondem a uma única realização estatística do Universo, estima-se que haja uma incerteza intrínseca na estimativa dos multipolos nas observações da RCF. Esta incerteza, dita *variância cósmica*, é estimada em (Bennett et al., 1996):

$$\sigma(C_l) \approx [2 / (2l + 1)]^{1/2} C_l. \quad (4.14)$$

Nas Figuras 4.11 a 4.17, às linhas azuis pontilhadas correspondem aos limites estimados de variância cósmica para o espectro de entrada.

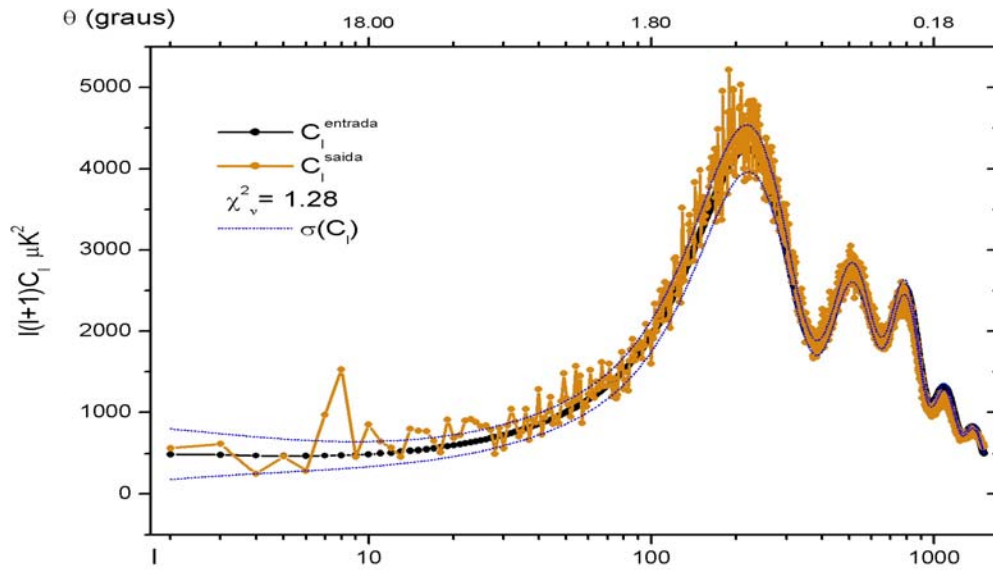


FIGURA 4.11 – Espectro de potência da RCF, C_l^{saida} , extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para $\alpha_0 = 0$. A linha preta ilustra o espectro de potência inicial utilizado nas simulações do modelo puramente *gaussiano*, C_l . O χ^2_v estimado no ajuste entre os espectros é de 1,28.

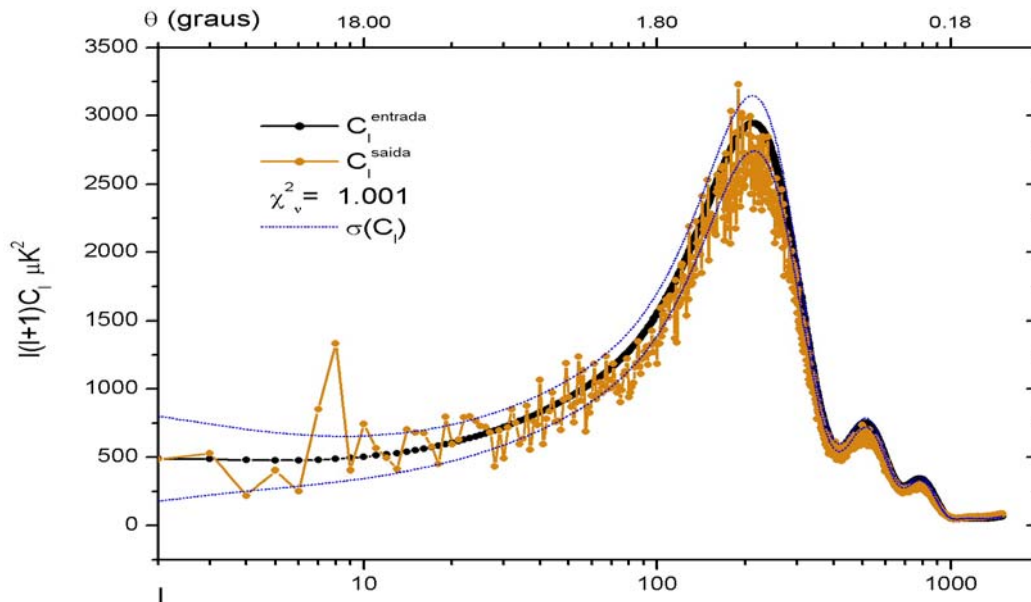


FIGURA 4.12 – Espectro de potência, C_l^{saida} , extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$. A linha preta ilustra o espectro de potência inicial utilizado nas simulações do modelo de mistura *gaussiana* e exponencial, C_l . O χ^2_v estimado no ajuste entre os espectros é de 1,001.

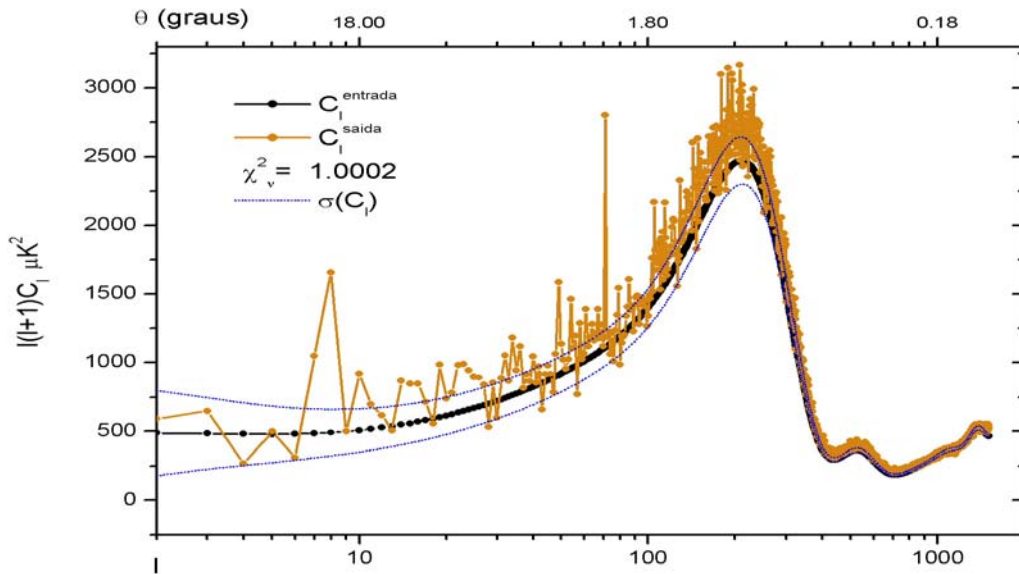


FIGURA 4.13 – Espectro de potência, C_l^{saida} , extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para $\alpha_0 = 1,5 \times 10^{-3}$. A linha preta ilustra o espectro de potência inicial utilizado nas simulações do modelo de mistura *gaussiana* e exponencial, C_l . O χ^2_v estimado no ajuste entre os espectros é de 1,0002.

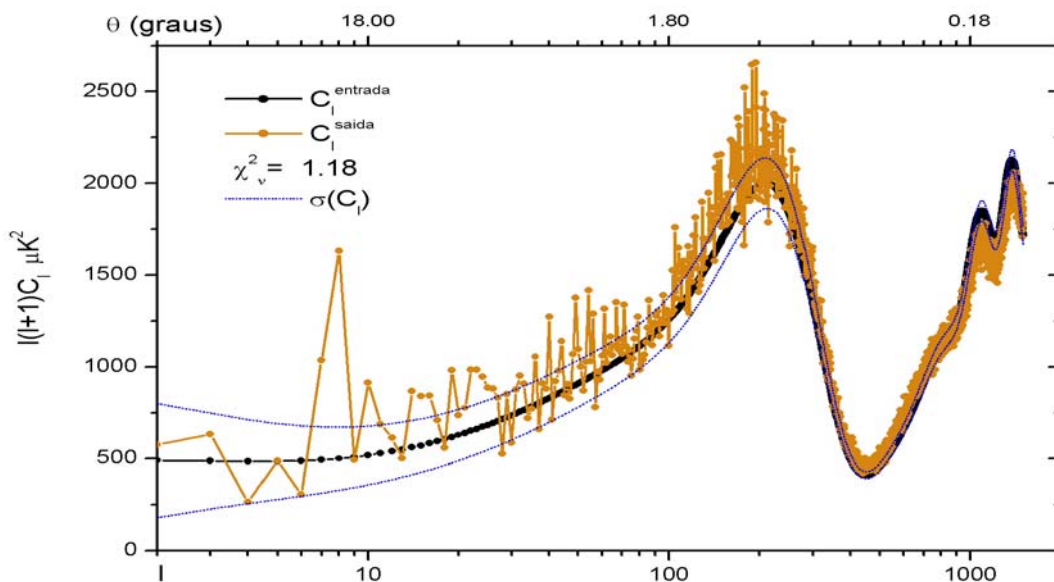


FIGURA 4.14 – Espectro de potência, C_l^{saida} , extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$. A linha preta ilustra o espectro de potência inicial utilizado nas simulações do modelo de mistura *gaussiana* e exponencial, C_l . O χ^2_v estimado no ajuste entre os espectros é de 1,18.

Realizando o teste *qui-quadrado* reduzido, foi possível, nos casos analisados para o modelo de mistura, ajustar o espectro inicial com valores satisfatórios de χ^2_v : $\alpha_0 = 0 \Rightarrow 1,28$; $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3} \Rightarrow 1,001$; $\alpha_0 = 1,5 \times 10^{-3} \Rightarrow 1,0002$ e $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3} \Rightarrow 1,18$. De acordo com os valores de χ^2_v estimados no ajuste entre os espectros, as características principais do modelo de mistura são preservadas no processo de extração do espectro de potência a partir dos mapas simulados com condições não *gaussianas*. O mesmo comportamento é observado nos espectros de saída para a componente polarizada da RCF (Figuras 4.15 e 4.16).

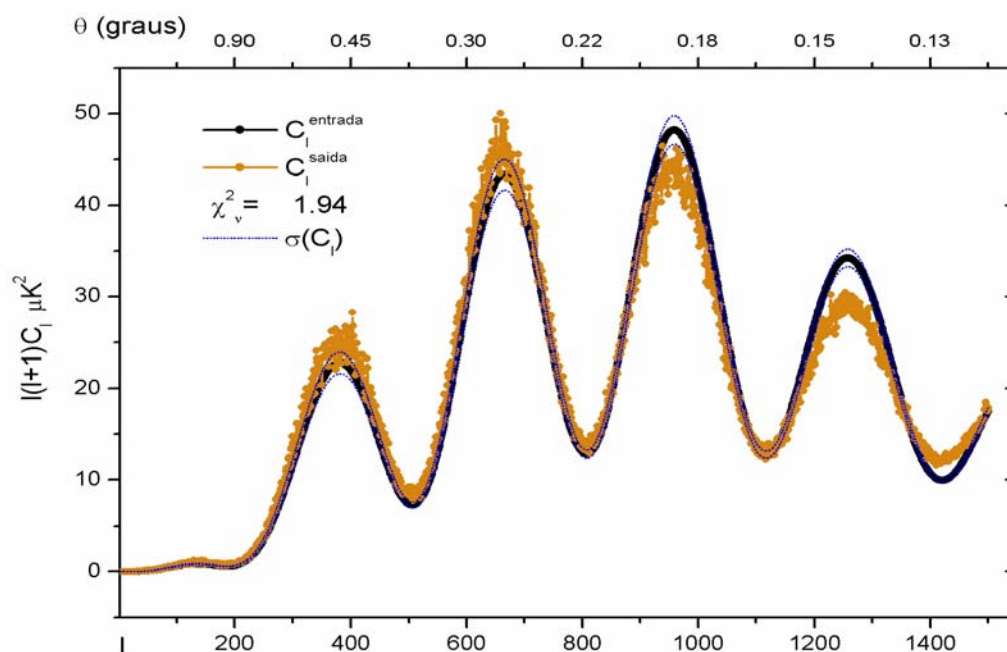


FIGURA 4.15 – Espectro de potência, C_l^{saida} , extraído do mapa das flutuações na componente polarizada da RCF, simulado para $\alpha_0 = 0$. A linha preta ilustra o espectro de potência inicial utilizado nas simulações do modelo puramente *gaussiano*. O χ^2_v estimado no ajuste entre os espectros é de 1,94.

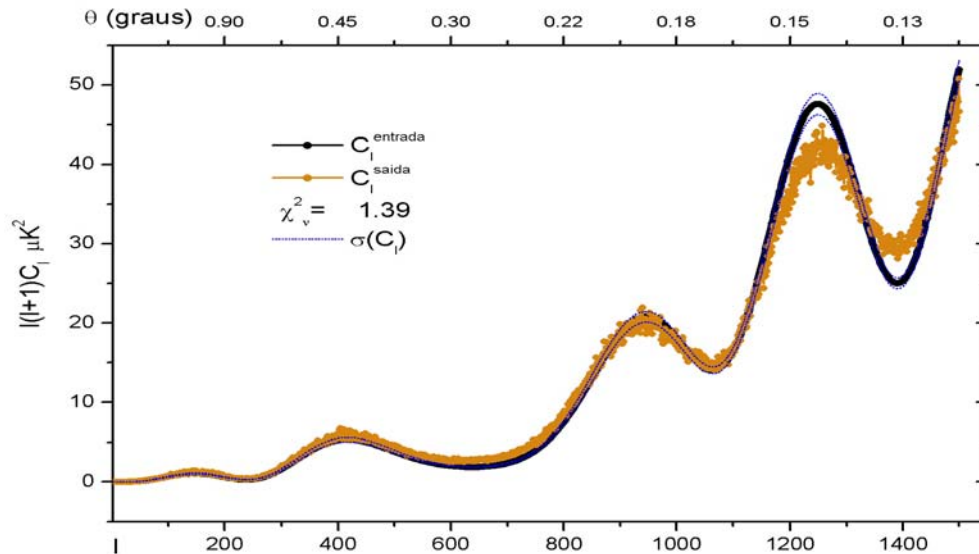


FIGURA 4.16 – Espectro de potência, C_l^{saida} , extraído do mapa das flutuações na componente polarizada da RCF, simulado para $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$. A linha preta ilustra o espectro de potência inicial utilizado nas simulações do modelo misto. O χ^2_v estimado no ajuste entre os espectros é de 1,39.

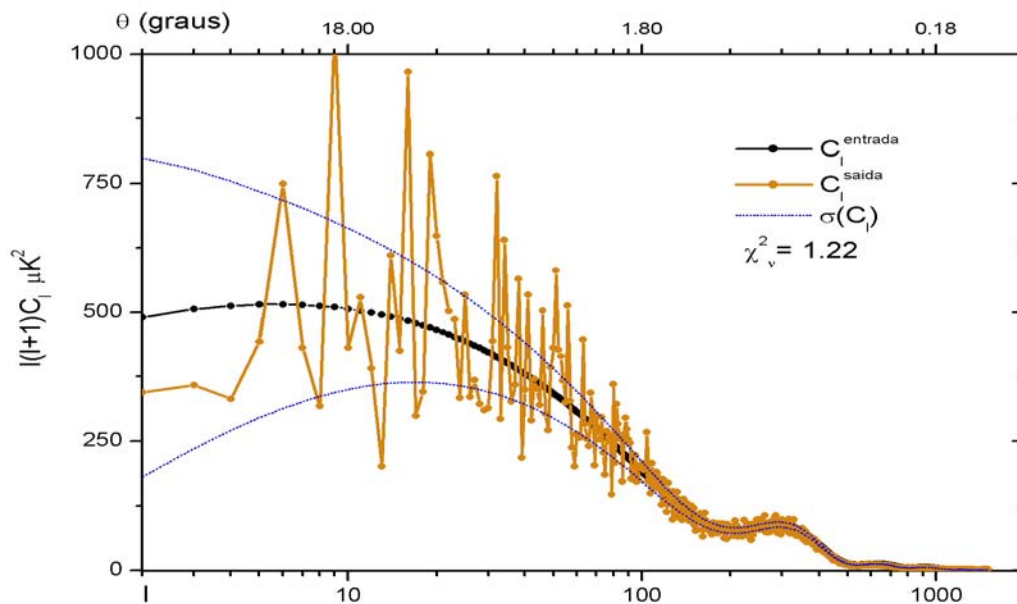
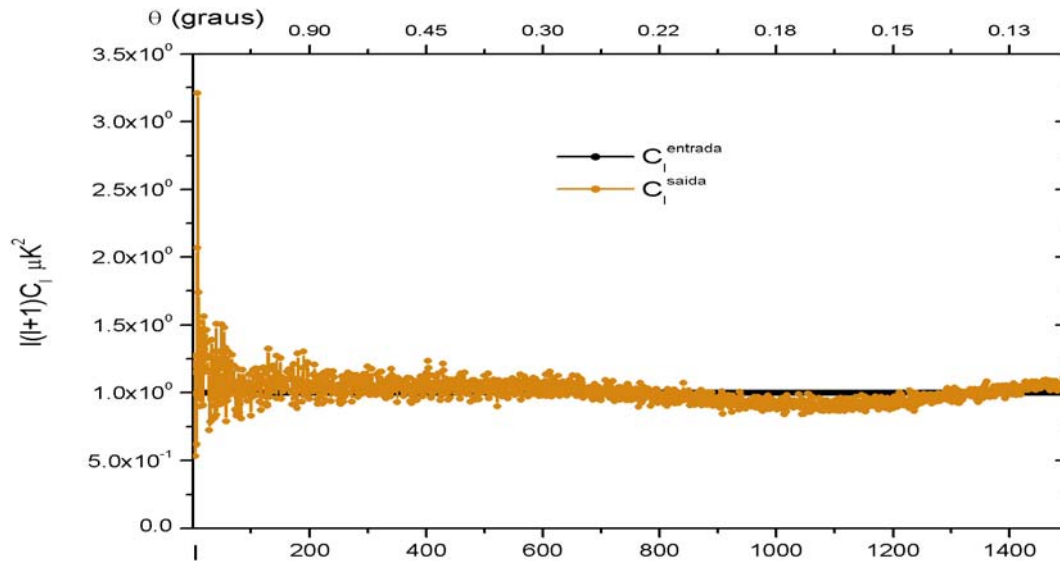


FIGURA 4.17 – Espectro de potência, C_l^{saida} , extraído do mapa das flutuações de temperatura, simulado para o modelo de *isocurvatura* com $\alpha_0 = 1$. A linha preta ilustra o espectro de potência inicial utilizado nas simulações do modelo. O χ^2_v estimado no ajuste entre os espectros é de 1,22.

A)



B)

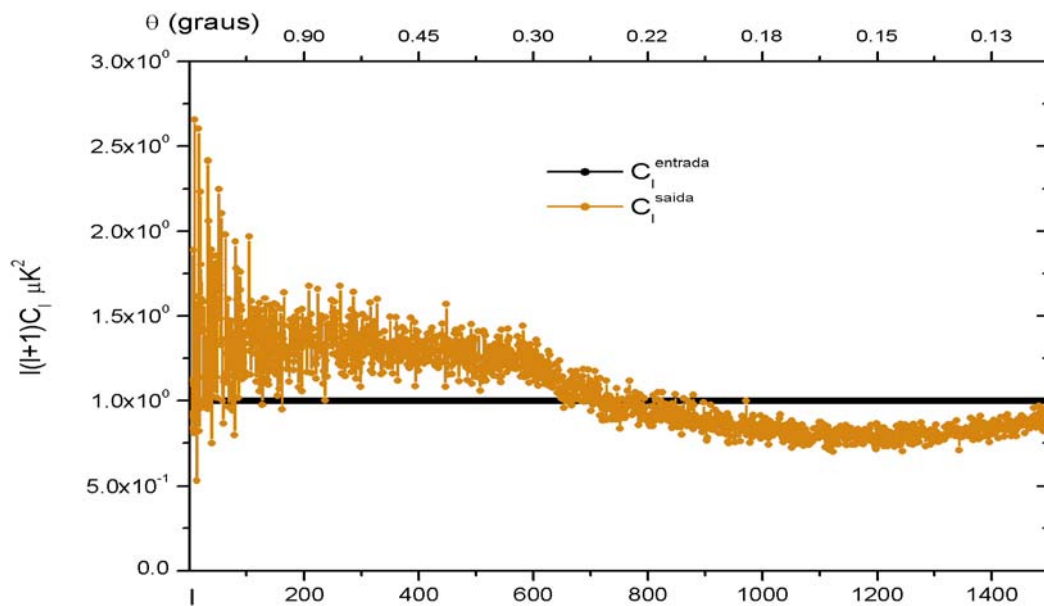


FIGURA 4.18 – Espectro de potência, $C_l^{\text{saída}}$, extraído das simulações dos mapas das flutuações de temperatura considerando espectro plano. Em A) os coeficientes apresentam distribuição *gaussiana* ($\alpha_0 = 0$) e em B) apresentam distribuição *exponencial* ($\alpha_0 = 1$). A linha preta ilustra os espectros de potência inicial, $l(l + 1)C_l = 1$. χ^2_{ν} estimado no ajuste entre os espectros, em ambos os casos, é da ordem de 10^{-4} .

Já nas simulações com espectro plano, os valores obtidos no teste χ^2_v ($\sim 10^{-4}$) revelam um desvio significativo entre os espectros de entrada e de saída, caracterizando a forte oscilação, ilustrada na Figura 4.18, decorrente da estatística do processo de geração dos mapas. Nas simulações com espectro de potência oscilante, as dispersões estatísticas interferem menos no processo de ajuste. Observa-se que, para a simulação com coeficientes exponenciais, a amplitude de oscilação é bem mais acentuada, efeito provável do alargamento das flutuações de temperatura observadas no histograma em δT (Figura 4.9).

A extração do espectro de potência, a partir dos mapas simulados pelo método descrito na seção 4.2, não é prejudicada nem mesmo para a condição extrema de assimetria. Como pode ser observado na Figura 4.17, a extração do espectro de potência a partir do mapa simulado com distribuição exponencial também apresenta boa concordância com o espectro inicialmente considerado, sendo o χ^2_v estimado no ajuste entre os espectros equivalente a 1,22.

Analisando os espectros extraídos dos mapas da RCF é possível perceber que as características básicas do espectro de potência no modelo de mistura (p.ex. a relação de altura entre os picos acústicos e a transferência de potência) são conservadas na análise estatística das flutuações de temperatura, possibilitando a identificação das propriedades de mistura em condições otimizadas de observação. Entretanto, em condições reais de observação, estas estimativas podem ser prejudicadas pelos erros sistemáticos do processo de medida das flutuações.

As distribuições dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas extraídos dos mapas simulados, $a_{lm}^{\text{saída}}$, estão ilustradas nas Figuras 4.19, 4.20 e 4.21. Os histogramas ilustrados apresentam estrutura bastante simétrica, semelhante a uma *gaussiana*, inclusive para a simulação com condição não *gaussiana* extrema, $\alpha_0 = 1$. Para esta simulação, o único efeito observável, na análise dos histogramas na Figura 4.19, é o aumento da dispersão dos coeficientes para a simulação com distribuição não *gaussiana*, em relação à simulação realizada com condição *gaussiana*.

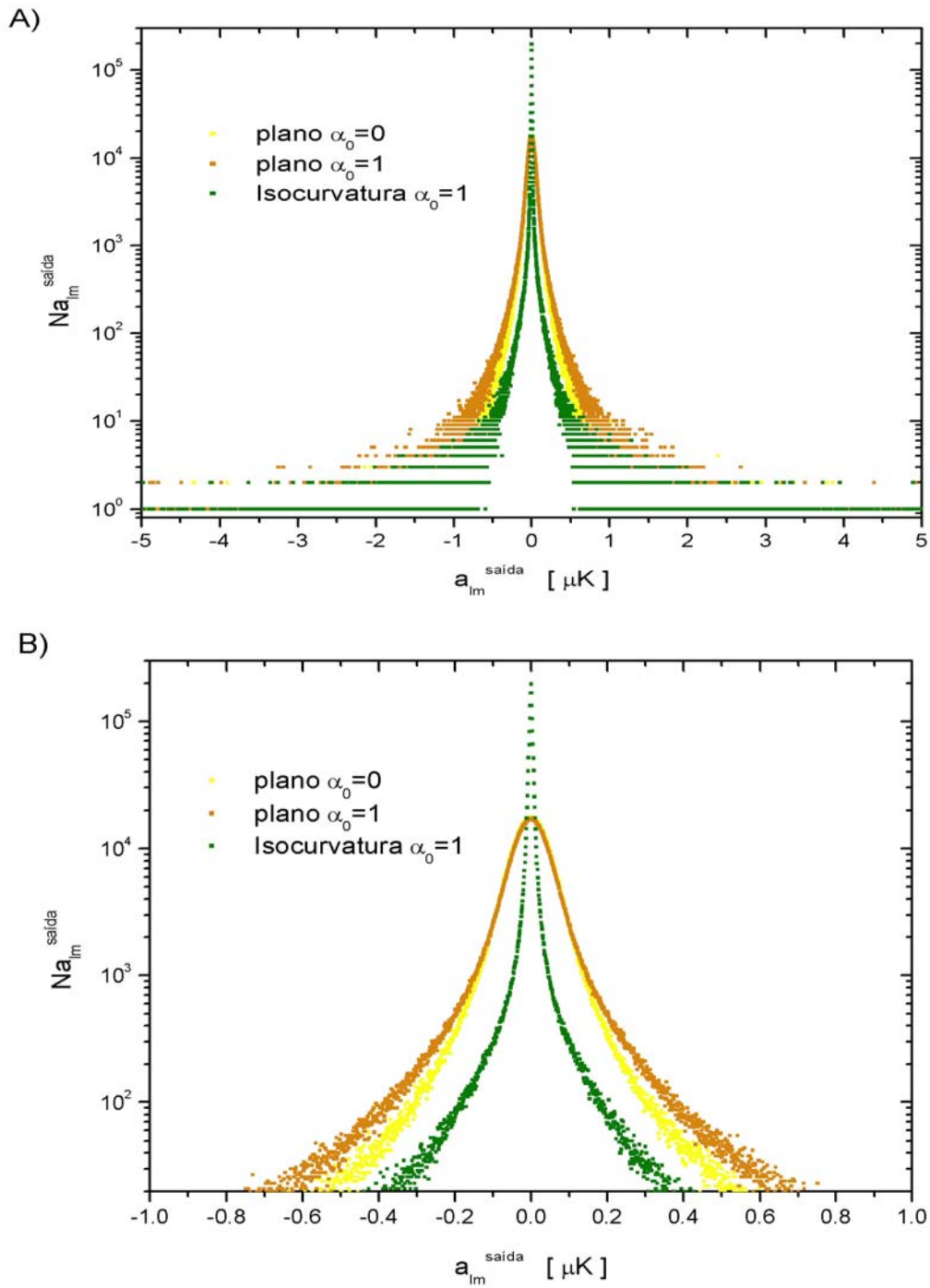


FIGURA 4.19 – Histograma dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas estimados dos mapas das flutuações de temperatura para os modelos de *isocurvatura* com $\alpha_0 = 1$, e os modelos hipotéticos com espectro plano e distribuição *gaussiana*, $\alpha_0 = 0$, ou distribuição exponencial, $\alpha_0 = 1$. Em A) o histograma completo da distribuição e em B) o detalhamento da distribuição no intervalo de $\pm 0,8$ μK.

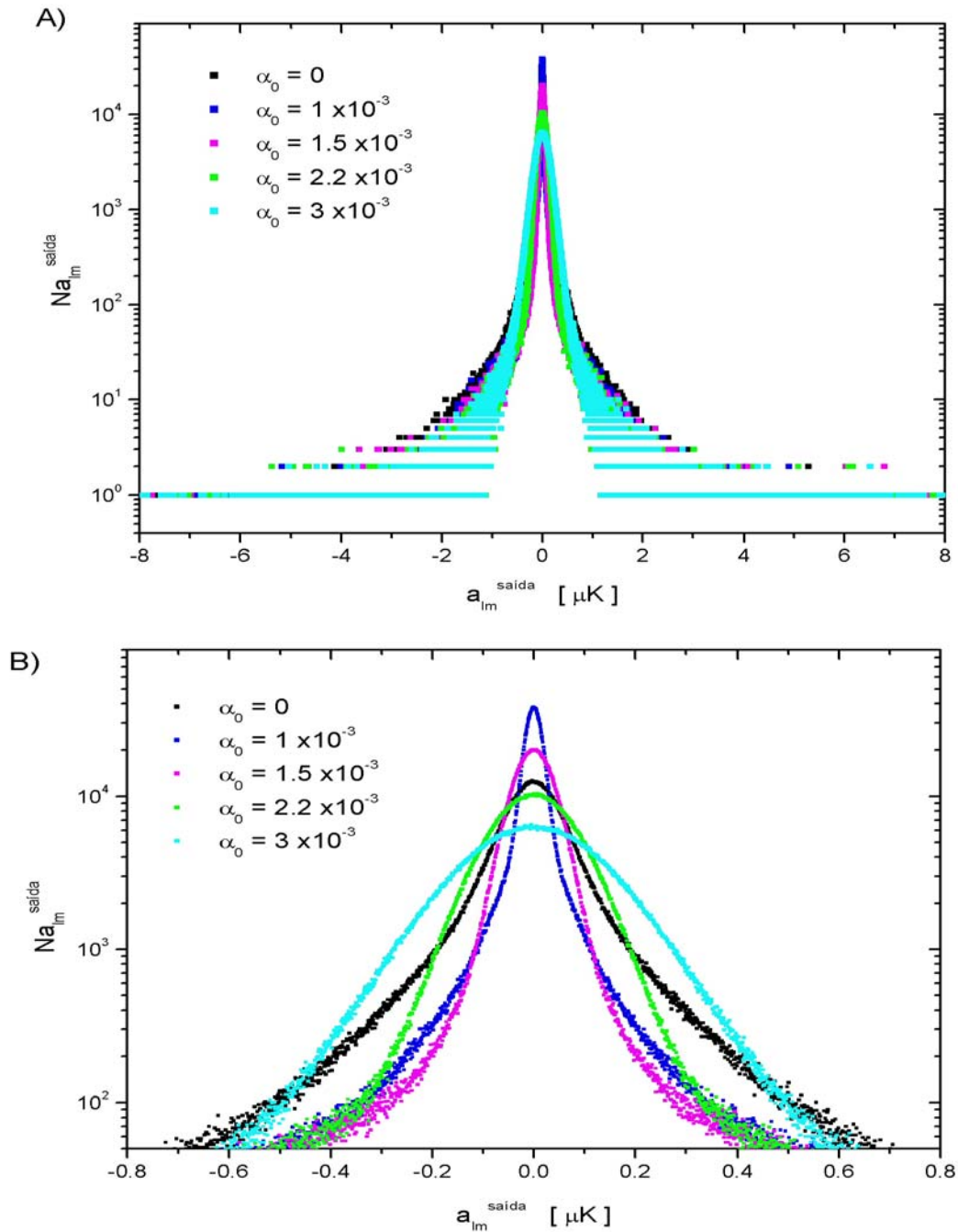


FIGURA 4.20 – Histograma dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas estimados dos mapas das flutuações de temperatura da RCF para os modelos: *gaussiano* puro com flutuações adiabáticas e $\alpha_0 = 0$; modelo misto de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, com distribuição mista *gaussiana* e exponencial, para $\alpha_0 = (1 \times 10^{-3}; 1,5 \times 10^{-3}; 2,2 \times 10^{-3}$ e $3 \times 10^{-3})$. Em A) o histograma completo da distribuição e em B) o detalhamento da distribuição no intervalo de $\pm 0,6 \mu K$.

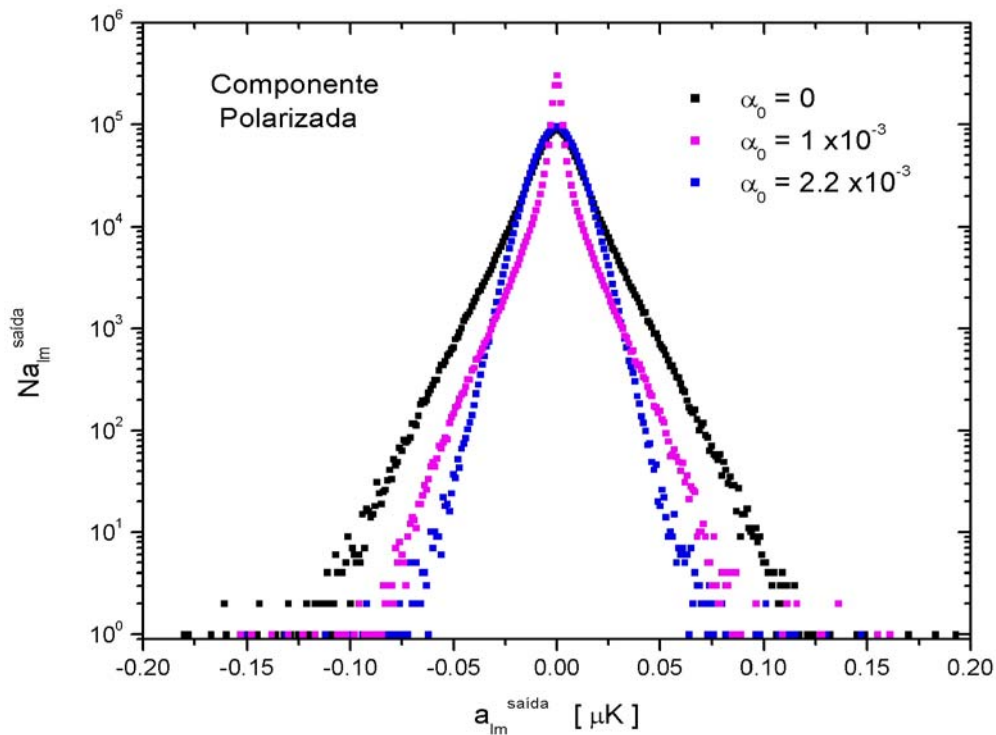


FIGURA 4.21 – Histograma dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas estimados dos mapas das flutuações de temperatura na componente polarizada da RCF para os modelos de mistura *gaussiana* e exponencial com razões: $\alpha_0 = 0$; $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$.

A simetria das distribuições pode ser atribuída ao processo de extração dos coeficientes. Ao realizar a média das flutuações de temperatura em toda a esfera celeste, as distorções presentes na distribuição das flutuações de temperatura são perfeitamente suavizadas, resultando numa distribuição mais dispersa, porém, perfeitamente simétrica.

A distribuição dos coeficientes $a_{l_m}^{saida}$ reflete o comportamento dos histogramas em δT , seja nas simulações em intensidade total ou polarizada, evidenciando o estreitamento na distribuição das temperaturas para as simulações do modelo de mistura. Para $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$, a distribuição é mais intensa que a distribuição em $\alpha_0 = 0$ no intervalo $\pm 3 \times 10^{-2} \mu K$, para $\alpha_0 = 1,5 \times 10^{-3}$, a concentração é mais intensa no intervalo

$\pm 6 \times 10^{-2} \mu\text{K}$; e, para $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$, a distribuição total é menos intensa, porém, apresenta-se mais alargada no intervalo entre $4,3 \times 10^{-2} \mu\text{K} < |a_{lm}^{\text{saída}}| < 0,19 \mu\text{K}$.

A análise dos histogramas em δT evidencia o caráter não *gaussiano* das flutuações apenas em condições acentuadas de assimetria. Entretanto, a caracterização de espectros com distribuição não *gaussiana* é feita a partir da distribuição dos coeficientes a_{lm} extraídos do mapa, os quais não permitem a identificação da distribuição inicial do espectro, nem mesmo em condições otimizadas e assimetria extrema. O processo de expansão em harmônicas esféricas e a posterior extração dos coeficientes parece suavizar até mesmo traços marcantes de não *gaussianidade*, como observado nas simulações do espectro plano e distribuição exponencial. Assim sendo, a caracterização de não *gaussianidade* na RCF requer a análise minuciosa das correlações estatísticas.

4.4 – A FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO ANGULAR

Outra maneira possível de caracterizar as flutuações da RCF é por meio da função de correlação angular. Esta função, $C(\theta)$, descreve, para um determinado espectro de potência, a correlação entre pares de pontos separados por um ângulo θ . Para flutuações descritas em funções harmônicas esféricas, a função de correlação será uma expansão dos momentos de multipolo, C_l , em polinômios de Legendre:

$$C(\theta) = \langle S(n)S(m) \rangle = \sum_{lm} \sum_{l'm'} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle Y_{lm}(\theta_1, \phi_1) Y_{l'm'}^*(\theta_2, \phi_2) \quad (4.15)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1) C_l P_l(\cos \theta),$$

$$\text{para } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (4.16)$$

Para as simulações do modelo de mistura, as quais conservam as propriedades de isotropia e ortogonalidade das harmônicas esféricas, as alterações em $C(\theta)$ devem

representar apenas as correlações embutidas no espectro de potência do campo misto de flutuações. Neste caso, tem-se:

$$C^{Mix}(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l + 1) C_l^{Mix} P_l(\cos \theta). \quad (4.17)$$

As Figuras 4.22 e 4.23 ilustram, respectivamente, as estimativas da função de correlação angular para o modelo de campo misto considerando os espectros de potência simulados inicialmente, $C_l^{entrada}$, e os espectros extraídos dos mapas simulados, $C_l^{saída}$. As estimativas em $C(\theta)$ se estendem até $l = 2048$ para os espectros iniciais, $C_l^{entrada}$, e até $l = 1500$ para os espectros extraídos, $C_l^{saída}$.

Observa-se em 4.22 que a correlação para flutuações em grandes escalas angulares é muito baixa, apresentando valores significativos apenas para pequenas separações. Esta é uma das previsões dos modelos *gaussianos* (inflacionários), os quais consideram flutuações independentes e não correlacionadas em grandes escalas angulares. Este comportamento permanece inalterado nas simulações do modelo de mistura para flutuações acima do raio de Hubble. O primeiro zero da função de correlação angular ocorre para valores de θ da ordem de 0,7 rad ($\sim 40^\circ$).

Observando o segundo quadro da Figura 4.21, nota-se que, em torno de $(1 - 2)^\circ$, a função de correlação no modelo de mistura apresenta uma elevação discreta em relação ao modelo puramente *gaussiano* com flutuações adiabáticas. Esta escala caracteriza o ponto de transição entre as flutuações dentro e fora do raio de Hubble. Na consideração do modelo de mistura, esta transição ocorre com um ligeiro acréscimo na função de correlação angular, efeito provável da correlação entre os campos adiabático e de *isocurvatura*. Para índices elevados de mistura, $\alpha_0 \sim (2 - 4) \times 10^{-3}$, o comportamento da função de correlação em pequenas escalas angulares tende à definição de um pico suave de correlação em torno do ponto $0,5^\circ$ e outro pico para $\theta \sim 0^\circ$.

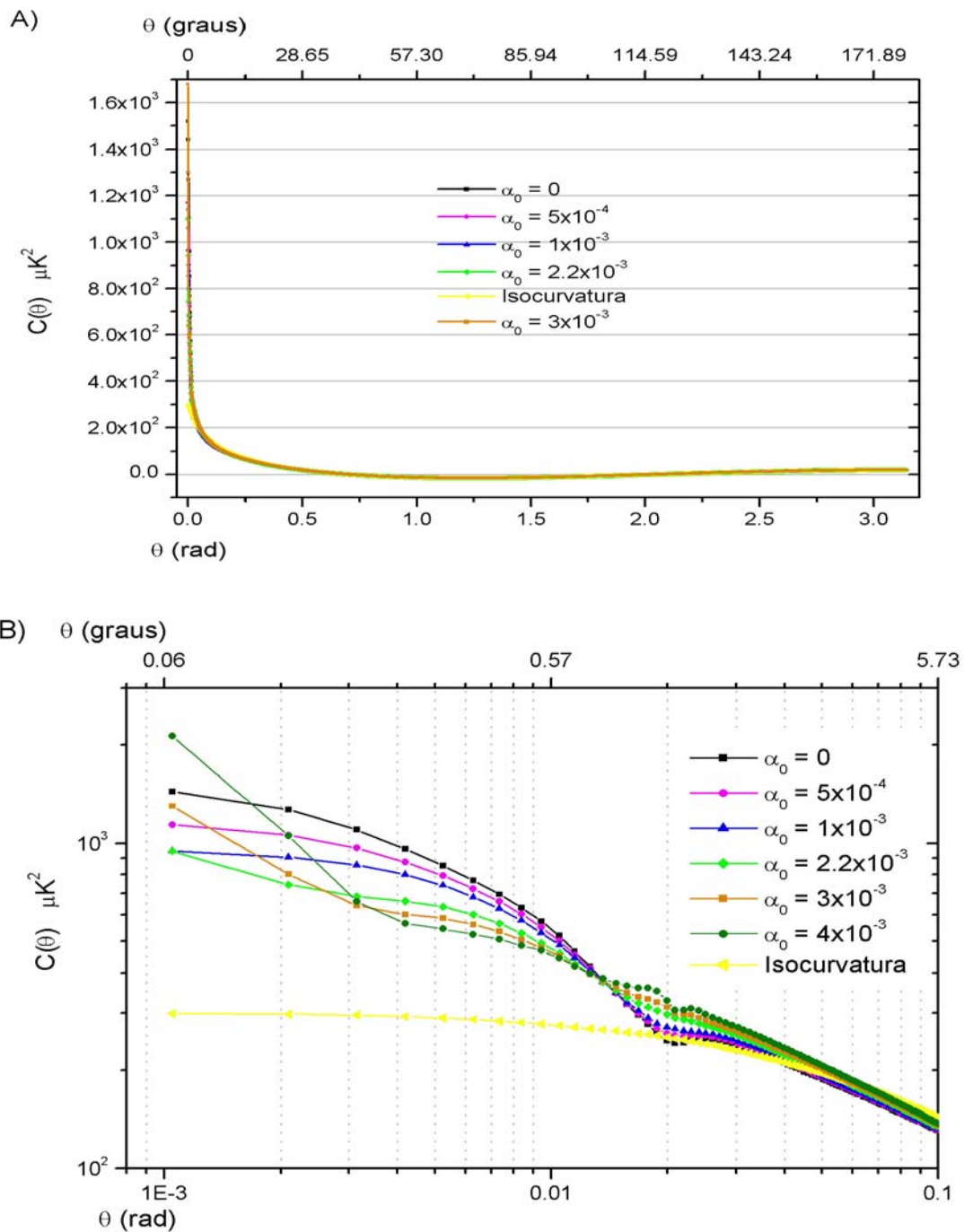


FIGURA 4.22 - Função de correlação angular estimada a partir dos polinômios de Legendre e do espectro de potência simulado, C_1^{entrada} , para o modelo de campo misto com razões de mistura: $\alpha_0 = 0$ (para flutuações adiabáticas ou de *isocurvatura*); $\alpha_0 = (5 \times 10^{-4}; 1 \times 10^{-3}; 2,2 \times 10^{-3}; 3 \times 10^{-3}$ e 4×10^{-3}). Em A) gráfico em escala linear e em B) versão logarítmica.

A Figura 4.23 ilustra as estimativas da função $C(\theta)$ realizadas a partir dos espectros de potência extraído dos mapas simulados, para 1 até 1500. Conforme esperado, o comportamento observado se assemelha às estimativas de $C(\theta)$ para o espectro de potência considerado inicialmente, mantendo inclusive o discreto acréscimo em $C(\theta)$ para $\theta \sim (1 - 2)^\circ$ (Figura 4.23-C). Entretanto, devido às flutuações estatísticas em $C_1^{\text{saída}}$, a função de correlação ilustrada na Figura 4.23-B apresenta comportamento irregular, com pequenas oscilações, sobretudo em escalas maiores que 2° . O primeiro zero de $C(\theta)$ para os espectros extraídos ocorre em escalas da ordem de $0,9 \text{ rad}$ ($\sim 51^\circ$).

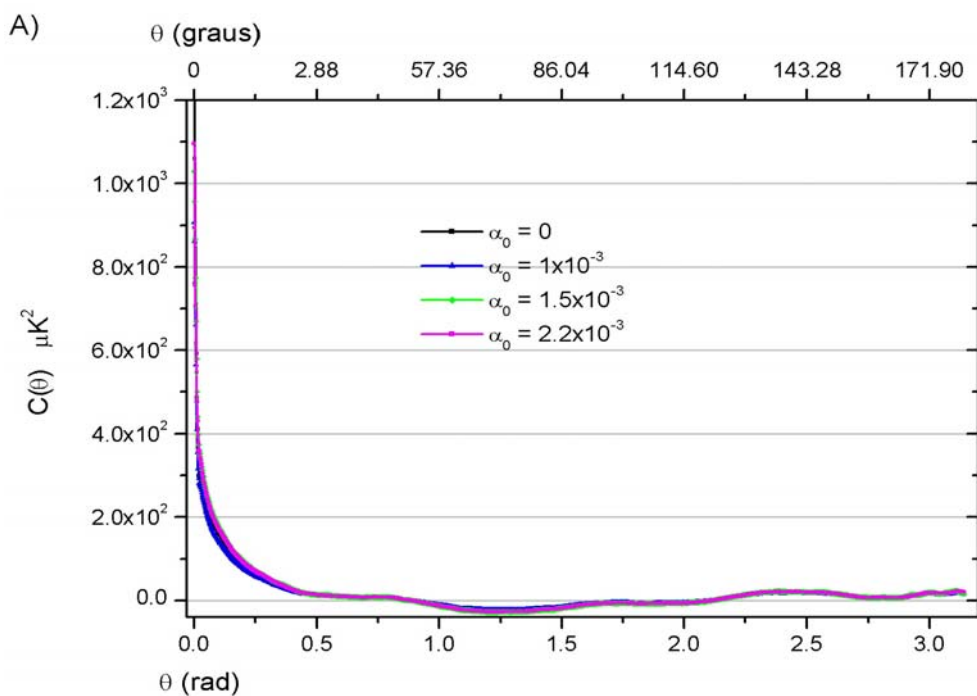


FIGURA 4.23 - Função de correlação angular estimada a partir do espectro de potência extraído dos mapas simulados, $C_1^{\text{saída}}$, para o modelo de campo misto. Em A) e B) gráfico em escala linear, em C) versão logarítmica. (Continua)

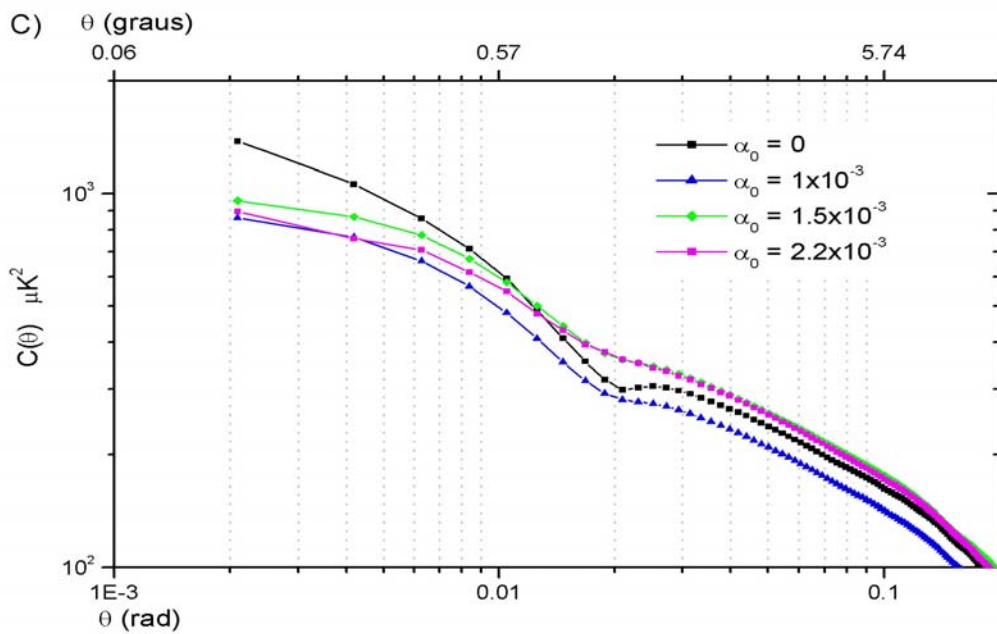
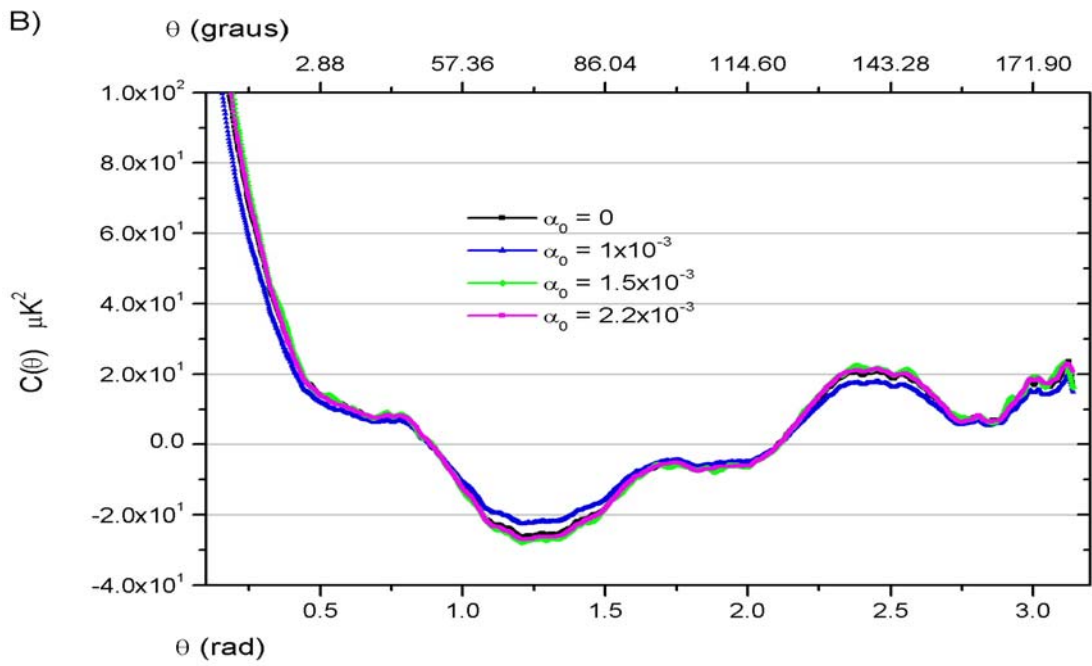


FIGURA 4.23 – (Conclusão)

As alterações observadas na função de correlação descrevem genericamente os efeitos da mistura correlacionada entre os campos, para dois pontos separados de um ângulo θ . Entretanto, este efeito é estimado em função do espectro de potência, o qual descreve apenas para as correlações de ordem dois entre os coeficientes a_{lm} , $\langle |a_{lm}|^2 \rangle = C_l$. Para melhor detalhar os desvios de *gaussianidade* relativos às correlações impostas no modelo de campo misto, é necessário estudar as correlações de ordens superiores a dois presentes no campo de flutuações.

Visto que a distribuição dos coeficientes extraídos dos mapas, $a_{lm}^{\text{saída}}$, não corresponde à distribuição inicialmente imposta nas simulações, a descrição das correlações entre estes coeficientes também pode ser ineficiente. Uma alternativa possível de caracterizar desvios de *gaussianidade* nas flutuações da RCF seria a investigação das correlações diretamente na distribuição das flutuações de temperatura. Esta análise poderia ser realizada, por exemplo, por meio da análise morfológica do campo de flutuações.

4.5 – PRINCIPAIS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Nas simulações dos mapas da RCF, ao contrário das simulações do espectro de potência angular, nenhuma alteração aparente é observada no padrão de estrutura do campo de flutuações, a não ser para as simulações com condição não gaussiana extrema. Nestas, observa-se uma forte assimetria nas flutuações δT , definindo estruturas bem mais quentes para o modelo de assimetria positiva. Nas simulações do modelo de mistura, nenhuma assimetria é observada na distribuição das flutuações de temperatura devido à baixa contribuição da segunda componente do campo.

A distribuição das flutuações δT reflete as alterações observadas no espectro de potência angular. Para baixos índices de mistura, a redução na amplitude dos picos acústicos resulta no estreitamento da distribuição. Para valores crescentes de mistura, maior a taxa de transferência de potência, resultando no aumento das amplitudes de flutuações em pequenas escalas, alargando, portanto, a distribuição das flutuações δT .

Combinando as informações da distribuição em δT com as escalas definidas no espectro de potência angular, define-se as propriedades genéricas do modelo não gaussiano de campo misto, a transferência de potência e o incremento de picos raros de flutuações em menores escalas angulares.

O processo de simulação das flutuações de temperatura com condições de mistura, respeitando as condições de isotropia do campo de flutuações, mostrou ser um método eficaz na descrição do modelo misto, visto que a distribuição das flutuações em escalas angulares é preservada, tornando possível a reconstituição do espectro de potência angular a partir dos mapas das flutuações de temperatura. Entretanto, o processo de extração dos coeficientes a_{lm} não preserva a distribuição inicial dos mesmos, dificultando assim, o estudo dos desvios de *gaussianidade* a partir da análise estatística dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas.

As alterações observadas no espectro de potência do modelo de campo misto também se refletem na função de correlação angular da RCF. Conforme apresentado, o modelo de campo misto apresenta um padrão de correlação diferenciado do modelo puramente *gaussiano*. Para flutuações em escalas inferiores ao raio de Hubble ($\theta \sim 1^\circ$), o modelo de mistura redistribui as flutuações resultando na aparente definição de discretos picos de correlação.

CAPÍTULO 5

ESTUDO DA FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO DO CAMPO MISTO

5.1 - A DESCRIÇÃO ESTATÍSTICA DO CAMPO DE FLUTUAÇÕES

Conforme apresentado no Capítulo 3, os efeitos do campo misto de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura* para as anisotropias da RCF são bastante evidentes quando analisadas as previsões do modelo para o espectro de potência das flutuações de temperatura em escalas angulares. Na análise dos mapas das flutuações de temperatura (Capítulo 4), os efeitos do campo misto de flutuações são bem mais discretos, resultando na redistribuição das flutuações δT . Uma vez obtidos valores observacionais das flutuações de temperatura e gerados os mapas das anisotropias da RCF, é possível estimar o espectro de potência, a partir da expansão em harmônicas esféricas, confrontar observações e teoria e estimar as propriedades genéricas do campo de flutuações. Entretanto, este processo de análise não oferece informações precisas a respeito da estatística das flutuações de temperatura, sobretudo quando o espectro de potência pode ser degenerado em relação à função de distribuição do espectro primordial.

Uma descrição auxiliar a respeito do espectro de potência primordial pode ser realizada a partir do estudo das propriedades estatísticas dos máximos locais nas flutuações de temperatura impressas nos mapas da RCF. O estudo dos picos no campo de flutuações de temperatura pode ajudar a revelar a natureza da função de distribuição do espectro de flutuações. Propriedades dos picos, tais como correlação, frequência, altura e número de extremos, são fortemente dependentes da função de distribuição do campo de flutuações em questão. Portanto, uma maneira possível de caracterizar desvios de *gaussianidade* na Radiação Cósmica de Fundo é investigar as propriedades morfológicas dos mapas de flutuações de temperatura.

A descrição estatística dos picos de flutuações em um campo aleatório com distribuição *gaussiana* há tempos é aplicada à teoria de formação de estruturas, e.g. Kaiser (1984); Bardeen et al. (1986), visto que a condensação de matéria é mais provável em torno dos máximos locais no campo de densidade primordial. Para um campo misto com distribuição não *gaussiana*, as propriedades estatísticas dos picos de flutuações podem diferir consideravelmente das previsões *gaussianas* e influenciar significativamente a teoria de formação de estruturas. Neste capítulo, é descrito o comportamento da função de correlação linear para picos de alta densidade, no contexto de mistura, e são discutidas as implicações das correlações de densidade para os efeitos observacionais no campo de flutuações da RCF.

5.1.1 - O CAMPO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Uma variável aleatória, δ , se caracteriza pelo fato que, ao invés de conhecermos seu valor preciso, apenas sabemos como obter, sob condições experimentais bem definidas, um conjunto de valores ($\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$) que definem o campo da variável δ . Um valor específico, δ_1 , obtido para a variável aleatória δ em um dado experimento é chamado de realização ou valor amostral de δ . Repetindo o experimento uma série de vezes, obtém-se um conjunto de realizações da variável δ . Diz-se então, que a variável aleatória δ é conhecida quando se conhece a estatística dos dados que melhor a caracteriza.

Os indicadores estatísticos mais simples utilizados na caracterização de uma variável aleatória são o valor médio, também conhecido como valor esperado:

$$\langle \delta \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n}{n}, \quad (5.1)$$

e a média quadrática, definida a partir da função $f(\delta) = \delta^2$:

$$\langle \delta^2 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2}{n}. \quad (5.2)$$

As estimativas para o valor esperado, a média quadrática e qualquer outra função estatística de uma variável aleatória, $f(\delta)$, podem ser obtidas a partir da densidade de probabilidade da variável δ , P_δ , por meio da expressão:

$$\langle f(\delta) \rangle = \int f(y)P_\delta(y)dy, \quad (5.3)$$

A função densidade de probabilidade é uma função que descreve completamente as propriedades estatísticas da variável aleatória, δ , obtida a partir da transformada de Fourier da função característica da variável δ :

$$P[\delta] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\delta} \Theta_\delta(u) du, \quad (5.4)$$

sendo $\Theta_\delta(u)$ a função característica da distribuição, obtida a partir da série de MacLaurin em função dos momentos m da variável δ (Gnedenko e Kolmogorov, 1968):

$$\Theta_\delta(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} m_n, \quad (5.5)$$

sendo $m_n = \langle \delta^n \rangle$.

A descrição completa de uma variável aleatória é possível quando se conhece precisamente todos os momentos da distribuição. Entretanto, a maioria das informações físicas a respeito da variável aleatória está contida nos primeiros momentos, enquanto os momentos de ordem superior contêm apenas informações adicionais detalhadas a respeito da densidade de probabilidade.

A função característica de uma distribuição pode também ser definida a partir dos *cumulantes* da distribuição, sendo:

$$\Theta_\delta(u) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iu)^n}{n!} k_n \right\}, \quad (5.6)$$

para:

$$\begin{aligned}
k_1 &= m_1 = \langle \delta_1 \rangle \\
k_2 &= m_2 - m_1^2 = \langle (\delta - \langle \delta \rangle)^2 \rangle \\
k_3 &= m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 = \langle (\delta - \langle \delta \rangle)^3 \rangle \\
k_4 &= m_4 - 3m_2^2 - 4m_1 m_3 + 12m_1^2 m_2 - 6m_1^4 = \langle (\delta - \langle \delta \rangle)^4 \rangle \\
&\dots
\end{aligned} \tag{5.7}$$

O segundo *cumulante* da distribuição é também conhecido como a variância (ou dispersão) da distribuição, $k_2 = \sigma^2$, sendo o desvio padrão da variável δ definido como $\sigma(\delta) = (k_2)^{1/2}$, o qual indica a ordem de magnitude do desvio aleatório da distribuição em relação ao seu valor médio. Outras definições estatísticas úteis na descrição da distribuição de uma variável aleatória são os coeficientes de assimetria, γ_a , e excesso da distribuição, γ_e :

$$\gamma_a = \frac{k_3}{(k_2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \gamma_e = \frac{k_4}{k_2^2}. \tag{5.8}$$

5.1.2 - CORRELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Suponhamos que, em um conjunto de observações, obtenhamos um conjunto de r realizações para as variáveis $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$. Para este conjunto, a variável aleatória é completamente caracterizada pela função conjunta de densidade de probabilidade *r-dimensional*, $P_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_r}$. No caso bidimensional, a densidade de probabilidade conjunta é referenciada como $P_{\delta_1 \delta_2}$. Se esta densidade de probabilidade conjunta, $P_{\delta_1 \delta_2}$, for equivalente ao produto das densidades de probabilidades unidimensionais, tal como:

$$P_{\delta_1 \delta_2} = P_{\delta_1} P_{\delta_2}, \tag{5.9}$$

então, as variáveis aleatórias δ_1 e δ_2 são consideradas estatisticamente independentes. Neste caso, o conhecimento de uma variável não fornece nenhuma informação adicional

a respeito da outra variável. Caso contrário, quando $P_{\delta_2} = f(P_{\delta_1})$, as variáveis são consideradas correlacionadas, sendo o caso extremo de correlação aquele no qual o conhecimento de uma variável completamente determina a outra variável, sendo $\delta_1 = f(\delta_2)$.

Os indicadores numéricos do grau de dependência estatística entre variáveis aleatórias, cujos valores se anulam para variáveis independentes, são as funções de correlação em várias ordens. A função de *autocorrelação* (ou correlação dupla) é definida para as variáveis δ_1 e δ_2 por meio da expressão:

$$K[\delta_1\delta_2] = \langle \delta_1\delta_2 \rangle - \langle \delta_1 \rangle \langle \delta_2 \rangle. \quad (5.10)$$

A correlação tripla envolvendo as variáveis δ_1 , δ_2 e δ_3 descreve a dependência estatística entre as três variáveis envolvidas, se anulando quando ao menos uma das três variáveis é independente das demais. A correlação tripla é definida em termos de todas as combinações possíveis envolvendo as três variáveis, sendo:

$$K[\delta_1\delta_2\delta_3] = \langle \delta_1\delta_2\delta_3 \rangle - \langle \delta_1 \rangle K[\delta_2\delta_3] - \langle \delta_2 \rangle K[\delta_1\delta_3] - \langle \delta_3 \rangle K[\delta_1\delta_2] + \langle \delta_1 \rangle \langle \delta_2 \rangle \langle \delta_3 \rangle. \quad (5.11)$$

No caso em que todas as três variáveis coincidem, a função de correlação tripla se reduz ao terceiro *cumulante* da distribuição. Correlações de ordens superiores envolvendo várias variáveis podem ser definidas a partir da diferença entre todas as correlações possíveis.

Se as funções de correlação de um processo aleatório forem conhecidas, é possível extrair mais informações a respeito do processo, seja por meio da função densidade de probabilidade ou por meio da função característica. A função característica de uma distribuição aleatória pode ser expressa como uma série de Taylor multidimensional nas funções de correlação:

$$\Theta_{\delta}(u_1, u_2, \dots, u_r; \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) = \exp \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(i)^s}{s!} \sum_{\alpha, \beta, \dots, \omega=1}^r K_s(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r) u_{\alpha} u_{\beta} \dots u_{\omega} \right\}. \quad (5.12)$$

Assim sendo, uma vez conhecidas as funções de correlação de uma variável aleatória, é possível descrever suas propriedades estatísticas genéricas.

5.1.3 - A FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO DO CAMPO DE FLUTUAÇÕES

A descrição estatística do campo de flutuações de densidade é usualmente realizada a partir da função de *autocorrelação*, $\xi(x)$, aplicada a uma distribuição de galáxias e aglomerados, sendo x a separação média entre dois pontos, e.g. Hauser e Peebles (1973); Bahcall (1988). A função de autocorrelação (ou simplesmente a função de correlação) certamente não é o único indicador estatístico aplicável ao estudo do campo de flutuações, mas, sendo o valor esperado para o campo de flutuações nulo, a escolha de indicadores estatísticos baseados no segundo momento da distribuição é intuitiva, visto que a análise dos momentos de ordens superiores pode ser trabalhosa (do ponto de vista computacional) trazendo pouca informação adicional.

Sendo o campo de flutuações aproximadamente homogêneo e isotrópico, a função de correlação de dois pontos é facilmente interpretada baseando-se na consideração de que o campo de flutuações possa ser descrito por uma distribuição pontual com amostragem aleatória de Poisson. No processo de Poisson, a probabilidade conjunta de encontrar dois objetos independentes nos elementos de volume dV_1 e dV_2 é descrita pelo produto das probabilidades individuais, sendo $dP = n^2 dV_1 dV_2$, no qual n é a densidade numérica média de objetos. Para processos aglomerados (não independentes), a função de correlação pode ser estimada como o excesso de probabilidade de encontrar dois objetos, galáxias ou aglomerados separados por uma distância r_{12} , em relação ao evento de Poisson (Peebles, 1980):

$$dP = n^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(r_{12})]. \quad (5.13)$$

Na descrição dos modos de Fourier, a função de correlação é definida como:

$$\xi(r) \equiv \langle \delta(x)\delta(x+r) \rangle = \left\langle \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}'} e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right\rangle. \quad (5.14)$$

ou, expressando os somatórios como uma integral (conforme equação 1.13):

$$\xi(r) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\delta_{\vec{k}}|^2 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3\vec{k}. \quad (5.15)$$

Um processo estatístico para o qual as funções de correlação de ordem dois, $K_2[\delta_1, \delta_2]$, de ordem três, $K_3[\delta_1, \delta_2, \delta_3]$, etc. são todas nulas, com exceção da primeira função de correlação, $K_1[\delta_1]$, indica que a variável δ não é aleatória, mas sim determinística, o que significa que todas as suas realizações serão iguais a δ . Nos processos em que as funções de correlação de ordem três, $K_3[\delta_1, \delta_2, \delta_3]$, quatro, $K_4[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]$... são todas nulas, com exceção da primeira e da segunda função de correlação, a variável δ é classificada como variável aleatória *gaussiana*. Os processos aleatórios não *gaussianos* são aqueles para os quais as correlações de ordens superiores a dois não se anulam completamente.

5.2 - PROCESSOS GAUSSIANOS NO CAMPO DE FLUTUAÇÕES

Sob a hipótese de que o campo de flutuações primordiais obedeça a uma distribuição *gaussiana*, a função de correlação entre picos aleatórios nos pontos x_1 e x_2 pode ser obtida a partir da probabilidade conjunta, $P[\delta_1, \delta_2]$, de encontrarmos os picos de densidade $\delta(x_1)$ e $\delta(x_2)$, ou simplesmente δ_1 e δ_2 . A densidade de probabilidade conjunta *n-dimensional* de um processo *gaussiano* pode ser encontrada por meio da transformada de Fourier da função característica definida para os momentos de $s \leq 2$:

$$P^G[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n] = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left\{ \sum_{s=1}^2 \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \beta=1}^n K_s(\delta_\alpha, \delta_\beta) u_\alpha u_\beta \right\} x \exp \left\{ -i \sum_{\alpha=1}^n u_\alpha \delta_\alpha \right\} du_1 du_2 \dots du_n, \quad (5.16)$$

sendo K_s a função de correlação de ordem s . A integral acima resulta na densidade de probabilidade (Gnedenko e Kolmogorov, 1968):

$$P^G[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n] = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left[\det \| K_2(\delta_\alpha, \delta_\beta) \| \right]^{-1/2} x \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} [\delta_\alpha - K_1(\delta_\alpha)] [\delta_\beta - K_1(\delta_\beta)] \right\}. \quad (5.17)$$

sendo $\det \| K_2(\delta_\alpha, \delta_\beta) \|$ e $\| a_{\alpha\beta} \|$, respectivamente, o determinante e a inversa da matriz de correlação da variável δ .

Para um campo de flutuações *gaussianas*, bidimensional e com média nula, $k_1(\delta) = \langle \delta \rangle = 0$, a matriz de correlação é facilmente obtida e invertida, resultando na densidade de probabilidade (Apêndice B):

$$P^G[\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\frac{1}{1-A^2} \right)^{1/2} e^{-Q[\delta_1, \delta_2]}, \quad (5.18)$$

$$\text{sendo } A = \frac{\xi_r}{\sigma^2}, \text{ para: } \begin{cases} \xi_r = \langle \delta_1 \delta_2 \rangle, \quad r = |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \\ \sigma^2 = \langle \delta_1^2 \rangle = \langle \delta_2^2 \rangle \end{cases},$$

$$e \quad Q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-A^2} \right) \frac{1}{\sigma^2} [\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2A\delta_1\delta_2]. \quad (5.19)$$

A função de correlação, ξ_r , representa a função de correlação média de um campo bidimensional com distribuição *gaussiana*, $K_2(\delta_1, \delta_2)$.

Para encontrar a correlação de picos de alta densidade, devemos estimar a probabilidade de que δ_1 e δ_2 sejam picos com densidade η vezes maior que a variância do campo, σ^2 . Para um campo *gaussiano*, esta probabilidade será:

$$P^G[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma] = \int_{\eta\sigma}^{\infty} d\delta_1 \int_{\eta\sigma}^{\infty} d\delta_2 P^G[\delta_1, \delta_2]. \quad (5.20)$$

A integral acima é resolvida usando a expressão de $P^G[\delta_1, \delta_2]$ como a transformada de Fourier da função característica. Considerando campos fracamente correlacionados, $A (= \xi_r / \sigma^2) \ll 1$, e picos de alta densidade, $\eta \gg 1$, a integral acima será:

$$P^G[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma] = \int_{\eta\sigma}^{\infty} d\delta_1 \int_{\eta\sigma}^{\infty} d\delta_2 \left[\frac{1}{\sigma^2} \sum_{p=0}^{\infty} F^{(p+1)}\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\right) F^{(p+1)}\left(\frac{\delta_2}{\sigma}\right) \right] \frac{(2A)^p}{p!}, \quad (5.21)$$

cujas soluções podem ser encontradas em termos da função erro (*erf*):

$$F^{(p+1)}(z) = \frac{(-i)^p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p e^{\left\{-i\lambda z - \frac{z^2}{2}\right\}} d\lambda, \quad (5.22)$$

resultando na solução final para $P^G[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma]$ (Apêndice B):

$$P^G[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\eta} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \right)^2 (1 + 2A\eta^2). \quad (5.23)$$

Redefinindo 5.23, pode-se expressar a probabilidade de encontrar picos δ_1 e δ_2 com densidade η vezes maior que a variância do campo *gaussiano*, σ^2 , como (Padmanabhan, 1999):

$$P^G[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma] \equiv [P^G(\delta > \eta\sigma)]^2 [1 + \xi_{\eta}^G(r)], \quad (5.24)$$

sendo $[P^G(\delta > \eta\sigma)]^2$ a probabilidade média de encontrar picos de alta densidade num campo *gaussiano* bidimensional e $[1 + \xi_{\eta}^G(r)]$ o excesso de probabilidade, expresso em

termos da função de correlação para picos com densidade $\eta\sigma$, num campo de flutuações com correlação média ξ_r . Para $\left(\frac{\xi_r}{\sigma^2}\right) \ll 1$ e $\eta \gg 1$, tem-se:

$$\xi_\eta^G(r) \equiv 2A\eta^2 \sim e^{2A\eta^2} - 1 = \exp\left[2\left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^2 \xi_r\right] - 1. \quad (5.25)$$

Através da expressão 5.25, observa-se que, para picos de alta densidade, a função de correlação pode assumir valores significativamente maiores que a função de correlação média do campo. Para $A \ll 1$ e $\eta \sim \sigma$, a função de correlação entre os picos se aproxima da função de correlação média do campo.

5.3 – A FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO EM CAMPOS NÃO GAUSSIANOS

Para o cálculo da função de correlação de picos de alta densidade num campo de flutuações com distribuição não *gaussiana*, o procedimento adotado é similar ao procedimento descrito na seção anterior. É necessário inicialmente estimar a densidade de probabilidade bidimensional do campo em questão e integrá-la para limites superiores a $\eta\sigma$. Neste caso, a densidade de probabilidade, estimada a partir da função característica de acordo com a expressão 5.16, deve conter termos de ordem superior a dois na expansão das funções de correlação. Entretanto, ao contrário do caso *gaussiano*, para um campo genérico de estatística não *gaussiana*, a estimativa de $P^{NG}[\delta_1, \delta_2]$ envolvendo termos de correlações múltiplas não pode ser obtida analiticamente por meio da transformada de Fourier da função característica. A abordagem sugerida por Gnedenko e Kolmogorov (1968), para contornar esta dificuldade, envolve o cálculo da densidade de probabilidade $P^{NG}[\delta_1, \delta_2]$ a partir da expansão em polinômios generalizados de Hermite tendo como coeficientes as funções de *quasi-momento*:

$$P^{NG}[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n] = \left\{ 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{\alpha\beta \dots \omega=1}^n b_s(\delta_\alpha, \delta_\beta, \dots, \delta_\omega) H_{\alpha, \beta, \dots, \omega}[\delta - \kappa_1(\delta)] \right\} P^G[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n], \quad (5.26)$$

sendo b_s as funções de *quasi-momento*, H os polinômios generalizados de Hermite e κ_1 o primeiro *cumulante* da distribuição. As funções de *quasi-momento*, assim como as funções de correlação, também descrevem completamente a distribuição do campo. A relação entre ambas é expressa como:

$$\exp \left\{ \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \beta \dots \omega=1}^n K_s(x_\alpha, x_\beta \dots x_\omega) z_\alpha z_\beta \dots z_\omega \right\} = 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \beta \dots \omega=1}^n b_s(x_\alpha, x_\beta \dots x_\omega) z_\alpha z_\beta \dots z_\omega. \quad (5.27)$$

Os polinômios generalizados de Hermite são definidos como:

$$H_{\alpha\beta \dots \omega}[x] = e^{\varphi[x]} \left(-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \dots \left(-\frac{\partial}{\partial x_\omega} \right) e^{-\varphi[x]}, \quad (5.28)$$

para:

$$\varphi[x] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta, \quad (5.29)$$

na qual $a_{\alpha\beta}$ representa os elementos da matriz de correlação da variável δ .

Através da expressão 5.26, a densidade de probabilidade conjunta de uma variável não *gaussiana*, $P^{NG}[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n]$, é expressa em função da densidade de probabilidade de uma variável *gaussiana*, $P^G[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n]$, acrescida de termos envolvendo as correlações de ordens superiores a dois. Os fatores acrescidos na densidade de probabilidade *gaussiana* correspondem aos desvios de *gaussianidade* da distribuição. O caso unidimensional da expressão 5.26 é conhecido como a série de Edgeworth.

O caso bidimensional de 5.26 pode ser expresso como (Gnedenko e Kolmogorov, 1968):

$$P^{NG}[\delta_1, \delta_2] = \left\{ 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{l+m=s} b_{(lm)} H_{(lm)}[\delta - k_1(\delta)] \right\} \times P^G[\delta_1, \delta_2], \quad (5.30)$$

sendo:

$$b_{lm} = b_{l+m} \left(\underbrace{\delta_1, \dots, \delta_1}_{1 \text{ vezes}}; \underbrace{\delta_2, \dots, \delta_2}_m \text{ vezes} \right) \quad \text{e} \quad H_{lm} = H_{\underbrace{1, \dots, 1}_{1 \text{ vezes}}; \underbrace{2, \dots, 2}_m \text{ vezes}}.$$

5.3.1 – CORRELAÇÃO APROXIMADA PARA O CAMPO MISTO

Sendo a densidade de probabilidade conjunta de uma variável não *gaussiana* expressa em termos da densidade de probabilidade de uma variável *gaussiana* acrescida de um fator de correção envolvendo as correlações de ordens superiores a dois, a função de correlação de picos de alta densidade num campo de flutuações não *gaussianas* pode ser expressa como:

$$P^{NG}[\delta_1, \delta_2] = [P^G(\delta > \eta\sigma)]^2 [1 + \xi_{\eta}^G(r) + C_{\eta}^{NG}], \quad (5.31)$$

sendo C_{η}^{NG} o fator de correção não *gaussiana*.

Para o modelo de campo misto, no qual a função distribuição do campo é expressa como uma *gaussiana* ligeiramente distorcida, a princípio, pode-se propor uma solução aproximada para P^{NG} , sob a hipótese de que o fator de correção C_{η}^{NG} não altera significativamente a integral em $P^{NG}[\delta_1, \delta_2]$ e, portanto, a correlação não *gaussiana* aproximada para o modelo de campo misto seria estimada como no caso *gaussiano*, a partir de 5.25, resultando em:

$$\xi_{\eta}^{NG}(r) \cong \xi_{\eta}^{mix}(r) \approx \exp \left[2 \left(\frac{\eta^2}{\sigma^2} \right) \xi^{Mix}(r) \right] - 1. \quad (5.32)$$

Para completar o cálculo de $\xi_{\eta}^{\text{Mix}}(\mathbf{r})$, é necessário estimar a função de correlação média no modelo de campo misto, $\xi^{\text{Mix}}(\mathbf{r})$. Num determinado volume V , a correlação média do campo é definida a partir da transformada de Fourier do espectro de potência do campo de flutuações (equação 5.15):

$$\xi[\mathbf{r}] = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} P(k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{k} .$$

Para um campo homogêneo e isotrópico, a integral de volume no espaço de fase resulta em:

$$\xi[\mathbf{r}] = \frac{V}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} P(k) k^2 dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 e^{-ikru} du , \quad (5.33)$$

sendo $u = \cos \theta$. Resolvendo as integrais em $d\phi$ e du , é possível estimar a correlação média para o modelo de mistura como:

$$\xi^{\text{Mix}}(\mathbf{r}) = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{\infty} P^{\text{Mix}}(k) \frac{\text{sen}(kr)}{kr} k^2 dk , \quad (5.34)$$

sendo $P^{\text{Mix}}(k)$ o espectro de potência do modelo de mistura:

$$P^{\text{mix}}(k) = P(k)[1 + M(\alpha_0)k] = \beta k^n [1 + M(\alpha_0)k], \quad (5.35)$$

no qual o espectro puramente *gaussiano*, com $M(\alpha_0) = 0$, se reduz a $P(k) = \beta k^n$.

Substituindo 5.35 em 5.34, observa-se que, para um campo misto genérico, a função de correlação é expressa como a soma das correlações individuais dos campos *gaussiano* e não *gaussiano*:

$$\xi^{\text{Mix}}(\mathbf{r}) = \frac{V\beta}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(kr)}{kr} k^{n+2} dk + \frac{V\beta M(\alpha_0)}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(kr)}{kr} k^{n+3} dk \quad (5.36)$$

$$\xi^{\text{Mix}}(\mathbf{r}) \equiv \xi^G(\mathbf{r}) + M(\alpha_0)\xi^{\text{NG}}(\mathbf{r})$$

As integrais da expressão 5.36, divergem para valores positivos de n , podendo apenas ser integradas até um certo raio, R , que compreenda um volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Procedendo desta maneira, encontra-se:

$$\xi^{Mix}(R) = \beta \left[\frac{0,44}{3\pi R} + \frac{0,36M(\alpha_0)}{3\pi R^2} \right], \quad (5.37)$$

sendo β , a constante herdada do espectro de potência das flutuações primordiais.

O valor de β é obtido por meio da normalização do espectro de potência ou da normalização direta da função de correlação. A normalização do espectro de potência das flutuações, $P(k)$, em função do termo de quadrupolo da RCF, Q_{rms} , considera que o principal contribuinte para as flutuações de temperatura em grandes escalas é o efeito Sachs-Wolfe de interação gravitacional, sendo sua contribuição estimada para flutuações fora do raio de Hubble, como (eg. Peacock, 1999; Barlett, 1999):

$$C_l^{SW} = 16\pi \int j_l^2(kR_H) \frac{dk}{k} (D_{SUE}k)^{-4} \Delta_k^2, \quad (5.38)$$

para os modelo de Universo plano, $\Omega_0=1$, sendo: R_H o raio de Hubble, D_{SUE} ($\sim 2cH_0^{-1}z_{SUE}^{-1/2}$) o diâmetro do horizonte *comóvel* na Superfície do Último Espalhamento, e Δ_k^2 é definido como o espectro de potência adimensional em unidades logarítmicas, sendo $\Delta_k^2 \propto k^3P(k)$.

Expressando o espectro de potência como $P(k) = \beta k^n$, e $\Delta_k^2 = \beta(D_{SUE})^{n+3} k^{n+3}$, tem-se:

$$C_l^{SW} = 16\pi \beta \int_0^\infty (D_{SUE}k)^{n-1} j_l^2(kR_H) \frac{dk}{k}. \quad (5.39)$$

Resolvendo a integral na expressão acima, obtém-se (White, Scott e Silk, 1994):

$$C_l^{SW} = 2^n \pi^2 \beta \frac{\Gamma(3-n) \Gamma\left(\frac{2l+n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{4-n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2l+5-n}{2}\right)}. \quad (5.40)$$

Para $l = 2$ e $n = 1$, a constante de normalização do espectro de potência se reduz a:

$$\beta = \frac{3C_2}{4\pi}. \quad (5.41)$$

Considerando o termo de quadruplo estimado pelas medidas do COBE, $Q_{\text{rms}} = (13 \pm 4) \mu\text{K}$, a constante de normalização do espectro de potência será $\beta = (1,5 \pm 0,8) \times 10^{-11}$. Assim sendo, a função de correlação normalizada pelas flutuações da RCF pode ser expressa como:

$$\xi^{\text{Mix}}(R) = 1,5 \times 10^{-11} \left[\frac{0,44}{3\pi R} + \frac{0,36M(\alpha_0)}{3\pi R^2} \right]. \quad (5.42)$$

Uma vez obtida a expressão de $\xi^{\text{Mix}}(R)$ (equação 5.42), resta finalmente identificar uma escala R_0 característica para a função $\xi(R)$. Para definir esta escala, deve-se observar que $\xi^{\text{Mix}}(R)$ é uma função contínua e *monotônica* em R , com os seguintes limites: para $R \rightarrow 0 \Rightarrow \xi^{\text{Mix}} \rightarrow \infty$ e para $R \rightarrow \infty \Rightarrow \xi \rightarrow 0$. Assim sendo, é possível definir um certo valor intermediário, $R_0 > 0$, com significado físico, que sirva como escala de referência em $\xi(R)$.

Para o campo de flutuações da RCF, o diâmetro de Hubble na SUE é considerado um limiar, além do qual, as flutuações podem ser consideradas fracamente correlacionadas e, dentro do qual, os efeitos de mistura correlacionada se intensificam. Portanto, uma escala definida a partir do diâmetro de Hubble na SUE, a princípio, seria a mais indicada para descrever a função de correlação das flutuações no contexto de mistura.

A distância linear aproximada para pontos separados pelo ângulo de Hubble, θ_H , pode ser estimada a partir do horizonte *comóvel* do Universo na SUE (Peacock, 1999):

$$DH_{\text{SUE}} \sim cH_0^{-1} z_{\text{SUE}}^{-1/2}. \quad (5.43)$$

Considerando $H_0 = 70 \text{ km/s Mpc}^{-1}$ e $z_{\text{SUE}} \sim 1100$, o valor aproximado de DH_{SUE} será 129 Mpc.

Definindo R_0 em 129 Mpc como uma escala de referência, tem-se:

$$\xi^{Mix}(R) = 1,5 \times 10^{-11} \left[\frac{4,67 \times 10^{-2}}{129R/R_0} + \frac{3,82 \times 10^{-2} M(\alpha_0)}{(129)^2 R^2/R_0^2} \right], \quad (5.44)$$

que equivale a:

$$\xi^{Mix}(R) = 5,43 \times 10^{-15} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} + 3,44 \times 10^{-17} M(\alpha_0) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-2}, \quad (5.45)$$

para $R_0 = 129$ Mpc.

A Figura 5.1 ilustra o comportamento da função de correlação média no modelo de campo misto, estimado por meio da expressão 5.45, para flutuações com distribuição *gaussiana* e exponencial ($M^{Exp}(\alpha_0) = \alpha_0$) com razão de mistura $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$. Também são ilustrados os comportamentos individuais das componentes puramente *gaussiana* e exponencial (para $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$). Os efeitos em $\xi^{Mix}(R)$, decorrentes do aumento da razão de mistura para a distribuição *gaussiana* e exponencial, são ilustrados na Figura 5.2.

Observando o comportamento de $\xi^{Mix}(R)$ podemos notar que, mesmo em pequena proporção ($\alpha_0 \sim 10^{-3}$), a contribuição da componente não *gaussiana* para a correlação média do campo misto é bastante significativa, sobretudo em pequenas escalas, $R/R_0 \leq 10^{-4}$, chegando mesmo a prevalecer sobre a componente *gaussiana*, para valores R/R_0 inferiores a 10^{-5} . Em escalas da ordem do diâmetro de Hubble, $R/R_0 \sim 1$, a contribuição não *gaussiana* é praticamente nula, prevalecendo o caráter puramente *gaussiano*, sendo a função de correlação da ordem de aproximadamente 10^{-14} . Portanto, para estas escalas, $\theta > \theta_H$, a função de correlação média do campo misto descreve corretamente as características básicas definidas para o modelo de mistura em escala.

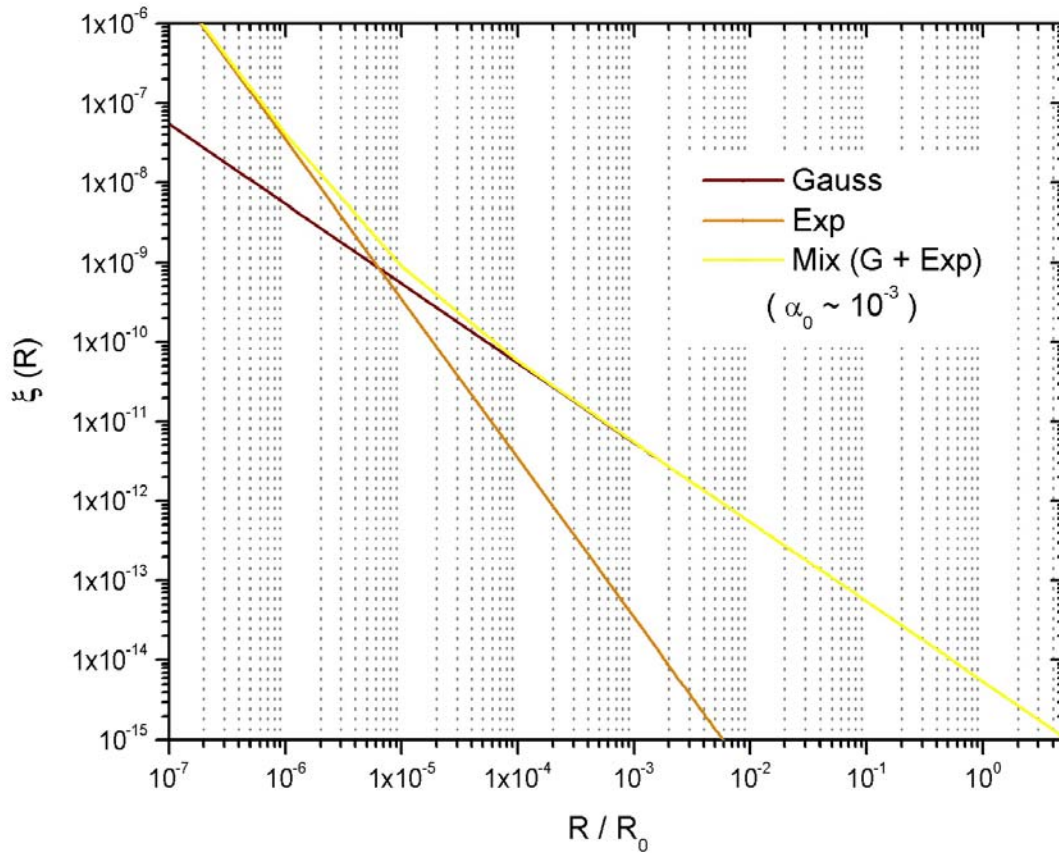


FIGURA 5.1 – Comportamento da função de correlação média entre dois pontos separados por uma distância R/R_0 , considerando campos de flutuações com distribuição *gaussiana* e exponencial, à razão de mistura $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$.

Entretanto, observando a Figura 5.2, nota-se que os efeitos diferenciais na função de correlação para o modelo de campo misto, em função do coeficiente de mistura, ocorrem em escalas inferiores a $R/R_0 \sim 1 \times 10^{-4}$. Estas escalas correspondem a $R \leq 1,29 \times 10^{-2}$ Mpc, que equivale a separação angular na SUE de $\theta \sim 3,5 \times 10^{-6}$ rad ($\sim 0,7''$), uma escala angular muito baixa quando comparada aos efeitos observados no espectro de potência da RCF. Este fato se justifica, uma vez que $\xi^{\text{Mix}}(R)$ descreve apenas as propriedades médias do campo de flutuações em função das alterações descritas no espectro de potência primordial para o modelo de mistura em escala. Assim sendo, $\xi^{\text{Mix}}(R)$ reflete apenas o aumento de potência para flutuações em pequenas

escalas com o incremento gradual da segunda componente do campo. Como já era esperado, os detalhes adicionais a respeito das correlações acrescidas no modelo de campo misto devem ser inferidos a partir do estudo dos picos de flutuações no contexto de mistura não *gaussiana*.

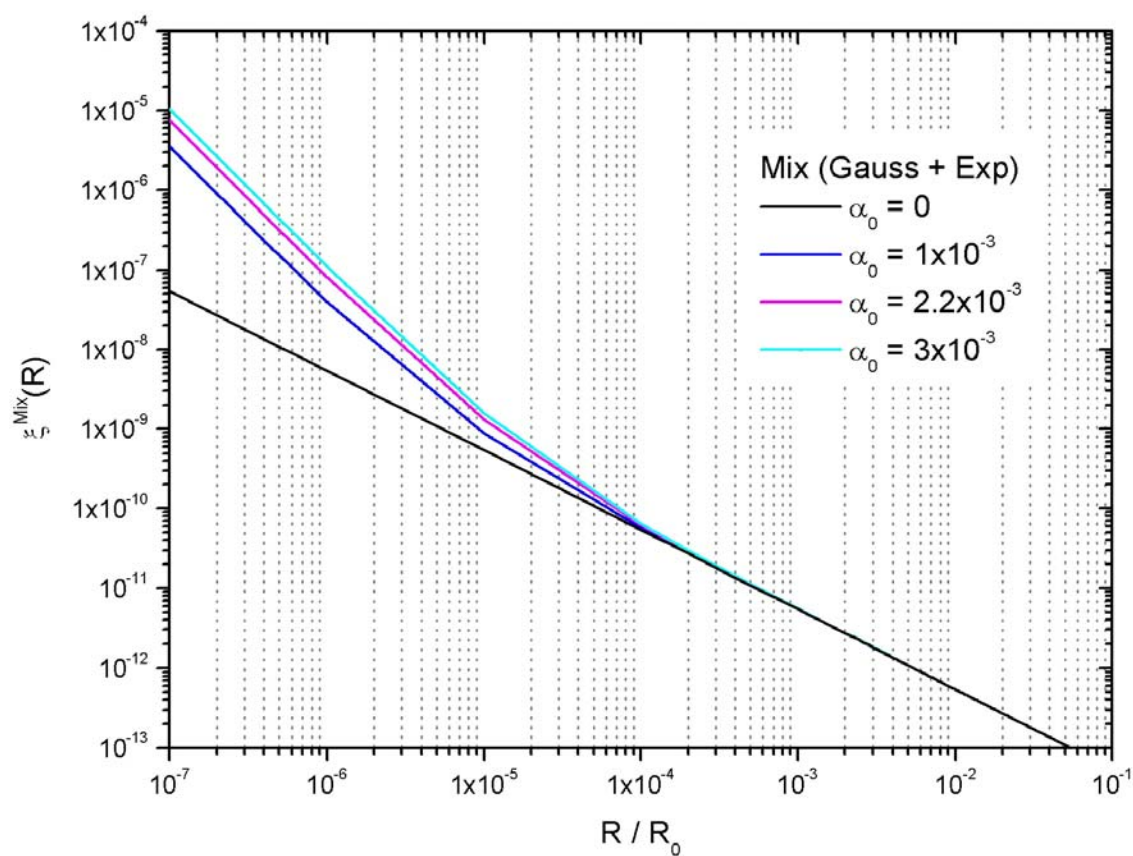


FIGURA 5.2 – Comportamento da função de correlação média entre dois pontos separados por uma distância R/R_0 , considerando campos com distribuição *gaussiana* e exponencial, às razões de mistura: $\alpha_0 = 1 \times 10^{-3}$; $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ e $\alpha_0 = 3 \times 10^{-3}$.

A solução aproximada para a função de correlação entre picos de densidade $\eta\sigma$ no modelo de mistura fracamente correlacionada pode ser estimada a partir da substituição, na expressão 5.32, do valor de $\xi^{\text{Mix}}(R)$ dado pela expressão 5.45, resultando:

$$\xi_{\eta}^{\text{Mix}}(R) \approx \exp \left[\frac{2\eta^2}{\sigma^2} \left(3,1 \times 10^{-13} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} + 1,1 \times 10^{-13} M(\alpha_0) \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-2} \right) \right] - 1. \quad (5.46)$$

A Figura 5.3 ilustra a versão aproximada para a função ξ_{η}^{Mix} , no modelo de campo misto com distribuição *gaussiana* e exponencial, entre picos da ordem de 3σ . Esta figura evidencia a transição entre a função de correlação de picos de alta densidade para os modelos *gaussiano* puro e o modelo de campo misto com $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$. Nota-se, na Figura 5.3, que o incremento do segundo campo e a conseqüente transferência de potência do modelo de mistura resultam no aumento da correlação média do campo e, conseqüentemente, da correlação entre picos de alta densidade.

Também é ilustrada na Figura 5.3 a curva da função de correlação média do campo de flutuações no contexto de mistura. Como pode ser observado, a correlação entre picos de alta densidade é significativamente maior que a correlação média do campo, cerca de 10^2 a 10^3 vezes maior que $\xi^{\text{Mix}}(R)$, sobretudo em pequenas escalas, para as quais a componente não *gaussiana* é mais proeminente. A escala de transição entre os modelos puramente *gaussiano* e o modelo de mistura é novamente da ordem de 10^{-4} , conforme estabelecido no comportamento de $\xi^{\text{Mix}}(R)$ para misturas com α_0 aproximadamente 10^{-3} .

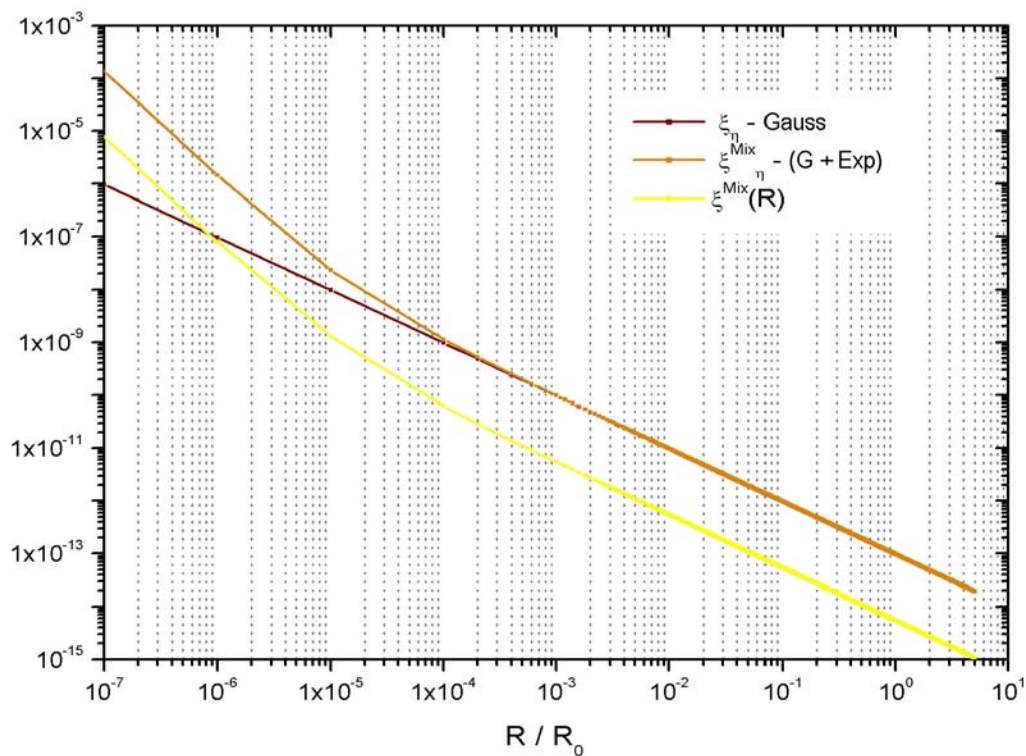


FIGURA 5.3 - Comportamento da função de correlação entre picos com densidade $\eta = 3\sigma$, ξ_{η}^{Mix} , para a composição de mistura *gaussiana* e *exponencial* com coeficiente de mistura $\alpha_0 = 2.2 \times 10^{-3}$.

O comportamento da função de correlação aproximada, para picos de densidade $\eta = 3\sigma$, estimada para o modelo de campo misto com diferentes combinações de componentes à razão de mistura $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$ é ilustrado na Figura 5.4. Nesta figura, os efeitos diferenciados na correlação do campo misto para diferentes componentes fica evidente apenas em escalas de segundos de arco, $R \leq R_0 \times 10^{-4}$, muito inferior à escala de estudo das anisotropias da RCF. Assim sendo, a diferença entre a função de correlação de campos com diferentes distribuições não deve ser evidente nos estudos da RCF. A análise das correlações no modelo de mistura nos mostra claramente que as alterações observadas no espectro de potência da RCF resultam do processo de mistura entre os campos, correspondendo às alterações que foram definidas no espectro de potência das

flutuações e na função de densidade dos fótons, Δ_l^{Mix} , e não do tratamento estatístico do modelo misto definido a partir do termo de mistura, $M(\alpha_0)$.

A princípio, poderíamos supor que a função de correlação entre picos de alta densidade poderia ser estimada para picos tão intensos quanto possível, $\eta \rightarrow \infty$. Não existe, na expressão aproximada de ξ_η^{mix} (descrita em 5.46), nenhuma limitação quanto à existência ou não de picos altamente correlacionados. De acordo com a expressão aproximada de ξ_η^{Mix} , quanto maior a densidade dos picos, mais alta será a correlação entre os mesmos. Entretanto, como será mostrado na seção seguinte, modelos com função de distribuição ligeiramente não *gaussiana*, envolvendo baixas correlações, apresentam valores limitados para picos de alta densidade.

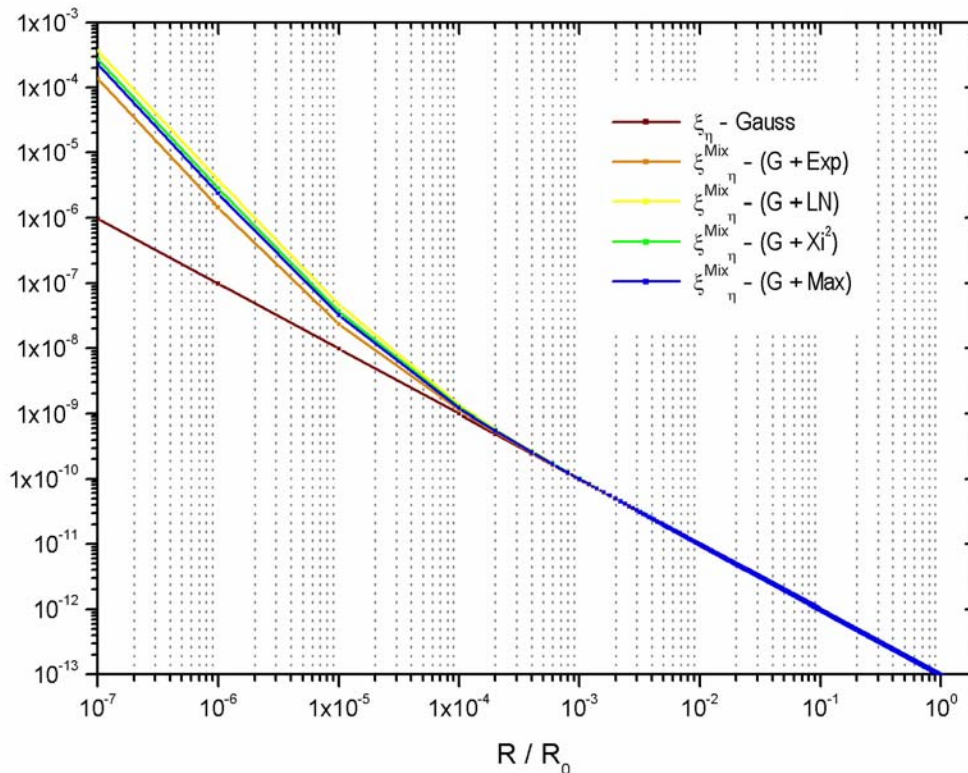


FIGURA 5.4 - Comportamento de ξ_η^{Mix} para diferentes componentes não *gaussianas* com coeficiente de mistura $\alpha_0 = 2.2 \times 10^{-3}$ e $\eta = 3\sigma$.

5.3.2 – O FATOR DE CORREÇÃO PARA A CORRELAÇÃO DE CAMPOS NÃO GAUSSIANOS

Uma descrição mais precisa para a função de correlação entre os picos de um campo de flutuações com distribuição não *gaussiana* pode ser obtida por meio da estimativa do fator de correção C_{η}^{NG} que aparece na expressão 5.31. A solução aproximada de ξ_{η}^{Mix} para campos fracamente correlacionados, apresentada na seção anterior, descreve genericamente as alterações observadas nas anisotropias da RCF, sobretudo o efeito de acúmulo de potência em pequenas escalas em função do aumento da correlação média do campo, mas nenhuma informação é fornecida sobre os efeitos das correlações superiores ao fator dois. Estas informações adicionais podem ser obtidas por meio da expressão de C_{η}^{NG} .

Para melhorar a estimativa da função de correlação entre picos de alta densidade no modelo de campo misto, inicialmente, estimamos a densidade de probabilidade de um campo com distribuição genérica não *gaussiana*, utilizando, para esta finalidade, a expansão sugerida por Gnedenko e Kolmogorov (1968), expressão 5.30. A expansão realizada se estendeu até o termo em $s = 6$, considerando todas as correlações possíveis de até sexta ordem entre as variáveis δ_1 e δ_2 . A descrição mais detalhada do processo de expansão é apresentada no Apêndice C.

Uma vez realizada a expansão de $P^{NG}[\delta_1, \delta_2]$ em polinômios de Hermite, a probabilidade de encontrar picos de alta densidade foi obtida integrando-se $P^{NG}[\delta_1, \delta_2]$ em $d\delta_1 > \eta\sigma$ e $d\delta_2 > \eta\sigma$. Combinando os termos da integral de $P^{NG}[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma]$ obtém-se uma expressão do tipo:

$$P^{NG}[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\eta} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \right)^2 (1 + 2A\eta^2 + C_{\eta}^{NG}), \quad (5.47)$$

sendo $2A\eta^2$ o excesso de probabilidade de encontrar picos com densidade $\eta\sigma$, para um campo com distribuição *gaussiana*, e C_η^{NG} o excesso de probabilidade devido aos fatores de correlação de ordem superior a dois. As expressões completas de $P^{NG}[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma]$ e do fator de correção C_η^{NG} foram obtidos com auxílio do programa *Mathematica*¹ e, por se tratar de expressões extensas, neste trabalho, apenas serão discutidas as propriedades básicas da função C_η^{NG} e estimada a contribuição não *gaussiana* proveniente das correlações de ordens superiores.

Para um campo bidimensional com picos de densidade δ_1 e δ_2 , definidos nos pontos x_1 e x_2 , a expressão de C_η^{NG} é dependente de ξ_r , η , e dos coeficientes das funções de *quasi-momento*, $\langle \delta_i \dots \delta_j \rangle$, para $(i, j) = [1, 2]$. Na expansão de $P^{NG}[\delta_1, \delta_2]$, devem ser considerados todos os possíveis fatores de correlação entre as variáveis envolvidas. Neste caso, é necessário definir as correlações:

$$\langle \delta_1 \delta_1 \rangle \equiv \sigma^2 = \xi_0 \quad \text{e} \quad \langle \delta_1 \delta_2 \rangle \equiv \xi_R, \quad (5.48)$$

correlações estas já consideradas no modelo *gaussiano*, e as correlações de ordem ≥ 3 :

$$\begin{aligned} \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_1 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_1 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_2 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_1 \delta_1 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_1 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_2 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_1 \delta_1 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_1 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_2 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_1 \delta_1 \rangle, \\ \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle. \end{aligned} \quad (5.49)$$

¹ <http://www.wolfram.com/products/mathematica/index.html>

A definição das correlações listadas acima estabelece o comportamento não *gaussiano* das variáveis do campo, δ_1 e δ_2 . As correlações estimadas no cálculo de C_η^{NG} consideram ainda as correlações múltiplas, tipo:

$$\begin{aligned}
\langle \delta_1 \delta_1 \rangle \langle \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \rangle \langle \delta_2 \delta_2 \rangle, \\
\langle \delta_1 \delta_2 \rangle \langle \delta_1 \delta_2 \rangle, \\
\langle \delta_1 \delta_1 \rangle \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \rangle \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle, \\
\langle \delta_1 \delta_2 \rangle \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_1 \rangle \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle, \\
\langle \delta_1 \delta_1 \rangle \langle \delta_1 \delta_1 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \rangle \langle \delta_2 \delta_2 \delta_1 \rangle, \\
\langle \delta_1 \delta_1 \rangle \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \rangle \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle, \\
\langle \delta_1 \delta_1 \rangle \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \rangle \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle, \\
\langle \delta_1 \delta_1 \rangle \langle \delta_1 \delta_1 \rangle \langle \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \rangle \langle \delta_2 \delta_2 \rangle \langle \delta_2 \delta_2 \rangle, \\
\langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle \langle \delta_1 \delta_1 \delta_1 \rangle &= \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle \langle \delta_2 \delta_2 \delta_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Para investigar o comportamento do fator de correção não *gaussiano*, C_η^{NG} , inicialmente as correlações em 5.50 foram definidas para uma distribuição genérica, considerando um campo ligeiramente não *gaussiano*. Sabe-se que para uma distribuição *gaussiana*, as correlações de ordens superiores a dois se anulam. Para um campo de flutuações de baixa amplitude, $\delta \sim 10^{-5}$, e ligeiramente distorcido de uma *gaussiana*, pode-se, a princípio, aproximar as correlações em 5.50 com limite superior em 10^{-3} . Fixadas as correlações, $\langle \delta_i \dots \delta_j \rangle \leq 10^{-3}$, e considerando $\sigma \sim 1$, o resultado final de C_η^{NG} para correlações de até sexta ordem é do tipo:

$$\begin{aligned}
C_\eta^{NG}(\xi_r, \eta) = & 5,337 - 0,001 \xi_r - 3,626 \xi_r^2 - 0,35 \xi_r^4 + 0,005 \eta + \\
& 0,004 \xi_r \eta - 0,002 \xi_r^2 \eta + 3,879 \eta^2 + 12,179 \xi_r \eta^2 + \\
& 0,6 \xi_r^2 \eta^2 + 0,308 \xi_r^3 \eta^2 + 0,002 \eta^3 + 0,008 \xi_r \eta^3 + \\
& 0,002 \xi_r^2 \eta^3 + 0,126 \eta^4 + 7,282 \xi_r \eta^4 + 2,939 \xi_r^2 \eta^4 + \\
& 1,017 \xi_r^3 \eta^4 + 0,225 \xi_r^4 \eta^4 - 0,0003 \eta^5 + 0,004 \xi_r \eta^5 + \\
& 0,0008 \xi_r^2 \eta^5 - 0,042 \eta^6 + 0,364 \xi_r \eta^6 + 0,125 \xi_r^2 \eta^6 + \\
& 0,092 \xi_r^3 \eta^6 + 0,05 \xi_r^4 \eta^6 - 0,0006 \xi_r \eta^7 - 0,0003 \xi_r^2 \eta^7 - \\
& 0,084 \xi_r \eta^8 - 0,108 \xi_r^2 \eta^8 - 0,067 \xi_r^3 \eta^8 - 0,017 \xi_r^4 \eta^8.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Neste caso, o fator de correção estimado, para uma distribuição não *gaussiana* genérica com baixo nível de correlação, será função da correlação média do campo, ξ_r , e da intensidade dos picos, η . Fixando o valor unitário para ξ_r , o comportamento de $C_\eta^{\text{NG}}(\eta)$ define os picos de densidade possíveis em função das correlações consideradas. O comportamento de C_η^{NG} em função de η é ilustrado na Figura 5.5, que ilustra os fatores de correção diferenciados para correlações até terceira ordem, C_η^3 , até quarta ordem, C_η^4 , até quinta ordem, C_η^5 , e até sexta ordem, C_η^6 .

Uma vez conhecidas as correlações presentes no caso não *gaussiano*, o fator de correção, C_η^{NG} , define os valores típicos para a correção da função de correlação dos picos de densidade $\eta\sigma$. Como pode ser observado na Figura 5.5, quando consideradas correlações de até sexta ordem, C_η^{NG} apresenta valores significativos para picos de densidade até 3σ .

Consideradas apenas as correlações até terceira ordem, C_η^3 , observa-se inicialmente valores aproximadamente nulos para o fator de correção, o qual apresenta aumento gradual e lento para valores de $\eta > 1$. Para correlações até quarta ordem, começa a surgir um pico de correlação em torno de $\eta \sim 1,3\sigma$. Em C_η^5 a estimativa é dominada pelos termos de correlação envolvendo a correlação média do campo em quarta ordem, e, por isso, a estimativa do fator de correção até quinta ordem é bastante semelhante ao fator de correção em ordem quatro. Em C_η^6 , o fator de correção é intensificado e o pico de correlação é mais alargado, centrando-se em torno de $\eta \sim 3\sigma$. Superado este limite, o fator de correção cai abruptamente atingindo valores extremamente negativos. Assim sendo, pode-se dizer que o fator de correção C_η^{NG} define os picos de flutuações permitidos para um determinado nível de correlação média do campo de flutuações. Portanto, para campos fracamente correlacionados e considerando correlações até sexta ordem, não deve ser esperada a presença de picos de flutuações superiores a 3σ .

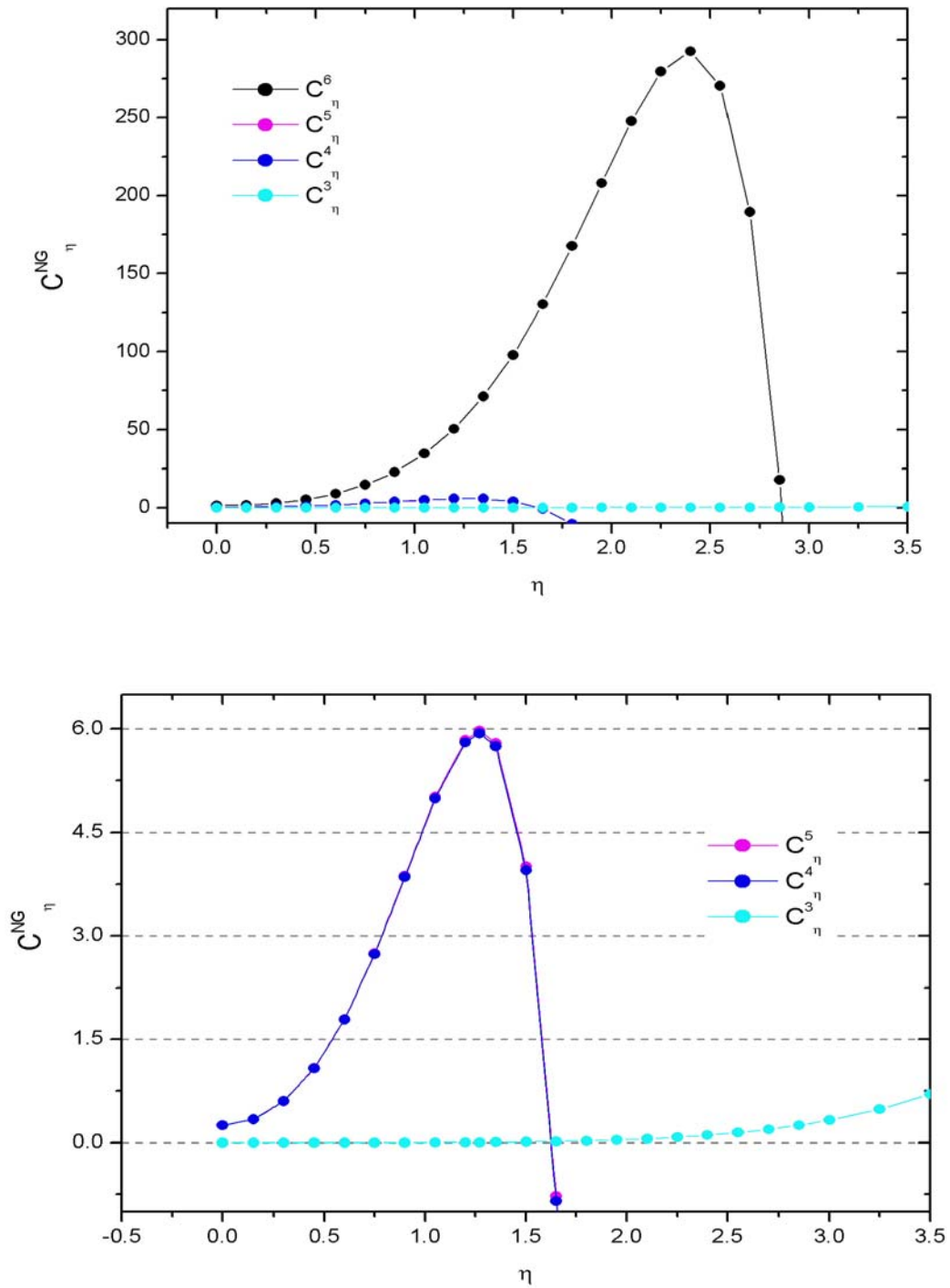


FIGURA 5.5 - Comportamento de C_{η}^{NG} em função de η , fixando a correlação média do campo em $\xi_r \sim 1$. São ilustrados o comportamento do fator de correção para correlações até terceira ordem, C_{η}^3 , até quarta ordem, C_{η}^4 , até quinta ordem, C_{η}^5 e até sexta ordem, C_{η}^6 .

Nas estimativas de C_{η}^{NG} até sexta ordem, para campos fracamente correlacionados ($\langle \delta_i \dots \delta_j \rangle \leq 10^{-3}$), nota-se que os termos dominantes na expressão de C_{η}^{NG} são os termos proporcionais à correlação média do campo: $\langle \delta_1 \delta_2 \rangle$, $\langle \delta_1 \delta_2 \rangle^2$, $\langle \delta_1 \delta_2 \rangle^3$. Assim, na estimativa do fator de correção, C_{η}^{NG} , para a função de correlação entre picos de densidade $\eta\sigma$ esperados no campo misto de flutuações, as correlações definidas em 5.48 foram anuladas, prevalecendo apenas os efeitos da correlação média do campo, ξ_r . Nesta estimativa, as correlações múltiplas consideradas nas funções de *quasi-momento* se reduzem aos termos em ξ_r , lineares ou não: $\langle \delta_1 \delta_2 \rangle$, $\langle \delta_1 \delta_2 \rangle^2$, $\langle \delta_1 \delta_2 \rangle^3$. Esta consideração se baseia na hipótese de campo fracamente correlacionado.

Fixadas as correlações múltiplas, o fator de correção se reduz à expressão:

$$\begin{aligned}
C_{\eta}^{NG}(\xi_r, \eta) = & 5,33 - 3,625 \xi_r^2 - 0,35 \xi_r^4 + 3,875 \eta^2 + 12,171 \xi_r \eta^2 + 0,6 \xi_r^2 \eta^2 + \\
& 0,308 \xi_r^3 \eta^2 + 0,125 \eta^4 + 7,275 \xi_r \eta^4 + 2,9375 \xi_r^2 \eta^4 + 1,017 \xi_r^3 \eta^4 \\
& + 0,225 \xi_r^4 \eta^4 - 0,042 \eta^6 + 0,3625 \xi_r \eta^6 + 0,125 \xi_r^2 \eta^6 + \\
& 0,092 \xi_r^3 \eta^6 + 0,05 \xi_r^4 \eta^6 - 0,083 \xi_r \eta^8 - 0,108 \xi_r^2 \eta^8 - 0,067 \xi_r^3 \eta^8 - \\
& 0,017 \xi_r^4 \eta^8 .
\end{aligned}
\tag{5.52}$$

De modo a representar as correlações introduzidas na mistura dos campos de flutuações no contexto da RCF, o fator de correção C_{η}^{NG} foi inicialmente aplicado ao campo cuja função de correlação média é descrita pela expressão 5.37, e posteriormente foi aplicado o critério de normalização, tal que $C_{\eta}^{NG}(R = R_0) = \xi_{\text{Gauss}}^{\eta}(R = R_0)$. Assim, para flutuações da ordem do diâmetro de Hubble, o fator de correção se iguala à correlação dos picos no tratamento puramente *gaussiano*.

Aplicado o critério de normalização, o incremento estimado em C_{η}^{NG} para a correlação entre picos de densidade 2σ , em função da separação entre os picos, é ilustrado na Figura 5.6. Como pode ser observado, o incremento das correlações de ordens superiores a dois resulta no aumento significativo da correlação entre picos de densidade 2σ , sobretudo para flutuações em pequenas escalas ($R / R_0 \sim 10^{-2}$).

Nota-se, na Figura 5.6, que, para flutuações em escalas inferiores ao diâmetro de Hubble ($R < R_0$), C_η^{NG} apresenta um crescimento lento em relação às correlações *gaussianas*, estimadas em $\xi^{Mix}_\eta(R)$. Este comportamento se justifica pelos termos negativos em C_η^{NG} para correlações de quarta e quinta ordem, estimadas para um campo fracamente correlacionado. Em escalas inferiores a 10^{-2} , o aumento de potência observado em $\xi^{Mix}_\eta(R)$ resulta no aumento significativo do fator de correção, aumentando, conseqüentemente, a correlação entre picos de alta densidade.

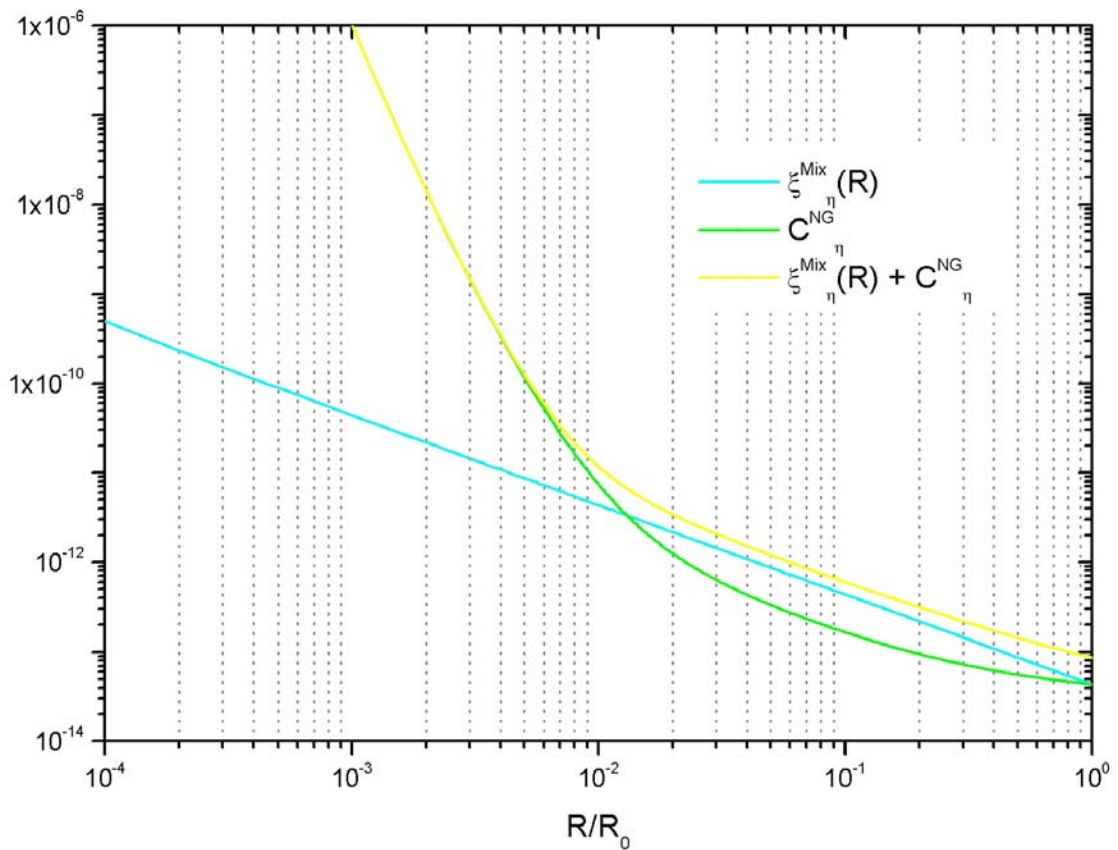


FIGURA 5.6 - Estimativa do fator de correção C_η^{NG} para o campo misto de flutuações com distribuição *gaussiana* e exponencial com razão de mistura $\alpha_0 = 2,2 \times 10^{-3}$. Também são ilustradas a curva da função de correlação entre picos de densidade 2σ , estimada para o modelo misto considerando apenas correlações de ordem dois, ξ^{Mix}_η , e a curva corrigida para incrementos C_η^{NG} .

A Figura 5.7 ilustra a função de correlação estimada para picos de flutuações 2σ estimada nas considerações de um campo puramente *gaussiano*, $\xi_{\eta}^{\text{Gauss}}$, um campo misto com correlações apenas *gaussianas*, ξ_{η}^{Mix} , e um campo misto com correlações de até ordem seis, C_{η}^{NG} . Esta figura ilustra mais claramente o efeito da introdução de correlações no campo de densidade. O incremento de correlações não *gaussianas*, ainda que em baixa proporção, resulta em campos de flutuações mais fortemente correlacionadas.

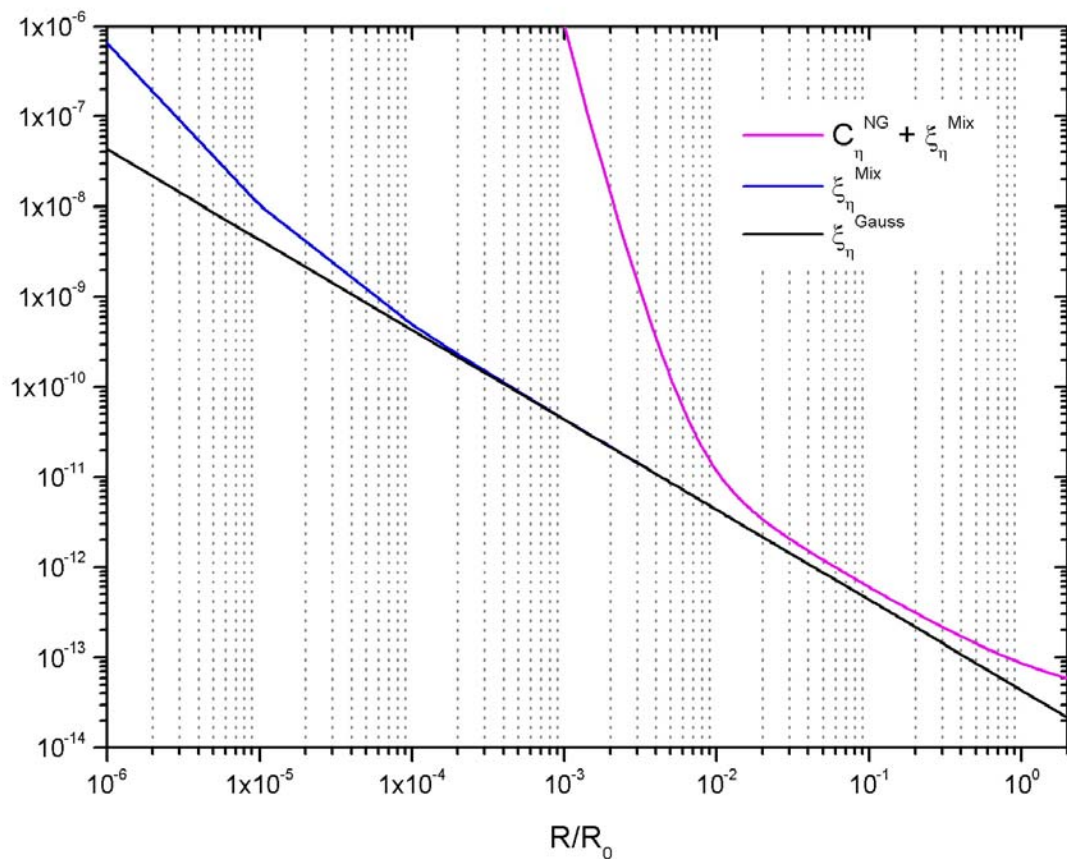


FIGURA 5.7 - Comportamento da função de correlação entre flutuações de densidade 2σ , estimada para as considerações de campo puramente *gaussiano*, $\xi_{\eta}^{\text{Gauss}}$, campo misto com correlações *gaussianas*, ξ_{η}^{Mix} , e campo misto com correlações não *gaussianas*, $\xi_{\eta}^{\text{Mix}} + C_{\eta}^{\text{NG}}$.

Com o incremento do fator de correção na estimativa das correlações entre picos no modelo de mistura, é possível justificar as alterações observadas no espectro de potência da RCF. No modelo de correlações não *gaussianas*, observa-se, para a estimativa de C_{η}^{NG} acrescida da função $\xi_{\eta}^{Mix}(R)$, que a correlação entre os picos é ligeiramente acrescida para flutuações maiores ou da ordem do diâmetro de Hubble, $R = R_0$. Em escalas menores, o acréscimo de C_{η}^{NG} acarreta um crescimento lento para flutuações até escalas da ordem de 10^{-1} e, para escalas inferiores a aproximadamente $4 \times 10^{-2} R_0$, a correlação é mais rapidamente acrescida.

A escala em R/R_0 da ordem de 4×10^{-2} corresponde à separação angular de $1,5 \times 10^{-3}$ rad ($\theta \sim 5'$ e $l \sim 2000$), escala na qual observa-se maior intensificação das flutuações na RCF. Como pode ser observado na Figura 5.8, o aumento relativo na correlação entre os picos devido ao acréscimo do fator de correção é significativamente moderado para flutuações pouco menores que o diâmetro de Hubble, até escalas da ordem de $2 \times 10^{-1} R_0$, correspondendo a $l \sim 1000$. Em escalas inferiores a este limiar, as correlações de ordens superiores, acrescidas ao efeito de transferência de potência, resultam no crescimento gradual da correlação entre os picos em escalas de multipolos da ordem de $l \sim 2000$ a 3000 . Assim, o incremento de correlações superiores no modelo de campo misto é capaz de justificar as alterações observadas no espectro de potência da RCF nas condições de mistura.

Para flutuações acima do diâmetro de Hubble, $R > R_0$, a função de correlação entre picos de alta densidade corrigida para os efeitos não *gaussiano* apresenta valor aproximadamente constante em $3,7 \times 10^{-14}$, sendo o incremento não *gaussiano* estimado em:

$$\frac{C_{\eta}^{NG} + \xi_{\eta}^{Mix}}{\xi_{\eta}^{Gauss}} \cong 2.71. \quad (5.53)$$

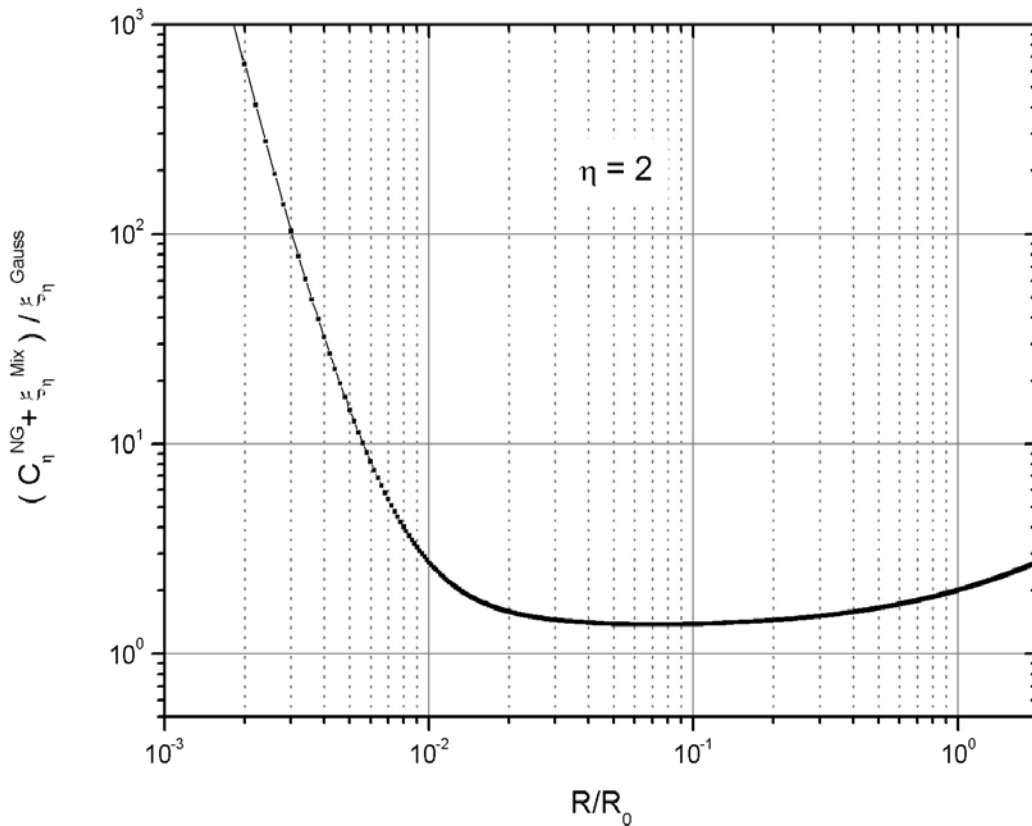


FIGURA 5.8 – Estimativa do incremento não *gaussiano* para a consideração de correlações superiores no contexto de mistura do campo de flutuações.

Diante da estimativa de C_{η}^{NG} , a versão aproximação de ξ_{η}^{Mix} , expressa em 5.32, é enfraquecida na consideração de campos mistos, ainda que fracamente correlacionados. Observa-se que o fator de correção não *gaussiano* é bastante significativo, mesmo quando consideradas baixas correlações. A função de correlação, $\xi_{\eta}^{Mix}(R)$, corrigida para correlações de ordens superiores, no modelo de mistura em escala, representa a versão mais consistente para a descrição das alterações observadas no espectro de potência das flutuações de temperatura da RCF.

Novamente, na descrição das flutuações da RCF, a estimativa precisa da função de distribuição do espectro primordial é mascarada em função dos efeitos de correlação

entre os campos. Entretanto, pelo incremento das correlações de ordens superiores a dois, fica evidente a estatística não *gaussiana* do modelo de campo misto.

5.4 – PRINCIPAIS RESULTADOS E CONCLUSÕES

Conforme observado na análise dos capítulos anteriores, a descrição estatística das flutuações no modelo de campo misto parece ter importância secundária na descrição do campo. A descrição do campo misto de flutuações adiabáticas e de isocurvatura, correlacionadas em escalas definidas por $\alpha(k)$, parece interferir mais fortemente na descrição do campo. Esta característica pôde ser confirmada por meio da análise da função de correlação no modelo de campo misto.

A descrição de $\xi^{\text{Mix}}(R)$, levando em conta apenas as alterações do espectro de potência no modelo de mistura, revela o incremento na correlação média do campo misto em função da componente não gaussiana. As alterações em $P^{\text{Mix}}(k)$ descrevem o incremento na probabilidade de picos raros, definido um campo de flutuações mais fortemente correlacionado. Entretanto, a escala definida para as alterações na correlação média do campo misto não parece condizente com as observações do espectro de potência angular.

Quando considerado o incremento na correlação entre picos raros de flutuações $\eta\sigma$, para um campo ligeiramente não gaussiano, mas considerando correlações superiores a dois, a escala das alterações previstas na função de correlação entre os picos, coincide com a análise do espectro de potência previsto para a RCF. A descrição da correlação entre picos de densidade $\eta\sigma$, na consideração de campo fracamente correlacionado, reforça o caráter da estatística não gaussiana do modelo de campo misto.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

6.1 - CONCLUSÃO

A investigação do modelo de mistura no contexto da RCF confirma a previsão inicial de RWL, as flutuações do campo primordial são consideravelmente sensíveis à presença de uma segunda componente no campo. A descrição das anisotropias da RCF a partir da hipótese de campo misto de flutuações resulta em alterações significativas no espectro de potência angular para razões de mistura α_0 da ordem de 10^{-4} - 10^{-3} . Entretanto, as alterações observadas são atribuídas à mistura no tipo de flutuações – adiabáticas e de *isocurvatura* – e não à mistura na função de distribuição do campo. A definição de mistura em escala resulta na transferência de potência de escalas angulares intermediárias para pequenas escalas, sem fortes alterações no espectro para escalas superiores ao horizonte de Hubble, preservando, assim, a previsão clássica do modelo *gaussiano* (inflacionário padrão). Sob estes aspectos, a descrição do modelo de mistura é condizente com a terminologia de modelo *quasi-gaussiano*.

Conforme discutidas no Capítulo 3, as alterações observadas no espectro de potência angular da RCF definem as características próprias do modelo de mistura, como por exemplo, as alterações na amplitude dos picos acústicos em função da razão de mistura. Observa-se ainda que este comportamento independe das estimativas dos parâmetros cosmológicos, evidenciando o caráter próprio do campo misto. Alterações são observadas tanto no espectro das flutuações de temperatura em intensidade total quanto na componente polarizada. Este comportamento permite não somente discriminar o modelo, mas também quantificar a contribuição do campo não *gaussiano*. Observações atuais da RCF não excluem a possibilidade de uma segunda componente no campo de flutuações primordiais à razão de mistura da ordem de 10^{-3} .

Nas simulações dos mapas da RCF, discutidas no Capítulo 4, contrariamente às simulações do espectro de potência angular, nenhuma alteração aparente é observada no padrão de estrutura do campo de flutuações, a não ser para as simulações com condição não *gaussiana* extrema, nas quais observa-se uma forte assimetria nas flutuações δT , definindo estruturas bem mais quentes. Nas simulações do modelo de mistura, nenhuma assimetria é observada na distribuição das flutuações de temperatura devido à baixa contribuição da segunda componente do campo.

A distribuição das flutuações δT presentes nos mapas da RCF reflete as alterações observadas no espectro de potência angular. Para baixos índices de mistura, a redução na amplitude dos primeiros picos acústicos resulta na concentração das flutuações de temperatura em torno do valor médio do campo ($\delta T \sim 0$). Para índices crescentes de mistura, maior a taxa de transferência de potência e a conseqüente intensificação das flutuações em pequenas escalas, alargando, portanto, a distribuição das flutuações δT . Combinando as informações da distribuição em δT com as escalas definidas no espectro de potência angular, é possível definir o comportamento genérico do modelo não *gaussiano* de campo misto, a transferência de potência com o incremento de picos raros de flutuações em menores escalas angulares.

O processo de simulação das flutuações de temperatura com espectro misto de flutuações e distribuição não *gaussiana*, respeitando as condições de isotropia do campo de flutuações, mostrou ser um método eficaz na descrição do modelo misto, visto que a distribuição das flutuações em escalas angulares é preservada, tornando possível a reconstituição do espectro de potência angular a partir dos mapas simulados. Entretanto, o processo de extração dos coeficientes a_{lm} não preserva a distribuição inicial dos mesmos, dificultando assim, o estudo dos desvios de *gaussianidade* a partir da análise estatística dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas.

As alterações observadas no espectro de potência angular para o modelo de campo misto também se refletem na função de correlação angular da RCF. Conforme discutido no Capítulo 4, o modelo de campo misto apresenta estruturas mais correlacionadas para

flutuações em escalas inferiores ao raio de Hubble ($\theta \sim 1^\circ$). Para estas escalas, o modelo de mistura redistribui as flutuações resultando na aparente definição de discretos picos de correlação.

Conforme observado nas simulações do espectro de potência angular da RCF, a descrição estatística das flutuações no contexto de mistura parece ter importância secundária na descrição do campo, enquanto a definição do campo misto de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, correlacionadas em escalas definidas por $\alpha(k)$, assume o papel principal na descrição das propriedades genéricas do modelo de mistura. Esta conclusão pôde ser confirmada por meio da análise da função de correlação no modelo de campo misto, descrita no Capítulo 5. A descrição de $\xi^{\text{Mix}}(R)$, considerando apenas as alterações no espectro de potência do modelo de campo misto, revela o incremento na correlação média do campo em função da componente não *gaussiana*. As alterações em $P^{\text{Mix}}(k)$ descrevem o incremento na probabilidade de picos raros de flutuações, definido um campo mais fortemente correlacionado. Entretanto, a escala prevista para as alterações na correlação média do campo misto não parece condizente com as observações do espectro de potência angular. Ao considerar o incremento na correlação entre picos raros de flutuações $\eta\sigma$ para um campo ligeiramente não *gaussiano*, mas considerando correlações de ordens superiores a dois, a escala das alterações previstas na função de correlação do campo se torna condizente com a análise do espectro de potência da RCF.

O incremento das correlações não *gaussianas*, definidas no fator de correção, C^{NG}_{η} , define os picos de flutuações esperados no modelo de mistura entre flutuações fracamente correlacionadas, cujo espectro de potência é descrito por $P^{\text{Mix}}(k)$. A descrição da função de correlação entre picos de densidade $\eta\sigma$, na consideração de campo fracamente correlacionado, reforça o caráter da estatística não *gaussiana* do modelo de campo misto. A função de distribuição - definida para o modelo de mistura como $P^{\text{Mix}}(\delta) = (1 - \alpha_0) \text{Gauss} + \alpha_0 f_2$ - parece não interferir nas propriedades estatísticas do modelo. Entretanto, a descrição da função de correlação do campo misto, quando

consideradas as correlação de ordens superiores, reitera a estatística não *gaussiana* do modelo.

6.2 - RESULTADOS DO WMAP

Recentemente, foram publicadas as primeiras análises dos dados do WMAP para as observações da RCF (Spergel et. al., 2003). Os estudos iniciais apresentam boa concordância com o modelo de universo plano, tipo Λ -CDM, com a combinação clássica de parâmetros (Hinshaw, et al., 2003): $h = 0,71^{+0,04}_{-0,03}$; $\Omega_b h^2 = 0,0224 \pm 0,0009$; $\Omega_m h^2 = 0,135^{+0,008}_{-0,009}$; $\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02$; $n = 0,93 \pm 0,03$; $\Omega_\nu h^2 < 0,0076$; e idade do Universo estimada em 13,7 bilhões de anos.

O espectro de potência de temperatura e a função de correlação angular estimados a partir dos dados do WMAP estão ilustrados nas Figuras 6.1 e 6.2, a seguir. Observa-se no espectro de potência a definição do primeiro pico acústico em $l = 220,1 \pm 0,8$; com amplitude de $74,7 \pm 0,5 \mu\text{K}$. O segundo pico é estimado em $l = 546 \pm 10$; com amplitude de $48,8 \pm 0,9 \mu\text{K}$, estimativas coerentes com as previsões do modelo Λ -CDM em escalas angulares intermediárias. Entretanto, as observações do WMAP evidenciam uma queda considerável de potência para flutuações em grandes escalas angulares (Page et al., 2003).

As observações do WMAP também são coerentes com as previsões do modelo inflacionário (Peiris et al., 2003; Kogut et al., 2003). De acordo com as observações, as flutuações de temperatura em intensidade total e polarizada apresentam-se *anticorrelacionadas* em escalas acima do horizonte de Hubble, evidenciando o caráter *gaussiano*, previsto pelo modelo inflacionário de campo adiabático.

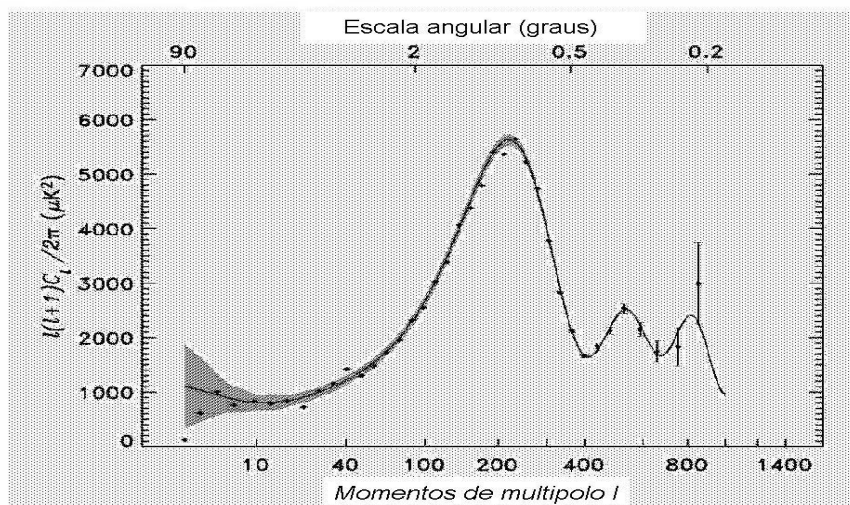


FIGURA 6.1 - Espectro de potência estimado para as flutuações de temperatura da RCF a partir das observações do WMAP. A curva preta ilustra a previsão do modelo Λ -CDM padrão e a faixa sombreada define os limites estimados de variância cósmica.

FONTE: Hinshaw et al. (2003, p. 146)

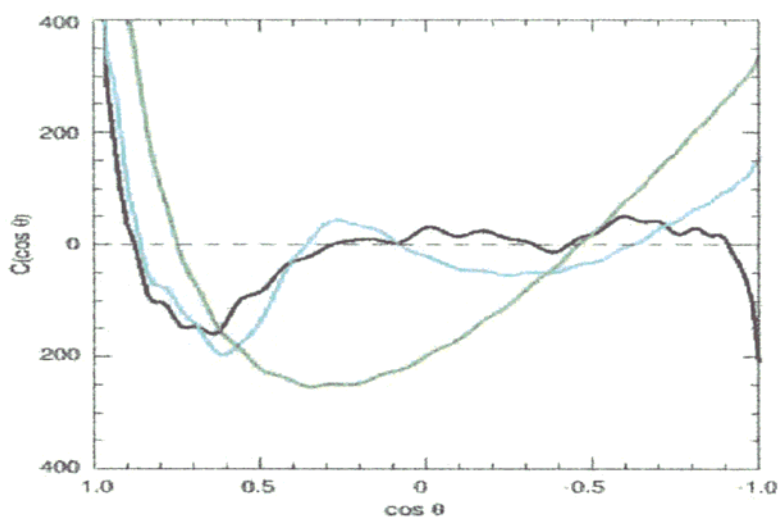


FIGURA 6.2 – Função de correlação angular estimada para as flutuações de temperatura da RCF a partir das observações do WMAP (curva preta). A curva verde ilustra a correlação prevista pelo modelo Λ -CDM padrão, e a curva azul a previsão considerada para um modelo de Universo finito.

FONTE: Spergel et al. (2003, p. 191).

Estudos de desvios de *gaussianidade* também foram previamente realizados com os dados do WMAP (Komatsu et al., 2003). As observações do WMAP foram comparadas com as simulações com condições iniciais não *gaussianas*, segundo o modelo de acoplamento de fases para o campo de flutuações adiabáticas, $\Phi_L(x)$, tal que:

$$\Phi(x) = \Phi_L(x) + f_{NL}[\Phi_L^2(x) - \langle \Phi_L^2(x) \rangle], \quad (6.1)$$

sendo f_{NL} definido como o parâmetro de acoplamento não linear. Neste estudo, foram confrontadas as previsões teóricas e as medidas observacionais por meio da análise de *biespectro* angular e da análise dos funcionais de Minkowski. O cálculo de *biespectro* consiste na construção de indicadores estatísticos das possíveis correlações de fase entre os coeficientes a_{lm} . A análise dos funcionais de Minkowski consiste na descrição dos picos de flutuações acima de um determinado limiar de temperatura. Em ambos os testes, as observações do WMAP se mostraram coerentes com a condição de *gaussianidade*, com limite de confiança estimado em 95%. Entretanto, estes resultados se aplicam ao modelo de correlação de fases especificadas para uma determinada classe de modelos e não podem ser estendidos para campos diversos de flutuações. São aguardadas as comparações do WMAP com os modelos inflacionários de múltiplos campos escalares e dos modelos de defeitos topológicos.

Testes realizados para um modelo híbrido de flutuações adiabáticas e de *isocurvatura*, tal como os modelos descritos por Gordon (2000) e Amendola et al. (2001), também já foram aplicados aos dados do WMAP, sugerindo que a queda de potência para as flutuações em grandes escalas não é condizente com as previsões do modelo (Komatsu et al., 2003). Entretanto, a investigação de não *gaussianidade* nos dados do WMAP foi recentemente contestada pelos estudos de Chiang, Naselsky, Verkhodanov e Way (2003). Segundo os autores, os dados do WMAP são coerentes com a condição *gaussiana* apenas para grandes multipolos, $l < 250$. Para multipolos superiores, $l > 350$, foram encontradas evidências de correlações de fases, segundo a técnica de mapeamento dos gradientes de fase dos coeficientes da expansão em harmônicas esféricas.

6.3 - PERSPECTIVAS FUTURAS

As previsões do modelo de mistura para o campo de flutuações da RCF apresentam um impacto direto sobre o estudo dos espectros primordiais não *gaussianos*. A boa concordância entre o modelo inflacionário padrão e as observações da RCF em escalas angulares grandes e intermediárias desestimulou, nos últimos anos, o desenvolvimento de modelos não *gaussianos*, os quais ficaram limitados ao caráter puramente especulativo. O estudo do modelo de campo misto, entretanto, revela que as observações atuais da RCF não excluem a possibilidade de uma segunda componente no campo de flutuações e ainda faz previsões dos efeitos decorrentes da mistura, permitindo assim identificar e quantificar a contribuição da segunda componente.

Os efeitos resultantes do campo misto de flutuações transformam as previsões do modelo num importante teste para a investigação sobre a natureza do campo de flutuações e os processos físicos vigentes no Universo primordial. As previsões do modelo de mistura para as anisotropias da RCF, descritas neste trabalho, foram aceitas para publicação no *The Astrophysical Journal* e o artigo encontra-se em fase de revisão final. Concluído este estudo, esperamos em breve aplicar o teste da amplitude dos picos acústicos às medidas da RCF em pequenas escalas angulares, utilizando os resultados recentes do WMAP e do experimento BEAST – *Background Emission Anisotropy Scanning Telescope* (Meinhold et al., 2003). As observações provenientes destes experimentos oferecem um importante teste para o campo de flutuações primordiais. A descrição morfológica das flutuações observadas para a RCF aliada à estimativa do espectro de potência angular, quando comparadas às simulações não *gaussianas* do modelo de mistura, podem ajudar a revelar a natureza do campo de flutuações primordiais.

A descrição do método de confecção dos mapas da RCF com condições iniciais não *gaussianas* também representa um avanço significativo no entendimento das flutuações com fases correlacionadas descritas num universo isotrópico. A descrição do modelo não *gaussiano* de assimetria positiva, o qual apresenta alterações significativas para a

distribuição das flutuações δT , é capaz de preservar as características iniciais do espectro de potência angular da RCF. Entretanto, este procedimento não é reversível, pois não permite a extração dos coeficientes iniciais da expansão em harmônicas esféricas. Este comportamento evidencia pontos de discussão importantes na investigação dos desvios de *gaussianidade* na RCF: como é possível extrair a verdadeira distribuição dos coeficientes a_{lm} ? Uma vez que a obtenção dos coeficientes a_{lm} resulta na falsa simetrização destes, que resultado pode ser esperado no estudo das correlações de fases quando aplicado sobre estes “falsos” coeficientes? Um outro desdobramento deste trabalho, já em andamento, aborda a descrição dos mapas com condições iniciais não *gaussianas* e a possível (ou impossível) caracterização de acoplamentos de fase entre os coeficientes a_{lm} .

A descrição estatística do modelo de mistura por meio da análise da correlação entre picos de alta densidade sugere um teste de aplicação direta no campo de flutuações da RCF. Uma vez que $\xi^{\text{Mix}}(\mathbf{R})$, corrigida para os termos de correlações não *gaussianas*, C_{η}^{NG} , indica picos de densidade $\eta\sigma$ mais fortemente correlacionados, a descrição dos picos de flutuações no modelo de campo misto pode ajudar a revelar o grau de correlação entre as flutuações. Definido um certo limiar $\eta\sigma$, é possível avaliar a correlação entre os picos de flutuações acima deste valor, para uma determinada escala θ , e compará-los com a descrição teórica da função de correlação $\xi_{\eta}^{\text{Mix}}(\mathbf{R})$. Assim, a função de correlação média do campo, $\xi^{\text{Mix}}(\mathbf{R})$, e a função de correlação entre picos de densidade $\eta\sigma$, $\xi_{\eta}^{\text{Mix}}(\mathbf{R})$, podem ser confrontadas com as observações por meio da análise morfológica do campo de flutuações da RCF. Uma vez confrontadas as previsões teóricas com os mapas simulados e mapas reais, será possível definir com maior precisão o papel das correlações no contexto de mistura. A análise mais detalhada das correlações não *gaussianas* presentes no modelo de mistura também pode complementar a descrição da função de distribuição do campo misto de flutuações. O estudo aprofundado da função de correlação de modelos não *gaussianos* está sendo proposto como parte integrante de um projeto de pesquisa de pós-doutorado.

Dando continuidade à investigação dos efeitos do campo misto de flutuações na descrição do Universo observável, outra análise complementar, que será realizada dentro do projeto de pós-doutorado, consistirá na investigação direta do modelo de mistura no processo de formação de estruturas. A definição de campo mais fortemente correlacionado também pode apresentar um impacto considerável no processo de aglomeração de estruturas. O estudo da função de correlação não *gaussiana* para a descrição do campo de flutuações na densidade de matéria também pode ajudar a compreender a descrição estatística do modelo. Neste sentido, um projeto de pesquisa, em cooperação com o grupo de astrônomos do *The Palomar Digital Optic Sky Survey (DPOSS)* do *California Institute of Technology* e da *Yale University*, está sendo elaborado, visando a análise da distribuição de objetos em grandes *redshifts*. Para tanto, será investigada a função de correlação para uma amostragem de centenas de *Quasares*, com *redshifts* estimado no intervalo $4 \leq z \leq 6$, observados no espectro óptico, em escalas da ordem de 100 Mpc, com resolução angular de 20 minutos de arco. Neste estudo, espera-se obter a melhor estimativa para a função de correlação de objetos em grandes escalas e investigar possíveis traços de mistura na distribuição de matéria do Universo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABELL, G.O. The distribution of rich clusters of galaxies. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, Chicago, v. 3, p. 211-288, 1958.
- ABELL, G.O.; CORWIN, H.G.; OLOWIN, R. P. A catalog of rich clusters of galaxies. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, Chicago, v. 70, p. 1-138, 1989.
- ADLER, R.J. *The Geometry of Randon Fields*. New York: John Wiley, 1981.
- AGHANIM, N.; FORNI, O.; BOUCHET, F.R. Using the COBE/DMR data as a test-bed of normality assessments. *Astronomy and Astrophysics*, Nova York, v. 365, p. 341-346, 2001.
- ALLEN, T.J.; GRINSTEIN, B.; WISE, M. B. Non-gaussian density perturbations in inflationary cosmologies. *Physics Letters B*, Amsterdam, v. 197, p. 66-70 , 1987.
- AMENDOLA, L. et al. Correlated perturbations from inflation and the cosmic microwave background. *Physical Review Letters*, College Park, v. 88, Art. No. 211302, 2001.
- BAHCALL, N. A. Large-scale structure in the universe indicated by galaxy clusters. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Palo Alto, v. 26, p. 631-686, 1988.
- BANDAY, A. J.; ZAROUBI, S.; GÓRSKI, K.M. On the non-gaussianity observed in the COBE-DMR sky maps. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 533, p. 575-587, 2000.

- BENNETT, C. L. et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: foreground emission. *Astrophysical Journal Supplement Series*, Chicago, v. 148, p. 97-117, 2003.
- BARDEEN, J.M.; STEINHARDT, P.J.; TURNER, M. S. Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe. *Physical Review D*, College Park, v. 28, no. 4, p. 679-693, 1983.
- BARDEEN, J.M. et al. The statistics of peaks of gaussian random fields. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 304, p. 15-61 , 1986.
- BARREIRO, R.B. et al. Testing the gaussianity of the COBE-DMR data with spherical wavelet. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 318, p. 475-481, 2000.
- BARRIOLA, M.; VILEKIN, A. Gravitational-field of a global monopole. *Physical Review Letters*, College Park, v. 63, p. 341-343, 1989.
- BARROW, J. D.; COLES, P. The statistics of primordial density-fluctuations. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 244, p. 188-192, 1990.
- BARTLETT, J.G. The standard cosmological model and CMB anisotropies. *New Astronomy Reviews*, Oxford, v. 43 p. 83-109, 1999.
- BATTYE, R.A.; MAGUEIJO, J.; WELLER J. Early structure formation with cold plus hot dark matter – a success of strings plus inflation models. 1999. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/9906093>>. Acesso em: Junho 2003.
- BATTYE, R.A.; WELLER J. Cosmic structure formation in hybrid inflation models. *Physical Review D*, College Park, v. 61, Art. No. 043501, 2000.

- BENNETT, C. L. et al. Four-year COBE DMR cosmic microwave background observations: maps and basic results. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 464, p. L1-L4, 1996.
- de BERNARDIS, P. et al. A flat Universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, Londres, v. 404, p. 955-959, 2000.
- BEVINGTON, P.R. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. New York: McGraw-Hill, 1969.
- BERTSCHINGER, E. *COSMICS: Cosmological Initial Conditions and Microwave Anisotropy Codes*. Massachusetts Institute of Technology, 1999. Disponível em: <http://arcturus.mit.edu/cosmics>. Acesso em: Junho 2003.
- BROMLEY, B. C.; TEGMARK, M. Is the cosmic microwave background really non-gaussian?. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 524, p. L79-L82, 2000.
- BUCHER, M.; MOODLEY, K.; TUROK, N. General primordial cosmic perturbation). *Physical Review D*, College Park, v. 62, no. 8, Art. No. 083508, 2000a.
- BUCHER, M.; MOODLEY, K.; TUROK, N. Constraining isocurvature perturbations with CMB polarization. *Physical Review Letters*, College Park, v. 87, no. 19, Art. No. 191301, 2000b.
- BUCHER, M.; MOODLEY, K.; TUROK, N. Characterizing the primordial cosmic perturbations using MAP and Planck. *Physical Review D*, College Park, v. 66, Art. No. 023528, 2002.
- BUNN, E.F. Calculation of cosmic background radiation anisotropies and implications. In: NATO Advanced Study Institute on "The Cosmic Background

- Radiation.", 1998. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/9607088>>. Acesso em: Junho 2003.
- CADERNI, N. et al. Polarization of microwave background-radiation .2. infrared survey of sky. *Physical Review D*, College Park, v. 17, no. 8, p. 1908-1918, 1978.
 - CHIANG, L.Y.; NASELSKY, P. D.; VERKHODANOV, O.L.; WAY, M.J. Non-gaussianity of the derived maps from the first-year WMAP data. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 590, p. L65-L68, 2003.
 - COLES, P.; BARROW, J. D. Non-gaussian statistics and the microwave background radiation. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 228, p. 407-426, 1987.
 - COLES, P.; JONES, B. A lognormal model for the cosmological mass distribution. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 248, p. 1-13, 1991.
 - COLES, P.; LUCCHIN, F. *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*. Chichester: John Wiley and Sons, 1995.
 - COLES, P.; CHIANG, L.; Non-linearity and non-gaussianity through phase information. In: Joint Astronomy Conference, Mining the Sky, 2000, Garching. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/0010521>>. Acesso em: Junho 2003.
 - COLES, P.; Large-scale structure, theory and statistics. In: International School of Physics D. Chalonge, "Phase Transitions in the Early Universe: Theory and Observations", 2001, Erice. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/0103017>>. Acesso em: Junho 2003.

- CORASANITI, P.S.; AMENDOLA, L.; OCCHIONERO, F. Signals of primordial phase transitions on CMB maps. 2003, Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/0103173>>. Acesso em: Junho 2003.
- EFSTATHIOU, G. et al Evidence for a non-zero Λ and a low matter density from a combined analysis of the 2dF galaxy redshift survey and cosmic microwave background anisotropies. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 330, p. L29-L35, 2002.
- FALK, T.; RANGARAJAN, R.; SREDNICKI, M. The angular dependence of the three-point correlation function of the cosmic microwave background radiation as predicted by inflationary cosmologies. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 403, p. L1-L3 , 1993.
- FAN, Z.H.; BARDEEN, J.M. Predictions of a non-gaussian model for large scale structure. Washington: *University of Washington*, 1992, UW/PT/92-11.
- FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. New York: Wiley, 1971. v. II
- FERREIRA, P.; MAGUEIJO, J.; GÓRSKI, K. Evidence for non-gaussianity in the COBE DMR 4 year sky maps. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 503, p. L1-L4, 1998.
- FOMALONT, E. B. et al. Limits to cosmic background-radiation fluctuations at 8.44 GHz between angular scales 10" and 200". *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 404, p. 8-20, 1993.

- FUTAMASE, T.; TAKADA, M.; Number count of peaks in the CMB maps. 2000
Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/0009153>>. Acesso em: Junho 2003.
- GANGUI, A. et al. The 3-point correlation-function of the cosmic microwave background in inflationary models. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 430, p. 447-457, 1994.
- GAWISER, E.; SILK, J. Extracting primordial density fluctuations. *Science*, v. 280, p. 1405-1411, Washington, 1998.
- GNEDENKO, B.V.; KOLMOGOROV, A.N. *Limit Distributions for Sums of Independent random variables*, Addison-Wesley, 1968.
- GORDON, C. et al. Adiabatic and entropy perturbations from inflation. *Physical Review D*, College Park, v. 63, Art. No. 023506, 2000.
- GUTH, A.H. Inflationary universe - a possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, College Park, v. 23, p. 347-356, 1981.
- GUTH, A. H.; PI, S.Y. Fluctuations in the new inflationary universe. *Physical Review Letters*, College Park, v. 49, no. 15, p. 1110-1113, 1982.
- HALVERSON, N. W. et al. Degree angular scale interferometer first results: a measurement of the cosmic microwave background angular power spectrum. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 568, p. 38-45, 2002.
- HANANY, S. et al. Maxima-1: a measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10⁻⁵ degrees. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 545, p. L5-L9, 2000.

- HAUSER, M. G.; PEEBLES, P.J.E. Statistical analysis of catalogs of extragalactic objects. II. The Abell catalog of rich clusters. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 185, p. 757-785, 1973.
- HEDMAN, M. et al. A limit on the polarized anisotropy of the cosmic microwave background at subdegree angular scales. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 548, p. L111-L114, 2001.
- HINSHAW, G. et al. 2-point correlations in the COBE DMR 4-year anisotropy maps. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 464, p. L25-L28, 1996.
- HINSHAW, G., et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: the angular power spectrum. *Astrophysical Journal Supplement Series*, Chicago, v. 148, p.135-159, 2003.
- HU, W.; DODELSON, S. Cosmic microwave background anisotropies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, France, v. 40, p. 171-216, 2001.
- INOUE, K.T.; Geometric gaussianity and non-gaussianity in the cosmic microwave background. *Physical Review D*, College Park, v. 62, Art. No. 103001, 2000.
- JACKSON, J. D. *Classical Eledrodynamics*. New York: John Wiley & Sons, 1975.
- KAISER, N. On the spatial correlations of Abell clusters. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 284, p. L9-L12, 1984.
- KAYO, I.; TARUYA, A.; SUTO, Y. Probability distribution function of cosmological density fluctuations from gaussian initial condition: comparisons of one- and two-point log-normal model predictions with N-body simulations. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 561, p. 22-34, 2001.

- KEATING, B. et al. A limit on the large angular scale polarization of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 560, p. L1-L4 , 2001
- KIBBLE, T.W.B. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A*, v. 9, p. 1387-1398, 1976.
- KOLB, E.W.; TURNER, M. S. *The Early Universe*. Addison-Wesley, 1994.
- KOGUT, A. et al. First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: temperature-polarization correlation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, Chicago, v. 148, p. 161-173, 2003.
- KOMATSU, E., et al. First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: tests of gaussianity. *Astrophysical Journal Supplement Series*, Chicago, v. 148, p. 119-134, 2003.
- KOSOWSKY, A. Introduction to microwave background polarization. *New Astronomy Review*, v. 43, p. 157, 1999.
- KOYAMA, K.; SODA, J.; TARUYA, A. Constraints on a non-gaussian χ^2 CDM model. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, v. 310, p. 1111-1118, 1999.
- LANGLOIS, D.; RIAZUELO, A. Correlated mixtures of adiabatic and isocurvature cosmological perturbations *Physical Review. D*, College Park, v. 62, Art. No. 043504, 2000.
- LEWIN, A.; ALBRECHT, A.; MAGUEIJO, J. A new statistic for picking out non-gaussianity in the CMB. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 302, p. 131-138, 1999.

- LUBIN, P.M.; SMOOT, G.F. Search for linear polarization of the cosmic background-radiation. *Physical Review Letters*, College Park, v. 42, p.129-132, 1979.
- LUBIN, P.M.; SMOOT, G.F. Polarization of the cosmic background-radiation. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 245, p. 1-17, 1981.
- LUBIN, P.M.; MELESE, P.; SMOOT, G.F. Linear and circular-polarization of the cosmic background-radiation. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 273, p. L51-L54, 1983.
- MA, C.; BERTSCHINGER, E. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 455, p. 7-25, 1995.
- MAGUEIJO, J.; BRANDENBERGHER, R. Cosmic defects and cosmology. 1999. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/0002030>>. Acesso em: Junho 2003.
- MAGUEIJO, J. New non-gaussian feature in COBE-DMR four year maps. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 528, p. L57- 2000.
- MAGUEIJO, J.; CONTALDI, C.; HINDMARSH, M.; Structure formation with strings plus inflation: a new paradigm. In: Proceedings of the 3K conference, 1998, Rome. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/9903050>>. Acesso em: Junho 2003.
- MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E. et al. Tests of gaussianity of CMB maps. *Astronomy Letters and Communication.*, v. 37, p. 335, 2000.

- MASON, B. S. et al. The anisotropy of the microwave background to $l=3500$: deep field observations with the cosmic Background imager. 2002, *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 591, p. 540-555, 2003.
- MATARRESE, S.; VERDE, L.; JIMINEZ, R. The abundance of high-redshift objects as a probe of non-gaussian initial conditions. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 541, p. 10-24, 2000.
- MATHER, J.C. et al. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic-background-explorer (COBE) satellite. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 354, p. L37-L40, 1990.
- MEINHOLD, P. R. et al. A map of the cosmic microwave background from the Beast experiment. 2003. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/0302034>>. Acesso: Junho 2003.
- MOSCARDINI, L. et al. Non-gaussian initial conditions in cosmological N-body simulations – II. Cold dark matter models *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 248, p. 424-438, 1991.
- MUCIACCIA, P.F.; NATOLI, P.; VITTORIO, N. Fast spherical harmonic analysis: a quick algorithm to generating and/or inverting full sky, high resolution CMB anisotropy maps. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/9703084>>. Acesso em: Junho 2003.
- NANOS, G. Polarization of the blackbody radiation at 3.2 centimeters. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 232, p. 341-347, 1979.

- NETTERFIELD, C. B. et al. A measurement of the angular power spectrum of the anisotropy in the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 474, p. 47-66, 1997.
- NOVIKOV, D.; FELDMAN, H.A.; SHANDARIN, S.F. Minkowski functionals and clusters analysis for CMB maps. *International Journal of Modern Physics D*, Singapura, v. 8, p. 291-306, 1999.
- NOVIKOV, D.; SCHMALZING, J.; MUKHANOV, V. F. On non-gaussianity in the cosmic microwave background. *Astronomy And Astrophysics*, Nova York, v. 364, p. 17-25, 2000.
- de OLIVEIRA-COSTA, A. et al. First attempt at measuring the CMB cross-polarization. *Physical Review D*, College Park, v. 67, Art. no. 023003, 2003.
- OSTRIKER, J.P.; COWIE, L. Galaxy formation in an inter-galactic medium dominated by explosions. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 243, p. L127-L131, 1981.
- PADMANABHAN, T. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- PADMANABHAN, T. Aspects of gravitational clustering. *Lecture Notes of IPM School on structure formation*, 1999, Kish Island. Disponível em: <http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/9911374>. Acesso: Junho 2003.
- PAGE, L. et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Interpretation of the TT and TE angular power spectrum peaks. *Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 48, p. 233-241, 2003.

- PARTRIDGE, R.B.; NAWAKOWSKI, J.; MARTIN, H.M. Linear polarized fluctuations in the cosmic microwave background. *Nature*, 1988, Londres, v. 331, p. 146-147, 1988.
- PARTRIDGE, R.B. *3K: The Cosmic Microwave Anisotropy Radiation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- PARTRIDGE, R.B. et al. Small-scale cosmic microwave background observations at 8.4 GHz. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 483, p. 38-50, 1997.
- PEACOCK, J. A. *Cosmological Physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- PEARSON, T.J. et al. Anisotropy of the microwave background to $l=3500$: mosaic observations with cosmic background imager . 2002, *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 591, p. 556-574, 2003.
- PEEBLES, P.J.E. *The Large Scale Structure of the Universe*. New York: Princeton University Press, 1980.
- PEEBLES, P.J.E. The sequence of cosmogony and the nature of primeval departures from homogeneity. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 274, p. 1-6, 1983.
- PEIRIS, H.V. et al., First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: implications for inflation. *Astrophysical Journal Supplement Series*, Chicago, v. 148, p. 213-231, 2003.
- PENZIAS, A. A.; Wilson, R.W. A measurement of excess antenna temperature at 4080mc/s. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 142, p. 419, 1965.

- PHILLIPS, N.G.; KOGUT, A.; Statistical power, the bispectrum and the search for non-gaussianity in the CMB anisotropy. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 548, p. 540-549, 2001.
- PLIONIS, M.; VALDARNINI, R. The one-point cluster distribution function and its moments. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 272, p. 869-877, 1995.
- PRESS, W.H.; VISHNIAC, E. T. Propagation of adiabatic cosmological perturbations through the era of matter-radiation decoupling. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 236, p. 323-334, 1980.
- RIBEIRO, A.L.B.; WUENSCHÉ, C.A.; LETELIER, P.S. Small deviations from gaussianity and the galaxy cluster abundance evolution. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 539, p. 1-4, 2000.
- ROBINSON, J.; BAKER, J. Evolution of the cluster abundance in non-gaussian models. *Monthly Notices of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 311, p. 781-792, 2000.
- ROWAN-ROBINSON, M. *Cosmology*. New York: Oxford University Press, 1981
- SALOPEK, D.S.; BOND, J. R.; BARDEEN, J.M. Designing density fluctuation spectra in inflation. *Physical Review D*, College Park, v. 40, p. 1753-1788, 1989.
- SCHERRER, R. J.; BERTSCHINGER, E. Statistics of primordial density perturbations from discrete seed masses. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 381, p. 349-360, 1991.
- SIRONI, G. et al. A 33 GHz polarimeter for observations of the cosmic microwave background. *New Astronomy*, v. 3, p. 1-13 , 1997.

- SMOOT, G.F. et al. Preliminary results from the COBE differential microwave radiometers: large angular scale isotropy of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 371, p. L1-L5, 1991.
- SMOOT, G.F. et al. Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer first-year maps. *Astrophysical. Journal Letters*, Chicago, v. 396, p. L1-L5, 1992.
- SPERGEL, D.N.; ZALDARRIAGA, M. CMB polarization as a direct test for inflation. *Physical Review Letters*, College Park, v. 79, p. 2180-2183, 1997.
- SPERGEL, D.N. et al. First year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of Cosmological Parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, Chicago, v. 148, p. 175-194, 2003.
- STOMPOR, R. et al. Cosmological implications of the MAXIMA-1 high-resolution cosmic microwave background anisotropy measurement. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 561, p. L7-L10, 2001.
- SUBRAHMANYAN, R. et al. An Australia Telescope survey for CMB anisotropies. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 315, p. 808-822, 2000.
- TEGMARK, M.; EFSTATHIOU, G. A method for subtracting foregrounds from multifrequency CMB sky maps. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 281, p. 1297-1314, 1996.
- TORBET, E. et al. A measurement of the angular power spectrum of the microwave background made from the high Chilean Andes. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 521, p. L79-L82, 1999.

- TURNER, M. S. Cosmological parameters. In: *Particle Physics and the Universe*, 1998, New York. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/9904051>>. Acesso em: Junho 2003.
- TUROK, N. Global texture as the origin of cosmic structure. *Physical Review Letters*, College Park, v. 63, no. 24, p. 2625-2628, 1989.
- VERDE, L.; HEAVENS, A. F.; On the trispectrum as a gaussian test for cosmology. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 553, p. 14-24, 2001
- VERDE, L. Non-gaussianity vs. non-linearity of cosmological perturbations. In: 15th Florida workshop in Nonlinear Astronomy and Physics, 2000, Florida. Disponível em: <<http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/0004341>>. Acesso em: Junho 2003.
- VERDE, L. et al. Large-scale structure, the cosmic microwave background and primordial non-Gaussianity. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 313, p. 141-147, 2000.
- VERDE, L. et al. Tests for primordial non-Gaussianity. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 325, p. 412-418, 2001.
- VISHNIAC, E. T. Non-linear effects on cosmological perturbations .1. the evolution of adiabatic perturbations. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 253, p. 446-456, 1982.
- WATTS, P.; COLES, P. Statistical cosmology with quadratic density fields. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 338, p. 806-815, 2003.

- WEINBERG, D. H.; COLE, S. Non-gaussian fluctuations and the statistics of galaxy clustering. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 259, p. 652-694, 1992.
- WEYMANN, R. et al. Keck spectroscopy and NICMOS photometry of a redshift $z=5.6$ galaxy. *Astrophysical Journal*, Chicago, v. 505, p. L95-L98, 1998.
- WHITE, M.; SCOTT, D.; SILK, J. Anisotropies in the cosmic microwave background. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, France, v. 32, p. 319-370, 1994.
- WHITE, M. Polarization of the CMB anisotropy. In: MPA/ESO Conference, "Evolution of large-scale structure", 1998, Garching. Disponível em: <http://snsbf2.if.usp.br/abs/astro-ph/9810506>. Acesso em: Junho 2003.
- WOLLACK, E.J. et al. A measurement of the anisotropy in the cosmic microwave background-radiation at degree angular scales. *The Astrophysical Journal*, Chicago, v. 419, p. L49-L52, 1993.
- ZELDOVICH, YA. B. Cosmological fluctuations produced near a singularity. *Monthly Notes of Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 192, p. 663-667, 1980.

APÊNDICE A

MEDIDAS DAS FLUTUAÇÕES DE TEMPERATURA DA RCF

TABELA A.1 – Medias das flutuações de temperatura da RCF realizadas pelos experimentos: *Cosmic Background Explorer* - COBE (Smoot et al., 1992); *Cosmic Anisotropy Telescope* - CAT (Stompor et al., 2001); *Balloon Observations of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics* - BOOMERANG (de Bernardis et al., 2000); *Degree Angular Scale Interferometer* – DASI (Halverson et al., 2002); *Millimeter Anisotropy Experiment Imaging Array* - MAXIMA (Hanany et al., 2000); e *Cosmic Background Imager* – CBI.

Experimento / Medida	ΔT (μK)	l_{eff}
COBE	$20.5^{+13.7}_{-13.7}$	2
CAT / 96 - 1	$51.9^{+13.7}_{-13.7}$	410
CAT / 96 - 2	$49.1^{+19.1}_{-13.7}$	590
CAT / 96 - 3	$57.3^{+10.9}_{-13.7}$	422
BOOM / 97 - 1	29^{+13}_{-11}	58
BOOM / 97 - 2	49^{+9}_{-9}	102
BOOM / 97 - 3	67^{+10}_{-9}	153
BOOM / 97 - 4	72^{+10}_{-10}	204
BOOM / 97 - 5	61^{+11}_{-12}	255
BOOM / 97 - 6	55^{+14}_{-15}	305
BOOM / 97 - 7	32^{+13}_{-22}	403
BOOM / 98 - 1	$33.8^{+3.9}_{-4.5}$	50
BOOM / 98 - 2	$55.8^{+4.2}_{-4.6}$	100
BOOM / 98 - 3	$64.5^{+4.1}_{-4.3}$	150
BOOM / 98 - 4	$68.6^{+3.8}_{-4.1}$	200
BOOM / 98 - 5	$65.6^{+3.4}_{-3.6}$	250
BOOM / 98 - 6	$51.4^{+2.9}_{-3.1}$	300
BOOM / 98 - 7	$39.4^{+2.7}_{-2.9}$	350
BOOM / 98 - 8	$36.2^{+2.9}_{-3.2}$	400
BOOM / 98 - 9	$36.8^{+3.3}_{-3.5}$	450
BOOM / 98 - 10	$37.9^{+3.7}_{-4.0}$	500

Experimento / Medida	ΔT (μK)	l_{eff}
BOOM / 98 – 11	$41.8^{+4.2}_{-4.7}$	550
BOOM / 98 – 12	$39.2^{+5.2}_{-5.9}$	600
DASI / 2000 - 1	$61.4^{\pm 28.63}$	118
DASI / 2000 – 2	$72.66^{\pm 23.45}$	203
DASI / 2000 – 3	$60.49^{\pm 18.43}$	289
DASI / 2000 – 4	$40.62^{\pm 14.14}$	377
DASI / 2000 – 5	$43.47^{\pm 14.83}$	465
DASI / 2000 – 6	$53.29^{\pm 17.03}$	553
DASI / 2000 – 7	$40.86^{\pm 16.43}$	641
DASI / 2000 – 8	$44.83^{\pm 18.71}$	725
DASI / 2000 – 9	$48.17^{\pm 21.21}$	837
MAXIMA – 11	45^{+7}_{-6}	77
MAXIMA – 12	54^{+6}_{-5}	147
MAXIMA – 13	78^{+6}_{-6}	223
MAXIMA – 14	61^{+5}_{-5}	300
MAXIMA – 15	48^{+4}_{-4}	374
MAXIMA – 16	39^{+4}_{-4}	447
MAXIMA – 17	48^{+4}_{-4}	522
MAXIMA – 18	39^{+5}_{-5}	597
MAXIMA – 19	43^{+5}_{-5}	671
MAXIMA – 110	47^{+7}_{-7}	742
CBI / 2001	$52.82^{\pm 27.77}$	304
CBI / 2001	$49.37^{\pm 21.19}$	496
CBI / 2001	$43.09^{\pm 18.33}$	696
CBI / 2001	$44.33^{\pm 18.65}$	896
CBI / 2001	$32.50^{\pm 16.31}$	1100
CBI / 2001	$26.17^{\pm 16.09}$	1300

Experimento / Medida	ΔT (μK)	l_{eff}
CBI / 2001	$15.20^{\pm 16.97}$	1702
CBI / 2001	$29.88^{\pm 18.17}$	1502
CBI / 2001	$15.81^{\pm 16.43}$	1899
CBI / 2001	$23.19^{\pm 20.15}$	2099
CBI / 2001	$24.04^{\pm 21.52}$	2296
CBI / 2001	$34.18^{\pm 27.33}$	2497
CBI / 2001	$13.34^{\pm 29.33}$	2697
CBI / 2001	$36.84^{\pm 33.36}$	2899
CBI / 2001	$72.41^{\pm 46.59}$	200
CBI / 2001	$44.70^{\pm 21.79}$	407
CBI / 2001	$45.46^{\pm 19.36}$	605
CBI / 2001	$50.28^{\pm 19.90}$	801
CBI / 2001	$29.34^{\pm 15.56}$	1002
CBI / 2001	$35.44^{\pm 16.85}$	1197
CBI / 2001	$21.61^{\pm 16.28}$	1395
CBI / 2001	$26.72^{\pm 18.00}$	1597
CBI / 2001	$6.32^{\pm 16.67}$	1797
CBI / 2001	$17.86^{\pm 17.26}$	1997
CBI / 2001	$20.05^{\pm 21.49}$	2201
CBI / 2001	$12.77^{\pm 24.62}$	2401
CBI / 2001	$22.80^{\pm 28.18}$	2600
CBI / 2001	$27.75^{\pm 31.30}$	2800

FONTE: Mason et al. (2002) ; Pearson et al. (2002).

APÊNDICE B

CÁLCULO DA PROBABILIDADE BIDIMENSIONAL DOS PICOS DE DENSIDADE $\eta\sigma$ EM UM CAMPO GAUSSIANO

A probabilidade de que os valores do contraste de densidade $\delta(x)$, em dois pontos x_1 e x_2 , sejam δ_1 e δ_2 pode ser obtida através da transformada de Fourier da função característica da variável aleatória δ , $\Theta_\delta(u)$:

$$P[\delta(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iu\delta(x)} \Theta_\delta(u) du, \quad (B1)$$

Para um campo bidimensional descrito por uma variável aleatória gaussiana, a função característica é obtida através da expansão das funções de correlação até ordem dois:

$$\Theta_\delta(u_1, u_2; x_1, x_2) = \exp \left\{ i \sum_{\alpha=1}^2 k_1(x_\alpha) u_\alpha - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_2(x_\alpha, x_\beta) u_\alpha u_\beta \right\}, \quad (B2)$$

sendo:

$$\begin{aligned} k_1(x_1) &= K[\delta(x_1)] = \langle \delta(x_1) \rangle \\ k_2(x_1, x_2) &= K[\delta(x_1)\delta(x_2)] = \langle \delta(x_1)\delta(x_2) \rangle - \langle \delta(x_1) \rangle \langle \delta(x_2) \rangle \end{aligned} \quad (B3)$$

Usando a notação: $\langle \delta(x_1)\delta(x_2) \rangle = \langle \delta_1\delta_2 \rangle = \xi_r$, e substituindo B3 e B2 em B1, tem-se:

$$P^G[\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left\{ -i[\mu_1\delta_1 + \mu_2\delta_2] \right\} \exp \left\{ i[k_1(x_1)\mu_1 + k_1(x_2)\mu_2] - \frac{1}{2}[\delta(x_1)^2\mu_1^2 - k_1(x_1)^2\mu_1^2 + \delta(x_2)^2\mu_2^2 - k_1(x_2)^2\mu_2^2] + 2\xi_r\mu_1\mu_2 - 2k_1(x_1)k_1(x_2)u_1u_2 \right\} \right\} d\mu_1 d\mu_2 \quad (B4)$$

A solução da integral acima é do tipo (Genedenko e Kolmogorov, 1968):

$$P^G[\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[\det \| K_2(\delta_\alpha, \delta_\beta) \| \right]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 a_{\alpha\beta} [\delta_\alpha - K_1(\delta_\alpha)] [\delta_\beta - K_1(\delta_\beta)] \right\}, \quad (B5)$$

sendo $\det \| K_2(\delta_\alpha, \delta_\beta) \|$ e $\| a_{\alpha\beta} \|$, respectivamente, o determinante e a inversa da matriz correlação da variável δ :

$$\begin{aligned} \|k_2(x_1, x_2)\| &= \begin{vmatrix} k_2(x_1, x_1) & k_2(x_1, x_2) \\ k_2(x_2, x_1) & k_2(x_2, x_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle \delta_1^2 \rangle - k_1(x_1)^2 & \langle \delta_1 \delta_2 \rangle - k_1(x_1)k_1(x_2) \\ \langle \delta_1 \delta_2 \rangle - k_1(x_1)k_1(x_2) & \langle \delta_2^2 \rangle - k_1(x_2)^2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (B6)$$

Para um campo de flutuações com média nula, $k_1(\delta) = \langle \delta \rangle = 0$, a matriz correlação se reduz a:

$$\|k_2(x_1, x_2)\| = \begin{vmatrix} \langle \delta_1^2 \rangle & \langle \delta_1 \delta_2 \rangle \\ \langle \delta_1 \delta_2 \rangle & \langle \delta_2^2 \rangle \end{vmatrix} \quad (B7)$$

Expressando $\langle \delta_1^2 \rangle$ como simplesmente δ_1^2 , o determinante de $\| K_2(\delta_\alpha, \delta_\beta) \|$ será:

$$\det \|k_2(x_1, x_2)\| = \delta_1^2 \delta_2^2 - \langle \delta_1 \delta_2 \rangle^2 = \xi_0^2 - \xi_r^2 = \sigma^4 - \xi_r^2 = \sigma^4(1 - A^2), \quad (B8)$$

sendo: $\langle \delta_1^2 \rangle = \langle \delta_2^2 \rangle = \xi_0 = \sigma^2$ e $A = \frac{\xi_r}{\sigma^2}$.

Assim, a inversa da matriz correlação, $\| a_{\alpha\beta} \|$, é facilmente obtida:

$$\|a_{\alpha\beta}\| = \begin{vmatrix} \frac{(-1)^2}{\det \|k_2\|} \xi_0 & \frac{(-1)^3}{\det \|k_2\|} \xi_r \\ \frac{(-1)^3}{\det \|k_2\|} \xi_r & \frac{(-1)^2}{\det \|k_2\|} \xi_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\xi_0}{\sigma^4 - \xi_r^2} & \frac{-\xi_r}{\sigma^4 - \xi_r^2} \\ \frac{-\xi_r}{\sigma^4 - \xi_r^2} & \frac{\xi_0}{\sigma^4 - \xi_r^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2(1-A^2)} \left\| \begin{array}{cc} 1 & -A \\ -A & 1 \end{array} \right\| \quad (\text{B9})$$

Substituindo B9 em B5:

$$P^G[\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\frac{1}{1-A^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_1^2 - 2A\delta_1\delta_2 + \delta_2^2}{\sigma^2(1-A^2)} \right) \right\} \quad (\text{B10})$$

ou:

$$P^G[\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\frac{1}{1-A^2} \right)^{1/2} e^{-Q[\delta_1, \delta_2]}, \quad (\text{B11})$$

para: $Q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-A^2} \right) \frac{1}{\sigma^2} [\delta_1^2 + \delta_2^2 - 2A\delta_1\delta_2]$ e $A = \frac{\xi_r}{\sigma^2}$.

A probabilidade de que δ_1 e δ_2 sejam picos de densidade $\eta\sigma$ é obtida através da integral de $P^G[\delta_1, \delta_2]$:

$$P^G[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma] = \int_{\eta\sigma}^{\infty} d\delta_1 \int_{\eta\sigma}^{\infty} P^G[\delta_1, \delta_2] d\delta_2 \quad (\text{B12})$$

A integral acima é mais facilmente obtida quando utilizada a expressão de $P^G[\delta_1, \delta_2]$ dada pela função característica (expressão B4):

$$P^G[\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i\mu_1\delta_1 - i\mu_2\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} [\mu_1^2 + 2A\mu_1\mu_2 + \mu_2^2] \right\} d\mu_1 d\mu_2 \quad (\text{B13})$$

Lembrando que:

$$e^{-2\sigma^2 A\mu_1\mu_2} = 1 - 2\sigma^2 A\mu_1\mu_2 + O^2(A), \quad (\text{B14})$$

sendo $O^2(A)$ a representação dos termos não lineares em A , tem-se:

$$\begin{aligned}
P^G[\delta_1, \delta_2] = & \\
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i\mu_1\delta_1 - i\mu_2\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} [\mu_1^2 + \mu_2^2] \right\} \{1 - 2A\sigma^2\mu_1\mu_2\} d\mu_1 d\mu_2 \\
& + O^2(A)
\end{aligned} \tag{B15}$$

Arranjando os termos:

$$\begin{aligned}
P^G[\delta_1, \delta_2] = & \\
& \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i\mu_1\delta_1 - \frac{\sigma^2}{2} \mu_1^2 \right\} d\mu_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i\mu_2\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} \mu_2^2 \right\} d\mu_2 - \\
& \frac{2A}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i\mu_1\delta_1 - \frac{\sigma^2}{2} \mu_1^2 \right\} \sigma\mu_1 d\mu_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -i\mu_2\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} \mu_2^2 \right\} \sigma\mu_2 d\mu_2 \\
& + O^2(A)
\end{aligned} \tag{B16}$$

Representando os termos de $P^G[\delta_1, \delta_2]$ como um somatório, tem-se:

$$\begin{aligned}
P^G[\delta_1, \delta_2] = & \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^p \mu_1^p \exp \left\{ -i\mu_1\delta_1 - \frac{\sigma^2}{2} \mu_1^2 \right\} d\mu_1 \right] \times \\
& \frac{(2A)^p}{p!} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^p \mu_2^p \exp \left\{ -i\mu_2\delta_2 - \frac{\sigma^2}{2} \mu_2^2 \right\} d\mu_2 \right]
\end{aligned} \tag{B17}$$

Renomeando as variáveis: $\lambda_1 = \sigma\mu_1$ e $\lambda_2 = \sigma\mu_2$:

$$\begin{aligned}
P^G[\delta_1, \delta_2] = & \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1^p \exp \left\{ -i\frac{\lambda_1}{\sigma} \delta_1 - \frac{1}{2} \lambda_1^2 \right\} \frac{d\lambda_1}{\sigma} \right] \times \\
& \frac{(2A)^p}{p!} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_2^p \exp \left\{ -i\frac{\lambda_2}{\sigma} \delta_2 - \frac{1}{2} \lambda_2^2 \right\} \frac{d\lambda_2}{\sigma} \right]
\end{aligned} \tag{B18}$$

A integral acima, pode ser expressa em termos da função erro (erf), para tanto, observa-se que:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \text{erf}(z) \quad (\text{B19})$$

A derivada da expressão acima resulta em:

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (\text{B20})$$

Derivando novamente, tem-se:

$$\frac{d^{(p+1)}F(z)}{dz^{(p+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^p}{dz^p} \left(e^{-\frac{z^2}{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i)^p z^p \left(e^{-\frac{z^2}{2}} \right) \quad (\text{B21})$$

Usando a representação:

$$F^{(p+1)}(z) = \frac{(-i)^p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p \exp \left\{ -i\lambda z - \frac{\lambda^2}{2} \right\} d\lambda, \quad (\text{B22})$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} F^{(p+1)}(z) &= \frac{(-i)^p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p \exp \left\{ -i\lambda z - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{z^2}{2} \right\} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) d\lambda \\ &= \frac{(-i)^p}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p \exp \left\{ \left(\frac{i\lambda}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} \right)^2 \right\} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) d\lambda, \end{aligned} \quad (\text{B23})$$

e definindo: $\frac{i\lambda}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{ix}{\sqrt{2}} \Rightarrow \lambda = x + \frac{z}{i}$ e $d\lambda = dx$, tem-se:

$$F^{(p+1)}(z) = \frac{(-i)^p}{2\pi} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} (x - iz)^p \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \quad (\text{B24})$$

Expressando as integrais em B18 em termos da integral de $F^{(p+1)}$, tem-se:

$$P[\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{p=0}^{\infty} F^{(p+1)} \left(\frac{\delta_1}{\sigma} \right) F^{(p+1)} \left(\frac{\delta_2}{\sigma} \right) \frac{(2A)^p}{p!}, \quad (\text{B25})$$

Para $A \ll 1$, considera-se apenas os termos lineares em A , resultando em:

$$P[\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{\sigma^2} F^1\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\right) F^{(1)}\left(\frac{\delta_2}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma^2} F^2\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\right) F^{(2)}\left(\frac{\delta_2}{\sigma}\right) \frac{2A}{1} \quad (\text{B26})$$

Para obter a expressão final de $P^G[\delta_1, \delta_2]$, é necessário resolver as integrais em F^1 e F^2 , sendo:

$$\begin{aligned} F^1\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\right) &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) \left(2 \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B27})$$

Analogamente, tem-se:

$$F^1\left(\frac{\delta_2}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{B28})$$

As integrais em F^2 são do tipo:

$$F^2\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\right) = \frac{-i}{2\pi} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{i\delta_1}{\sigma}\right) \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx \quad (\text{B29})$$

$$\begin{aligned} F^2\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\right) &= \frac{-i}{2\pi} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) \left(2 \int_0^{\infty} x \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} dx\right) + \text{zero} \\ &= \frac{i^2}{2\pi} \frac{\delta_1}{\sigma} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) (\sqrt{2\pi}) \end{aligned} \quad (\text{B30})$$

Resultando em:

$$F^2\left(\frac{\delta_1}{\sigma}\right) = \frac{-\delta_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{B31})$$

Analogamente:

$$F^2\left(\frac{\delta_2}{\sigma}\right) = \frac{-\delta_2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\text{B32})$$

Substituindo B27, B28, B31 e B32 em B26, tem-se:

$$P[\delta_1, \delta_2] = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}\right) \right) + \frac{2A}{\sigma^2} \left\{ \frac{-\delta_1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) \right\} \left\{ \frac{-\delta_2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}\right) \right\} \quad (\text{B33})$$

Para encontrar a probabilidade de que δ_1 e δ_2 sejam picos de alta densidade, é necessário integrar a expressão acima:

$$P[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{\eta\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_1 \int_{\eta\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_2 + \frac{2A}{\sigma^2} \left\{ \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left[\int_{\eta\sigma}^{\infty} \delta_1 \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_1 \right] \left[\int_{\eta\sigma}^{\infty} \delta_2 \exp\left(-\frac{\delta_2^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_2 \right] \right\} \quad (\text{B34})$$

As integrais em F^1 podem ser expressas como:

$$\int_{\eta\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_1 = \sqrt{2\sigma^2} \int_{\eta\sigma/\sqrt{2\sigma^2}}^{\infty} \exp(-u^2) du, \quad (\text{B35})$$

para $u = \frac{\delta_1}{\sqrt{2\sigma^2}}$. Assim:

$$\int_{\eta\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{2\sigma^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta\sigma}{\sqrt{2\sigma^2}}\right) \quad (\text{B36})$$

Para $\eta\sigma \gg 1$, tem-se:

$$\int_{\eta\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_1 = \int_{\eta\sigma}^{\infty} \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_1 = \frac{\sigma}{\eta} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \quad (\text{B37})$$

As integrais em F^2 apresentam solução do tipo:

$$\int_{\eta\sigma}^{\infty} \delta_1 \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_1 = \sigma^2 \int_{\frac{\eta^2}{2}}^{\infty} \exp(-u^2) du, \quad (\text{B38})$$

para $u = \frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}$. Assim:

$$\int_{\eta\sigma}^{\infty} \delta_1 \exp\left(-\frac{\delta_1^2}{2\sigma^2}\right) d\delta_1 = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \quad (\text{B39})$$

Substituindo as integrais B37 e B39 em B34, considerando $A \ll 1$ e $\eta\sigma \gg 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} P[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma] &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\frac{\sigma}{\eta} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \right)^2 \\ &+ \frac{2A}{\sigma^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left(\sigma^2 \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B40})$$

Agrupando os termos, obtém-se a expressão final de $P^G[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma]$:

$$P[\delta_1 > \eta\sigma, \delta_2 > \eta\sigma] = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \right)^2 (1 + 2A\eta^2) \quad (\text{B41})$$

APÊNDICE C

CÁLCULO DA PROBABILIDADE BI-DIMENSIONAL DOS PICOS DE ALTA DENSIDADE EM CAMPOS NÃO-GAUSSIANOS

A densidade de probabilidade para encontrar, nos pontos x_1 e x_2 , os valores d_1 e d_2 , respectivamente, $P^{NG}[\delta_1, \delta_2]$, pode ser obtida através da expansão (Gnedenko e Kolmogorov, 1968):

$$P^{NG}[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n] = \left\{ 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{\alpha\beta \dots \varpi=1}^n b_s(\delta_\alpha, \delta_\beta, \dots, \delta_\varpi) H_{\alpha, \beta, \dots, \varpi}[\delta - \kappa_1(\delta)] \right\} \times P^G[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n] \quad (C1)$$

sendo b_s as funções de *quasi-momento*, H os polinômios generalizados de Hermite e κ_1 o primeiro cumulante da distribuição. Para o campo de flutuações de densidade, no qual $\kappa_1 = \langle \delta \rangle = 0$, a expansão nos polinômios de Hermite se reduz apenas a: $H_{\alpha, \beta \dots \omega}[\delta]$.

Os polinômios generalizados de Hermite são definidos como:

$$H_{\alpha\beta \dots \varpi}[x] = e^{\varphi[x]} \left(-\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \right) \left(-\frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \dots \left(-\frac{\partial}{\partial x_\varpi} \right) e^{-\varphi[x]} \quad (C2)$$

para:

$$\varphi[x] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \alpha_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \quad (C3)$$

Através da expressão (C1), a densidade de probabilidade conjunta de uma variável não gaussiana, $P^{NG}[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n]$, é expressa em função da densidade de probabilidade de uma variável gaussiana, $P^G[\delta_1, \delta_2 \dots \delta_n]$, acrescida de termos envolvendo as correlações de

ordens superiores a dois. Os fatores acrescidos na densidade de probabilidade gaussiana correspondem aos desvios de gaussianidade da distribuição.

O caso bidimensional de C1 pode ser expresso como (Gnedenko e Kolmogorov, 1968):

$$P^{NG}[\delta_1, \delta_2] = \left\{ 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{l+m=s} b_{(lm)} H_{(lm)}[\delta - k_1(\delta)] \right\} \times P^G[\delta_1, \delta_2] \quad (C4)$$

sendo:

$$b_{lm} = b_{l+m} \left(\underbrace{\delta_1, \dots, \delta_1}_{l \text{ vezes}}; \underbrace{\delta_2, \dots, \delta_2}_{m \text{ vezes}} \right) \quad \text{e} \quad H_{lm} = H_{\underbrace{1, \dots, 1}_{l \text{ vezes}}; \underbrace{2, \dots, 2}_{m \text{ vezes}}}$$

C.1 - CÁLCULO DAS FUNÇÕES DE QUASI-MOMENTO

As funções de *quasi-momento* podem ser obtidas a partir das funções de correlação:

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \beta, \dots, \omega=1}^n K_s(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\omega) z_\alpha z_\beta \dots z_\omega \right\} \\ = 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \beta, \dots, \omega=1}^n b_s(x_\alpha, x_\beta, \dots, x_\omega) z_\alpha z_\beta \dots z_\omega \end{aligned} \quad (C5)$$

As funções de correlação de baixa ordem, b3, b4 e b5, coincidem com as funções de correlação. Em ordens superiores, $s \geq 6$, as funções de *quasi-momento* apresentam fatores extras, tipo:

$$\begin{aligned} b_3 &= K_3[\delta_1, \delta_2, \delta_3] \\ b_4 &= K_4[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4] \\ b_5 &= K_5[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5] \\ b_6 &= K_6[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6] + 10 \{ K_3[\delta_1, \delta_2, \delta_3] K_3[\delta_4, \delta_5, \delta_6] \} \\ b_7 &= K_7[\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7] + 35 \{ K_3[\delta_1, \delta_2, \delta_3] K_4[\delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7] \} \dots \end{aligned} \quad (C6)$$

os termos em colchetes na expressão acima, correspondem à simetrização da função de correlação em relação a todas as variáveis envolvidas.

Assim, para $b_m = b_3$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 b_{30} &= K_3[\delta_1, \delta_1, \delta_1] = \langle \delta_1^3 \rangle \\
 b_{03} &= K_3[\delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^3 \rangle \\
 b_{21} &= K_3[\delta_1, \delta_1, \delta_2] = \langle \delta_1^2 \delta_2 \rangle \\
 b_{12} &= K_3[\delta_1, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_1 \delta_2^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{C7}$$

Os termos em b_4 são:

$$\begin{aligned}
 b_{40} &= K_4[\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1] = \langle \delta_1^4 \rangle - 3 \delta_0^2 \\
 b_{04} &= K_4[\delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^4 \rangle - 3 \delta_0^2 \\
 b_{31} &= K_4[\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_2] = \langle \delta_1^3 \delta_2 \rangle - 3 \delta_0 \delta_r \\
 b_{13} &= K_4[\delta_1, \delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^3 \delta_1 \rangle - 3 \delta_0 \delta_r \\
 b_{22} &= K_4[\delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_1^2 \delta_2^2 \rangle - \delta_0^2 - 2\delta_r^2
 \end{aligned} \tag{C8}$$

Os termos em b_5 são:

$$\begin{aligned}
 b_{50} &= K_5[\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1] = \langle \delta_1^5 \rangle - 10 \delta_0 \langle \delta_1^3 \rangle \\
 b_{05} &= K_5[\delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^5 \rangle - 10 \delta_0 \langle \delta_2^3 \rangle \\
 b_{41} &= K_5[\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_2] = \langle \delta_1^4 \delta_2 \rangle - 4\delta_r \langle \delta_2^3 \rangle - 6\delta_0 \langle \delta_1 \delta_2^2 \rangle \\
 b_{14} &= K_5[\delta_1, \delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^4 \delta_1 \rangle - 4\delta_r \langle \delta_1^3 \rangle - 6\delta_0 \langle \delta_2 \delta_1^2 \rangle \\
 b_{32} &= K_5[\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_1^3 \delta_2^2 \rangle - \delta_0 \langle \delta_1^3 \rangle - 3\delta_0 \langle \delta_1 \delta_2^2 \rangle - 6\delta_r \langle \delta_1^2 \delta_2 \rangle \\
 b_{23} &= K_5[\delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^3 \delta_1^2 \rangle - \delta_0 \langle \delta_2^3 \rangle - 3\delta_0 \langle \delta_2 \delta_1^2 \rangle - 6\delta_r \langle \delta_2^2 \delta_1 \rangle
 \end{aligned} \tag{C9}$$

Os termos em b_6 são:

$$\begin{aligned}
 b_{60} &= K_6[\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1] = \langle \delta_1^6 \rangle - 15 \delta_0 \langle \delta_1^4 \rangle - 15 \delta_0^3 - 10 \langle \delta_1^3 \rangle^2 \\
 b_{06} &= K_6[\delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^6 \rangle - 15 \delta_0 \langle \delta_2^4 \rangle - 15 \delta_0^3 - 10 \langle \delta_2^3 \rangle^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{51} &= K_6[\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_2] = \langle \delta_1^5 \delta_2 \rangle - 5\delta_r \langle \delta_1^4 \rangle - 10\delta_0 \langle \delta_1^3 \delta_2^2 \rangle - \\
&\quad 10 \langle \delta_1^2 \delta_2 \rangle \langle \delta_1^3 \rangle - 15 \delta_0^2 \xi_r \\
b_{15} &= K_6[\delta_1, \delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^5 \delta_1 \rangle - 5\delta_r \langle \delta_2^4 \rangle - 10\delta_0 \langle \delta_2^3 \delta_1^2 \rangle - \\
&\quad 10 \langle \delta_2^2 \delta_1 \rangle \langle \delta_2^3 \rangle - 15 \delta_0^2 \xi_r \\
b_{42} &= K_6[\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_1^4 \delta_2^2 \rangle - 6\delta_0 \langle \delta_1^2 \delta_2^2 \rangle - \delta_0 \langle \delta_1^4 \rangle - \\
&\quad 4 \langle \delta_1^3 \rangle \langle \delta_1 \delta_2^2 \rangle - 8 \langle \delta_1 \delta_2 \rangle \langle \delta_1^3 \delta_2 \rangle - \\
&\quad 6 \langle \delta_1^2 \delta_2 \rangle \langle \delta_1^2 \delta_2 \rangle - 12 \delta_r^2 \xi_0 - 3 \delta_0^3 \\
b_{24} &= K_6[\delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^4 \delta_1^2 \rangle - 6\delta_0 \langle \delta_2^2 \delta_1^2 \rangle - \delta_0 \langle \delta_2^4 \rangle - \\
&\quad 4 \langle \delta_2^3 \rangle \langle \delta_2 \delta_1^2 \rangle - 8 \langle \delta_2 \delta_1 \rangle \langle \delta_2^3 \delta_1 \rangle - \\
&\quad 6 \langle \delta_2^2 \delta_1 \rangle \langle \delta_2^2 \delta_1 \rangle - 12 \delta_r^2 \xi_0 - 3 \delta_0^3 \\
b_{33} &= K_6[\delta_1, \delta_1, \delta_1, \delta_2, \delta_2, \delta_2] = \langle \delta_2^3 \delta_1^3 \rangle - 3\delta_0 \langle \delta_1 \delta_1^3 \rangle - 3\delta_0 \langle \delta_1^3 \delta_2 \rangle - \\
&\quad \langle \delta_1^3 \rangle \langle \delta_2^3 \rangle - 9 \xi_r \langle \delta_1^2 \delta_2^2 \rangle - 9 \langle \delta_1 \delta_2^2 \rangle \langle \delta_1^2 \delta_2 \rangle - \\
&\quad -6 \delta_r^3 - 9 \delta_0^2 \xi_r
\end{aligned} \tag{C10}$$

C.2 - CÁLCULO DOS POLINÔMIOS DE HERMITE

Combinando as definições em C2 e C3, é possível definir redefinir os polinômios generalizados de Hermite. Usando a notação:

$$y_\alpha = y_\alpha[x] = \frac{\partial \varphi[x]}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta=1}^n a_{\alpha\beta} x_\beta, \tag{C11}$$

os polinômios de Hermite se reduzem a:

$$H_\alpha = y_\alpha$$

$$H_{\alpha\beta} = y_\alpha y_\beta - a_{\alpha\beta}$$

$$H_{\alpha\beta\gamma} = y_\alpha y_\beta y_\gamma - a_{\alpha\beta} y_\gamma - a_{\alpha\gamma} y_\beta - a_{\gamma\beta} y_\alpha = y_\alpha y_\beta y_\gamma - \{a_{\alpha\beta} y_\gamma\}_3$$

$$H_{\alpha\beta\gamma\delta} = y_\alpha y_\beta y_\gamma y_\delta - \{a_{\alpha\beta} y_\gamma y_\delta\}_6 - \{a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta}\}_3$$

$$H_{\alpha\beta\gamma\delta\varpi} = y_\alpha y_\beta y_\gamma y_\delta y_\varpi - \{a_{\alpha\beta} y_\gamma y_\delta y_\varpi\}_{10} - \{a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} y_\varpi\}_{15}$$

$$H_{\alpha\beta\gamma\delta\varpi\theta} = y_\alpha y_\beta y_\gamma y_\delta y_\varpi y_\theta - \{a_{\alpha\beta} y_\gamma y_\delta y_\varpi y_\theta\}_{15} - \{a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} y_\varpi y_\theta\}_{45} - \{a_{\alpha\beta} a_{\gamma\delta} a_{\varpi\theta}\}_{15}$$

Anotação: $\{i\}_s$ representa os s termos da simetrização do conjunto i .

O cálculo dos polinômios de Hermite, a expansão e a integração em $P^{\text{NG}}[\delta_1, \delta_2]$ foram obtidos com auxílio do programa *Mathematica*¹.

¹ <http://www.wolfram.com/products/mathematica/index.html>

