



MINISTÉRIO DA CIÉNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21d/2023/03.29.17.07-TDI

ANÁLISES DA ANOMALIA COLD SPOT: UMA APLICAÇÃO LOCAL DOS FUNCIONAIS DE MINKOWSKI

Murilo Macedo

Dissertação de Mestrado do
Curso de Pós-Graduação em
Astrofísica, orientada pelos Drs.
Carlos Alexandre Wuensche de
Souza, e Camila Paiva Novaes,
aprovada em 28 de fevereiro de
2023.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/48QEJJ8>

INPE
São José dos Campos
2023

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)
Divisão de Biblioteca (DIBIB)
CEP 12.227-010
São José dos Campos - SP - Brasil
Tel.:(012) 3208-6923/7348
E-mail: pubtc@inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELECTUAL DO INPE - CEPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):

Presidente:

Dra. Marley Cavalcante de Lima Moscati - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

Membros:

Dra. Ieda Del Arco Sanches - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)

Dr. Rafael Duarte Coelho dos Santos - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA CIÉNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

sid.inpe.br/mtc-m21d/2023/03.29.17.07-TDI

ANÁLISES DA ANOMALIA COLD SPOT: UMA APLICAÇÃO LOCAL DOS FUNCIONAIS DE MINKOWSKI

Murilo Macedo

Dissertação de Mestrado do
Curso de Pós-Graduação em
Astrofísica, orientada pelos Drs.
Carlos Alexandre Wuensche de
Souza, e Camila Paiva Novaes,
aprovada em 28 de fevereiro de
2023.

URL do documento original:
<http://urlib.net/8JMKD3MGP3W34T/48QEJJ8>

INPE
São José dos Campos
2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Macedo, Murilo.

M119a Análises da anomalia Cold Spot: uma aplicação local dos Funcionais de Minkowski / Murilo Macedo. – São José dos Campos : INPE, 2023.

xxviii + 100 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m21d/2023/03.29.17.07-TDI)

Dissertação (Mestrado em Astrofísica) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2023.

Orientadores : Drs. Carlos Alexandre Wuensche de Souza, e Camila Paiva Novaes.

1. Cosmologia.
2. Radiação cósmica de fundo.
3. Cold Spot.
4. Funcionais de Minkowski.
- I.Título.

CDU 52-35



Esta obra foi licenciada sob uma Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License.



INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS

Serviço de Pós-Graduação - SEPGR

DEFESA FINAL DE DISSERTAÇÃO DE MURILO MACEDO
REG. 416814/2021, BANCA Nº 026/2023

No dia 28 de fevereiro de 2023, no modo híbrido presencial/remoto, o(a) aluno(a) mencionado(a) acima defendeu seu trabalho final (apresentação oral seguida de arguição) perante uma Banca Examinadora, cujos membros estão listados abaixo. O(A) aluno(a) foi APROVADO(A) pela Banca Examinadora, por unanimidade, em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título de Mestre em Astrofísica, com a exigência de que o trabalho final a ser publicado deverá incorporar as correções sugeridas pela Banca Examinadora, com revisão pelo(s) orientador(es).

Título: "Análises da anomalia Cold Spot: uma aplicação local dos Funcionais de Minkowski"

Membros da banca:

Dra. Christine Córdula Dantas – Presidente – INPE

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza – Orientador – INPE

Dra. Camila Paiva Novaes – Orientador – INPE

Dra. Larissa Carlos de Oliveira Santos – Membro Externo – Universidade de Yangzhou/China

Dr. Thiago dos Santos Pereira – Membro Externo – UEL/Paraná



Documento assinado eletronicamente por **Christine Córdula Dantas, Tecnologista**, em 01/03/2023, às 16:25 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Alexandre Wuensche de Souza, Chefe da Divisão de Astrofísica**, em 01/03/2023, às 16:27 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Camila paiva novaes (E), Usuário Externo**, em 02/03/2023, às 10:36 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Thiago dos santos pereirA (E), Usuário Externo**, em 10/03/2023, às 10:56 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Larissa Carlos de Oliveira Santos (E), Usuário Externo**, em 22/03/2023, às 14:09 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.mcti.gov.br/verifica.html>, informando o código verificador **10854743** e o código CRC **4119B50B**.

Referência: Processo nº 01340.001316/2023-25

SEI nº 10854743

“Em alguns casos, muito raros, pode-se admitir-se que uma tal vontade de conhecer a verdade, que um ânimo libertino e aventureiro, que um orgulho de metafísico ambicioso da posição perdida tenha lugar aqui, preferindo um punhado de certeza a uma carrada de belas probabilidades; admito também que existam puritanos fanáticos da consciência, os quais prefeririam um certo nada a um incerto qualquer coisa.”

FRIEDRICH NIETZSCHE
em “Além do bem e do mal”, 1886.

A meus pais, David Macedo e Maria Cecília

AGRADECIMENTOS

Presto meus sinceros agradecimentos...

A minha família, pelo apoio e dedicação por toda a vida.

Aos meus ilustres orientadores Carlos Alexandre e Camila, pelo companheirismo, paciência, dedicação e por terem feito parte desta jornada. Foi um prazer e uma honra ter sido orientado por vocês!

Aos meus professores e pesquisadores do INPE que também participaram desta jornada: André Milone, Cláudia Vilega, José Carlos, Christine Córdula, João Braga e Jaziel Coelho.

Lhes serei eternamente grato.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

RESUMO

A Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas (RCF) é um dos observáveis mais importantes para a Cosmologia. Ela consiste no campo de radiação mais antigo que se tem acesso, trazendo consigo informações do universo primordial. Em particular, os dados da RCF dão suporte ao Modelo Cosmológico Padrão (MCP), que indica uma distribuição de flutuações de temperatura gaussiana e isotrópica. No entanto, o campo de temperatura da RCF apresenta sinais cuja probabilidade de ocorrência de acordo com o MCP são muito pequenas, as chamadas anomalias da RCF. Entre elas está o *Cold Spot* (CS), uma região cujo perfil médio de temperatura é considerado discrepante quando comparado a outras regiões frias extremas. O presente trabalho propõe testar o nível de significância estatística do CS enquanto anomalia a partir de uma metodologia baseada nos Funcionais de Minkowski (FM), uma ferramenta amplamente utilizada em análises estatísticas da RCF. A metodologia consiste no cálculo dos FM em discos concêntricos de diferentes tamanhos e centrados na posição do CS. O método é aplicado aos mapas mais recentes da RCF produzidos pelo satélite *Planck* e a simulações Monte Carlo do campo da RCF. As análises confirmam o CS como um sinal extremo (improvável) na RCF. Além disso, os resultados mostram que mais que o próprio CS, o anel quente que o circunda atribui a característica anômala a esta região, com probabilidade de ocorrência que pode chegar $\lesssim 1\%$, a depender do tamanho do disco e dos FM empregados.

Palavras-chave: Cosmologia. Radiação Cósmica de Fundo. *Cold spot*. Funcionais de Minkowski.

ANALYZIS OF THE COLD SPOT ANOMALY: A LOCAL APPLICATION OF MINKOWSKI FUNCTIONALS

ABSTRACT

The Cosmic Microwave Background Radiation (CMB) is one of the most important observables for Cosmology. It consists in the oldest radiation field one can access, carrying information from the very early universe. Particularly, the CMB data support the Standard Cosmological Model (SCM), which indicates gaussian and isotropic distribution of temperature fluctuations. However, the CMB temperature field presents signals whose probability of occurrence according to the SCM are very small, the so-called CMB anomalies. Among them is the Cold Spot (CS), a region whose average temperature profile is considered anomalous when compared to other extreme cold regions. The present work aims to test the level of statistical significance of the CS as an anomaly using a methodology based on the Minkowski Functionals (MF), a tool widely used in statistical analyzes of the CMB data. The methodology consists of calculating the MF in concentric discs of different sizes and centered on the CS position. The method is applied to the most recent CMB maps produced by the Planck satellite and to Monte Carlo simulations of the CMB field. Analyzes confirm the CS as an extreme (unlikely) signal in CMB. In addition, the results reveal that more than the CS itself, the hot ring that surrounds it attributes the anomalous characteristic to this region, with a probability of occurrence that can reach $\lesssim 1\%$, depending on the size of the disc and the MF employed.

Keywords: Cosmology. Cosmic Microwave Background. Cold Spot. Minkowski Functionals.

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
1.1 Postulado de Weyl	2
1.2 Distribuição de galáxias observado pelo <i>Sloan Digital Sky Survey</i>	3
1.3 Idade do Universo de acordo com o MCP em função do parâmetro de escala (linha azul). As linhas tracejadas em vermelho ($a = 10^{-4}$) o valor do parâmetro de escala no qual se deu a transição entre o domínio da radiação para o domínio da matéria. A linha tracejada ($a = 0,77$) preta denota o mesmo para o caso entre matéria e energia escura.	8
1.4 Arno Penzias (à esquerda) e Robert Wilson (à direita), no fundo se encontra a antena utilizada na descoberta da RCF.	9
2.1 Espectro da RCF medido por diferentes instrumentos. Valores consistentes com um corpo negro de temperatura de aproximadamente $2,726\text{ K}$. .	11
2.2 Mapa de flutuações de temperatura da RCF observado pelo satélite Planck.	12
2.3 Desacoplamento entre matéria e radiação como consequência do processo de recombinação de elétrons. As esferas menores denotam elétrons enquanto que as maiores representam núcleons.	14
2.4 Ilustração do problema do horizonte cósmico. O círculo em vermelho sobre a esfera celeste denota o horizonte causal na SUE.	17
2.5 Ilustração da solução do problema do horizonte cósmico pela hipótese da inflação.	19
2.6 Ilustração do efeito ISW. A mudança na frequência do fótons é indicada pela mudança em sua coloração.	23
2.7 Ilustração dos esféricos harmônicos. Note que o termo m está associado direção no céu enquanto que l está vinculado à escala angular sobre a esfera.	24
2.8 Espectro de potência angular da RCF. Os pontos em vermelho denotam as flutuações de temperatura da RCF detectadas pelo satélite <i>Planck</i> em diferentes escalas angulares no céu. Na parte inferior do gráfico se encontram os resíduos estatísticos. A reta tracejada em $l = 30$ indica a mudança de escala logarítmica, utilizada até $l < 30$, para a escala linear ($l > 30$).	29
2.9 Fonte: Ilustração da forma dos espectros em função da variação de um parâmetro cosmológico. Cada gráfico apresenta variações a partir de um modelo fiducial.	30

3.1	Alinhamento entre quadrupolo e do octopolo. Mapas gerados a partir dos dados do <i>WMAP</i>	32
3.2	Os dados dos hemisférios norte e sul são, respectivamente, denotados pela linha sólida com cruzes e pela linha pontilhada com círculos. A linha tracejada representa os valores observados pelo WMAP, enquanto que a linha sólida e as duas áreas em tons de cinza em torno dele denotam, respectivamente, o <i>best fit</i> teórico aos dados do WMAP e as regiões de confiança de 1σ e 2σ , ambas construídas a partir de 2048 simulações Gaussianas.	33
3.3	Mapa do campo de flutuações de temperatura da RCF gerado a partir dos dados do WMAP. A localização do CS se encontra na região marcada com um círculo. E a região cinza denota a aplicação de uma máscara sobre os dados.	35
3.4	Imagen do CS real à esquerda. À direita encontra-se o CS no espaço de <i>wavelets</i> . Os pontos cobertos acima indicam a posições de fontes extragalácticas que foram mascaradas.	35
3.5	A linha tracejada e contínua indicam, respectivamente, o espectro sem e com distorção. Note que o ESZ térmico é nulo para frequência 217 GHz (<i>cross-over</i>); para frequências inferiores à 217 GHz tem-se $\Delta T < 0$; caso contrário tem-se $\Delta T > 0$	38
3.6	Flutuações de temperatura em função do raio angular medido a partir do centro do CS. A linha azul denota o perfil de temperatura do CS medido satélite <i>Planck</i> . As outras denotam a soma das flutuações de temperaturas induzidas pelos <i>voids</i> que são descritos na Tabela 3.1. A região sombreada em azul claro indica o intervalo de confiança de 68% ($\approx 1\sigma$) em relação aos valores médios dos perfis de temperatura ao redor dos pontos mais frios identificados em simulações Gaussianas.	40
3.7	Perfil radial das flutuações de temperatura causada por <i>voids</i> ALTB via ISW. À esquerda assume-se que os fótons não sofrem o efeito de lenteamento gravitacional, quantificado pelo parâmetro $\tilde{\alpha} = 0$; à direita leva-se em conta o efeito de lenteamento, ($\tilde{\alpha} = 1$). As linhas representam o perfil de temperatura de cada <i>void</i> descrito na Tabela 3.1.	41
3.8	Perfil radial das flutuações de temperatura causada por <i>voids</i> <i>top-hat</i> , descritos na Tabela 3.1, via ISW. As linhas representam o perfil de temperatura de cada <i>void</i> e o til sobreescrito na legenda indica que se trata de <i>voids</i> <i>top-hat</i>	41

3.9	Perfil radial de flutuações de temperatura induzidas pelo efeito ISW para três <i>supervoids</i> elipsoidais e um esférico (linha em rosa). Os pontos e as barras em cinza indicam, respectivamente, o perfil de temperatura do CS e as barras de erro de acordo com os dados do satélite <i>Planck</i> . Os símbolos sobrescritos \parallel e \perp denotam, nessa ordem, os valores dos comprimentos do <i>void</i> paralelos e perpendiculares à linha de visada. Cada uma das linhas corresponde às flutuações de temperatura do <i>void</i> com parâmetros descritos na cor correspondente. O formato de cada <i>void</i> é ilustrado no canto direito inferior.	42
3.10	Valores de A_{ISW} para diferentes <i>supervoids</i> obtidos a partir dos catálogos: <i>Dark Energy Survey</i> (DES), <i>Baryon Oscillations Spectroscopic Survey</i> (BOSS) e <i>Sloan Digital Sky Survey</i> (SDSS). Todas as barras de erro correspondem à 1σ . A linha pontilhada de cor preta, em $A_{ISW} = 1$, indica o valor esperado dentro do MCP (Λ <i>CDM</i>). As faixas cinza e azul em torno da linha pontilhada indicam o intervalo de confiança de 1σ gerados, nesta ordem, a partir de BOSS \times <i>Planck</i> e Nadathur e Crittenden (2016). As duas linhas tracejadas em cinza correspondem aos valores extremos esperados no modelo AvERA quando restritos aos multipolos $10 < l < 100$ (faixa cinza onde está escrito AvERA).	44
3.11	Diferentes perfis radiais de temperatura. Os pontos e as barras de erro denotam o perfil do CS observado pelo satélite <i>Planck</i> . As linhas contínuas representam os valores obtidos a partir de três tipos de simulações de N-corpos descritas na legenda. A linha tracejada e a faixa azul representam as flutuações de temperatura das simulações MXXL amplificadas pelo fator $A_{ISW} = 5,2 \pm 1,6$	45
3.12	Diagrama qualitativo da inflação caótica. Cada mancha representa uma região com tamanho de Hubble e com diferente valor para o campo ínflaton. 46	
4.1	Ilustração da resolução dos satélites COBE, WMAP e <i>Planck</i>	49
4.2	Exemplos de discretização da esfera com diferentes pixels. O caso à esquerda corresponde à resolução base cujo $N_{side} = 1$, com 12 pixels no total. O caso à direita representa a situação para $N_{side} = 4$	50
4.3	(a) Simulação de mapa de flutuações de temperatura da RCF sem máscara. (b) <i>Common mask</i> aplicada ao mapa simulado.	52
4.4	Exemplos de mapas com $N_{side} = 512$ gerados para diferentes valores de ν . 54	

4.5	Funcionais de Minkowski para dois valores diferentes de N_{side} (colunas da esquerda para direita, respectivamente, mostram Área, Perímetro e Genus) dos mapas de flutuações de temperatura SMICA (azul), SEVEM (verde), NILC (laranja) e Commander (vermelho) para dois valores de N_{side} . Os resíduos estatísticos se encontram na parte inferior de cada gráfico. A região em cinza denota o intervalo de confiança de 99% estimado a partir de simulações <i>Full Focal Plane</i> (FFP10) processados pelo método SMICA. As linhas tracejadas denotam o mesmo intervalo de confiança obtidos por outros métodos.	55
4.6	Sequência de passos seguidos até o cálculo dos FM sobre os mapas reais: SMICA, SEVEM, NILC e Commander.	57
4.7	Sequência de passos seguidos para o cálculo dos FM sobre cada mapa simulado.	57
5.1	Valores do parâmetro A para os FM, Área, Perímetro e Genus. As faixas azul e cinza denotam, respectivamente, o intervalo de confiança de 95% e 99% construídos a partir das simulações.	63
5.2	Histogramas dos 1000 valores de A calculados para o Perímetro tomando discos de 5° e 15° sobre as simulações. As linhas coloridas, conforme a legenda, denotam os valores observados sobre cada mapa de dados, enquanto que a linha preta representa o valor médio de A. A região limitada pelas linhas tracejadas denotam o intervalo de confiança de 99% dos valores de A para os discos analisados.	64
5.3	Análogo à Figura 5.2, mas para valores de A calculados para o Genus. . .	65
5.4	Valores do parâmetro A para a combinação de dois e de três dos FM. As faixas azul e cinza denotam, respectivamente, o intervalo de confiança de 95% e 99% construídos a partir das simulações.	66
5.5	Análogo à Figura 5.2, mas para valores de A calculados para a combinação Perímetro + Genus.	67
5.6	Histogramas dos valores de A obtidos analisando discos de 5° e 15° sobre as simulações. São apresentados os resultados para o Perímetro e o Genus individualmente e a combinação deles. A linha contínua preta indica o valor médio de A das simulações para a combinação Perímetro + Genus. .	68
5.7	Valores de <i>p-value</i> , em função do raio do disco, vinculados à Área, ao Perímetro e ao Genus.	70
5.8	Valores de <i>p-value</i> , em função do raio do disco, para os FM combinados. .	71
5.9	Valores de <i>p-value</i> vinculados ao Perímetro, ao Genus e à combinação de ambos, para diferentes discos.	72

5.10 Variação do parâmetro A em função do raio do disco para a Área, Perímetro e Genus. As faixas azul e cinza denotam, respectivamente, o intervalo de confiança de 95% e 99% construídos a partir das simulações.	74
5.11 Variação do parâmetro A em função do raio disco para os FM combinados. As faixas azul e cinza denotam, respectivamente, o intervalo de confiança de 95% e 99% construídos a partir das simulações.	75

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
3.1 Parâmetros descrevendo os quatro <i>voids</i> analisados. Os símbolos R_V , z_V e δ_V são os parâmetros que caracterizam os <i>voids</i> e indicam, nesta ordem, o raio, o <i>redshift</i> e seu contraste de densidade.	39
3.2 Síntese das possíveis causas do CS e seus respectivos <i>status</i>	46
5.1 Valores de <i>p-value</i> para os mapas reais, em discos nos quais o sinal do CS se mostra extremo ou anômalo, para diferentes FM ou combinação deles.	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CS	– <i>Cold Spot</i>
ISW	– Efeito Sachs-Wolfe Integrado
SZ	– Efeito Sunyaev-Zeldovich
FLRW	– Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
FM	– Funcionais de Minkowski
MCP	– Modelo Cosmológico Padrão
NILC	– <i>Needlet Internal Linear Combination</i>
RCF	– Radiação cósmica de fundo
SW	– Sachs-Wolfe
SMICA	– <i>Spectral Matching Independent Component Analysis</i>
SUE	– Superfície de último espalhamento
WMAP	– <i>Wilkinson Microwave Anisotropy Probe</i>
Λ CDM	– Λ - <i>Cold Dark Matter</i>
Λ LTB	– Λ -Lemâitre-Tolman-Bondi

LISTA DE SÍMBOLOS

G	–	Constante gravitacional
δ	–	Contraste de densidade de massa
ρ_0	–	Densidade média
ΔT	–	Flutuação de temperatura
Ω_Λ	–	Parâmetro cosmológico de densidade de energia escura
Ω_m	–	Parâmetro cosmológico de densidade de matéria
Ω_r	–	Parâmetro cosmológico de densidade radiação
p	–	<i>p-value</i>
R_V	–	Raio do <i>void</i>
z	–	<i>redshift</i>
c	–	Velocidade da luz no vácuo

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO	11
2.1 O problema do horizonte e a isotropia da RCF	16
2.2 A equação de anisotropias da RCF	19
2.3 O espectro de potência angular	23
3 AS ANOMALIAS DA RCF	31
3.1 O <i>Cold Spot</i>	33
3.2 Possíveis causas para o CS	36
4 METODOLOGIA	49
4.1 O <i>HEALPix</i>	50
4.2 Mapas reais e simulados	51
4.3 Funcionais de Minkowski	52
4.4 Aplicação dos FM, coleta e tratamento de dados	56
5 RESULTADOS	61
5.1 Parâmetro A	61
5.2 <i>p-value</i>	68
5.3 Variação do parâmetro A	73
6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	77
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81
APÊNDICE A	99

1 INTRODUÇÃO

A Cosmologia é uma ciência natural munida de um arcabouço teórico e matemático cujos fundamentos reposam sobre três grandes pilares: a Teoria da Relatividade Geral, o postulado de Weyl e o Princípio Cosmológico. Há também outras hipóteses assumidas para a modelagem do Universo, tal como a validade do Modelo Padrão de Partículas; maiores detalhes podem ser encontrados em ([UZAN](#),). A relatividade geral postula que o espaço-tempo se comporta como um tecido ou malha o qual é distorcido na presença de matéria-energia; esta dinâmica entre eles é descrita pelas equações de campo da relatividade geral

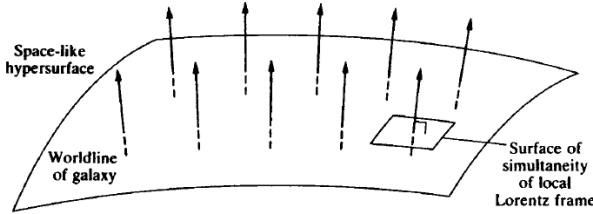
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda, \quad (1.1)$$

onde $R_{\mu\nu}$, R , $g_{\mu\nu}$, c , G denotam, respectivamente, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci, o tensor métrico, a velocidade da luz no vácuo e a constante gravitacional; $T_{\mu\nu}$ é o tensor que descreve a distribuição de energia-momento e Λ é a constante cosmológica. Os índices em letras gregas denotam cada uma das quatro coordenadas do espaço-tempo.

O princípio da covariância geral, proposto por Einstein, estabelece que a formulação matemática ou modelagem das leis da natureza devem ser as mesmas em todos os referenciais. Esta formulação deve independe do sistema de coordenadas definido em cada referencial por cada observador. Isto significa que diferentes observadores em diferentes quadros de referência devem concordar sobre a forma das equações que descrevem as leis da física ([CARLIP](#), 2019; [CHRUSCIEL](#), 2019; [WEINBERG](#), 1972). Além disto, assume-se também a não variabilidade temporal das constantes fundamentais da natureza. Como consequência da invariância da velocidade da luz no vácuo, ocorre o fenômeno da dilatação temporal: a medição de um intervalo de tempo realizada por diferentes observadores inerciais apresentam valores distintos. Ademais, dois observadores distintos que se encontram em galáxias diferentes mediriam intervalos de tempo diferentes por causa do movimento relativo entre eles causado pela expansão cósmica. Esta situação expõe a necessidade em se construir uma escala de tempo universal comum à diferentes observadores.

Com este propósito, se faz uso do postulado de Weyl: todas as galáxias do Universo reposam sobre uma hiper-superfície do tipo-espacó e que as linhas de universo ou trajetórias no espaço-tempo de cada uma das galáxias formam um conjunto de geodésicas do tipo-tempo que são congruentes entre si, divergindo em um ponto no passado ou futuro e que são perpendiculares às hiper-superfícies do tipo espaço

Figura 1.1 - Postulado de Weyl.



Fonte: [Islam \(2004\)](#).

(Figura 1.1) (RUGH; ZINKERNAGEL, ; ISLAM, 2004). Noutras palavras, postula-se que a velocidade própria das galáxias em relação à velocidade de expansão tende a zero; isto implica que as galáxias repousam em relação a um referencial que acompanha o movimento médio das mesmas, este é o referencial comóvel. Ou seja, um observador comóvel não percebe o movimento de afastamento da galáxias. A congruência das geodésicas do tipo tempo implica na existência de uma noção global de tempo que todos os observadores em queda livre com a expansão podem se referir. Isto define o tempo cósmico.

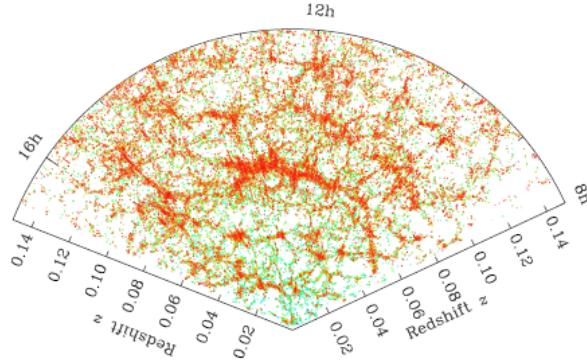
Como desdobramento do princípio da covariância geral já mencionado anteriormente, é adequado afirmar que dois observadores comóveis concordam sobre as propriedades gerais do Universo em larga escala em cada instante do tempo cósmico e isto permite enunciar o princípio cosmológico: o Universo é, em larga escala (maiores do que 100 Mpc (ANDRADE et al., ; DURRER, 2021)) e para um observador comóvel, espacialmente isotrópico e homogêneo. Noutros termos, o Universo apresenta as mesmas propriedades físicas a despeito da direção considerada pelos observadores comóveis e do lugar que eles se encontram. Consequentemente, as galáxias se comportariam no espaço-tempo como partículas de um fluído perfeito (ISLAM, 2004). A Figura (1.2) indica que o Universo em larga escala é consistente com o princípio cosmológico.

A métrica que satisfaz as condições impostas pelo princípio cosmológico é conhecida como métrica cosmológica ou métrica de Friedmann-Lâmaître-Roberston-Walker (FLRW), cuja expressão matemática é (WEINBERG, 2008; ISLAM, 2004)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right], \quad (1.2)$$

em que $a(t)$ é o parâmetro de escala em função do tempo cósmico t , r , θ e ϕ representam as coordenadas espaciais e $k = -1, 1, 0$ denota a constante de curvatura do

Figura 1.2 - Distribuição de galáxias observado pelo *Sloan Digital Sky Survey*.



Fonte: [Dodelson e Schmidt \(2021\)](#).

Universo. A variável temporal presente na métrica FLRW é o tempo cósmico, t .

As equações de campo da relatividade, quando munidas da métrica FLRW e de um tensor $T_{\mu\nu}$ resultam em duas equações fundamentais que descrevem a dinâmica cósmica: a equação de Friedmann e a equação de aceleração, as quais são respectivamente expressas como ([WEINBERG, 2008](#); [ISLAM, 2004](#))

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{kc^2}{a^2(t)} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.3)$$

e

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon(t) + 3P(t)) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (1.4)$$

O ponto sobreescrito indica a derivada em relação ao tempo cósmico; os termos $\varepsilon(t)$ e $P(t)$ indicam, nessa ordem, a densidade de energia e a pressão. Derivando a equação de Friedmann (1.3) em relação ao tempo cósmico e fazendo uso da Equação 1.4 tem-se a equação de fluido:

$$\dot{\varepsilon}(t) + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}(\varepsilon(t) + P(t)) = 0. \quad (1.5)$$

O postulado de Weyl, tal como explicitado anteriormente, trata o Universo como um fluído perfeito no espaço-tempo. Assume-se a existência de uma relação de proporcionalidade direta entre a pressão e densidade deste fluido. Isto é, dada uma constante real w , assume-se a equação de estado dada por

$$P(t) = w\varepsilon(t). \quad (1.6)$$

Substituindo 1.6 na equação de fluido (1.5), a solução desta equação diferencial se expressa como

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(1+\frac{P(t)}{\varepsilon(t)})}, \quad (1.7)$$

em que o zero subscrito indica valores atuais, por exemplo, $\varepsilon(t_0) = \varepsilon_0$ é a densidade de energia para o tempo atual t_0 . Por convenção, toma-se $a(t_0) = a_0 = 1$. Posto isto, pode-se identificar três componentes que contribuem para a densidade de energia total do Universo:

Matéria: Para um observador comóvel, a distribuição de matéria em larga escala pode ser descrita como poeira sem pressão (RUGH; ZINKERNAGEL,). Ou seja pode ser identificada como a componente de pressão nula. E por consequência, tem-se para $w = 0$ a identidade

$$\varepsilon_m(t) = \frac{\varepsilon_{m0}}{a^3(t)}. \quad (1.8)$$

Radiação: a pressão de um campo de radiação isotrópico mede um terço da densidade de energia deste campo, ou seja, para radiação $w = \frac{1}{3}$ (RYBICKI; LIGHTMAN, 2004). Consequentemente, a densidade de energia devido à radiação é expressa tal como

$$\varepsilon_r(t) = \frac{\varepsilon_{r0}}{a^4(t)}. \quad (1.9)$$

Energia escura: a partir da equação de fluido (1.5) e para $w = -1$, conclui-se que há uma componente de pressão negativa, a qual é chamada de energia escura e cujo módulo é igual a sua densidade de energia

$$P(t) = -\varepsilon_\Lambda(t). \quad (1.10)$$

Ademais, a densidade de energia vinculada à energia escura permanece constante ao longo do tempo. Com efeito, considere a equação de fluido para a componente tal qual obedece a relação 1.10,

$$\varepsilon_\Lambda(t) = \varepsilon_{0\Lambda} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{-3(1-\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t)})} = \varepsilon_{\Lambda0}. \quad (1.11)$$

Derivando em relação ao tempo cósmico, tem-se

$$\dot{\varepsilon}_\Lambda(t) = 0. \quad (1.12)$$

A partir da equação de Friedmann (1.3), pode-se demonstrar que a grandeza $\varepsilon_\Lambda(t)$

está associado à constante cosmológica Λ pela relação

$$\varepsilon_\Lambda(t) = \frac{c^2}{8\pi G} \Lambda = \text{const.} \quad (1.13)$$

Diferentes observações do brilho de Supernovas do Tipo Ia (SNIa) apontam que o Universo se encontra em expansão acelerada (SCOLNICK et al., 2018; PERLMUTTER et al., 1999; RIESS et al., 1998). Embora ainda não se saiba a causa física desta expansão, a existência da energia escura que está vinculada à constante cosmológica Λ seria uma das formas de explicar a causa desta expansão.

Define-se, respectivamente, o parâmetro de Hubble $H(t)$ e a densidade crítica $\varepsilon_c(t)$, tais como

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (1.14)$$

e

$$\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2 H^2(t)}{8\pi G}. \quad (1.15)$$

O parâmetro de Hubble quantifica a taxa de expansão cósmica. Seu valor é determinado através de observações astronômicas e seu valor atual é $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, onde $0,65 < h < 0,75$ (DURRER, 2021). Por outro lado, a densidade crítica está intimamente relacionada com o sinal da constante de curvatura do universo. Com efeito, substituindo 1.15 em 1.3 e organizando os termos da equação, tem-se

$$\varepsilon(t) - \varepsilon_c(t) = \frac{3c^4}{8\pi G a^2(t)} k. \quad (1.16)$$

Donde pode-se deduzir os possíveis casos:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_c(t) \Leftrightarrow k = 0; \quad (1.17)$$

$$\varepsilon(t) > \varepsilon_c(t) \Leftrightarrow k = +1; \quad (1.18)$$

$$\varepsilon(t) < \varepsilon_c(t) \Leftrightarrow k = -1. \quad (1.19)$$

Experimentos e análises realizados pela colaboração *Planck* indicam que a constante de curvatura do Universo é consistente com o valor nulo ($k = 0$), isto é, o Universo pode ser bem representado por uma geometria espacial euclidiana, e $\varepsilon_0 = \varepsilon_c(t_0) = 2,77 \times 10^{11} M_\odot \text{Mpc}^{-3}$ (DURRER, 2021; PLANCK COLLABORATION et al., 2020b; JONES, 2017).

A partir das constituintes que compõem a densidade de energia do Universo e assu-

mindo que a geometria do Universo é plana ($k = 0$), os parâmetros cosmológicos de densidade de radiação, matéria e energia escura, respectivamente simbolizados por Ω_r , Ω_m e Ω_Λ , são definidos tais como

$$\Omega(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)} = \frac{1}{\varepsilon_c(t)} \{ \varepsilon_r(t) + \varepsilon_m(t) + \varepsilon_\Lambda \} = \Omega_r(t) + \Omega_m(t) + \Omega_\Lambda = 1. \quad (1.20)$$

Isto posto, convém expressar a equação de Friedmann tal como se segue

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon(t) = \varepsilon_c(t_0) \frac{8\pi G}{3c^2} \frac{1}{\varepsilon_c(t_0)} \{ \varepsilon_r(t) + \varepsilon_m(t) + \varepsilon_\Lambda \} \quad (1.21)$$

$$= \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \frac{8\pi G}{3c^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_c(t_0)} \left[\frac{\varepsilon_{r0}}{a^4(t)} + \frac{\varepsilon_{m0}}{a^3(t)} + \varepsilon_{\Lambda 0} \right] \right\} \quad (1.22)$$

$$= H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_{r0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m0}}{a^3(t)} + \Omega_{\Lambda 0} \right\}. \quad (1.23)$$

onde foram utilizadas as relações 1.8, 1.9 e 1.11. Atualmente o Modelo Cosmológico Padrão (MCP) estabelece os seguintes valores para a constante de Hubble e parâmetros cosmológicos de densidade (PLANCK COLLABORATION et al., 2020b):

$$H_0 = (67,4 \pm 0,5) \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}; \quad \Omega_{r0} = 4,15 \times 10^{-5};$$

$$\Omega_{m0} = 0,3147 \pm 0,0074; \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0,6847 \pm 0,0082. \quad (1.24)$$

A Equação 1.7 indica que o Universo teve uma singularidade ¹ no momento em que o parâmetro de escala tendia à zero - o chamado Big Bang, ou seja

$$\lim_{a(t) \rightarrow 0} \varepsilon(t) = \infty. \quad (1.25)$$

Quando $a(t)$ assume valores suficientemente grandes em 1.23, a dinâmica do Universo é dominada pela energia escura. Em oposição a isto a radiação é o elemento dominante no Universo valores suficientemente pequenos de $a(t)$. De outra forma, a radiação era o ente físico dominante para um tempo cósmico suficientemente próximo da singularidade. Neste contexto, é adequado definir as eras do Universo, isto é, intervalos de tempo caracterizados cuja dinâmica cósmica era dominada por uma forma das componentes da densidade de energia. A transição para o domínio da matéria se deu no instante t_{mr} em que

$$1 = \frac{\Omega_m(t_{mr})}{\Omega_r(t_{mr})} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{r0}} \frac{a^4(t_{mr})}{a^3(t_{mr})}. \quad (1.26)$$

¹Singularidade é um ponto no espaço-tempo cuja densidade de energia tende ao infinito.

Substituindo pelos valores do MCP dados em 1.24, tem-se

$$a(t_{mr}) = \frac{\Omega_{r0}}{\Omega_{m0}} \approx \frac{4,15 \times 10^{-5}}{0,3147} \approx 10^{-4}. \quad (1.27)$$

Isto significa que a transição entre o domínio da radiação pelo domínio da matéria se deu quando o Universo era aproximadamente dez mil vezes menor do que atualmente (RAYDEN, 2017). Em relação ao domínio da matéria, ela se deu até o momento em que o parâmetro de escala se tornou suficientemente grande de modo a permitir o domínio da energia escura. A transição de domínio entre estas formas de energia se deu no tempo $t_{m\Lambda}$ dado por

$$1 = \frac{\Omega_m(t_{m\Lambda})}{\Omega_\Lambda} = \frac{\Omega_{m0}}{\Omega_\Lambda} \frac{1}{a^3(t_{m\Lambda})}. \quad (1.28)$$

Substituindo novamente pelos valores do MCP, tem-se

$$a(t_{m\Lambda}) \approx \left(\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_\Lambda} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \left(\frac{0,3147}{0,6847} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,77. \quad (1.29)$$

A energia escura passou a dominar a dinâmica cósmica quando o Universo tinha aproximadamente 77% da escala atual (RAYDEN, 2017).

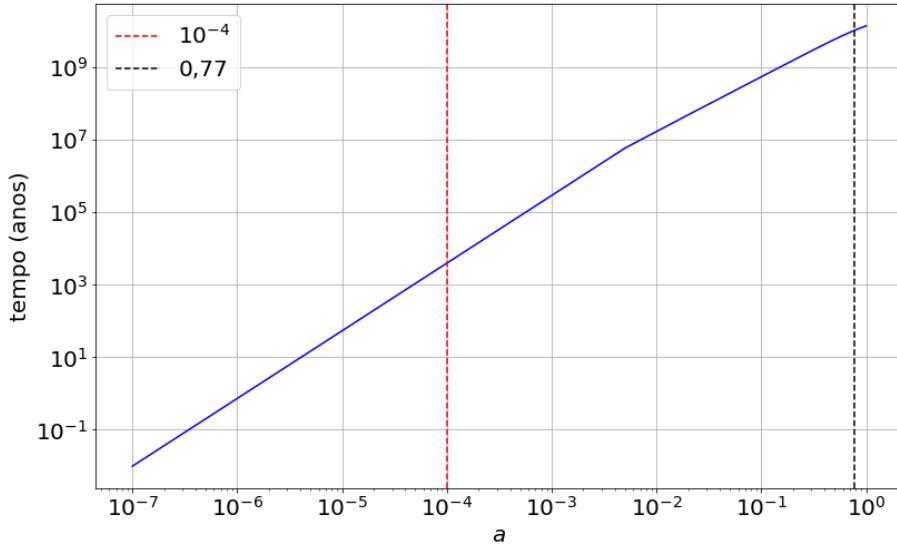
Com o objetivo de expressar a idade de ocorrência de tais eras em função do parâmetro de escala, a partir da Equação 1.23, se expressa a seguinte identidade para o tempo cósmico em função do parâmetro de escala

$$t(a) = \int_0^{t(a)} dt = \int_0^a H_0^{-1} \left\{ \frac{\Omega_{r0}}{a^2} + \frac{\Omega_{m0}}{a} + \Omega_\Lambda a^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} da. \quad (1.30)$$

Realizando uma integração numérica com auxílio de uma ferramenta computacional, pode-se concluir que o Universo existe há aproximadamente 13,8 bilhões de anos (PLANCK COLLABORATION et al., 2020b); a transição entre o domínio da radiação e matéria se deu em torno de 50 mil anos após Big Bang; a energia escura começou a dominar a dinâmica cósmica há aproximadamente 3,5 bilhões de anos. A Figura 1.3 ilustra a solução da Equação 1.30. Uma solução analítica desta mesma equação se encontra no Apêndice A desta dissertação.

A abundância de elementos leves observados no Universo atestam o modelo do Big Bang. Em particular, ao se assumir que toda luminosidade da Galáxia se deu unicamente pela fusão de Hidrogênio em Hélio, ao longo de 10 bilhões de anos, a abundância de Hélio corresponderia apenas a 0,5% daquilo que é observado em diversos

Figura 1.3 - Idade do Universo de acordo com o MCP em função do parâmetro de escala (linha azul). As linhas tracejadas em vermelho ($a = 10^{-4}$) o valor do parâmetro de escala no qual se deu a transição entre o domínio da radiação para o domínio da matéria. A linha tracejada (a = 0,77) preta denota o mesmo para o caso entre matéria e energia escura.



corpos astrofísicos (DODELSON; SCHMIDT, 2021; PLANCK COLLABORATION et al., 2020b; RAYDEN, 2017; WEINBERG, 2008). Isto significa que houve um período no Universo no qual a temperatura do meio era elevada ao ponto de propiciar a ocorrência de fusão nuclear, o que permite explicar a abundância atualmente observada de elementos leves, tal como o caso do elemento Hélio. Este processo é chamado de Nucleossíntese Primordial. Além disto, sabe-se experimentalmente que a partícula nêutron, quando sozinha, tem um tempo de vida da ordem de um decênio de minutos. Isto implica que o processo de síntese de elementos leves se deu num intervalo de tempo menor do que isto, caso contrário não haveria mais nêutrons para serem fundidos nos núcleos atômicos.

As evidências apontam para um Universo primordial extramente quente e denso. Em síntese, o MCP postula que o Universo surgiu de uma singularidade e a grande expansão cósmica, o Big Bang, teve início há aproximadamente 13,8 bilhões de anos. Ademais a dinâmica cósmica é governada, em diferentes eras, por diferentes formas de energia: radiação, matéria e energia escura.

É correto, portanto, concluir que o campo de radiação quente do Universo primordial que dominou a dinâmica cósmica até cerca de 50 mil anos após o Big Bang, foi resfriado pela expansão cósmica e deve se apresentar atualmente como um campo

Figura 1.4 - Arno Penzias (à esquerda) e Robert Wilson (à direita), no fundo se encontra a antena utilizada na descoberta da RCF.



Fonte: ESO/National Park Service (2022).

de radiação frio e de baixa energia. Com efeito, pode-se demonstrar que a temperatura associada a um gás de fótons ou campo radiação diminuiu em decorrência da expansão cósmica (Equação 1.31) (WEINBERG, 2008).

$$T \propto a^{-1}, \quad (1.31)$$

tal que $a = a(t)$. Este campo de radiação foi previsto teoricamente por George Gamow, R. A. Alpher e R. C. Herman e finalmente descoberto, em 1965, pelos laureados astrônomos Arno A. Penzias and Robert W. Wilson. (Figura 1.4) (PAGEL, 2009), eis uma evidência bastante forte para a teoria do Big Bang.

Radiação Cósmica de Fundo (RCF) é o nome dado a este campo de radiação e se apresenta atualmente como um campo de radiação com elevado grau de isotropia e associada a um corpo negro à temperatura de $T_0 = 2,72584 \pm 0,00057 K$ (DURRER, 2021). A temperatura do Universo é definida pela temperatura de corpo negro associada à radiação cósmica de fundo (NASTASE, 2019).

Uma anomalia da RCF é um sinal cuja probabilidade de ocorrer é muito baixa em condições definidas pelo MCP. O objeto de investigação científica desta dissertação é a anomalia *Cold Spot* (CS). As primeiras observações do satélite *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* WMAP não identificaram o CS (BENNETT et al., 2003),

porém numa análise mais tardia os autores VIELVA et al. (2004) identificaram o CS ao buscarem por sinais não-gaussianos nos dados do WMAP. A presença do CS foi reconfirmada por observações realizadas pelo satélite *Planck* (PLANCK COLLABORATION et al., 2020c). Desde a sua descoberta, o CS tem sido alvo de diversas investigações científicas que visam explicar o processo físico que o gerou dentro das configurações do MCP. Este trabalho não visa apresentar uma causa física para o CS, mas tem como objetivo investigar esta anomalia a partir de uma análise complementar às já abordadas na literatura, fazendo uso de um conjunto de ferramentas profusamente utilizadas na análise de dados de RCF, os Funcionais de Minkowski (FM) (PLANCK COLLABORATION et al., 2020c; BUCHERT et al., 2017; MODEST et al., 2012; DUCOUT et al., 2012; NOVIKOV et al., 1999). A pergunta que norteia esta trabalho pode ser expressa do seguinte modo: uma análise do CS e sua vizinhança, utilizando Funcionais de Minkowski (FM) e simulações baseadas no MCP, traria evidências adicionais sobre o nível de significância da anomalia já proposta na literatura? Este trabalho propõe uma abordagem original para analisar um problema relevante na literatura relacionada à RCF, para o qual ainda não foi encontrada uma solução satisfatória.

No Capítulo 2 deste trabalho a RCF será tratada em maiores detalhes e da mesma forma realizada nesta introdução, pretende-se continuar a construir outros elementos do MCP, tal como a hipótese da inflação cósmica e como ela permite explicar o elevado grau de isotropia das flutuações de temperatura da RCF, além de apresentar a equação que governa as anisotropias da RCF. No Capítulo 3, uma breve exposição das anomalias da RCF serão apresentadas. Particularmente, em relação ao CS, serão apresentados neste mesmo capítulo uma síntese das causas físicas já propostas ou analisadas na literatura, bem como as inconsistências ou limitações presentes em cada destas explicações. No Capítulo 4 desta dissertação, os Funcionais de Minkowski (FM) serão matematicamente definidos e suas propriedades serão apresentadas, bem como toda as ferramentas e a metodologia de análise adotada. Os resultados são apresentados no Capítulo 5.

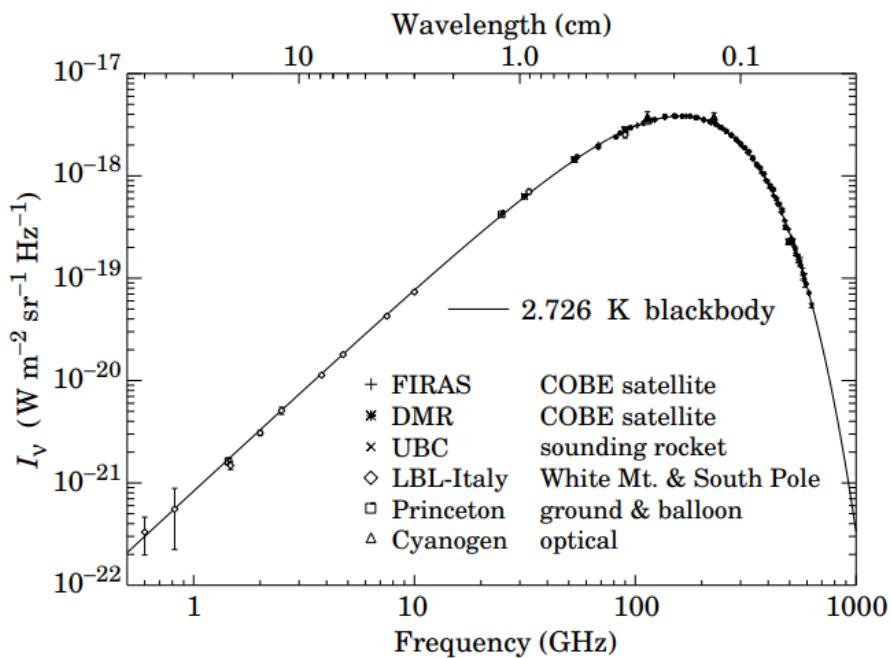
Por fim, as considerações finais e limitações deste trabalho são apresentadas no Capítulo 6.

2 A RADIAÇÃO CÓSMICA DE FUNDO

A Radiação Cósmica de Fundo (RCF) se apresenta atualmente como um campo de radiação descrita por um espectro de corpo negro à temperatura de $T_0 = 2,72584 \pm 0,00057 K$ (DURRER, 2021; COBE COLLABORATION et al., 1990). As Figuras 2.1 e 2.2 apresentam, nessa ordem, o espectro da RCF medido por diferentes instrumentos e o mapa de flutuações de temperatura da RCF observado pelo satélite *Planck*.

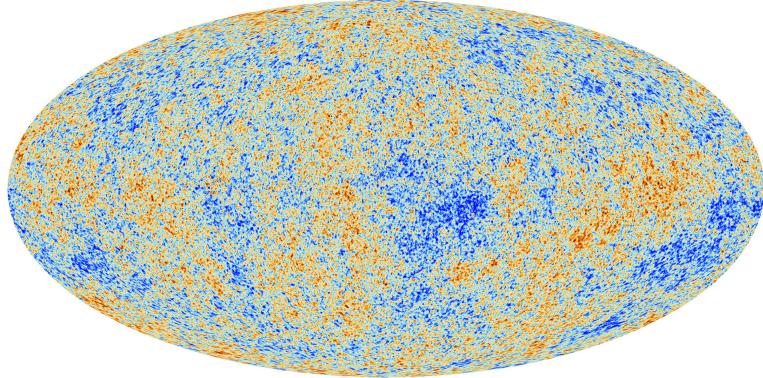
A elevada precisão com que a RCF obedece à lei de Planck indica que houve um tempo no qual a matéria e a radiação se encontravam acopladas e em equilíbrio térmico. Com o objetivo de determinar o tempo no qual se deu o desacoplamento entre matéria e radiação, deve-se ter em mente que o Universo tem sua dinâmica ditada pelo valor de sua densidade de energia e pelas formas que ela se manifesta. Atualmente a energia escura é a componente dominante na dinâmica cósmica causando a expansão acelerada do Universo. Logo, quaisquer fontes astrofísicas de radiação que se encontrem suficientemente distantes de um dado observador, terão o comprimento de onda radiação modificado pela expansão cósmica e com esta lógica, é correto inferir que a radiação cósmica de fundo tinha uma temperatura superior num passado distante. Para quantificar esta variação no comprimento de onda, considere que um

Figura 2.1 - Espectro da RCF medido por diferentes instrumentos. Valores consistentes com um corpo negro de temperatura de aproximadamente 2,726 K.



Fonte: Smoot (1997).

Figura 2.2 - Mapa de flutuações de temperatura da RCF observado pelo satélite Planck.



Fonte: ESA/Planck (2013).

observador terrestre se encontra no centro de um sistemas de coordenadas quaisquer e que ele recebe a radiação eletromagnética de uma fonte distante que está em sua linha de visada. Dada a métrica FLRW, convenciona-se que a posição desta fonte astrofísica é tal que $\vartheta = 0$ e $\phi = 0$, daí, escreve-se para um raio de luz ([WEINBERG, 2008](#)).

$$c \frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.1)$$

Se a radiação é emitida da fonte no instante de tempo t_e e chega ao observador em t_0 , então

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (2.2)$$

Em particular, para um segundo pulso de radiação que é emitido num tempo $t_e + \delta t_e$, onde δt_e é da ordem do inverso da frequência da radiação, então é correto assumir que este segundo raio de luz chegará ao observador no tempo $t_0 + \delta t_0$ e, ainda, o parâmetro de escala quase não sofreu variação. Deste modo, é adequado escrever

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.3)$$

Assumindo que a integral em 2.3 é, num intervalo pequeno, aproximadamente o valor da função no centro deste intervalo ([WEINBERG, 2008](#)), segue a identidade

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (2.4)$$

Se as frequências ν_e da radiação emitida (e recebida) obedecem a relação $\delta t_e \nu_e \approx \delta t_0 \nu_0 \approx 1$, então

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{\delta t_0}{\delta t_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}, \quad (2.5)$$

onde a letra grega λ denota os comprimentos de onda nos respectivos casos. E fica definido o *redshift* z tal como

$$z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)}. \quad (2.6)$$

O *redshift* é uma grandeza adequada para descrever eras ou intervalos de tempo cósmico no Universo. Ressalta-se que $z = 0$ indica o tempo cósmico atual desde o Big Bang, isto é, cerca de 13,7 bilhões de anos. Em contrapartida, $z \rightarrow \infty$, indica o instante do Big Bang.

Combinando as Equações 2.6 e 1.31, tem-se a evolução da temperatura do Universo em função do *redshift*

$$T = T_0(1 + z). \quad (2.7)$$

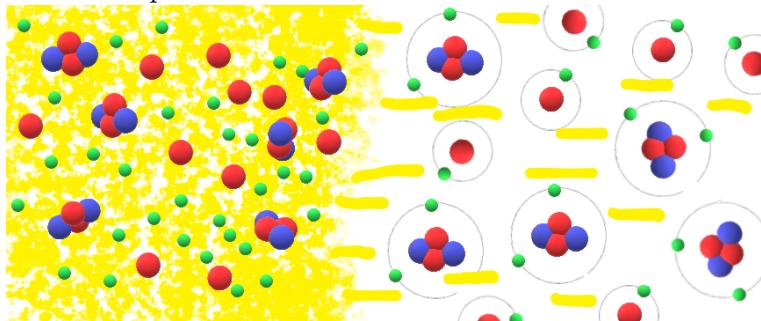
onde $T = T(z)$ e $T_0 \approx 2,726 K$.

Segundo 2.7, observações para valores suficientemente elevados de z mostrariam um Universo extremamente quente e denso, de modo que, em algum momento, a matéria e a radiação estariam acopladas e em equilíbrio térmico num plasma opaco (WEINBERG, 2008). O plasma primordial que permeava todo o Universo era totalmente ionizado devido a sua alta temperatura, porém devido ao processo de resfriamento causado pela expansão cósmica, os elétrons livres eram retirados do meio devido à criação de átomos neutros; este processo é chamado de recombinação. Isto aumentou o grau de transparência deste plasma e os fótons tinham cada vez maior probabilidade de viajar livremente ao longo do Universo em expansão, eis a origem da RCF. A região do espaço-tempo a partir de onde os fótons da RCF puderam se propagar livremente é referida como superfície de último espalhamento

(SUE).

A Figura 2.3 ilustra a origem da RCF.

Figura 2.3 - Desacoplamento entre matéria e radiação como consequência do processo de recombinação de elétrons. As esferas menores denotam elétrons enquanto que as maiores representam núcleons.



O *redshift* no qual ocorreu a recombinação pode ser estimado a partir da equação de Saha, a qual indica o grau ou fração de ionização X de um plasma (RAYDEN, 2017; WEINBERG, 2008). Para tanto, considere que o plasma primordial pode ser totalmente representado pela seguinte reação de equilíbrio térmico



Convém assumir aqui que as partículas do plasma possuíam velocidades não relativísticas, o que favoreceu a formação de átomos neutros. Neste aspecto, a densidade numérica de um dado tipo de partícula pode ser expressa a partir da distribuição de Maxwell-Boltzmann; a saber, para uma partícula do tipo i , se escreve

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{m_i c^2 + \mu_i}{k_B T} \right), \quad (2.9)$$

onde g_i denota o peso estatístico; m_i e μ_i denotam respectivamente a massa e o potencial químico da partícula do tipo i ; a velocidade da luz no vácuo, a constante de Planck reduzida, a constante de Boltzmann e a temperatura são representadas, nesta ordem, por c , \hbar , k_B e T . Levando em conta os valores dos pesos estatísticos e dos potenciais químicos envolvidos na reação 2.8, escreve-se a equação de Saha (RAYDEN, 2017)

$$\frac{n_H}{n_p n_e} = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{13,6 \text{ eV}}{k_B T}\right). \quad (2.10)$$

Com o objetivo de se manter a neutralidade de carga da matéria do Universo, assume-se na equação de Saha que $n_e = n_p$ (WEINBERG, 2008). Por outro lado, a fração de átomos neutros de H e prótons é expressa pela identidade

$$n_H = \frac{(1-X)}{X} n_p. \quad (2.11)$$

Substituindo 2.11 em 2.10, tem-se

$$\frac{1-X}{X} = n_p \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{13,6 \text{ eV}}{k_B T}\right). \quad (2.12)$$

Como a matéria bariônica do Universo primordial está sendo aproximada por prótons ou átomos de H , é válida a relação entre a densidade numérica de prótons (n_p) e de matéria bariônica (n_b) dada por

$$X n_b = n_p. \quad (2.13)$$

Neste ponto, convém expressar a razão entre bárions e a densidade numérica de fótons (n_γ) tal como

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} = \frac{n_p}{X n_\gamma}. \quad (2.14)$$

onde foi utilizada a relação 2.13. Levando em conta que a densidade numérica de fótons n_γ pode ser expressa a partir da distribuição de Bose-Einstein, segue a proposição (RAYDEN, 2017)

$$n_\gamma = 0,2436 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3, \quad (2.15)$$

e substituindo 2.15 e 2.14 em 2.12, tem-se

$$\frac{1-X}{X^2} = 3,84\eta \left(\frac{k_B T}{m_e c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{13,6 \text{ eV}}{k_B T}\right). \quad (2.16)$$

Para uma primeira aproximação, se pode considerar que o processo de recombinação se deu quando o plasma primordial se encontrava 50% ionizado ($X \approx 0,5$), isto é, a

maioria dos elétrons livres já havia sido combinada com núcleos oriundos da nucleossíntese primordial; tomando $\eta \approx 6 \times 10^{-10}$ (DURRER, 2021; DODELSON; SCHMIDT, 2021; RAYDEN, 2017), tem-se

$$T_{dec} \approx 3760K. \quad (2.17)$$

Este valor corresponde, conforme a Equação 2.7, a um *redshift* de aproximadamente

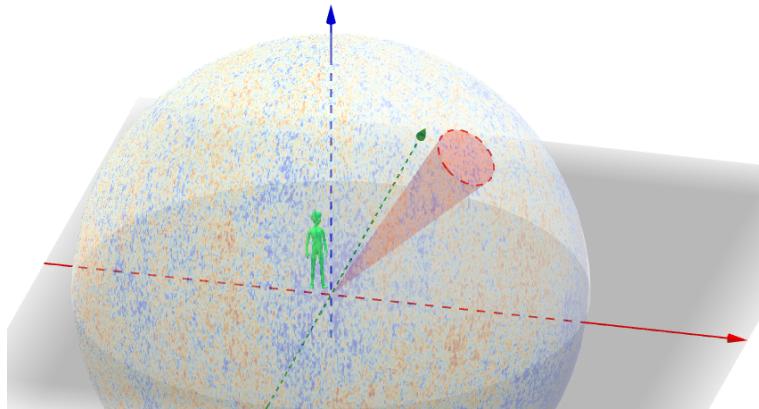
$$z_{dec} = \frac{T_{rec}}{T_0} - 1 \approx \frac{3760 K}{2,728 K} - 1 \approx 1380. \quad (2.18)$$

O desacoplamento entre matéria e radiação é consequência da recombinação. Ou seja, o desacoplamento não se dá de modo instantâneo, mas de modo gradual enquanto ocorre a remoção de elétrons do meio cósmico. Desta forma é adequado assumir que o *redshift* no qual se deu o desacoplamento é pouco menor do que $z_{dec} \approx 1380$. Além disso, a equação de Saha apresenta uma limitação neste processo de modelagem do plasma primordial, pois está implícito na sua solução que a taxa de espalhamentos de fótons pelos elétrons permanece constante ao longo do tempo, o que não é verdade devido ao processo de recombinação (DODELSON; SCHMIDT, 2021; RAYDEN, 2017). Uma análise mais detalhada mostra que o valor mais acurado para o *redshift* no qual se deu o desacoplamento entre matéria e radiação é $z_{dec} \approx 1100$ e ao se combinar as expressões 2.6 e 1.30, conclui-se que a formação da RCF se deu em torno de 360.400 anos após o Big Bang (DURRER, 2021; DODELSON; SCHMIDT, 2021; WEINBERG, 2008).

2.1 O problema do horizonte e a isotropia da RCF

A hipótese da inflação cósmica postula que o Universo primordial passou por uma expansão exponencial e muito breve, nos primeiros instantes após o Big Bang. Acredita-se que as regiões que evoluíram gravitacionalmente e que formaram as grandes estruturas do Universo emergiram de flutuações quânticas de pequena amplitude que foram amplificadas e que ocorreram no campo de energia responsável pela inflação (JONES, 2017; RIOTTO, 2017; UZAN, ; BARTOLO et al., 2001). Ademais, como consequência desta intenso esticamento do tecido do espaço-tempo, ondas de perturbações permeavam pelo plasma primordial de modo que as flutuações de temperatura observados no mapa de RCF mostrado na Figura (2.2) estariam associadas às flutuações de densidade de matéria que ocorreram antes da recombinação. Isto significa que a RCF carrega consigo informações do Universo primordial. Por outro lado, a função de distribuição de probabilidades de campos quânticos livres podem ser descritos por uma Gaussiana (DURRER, 2021), por isto é esperado que as flutuações de temperatura da RCF obejam uma distribuição Gaussiana.

Figura 2.4 - Ilustração do problema do horizonte cósmico. O círculo em vermelho sobre a esfera celeste denota o horizonte causal na SUE.



A inflação implica no elevado grau de isotropia observado nos mapas de RCF. Com efeito, imagine que um observador identifica a chegada de fótons da RCF que vêm de pontos diametralmente opostos do céu. Utilizando a métrica FLRW e utilizando o parâmetro de escala encontrado a partir da Equação 1.3 para um universo dominado pela matéria, afirma-se que a distância do horizonte $r_{hor}(t)$ num tempo cósmico t_0 é

$$r_{hor}(t_0) = c \int_0^{t_0} \frac{dt}{a_m(t)} = c \int_0^t \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{2}{3}} dt = 3ct_0. \quad (2.19)$$

Como consequência disto e assumindo que $k = 0$, o horizonte cósmico na SUE corresponde a um ângulo no céu de aproximadamente (RAYDEN, 2017)

$$\begin{aligned} \vartheta(t_{dec}) &= \frac{r_{hor}(t_{dec})}{r_{ang}(t_{dec})} = \frac{r_{hor}(t_{dec})}{a(t_{dec})r_{hor}(t_0)} \\ &= \frac{r_{hor}(t_{dec})}{r_{hor}(t_0) \{1 + z_{dec}\}^{-1}} = \frac{3ct_{dec}}{3ct_0 \{1 + z_{dec}\}^{-1}} \\ &\approx \frac{3,7 \times 10^5 \text{ anos}}{13,7 \times 10^9 \text{ anos}} \times 1101 \approx 0,031 \text{ rad} \approx 2^\circ. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Assim sendo, se estabelece o problema do horizonte cósmico: pontos separados por uma distância angular maior do que 2° não deveriam apresentar a mesma temperatura, pois não tiveram contato entre si. A Figura 2.4 ilustra esta situação.

O mapa de flutuações de temperatura da RCF (Figura 2.2) indica, por causa de sua uniformidade, que tais pontos do céu deveriam estar em contato causal em algum instante do passado. Assim sendo, se faz necessário propor uma solução que aumente o horizonte comóvel de partículas do Universo primordial. A hipótese da

inflação cósmica resolve este problema.

Para tanto, postula-se que o Universo passou por uma expansão exponencial nos primeiros instantes após o Big Bang, tendo início em $t_i \approx 10^{-36}s$ e término em $t_f \approx 10^{-34}s$. Conforme a Equação 1.4, o fator de escala $a(t)$ terá um crescimento acelerado quando o ente físico que domina a densidade de energia do Universo tiver uma pressão negativa (LIDDLE, 2015). Suponha que durante este período inflacionário o Universo foi dominado por um campo escalar constante que é descrito por um elemento físico denotado pela constante Λ_i (este campo escalar é denominado *inflaton* e representa o modelo inflacionário mais simples), tal que $P < -\varepsilon c^2$, onde ε indica a densidade de energia deste campo. Por conseguinte, a Equação 1.3 pode ser expressa tal como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda_i}{3}. \quad (2.21)$$

Assumindo que a inflação começa em t_i e termina em t_f a solução da equação diferencial 2.21 se expressa por

$$\frac{a_{inf}(t_f)}{a(t_i)} = e^{\sqrt{\frac{\Lambda_i}{3}}t} \quad (2.22)$$

Assumindo que durante brevíssimo período inflacionário ($\approx 10^{-2}s$) a constante de Hubble era constante, tal qual

$$H_i = \sqrt{\frac{\Lambda_i}{3}}, \quad (2.23)$$

implica

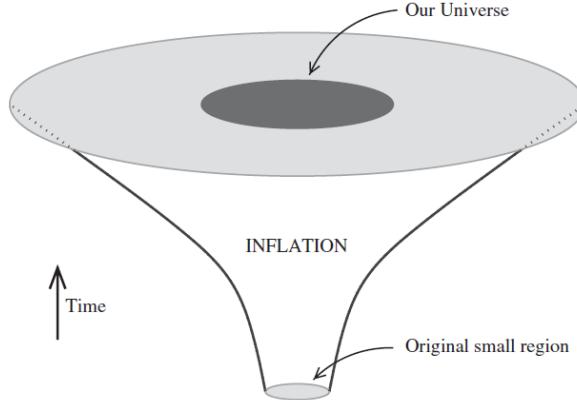
$$a_{inf}(t_f) = a(t_i)e^{H_i t} = a(t_i)e^N \quad (2.24)$$

onde N define o número de *e-foldings* de inflação; conforme observações cosmológicas, $60 < N < 70$ (DURRER, 2021; JONES, 2017). Isto implica num crescimento do fator de escala da ordem de $10^{27} \approx e^{65}$.

A hipótese da inflação cósmica resolve outros dois problemas cosmológicos que estão para além dos objetivos deste trabalho. Em resumo, eles se baseiam nos seguintes questionamentos: Por que não se observa monopolos magnéticos? Por que o Universo é plano? (DURRER, 2021; NASTASE, 2019; RAYDEN, 2017; LIDDLE, 2015).

A inflação cósmica permite explicar a origem das flutuações de temperatura observados na RCF e isto será apresentado com maiores detalhes na seguinte seção, também, a equação de anisotropias da RCF.

Figura 2.5 - Ilustração da solução do problema do horizonte cósmico pela hipótese da inflação.



Fonte: [Liddle \(2015\)](#).

2.2 A equação de anisotropias da RCF

Um universo isotópico e homogêneo é descrito pela métrica FLRW (Equação 1.2) e pode ser caracterizado pela grandeza fator de escala $a(t) = a$. Uma métrica que descreve um espaço-tempo com perturbações pode ser caracterizada por mais duas grandezas além do parâmetro de escala: $\Phi(\mathbf{x}, t)$ e $\Psi(\mathbf{x}, t)$. A primeira destas grandezas descreve as perturbações no fator de escala $a(t)$ enquanto que a última denota o potencial Newtoniano que governa o movimento de corpos não relativísticos; a ordem de grandeza de ambas as perturbações no Universo é da ordem de 10^{-4} ([DO-DELSON; SCHMIDT, 2021](#)). Note que ambas são funções do vetor posição \mathbf{x} e do tempo cósmico t . A partir disto, define-se a métrica que descreve um espaço-tempo perturbado ([DURRER, 2021; DO-DELSON; SCHMIDT, 2021](#)):

$$ds^2 = [-1 - 2\Psi(\mathbf{x}, t)] \delta_{00} dx^0 dx^0 + a^2(t) [1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t)] \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.25)$$

tais que $i, j \in \{1, 2, 3\}$ representam as coordenadas espaciais. Observa-se que a métrica 2.25 é uma generalização da métrica FLRW, isto é, ela se reduz à métrica FLRW para um universo plano quando $\Phi(\mathbf{x}, t)$ e $\Psi(\mathbf{x}, t)$ forem identicamente nulos.

Considere a equação de Boltzmann

$$\frac{df}{dt} = C[t], \quad (2.26)$$

onde $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ denota uma função de distribuição e o termo do lado direito da equação indica o fator de colisão em função do tempo. Para um universo domi-

nado pela radiação, pode-se reescrever a equação de Boltzmann do seguinte modo (DODELSON; SCHMIDT, 2021)

$$\frac{df}{dt} = -p \frac{\partial f^{(0)}}{\partial p} \left\{ \dot{\Theta} + \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \dot{\Phi} + \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right\}, \quad (2.27)$$

o sobrescrito zero indica o termo de ordem zero dada numa expansão em série; p é o módulo momento linear do fóton; Θ é a perturbação no campo isotrópico e homogêneo de temperatura T_0 da RCF expresso em função da posição \mathbf{x} , da direção n^i do fóton e do tempo cósmico t :

$$\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \frac{\Delta T(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t)}{T_0}. \quad (2.28)$$

Supondo que não exista colisão (*free streaming*), a Equação 2.27 se torna identicamente nula, o que implica

$$\dot{\Theta} + \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} = -\dot{\Phi} - \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}. \quad (2.29)$$

Fazendo uso de outra notação, tem-se

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{n^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}. \quad (2.30)$$

Multiplicando 2.30 por $a(t) = a$ e escrevendo $dt = a(t)d\eta$, em que a grandeza $d\eta$ é definida como tempo conforme, segue a proposição

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + n^i \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - n^i \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}. \quad (2.31)$$

Indo para o espaço de Fourier e usando o operador sobre uma grandeza genérica $\delta(\mathbf{x}, t)$ (DODELSON; SCHMIDT, 2021)

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\mathbf{x}, t) \rightarrow i k_i \tilde{\delta}(\mathbf{k}, t), \quad (2.32)$$

onde \mathbf{k} denota o vetor de onda e o símbolo til sobrescrito indica que se está no espaço de Fourier. Escreve-se, então,

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \eta} + i n^i k_i \Theta = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - i n^i k_i \Psi. \quad (2.33)$$

Definindo

$$\mu = \frac{n^i k_i}{k} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{k}, \quad (2.34)$$

note que se $\mu = 1$, então os fótons se deslocam alinhados com o vetor de onda \mathbf{k} , enquanto que para $\mu = 0$, a trajetória dos fótons é perpendicular ao vetor de onda. Fazendo uso da relação 2.34 em 2.33, tem-se

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \eta} + ik\mu\tilde{\Theta} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - ik\mu\tilde{\Psi}. \quad (2.35)$$

Utilizando algumas propriedades de derivação, seguem as identidades

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \eta} + ik\mu\tilde{\Theta} = e^{-ik\mu\eta} e^{ik\mu\eta} \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \eta} + e^{-ik\mu\eta} \tilde{\Theta} \frac{\partial}{\partial \eta} (e^{ik\mu\eta}) \quad (2.36)$$

$$= e^{-ik\mu\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Theta} e^{ik\mu\eta}) \quad (2.37)$$

$$= -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - ik\mu\tilde{\Psi}. \quad (2.38)$$

A partir da igualdade entre 2.37 e 2.38, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Theta} e^{ik\mu\eta}) &= e^{ik\mu\eta} \left\{ -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - ik\mu\tilde{\Psi} \right\} \\ &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} e^{ik\mu\eta} - ik\mu\tilde{\Psi} e^{ik\mu\eta} \\ &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} e^{ik\mu\eta} - \tilde{\Psi} \frac{\partial}{\partial \eta} (e^{ik\mu\eta}) \quad (2.39) \\ &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} e^{ik\mu\eta} + \left\{ \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} e^{ik\mu\eta} - \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} e^{ik\mu\eta} \right\} - \tilde{\Psi} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Psi} e^{ik\mu\eta}) \\ &= -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} e^{ik\mu\eta} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} e^{ik\mu\eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Psi} e^{ik\mu\eta}) \\ &= \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Psi} - \tilde{\Phi}) e^{ik\mu\eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Psi} e^{ik\mu\eta}). \end{aligned}$$

Tem-se, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Theta} e^{ik\mu\eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Psi} e^{ik\mu\eta}) = \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Psi} - \tilde{\Phi}) e^{ik\mu\eta}. \quad (2.40)$$

Integrando desde o desacoplamento η_{dec} até o tempo atual η_o

$$\int_{\eta_{dec}}^{\eta_o} \frac{\partial}{\partial \eta} ((\tilde{\Theta} + \tilde{\Psi}) e^{ik\mu\eta}) d\eta = \int_{\eta_{dec}}^{\eta_o} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Psi} - \tilde{\Phi}) e^{ik\mu\eta} d\eta \quad (2.41)$$

implica

$$[(\tilde{\Theta} + \tilde{\Psi}) e^{ik\mu\eta}] \Big|_{\eta_{dec}}^{\eta_0} = \int_{\eta_{dec}}^{\eta_0} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Psi} - \tilde{\Phi}) e^{ik\mu\eta} d\eta, \quad (2.42)$$

obtendo a equação de anisotropias da RCF

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(\eta_0) + \tilde{\Psi}(\eta_0) &= \left\{ \tilde{\Theta}(\eta_{dec}) + \tilde{\Psi}(\eta_{dec}) \right\} e^{ik\mu(\eta_{dec} - \eta_0)} \\ &+ e^{ik\mu\eta_0} \int_{\eta_{dec}}^{\eta_0} \frac{\partial}{\partial \eta} (\tilde{\Psi} - \tilde{\Phi}) e^{ik\mu\eta} d\eta. \end{aligned} \quad (2.43)$$

O Universo primordial consistia num plasma denso e opaco onde matéria e radiação estavam acopladas. A inflação cósmica e, por consequência, o abrupto esticamento do tecido do espaço-tempo, deram origem às flutuações de densidade no plasma primordial. As compressões em diversas regiões do plasma governadas pela atração gravitacional eram contrapostas pela pressão de radiação dos fótons (HU; DODELSON, 2002). Os efeitos causados por estas compressões e rarefações no plasma primordial permanecem impressos no mapa de flutuações de temperatura da RCF. O primeiro termo do lado direito da Equação 2.44 descreve o efeito Sachs-Wolfe (SW) (SACHS; WOLFE, 1967), o qual ocorre durante a recombinação e imediatamente após o desacoplamento entre matéria e radiação na SUE: os fótons sofrem uma alteração na sua frequência, um *redshift* gravitacional, devido à interação com flutuações de densidade (poços de potencial). Se os fótons atravessam por uma região onde $\tilde{\Psi} < 0$, isto é, de maior densidade (*overdense*), então os fótons se tornarão mais frios para o observador. Caso contrário, para regiões de menor densidade (*underdense*), eles se tornarão mais quentes. Estas anisotropias que ocorrem na SUE são classificadas como primárias.

Durante a propagação dos fótons oriundos da SUE diversos processos físicos devido a estruturas, tais como galáxias e aglomerados, que se encontram na trajetória destes fótons podem induzir mudança no comprimento de onda destes fótons e, por conseguinte, introduzindo anisotropias no mapa de flutuações de temperatura da RCF. Estas anisotropias que ocorrem após a saída dos fótons da SUE são classificadas como secundárias (HU; DODELSON, 2002).

O último termo do lado direito da Equação 2.44 descreve o efeito Sachs-Wolfe Integrado (ISW), o qual expressa a mudança na energia de um fóton causada pela passagem deste fóton por poços de potencial gravitacional que variam no tempo. Conforme a Figura 2.6, o fóton ganha energia ao entrar no poço de potencial gravitacional, mas como este potencial varia com o tempo, suponha que ele fique "menos

Figura 2.6 - Ilustração do efeito ISW. A mudança na frequência do fótons é indicada pela mudança em sua coloração.



Adaptado de Caastro.org (2023).

profundo"ao longo do tempo, o fóton gasta menos energia para sair do que ganhou ao entrar no poço de potencial. Isto implica num ganho líquido de energia destes fótons, isto é, os fótons parecerão mais quentes; o mecanismo inverso também pode ocorrer fazendo com que os fótons fiquem mais frios (BUCHER, 2015; HU; DODELSON, 2002). Além disto, quando o efeito ISW ocorre em alto *redshift*, ele é classificado como o efeito *early* ISW e neste caso, a flutuação temporal dos potenciais gravitacionais ocorreriam devido à radiação; em contrapartida, se classifica como *late* ISW a ocorrência do efeito ISW que ocorre por causa da energia escura (baixo *redshift*) (COPI et al., 2016; CABASS et al., 2015).

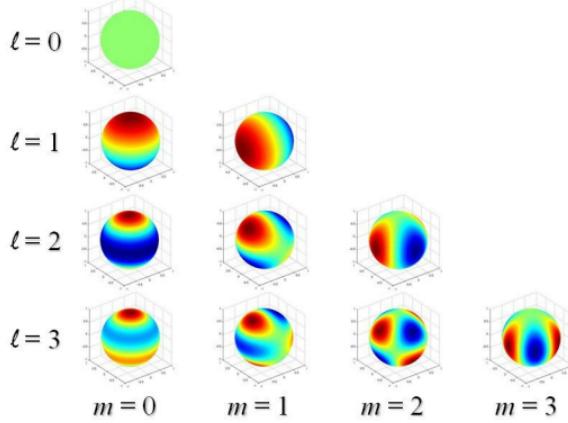
Além do efeito ISW, há outras anisotropias secundárias que se destacam: o efeito de lenteamento gravitacional causado pela distorção do espaço-tempo ao longo da trajetória dos fótons; o efeito Sunyaev-Zeldovich gerado pela interação entre elétrons e fótons pelo espalhamento Compton inverso e além da contaminação do sinal da RCF por fontes eletromagnéticas de origem Galáctica e extragalácticas, denominadas *foregrounds* (DURRER, 2021).

2.3 O espectro de potência angular

Num universo homogêneo a função de temperatura tem apenas o tempo conforme η como variável, ela independe da posição \mathbf{x} e da direção de propagação $\hat{\mathbf{p}}$ dos fótons. A temperatura média atual da RCF é dada pela seguinte integral em ângulo sólido $d\Omega$

$$T_0(\eta) = \frac{1}{4\pi} \int T(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) d\Omega. \quad (2.44)$$

Figura 2.7 - Ilustração dos esféricos harmônicos. Note que o termo m está associado direção no céu enquanto que l está vinculado à escala angular sobre a esfera.



Fonte: Adaptado de Sahoo et al. (2019).

O campo de flutuações de temperatura é definido como

$$T(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) = T_0(\eta) [1 + \Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, \eta)], \quad (2.45)$$

Por causa da simetria esférica, convém expandir as flutuações de temperatura em harmônicos esféricos, isto é,

$$\Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\mathbf{x}, \eta) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \quad (2.46)$$

tal que Y_{ml} é a função harmônica esférica de grau l e ordem m , onde o parâmetro m estaria vinculado à direção no céu, e l define a escala angular. A Figura 2.7 ilustra esta situação.

Como a RCF possui uma distribuição gaussiana com elevado grau de isotropia das perturbações, isto implica que os coeficientes a_{lm} da Equação 2.46 podem ser organizados numa matriz diagonal (DURRER, 2021)

$$\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l, \quad (2.47)$$

onde o símbolo $\langle \rangle$ representa o valor médio. Define-se C_l como espectro de potência angular da RCF. O objetivo é encontrar uma expressão matemática para este espectro. Sabe-se que a função harmônica Y_{ml} obedece a seguinte relação quando

integrada em ângulo sólido (DURRER, 2021; DODELSON; SCHMIDT, 2021)

$$\int d\Omega Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.48)$$

tal que o símbolo $Y_{l'm'}^*$ denota o conjugado complexo da função harmônica.

Multiplicando a Equação 2.46 por $Y_{l'm'}^*$ e integrando em angulo sólido, tem-se

$$\begin{aligned} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) \Theta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\mathbf{x}, \eta) \int d\Omega Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \quad (2.49) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\mathbf{x}, \eta) \delta_{ll'} \delta_{mm'} = a_{lm}(\mathbf{x}, \eta). \end{aligned}$$

Por definição, a transformada de Fourier $F\{\delta(\mathbf{k})\} = \delta(\mathbf{x})$ de um campo $\delta(\mathbf{k})$ é expressa como (DODELSON; SCHMIDT, 2021; BUTKOV, 2019; BASSALO; CATTANI, 2010):

$$F\{\delta(\mathbf{k})\} = \delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \delta(\mathbf{k}). \quad (2.50)$$

Isto posto, expressa-se o lado direito da Equação 2.50 em termos da transformada de Fourier

$$a_{lm}(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) \Theta(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta). \quad (2.51)$$

E analogamente o seu conjugado complexo

$$a_{lm}^*(\mathbf{x}, \eta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int d\Omega Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \Theta^*(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) \quad (2.52)$$

Fazendo uso de ambas as equações na proposição 2.47

$$\begin{aligned} C_l = \langle a_{lm} a_{lm}^* \rangle &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{x}} \int d\Omega Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \\ &\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int d\Omega' Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}') \langle \Theta(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) \Theta^*(\mathbf{k}', \hat{\mathbf{p}}', \eta) \rangle. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Note que a grandeza $\langle \Theta(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta) \Theta^*(\mathbf{k}', \hat{\mathbf{p}}', \eta) \rangle$ denota a média *ensemble* estatístico das amplitudes das flutuações de temperatura, as quais podem ter origens em diferentes épocas. Por exemplo, há àquelas oriundas da inflação cósmica e que concordam com uma distribuição Gaussiana e há aquelas geradas mais tarde, tal como descreve a Equação 2.44 (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Neste caso, convém considerar o tempo $\eta = \eta_0$ e fazer uso das perturbações primordiais de curvatura

simbolizadas por $\mathcal{R}(\mathbf{k})$. Destarte, se escreve

$$\Theta(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta_0) = \Theta(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta_0) \frac{\mathcal{R}(\mathbf{k})}{\mathcal{R}(\mathbf{k})} = \mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta_0) \mathcal{R}(\mathbf{k}) \quad (2.54)$$

sendo

$$\mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta_0) = \frac{\Theta(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta_0)}{\mathcal{R}(\mathbf{k})}. \quad (2.55)$$

A grandeza $\mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta_0) = \mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}})$ é denominada de função de transferência. É válido destacar que num espaço plano, o espectro de potência de um campo qualquer que é isotrópico e homogêneo é definido tal como

$$\langle X(\mathbf{k}) X^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_X(k) \quad (2.56)$$

onde o símbolo $\delta_D^{(3)}$ denota o delta de Dirac em três dimensões e P_X é o espectro de potência associado. De modo genérico, ele é a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos calculados sobre o campo (DURRER, 2021).

Utilizando 2.54 e 2.55 em 2.56, segue

$$\begin{aligned} \langle \Theta(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}, \eta_0) \Theta^*(\mathbf{k}', \hat{\mathbf{p}}', \eta_0) \rangle &= \langle \mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}) \mathcal{R}(\mathbf{k}) \mathcal{T}^*(\mathbf{k}', \hat{\mathbf{p}}') \mathcal{R}^*(\mathbf{k}') \rangle \\ &= \langle \mathcal{R}(\mathbf{k}) \mathcal{R}^*(\mathbf{k}') \rangle \mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}) \mathcal{T}^*(\mathbf{k}', \hat{\mathbf{p}}') \\ &= (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k) \mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}) \mathcal{T}^*(\mathbf{k}', \hat{\mathbf{p}}'), \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde $P_{\mathcal{R}}$ é o espectro de potência das perturbações de curvatura. A função de transferência e o respectivo conjugado complexo foram removidos do cálculo da média realizado anteriormente, pois se trata de uma grandeza determinista (DURRER, 2021). Fazendo a substituição de 2.58 em 2.54, segue

$$\begin{aligned} C_l &= \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \int d\Omega Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int d\Omega' Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}') \\ &\times (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P_{\mathcal{R}}(k) \mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}) \mathcal{T}^*(\mathbf{k}', \hat{\mathbf{p}}') \end{aligned} \quad (2.58)$$

Fazendo uso da seguinte igualdade (BASSALO; CATTANI, 2010)

$$\int d^3 k' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}} \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 1, \quad (2.59)$$

segue

$$C_l = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P_{\mathcal{R}}(k) \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) \mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}) \int d\Omega' Y_{lm}(\hat{\mathbf{p}}) \mathcal{T}^*(\mathbf{k}', \hat{\mathbf{p}}) \quad (2.60)$$

Assumindo que a função de transferência apenas depende da direção dos fótons e o ângulo que este último faz com o vetor de onda, escreve-se

$$\mathcal{T}(\mathbf{k}, \hat{\mathbf{p}}) = \mathcal{T}(k, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}). \quad (2.61)$$

Além disto, convém expressar a função de transferência e o seu conjugado em termos dos polinômios de Legendre

$$\mathcal{T}(k, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \mathcal{T}_l(k), \quad (2.62)$$

$$\mathcal{T}^*(k, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) = \sum_{l'=0}^{\infty} (i)^{l'} (2l'+1) P_{l'}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \mathcal{T}_{l'}^*(k), \quad (2.63)$$

onde P_l denota o polinômio de Legendre de ordem l (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Substituindo 2.62 e 2.63 em 2.60, tem-se

$$\begin{aligned} C_l &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} P_{\mathcal{R}}(k) \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \sum_{l'=0}^{\infty} i^{l'} (2l'+1) \mathcal{T}_l(k) \mathcal{T}_{l'}^*(k) \\ &\times \int d\Omega Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{p}}) P_{l'}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \int d\Omega' Y_{l'm}(\hat{\mathbf{p}}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Com o objetivo de se resolver as duas últimas integrais, é adequado ressaltar a seguinte propriedade dos polinômios de Legendre:

$$P_l(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\mathbf{x}) Y_{l'm'}^*(\mathbf{x}'), \quad (2.65)$$

o que leva a

$$\begin{aligned} \int d\Omega' Y_{l'm}(\hat{\mathbf{p}}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}) &= \int d\Omega' Y_{l'm}(\hat{\mathbf{p}}) \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}) \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \int d\Omega' Y_{l'm}(\hat{\mathbf{p}}) Y_{l'm'}^*(\hat{\mathbf{p}}) \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ &= \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}) \delta_{ll'}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

A igualdade acima é não nula se, e somente se, $l'' = l' = l$. Logo,

$$\begin{aligned}
C_l &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_{\mathcal{R}}(k) \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l i^l (2l+1)^2 \\
&\times \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^2 \mathcal{T}_l(k) \mathcal{T}_l^*(k) Y_{lm'}(\hat{\mathbf{k}}) Y_{lm'}^*(\hat{\mathbf{k}}) \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P_{\mathcal{R}}(k) (4\pi)^2 |\mathcal{T}_l(k)|^2 |Y_{lm'}(\hat{\mathbf{k}})|^2.
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Sabe-se que $d^3k = dk k^2 d\Omega$ e isto implica

$$C_l = \int \frac{dk k^2}{(2\pi)^3} P_{\mathcal{R}}(k) (4\pi)^2 |\mathcal{T}_l(k)|^2 \int d\Omega |Y_{lm'}(\hat{\mathbf{k}})|^2. \tag{2.68}$$

Como a última integral é igual à unidade (DODELSON; SCHMIDT, 2021). Segue o espectro de potência angular da RCF

$$C_l = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 P_{\mathcal{R}}(k) |\mathcal{T}_l(k)|^2. \tag{2.69}$$

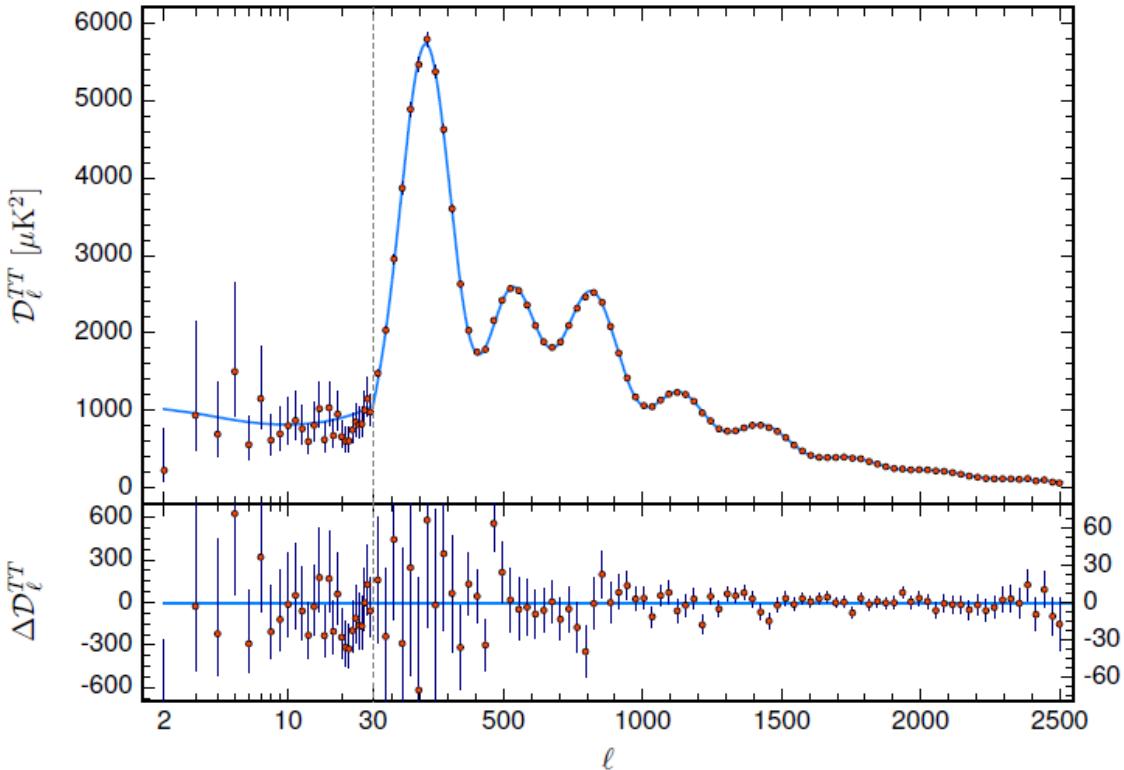
De modo muito simples, a função C_l quantifica a amplitude das flutuações de temperatura do céu quando dividido em 2^l partes iguais. Por exemplo, para $l = 0$ (monopolô) tem-se o céu todo e por isto, o termo C_0 indica a média da flutuação de temperatura de todo o céu. Semelhantemente, quando $l = 1$, indica a flutuação de temperatura observado quando o céu está dividido em duas partes (dipolo). Tal diferença dos valores observadas em cada região do dipolo é atribuída ao efeito Doppler induzido pelo movimento relativo entre o observador e a SUE donde provém os fôtons da RCF, porém há indícios de que uma pequena fração da amplitude deste dipolo seja intrínseca da RCF (DURRER, 2015).

Há uma incerteza fundamental ou erro estatístico sobre o estimador do espectro de potência angular C_l (Equação 2.47), a qual é comumente chamada de variância cósmica e é denotada por σ_l ; ela se deve ao fato dos valores de C_l serem calculados a partir de uma amostra de $(2l+1)$ valores de a_{lm} . A variância cósmica é expressa por (DURRER, 2021; DODELSON; SCHMIDT, 2021; DURRER, 2015).

$$\sigma_l = \frac{\Delta C_l}{C_l} = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}. \tag{2.70}$$

A Figura 2.8 denota o espectro de potência angular observado pelo satélite *Planck*. Por convenção, o eixo das ordenadas desta mesma figura expressa $l(l+1)C_l/2\pi$ em

Figura 2.8 - Espectro de potência angular da RCF. Os pontos em vermelho denotam as flutuações de temperatura da RCF detectadas pelo satélite *Planck* em diferentes escalas angulares no céu. Na parte inferior do gráfico se encontram os resíduos estatísticos. A reta tracejada em $l = 30$ indica a mudança de escala logarítmica, utilizada até $l < 30$, para a escala linear ($l > 30$).



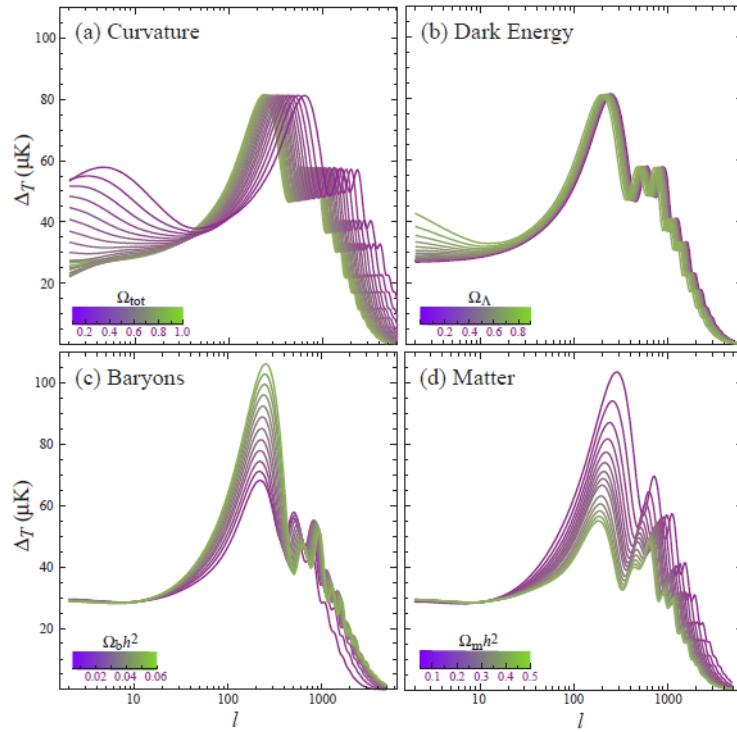
Fonte: Planck Collaboration et al. (2020c).

função de l .

A avaliação de modelos cosmológicos é realizada, em grande medida, a partir do espectro de potência angular da RCF. Conforme apresentado na introdução desta dissertação, o MCP é caracterizado por alguns parâmetros cosmológicos que emergem da modelagem realizada a partir das equações da Relatividade Geral. Posto isto, a existência, posição e amplitude de diversos picos no espectro são sensíveis aos valores destes parâmetros, tal como mostra a Figura 2.9 (HU; DODELSON, 2002).

O MCP tem como um de seus fundamentos o Princípio Cosmológico, o qual afirma que o Universo é, em grandes escalas (superiores a 100 Mpc), espacialmente homogêneo e isotrópico (ANDRADE et al., ; DURRER, 2021; PLANCK COLLABORATION et al., 2020c). Este princípio não é apenas uma hipótese teórica e matematicamente conveniente para o desenvolvimento do MCP, diferentes experimentos evidenciam

Figura 2.9 - Fonte: Ilustração da forma dos espectros em função da variação de um parâmetro cosmológico. Cada gráfico apresenta variações a partir de um modelo fiducial.



Fonte: Hu e Dodelson (2002).

sua validade (AVILA et al., 2019; MAARTENS, 2011), em particular, as observações da RCF, as quais apresentam variações em pouco mais de uma parte em 10^5 (DURRER, 2021; PLANCK COLLABORATION et al., 2020c). O MCP prevê que as flutuações de temperatura da RCF devem ser consistentes com uma distribuição gaussiana e isotrópica e, embora o MCP seja bem sustentado por observações cosmológicas, várias questões permanecem em aberto, entre elas a existência de anomalias no campo de temperatura da RCF. Estas anomalias são o assunto do próximo capítulo.

3 AS ANOMALIAS DA RCF

Uma anomalia da RCF é definida como um sinal ou evento físico cuja probabilidade de ser observado na distribuição de temperatura da RCF, de acordo com o MCP, é muito pequena (PLANCK COLLABORATION et al., 2020a; PLANCK COLLABORATION et al., 2020c; RASSAT et al., 2014). Evidentemente, o quanto pequeno este valor deve ser está sujeito aos diferentes critérios e metodologias utilizadas por cada autor. Algumas destas anomalias apresentam desvios significativos das condições de gaussianidade e isotropia previstas pelo MCP.

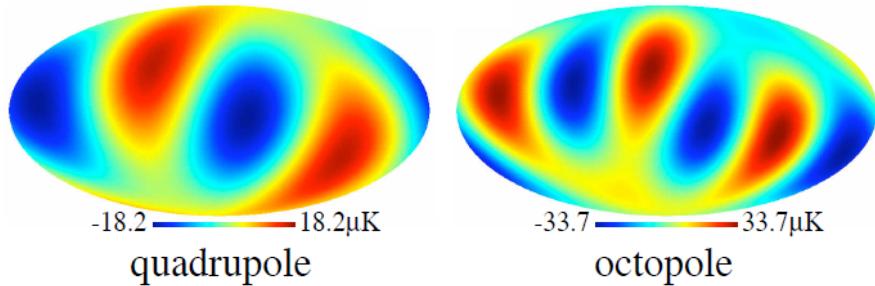
A compreensão das causas destas anomalias podem reforçar a validade do MCP ou ainda indicar a existência de uma nova física ainda desconhecida que se encontra para além do MCP (MUIR et al., 2018; RASSAT et al., 2014). Também podem ser consequências de um erros sistemáticos, e nesse caso é fundamental investigar e compreender a anomalia para melhor depurar o processo de limpeza de um sinal cosmológico.

Dentre as anomalias destacam-se a anomalia de baixa amplitude de quadrupolo ($l = 2$); o alinhamento entre o quadrupolo e octopolo ($l = 3$) e a planaridade do octopolo; a assimetria Norte-Sul e a existência do *Cold Spot*. Estas anomalias foram inicialmente observadas pelo satélite *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) (BENNETT et al., 2011) e posteriormente confirmadas pelo satélite *Planck* (PLANCK COLLABORATION et al., 2020c).

A primeira das anomalias citadas pode ser identificada na Figura 2.8, onde o valor de quadrupolo observado ($\approx 299,5 \mu K^2$) é inferior ao esperado dentro do MCP ($1150 \pm 727 \mu K^2$) (ABDELALI; MEBARKI, ; SCHWARZ et al., 2016; RASSAT et al., 2014; COPI et al., 2010). Como proposta de solução, Abdelali e Mebarki () sugerem algumas modificações no MCP que visavam encontrar a causa da falta de potência observada no quadrupolo. Com este fim, ao invés de se usar a métrica FLRW, eles utilizaram uma métrica que descreve um universo elipsoidal com uma excentricidade da ordem de 10^{-2} na era do desacoplamento, a qual desapareceria ao longo do tempo e da evolução do universo. Além disto, os mesmos autores propuseram que a energia escura, responsável pela expansão cósmica acelerada, se comportaria como um gás de Chaplygin. Desta maneira, eles puderam reproduzir a falta de potência que é observada no quadrupolo. Esta proposta de solução parece viável, entretanto tais modificações sugeridas ainda não foram confrontadas com outros observáveis.

A segunda anomalia mencionada se refere ao alinhamento entre os eixos perpendicu-

Figura 3.1 - Alinhamento entre quadrupolo e do octopolo. Mapas gerados a partir dos dados do *WMAP*.



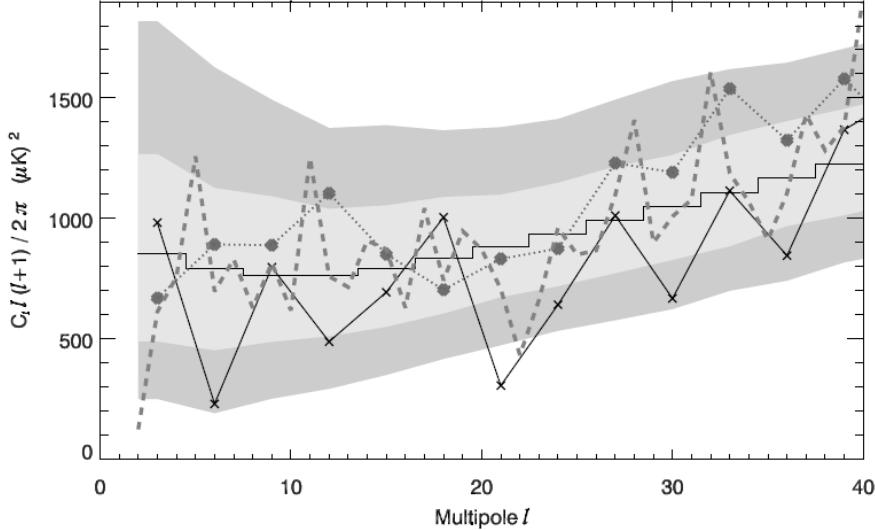
Fonte: Adaptado de Copi et al. (2010).

lares aos planos definidos pelo quadrupolo e octopolo, como ilustrado na Figura 3.1; destaca-se também nesta figura, a planaridade do octopolo: a direção preferencial definida pelos pontos de maior amplitude do octopolo. TEGMARK et al. (2003) mediram um desvio entre estes eixos de apenas 10° . A causa física deste alinhamento ainda é desconhecida e a probabilidade dentro do MCP de ocorrência deste alinhamento é inferior a 0,5% (SCHWARZ et al., 2016). Ademais, modificações na topologia do universo também não puderam explicar satisfatoriamente a causa desta anomalia (BERNUI et al.,).

A assimetria Norte-Sul (Figura 3.2) apresenta uma desconformidade entre as amplitudes do espectro de potência angular para grandes escalas angulares calculados sobre os hemisférios delimitados, aproximadamente, pelo plano da eclíptica (COPI et al., 2010). Kumar e Marto (), por exemplo, argumentam que flutuações quânticas produzidas em pares poderiam criar dois espectros de potência distintos, sendo um para cada hemisfério.

Diferentes autores investigaram uma possível conexão física entre as anomalias (CRESWELL; NASELSKY, 2021; MUIR et al., 2018; ZHAO; SANTOS, 2016). Neste âmbito, ao investigar a existência de uma possível relação física entre o alinhamento quadrupolo-octopolo e a anomalia Norte-Sul, Polastri et al. (2015) descartam a existência de correlação entre estas anomalias ao assumirem um modelo anisotrópico independente da escala, isto é, que não depende de l . Em oposição à isto, Marcos-Caballero e Martínez-González (2019) propuseram generalizar o modelo cosmológico anisotrópico ao introduzir uma dependência com o fator de escala. Em síntese, o objetivo destes autores é demonstrar que o alinhamento quadrupolo-octopolo tem maior probabilidade de ocorrência no modelo proposto. Para este fim, eles fizeram

Figura 3.2 - Os dados dos hemisférios norte e sul são, respectivamente, denotados pela linha sólida com cruzes e pela linha pontilhada com círculos. A linha tracejada representa os valores observados pelo WMAP, enquanto que a linha sólida e as duas áreas em tons de cinza em torno dele denotam, respectivamente, o *best fit* teórico aos dados do WMAP e as regiões de confiança de 1σ e 2σ , ambas construídas a partir de 2048 simulações Gaussianas.



Fonte: Eriksen et al. (2004).

uso dos mapas reais, SMICA e SEVEM, disponibilizados pela colaboração *Planck*, e confrontaram estes dados com simulações do modelo proposto. A análise foi realizada até o multipolo $l = 64$. Os autores concluíram que, para o modelo anisotrópico estudado, existe um incremento significativo ($\approx 80\%$) na probabilidade de ocorrência do alinhamento quadrupolo-octopolo.

Por fim, a última anomalia citada configura o objeto de pesquisa desta dissertação: o *Cold Spot* (CS). Ele corresponde a uma região do campo de temperatura da RCF cujo perfil médio de temperatura é considerado discrepante quando comparado a outras regiões frias extremas. Esta mancha fria foi inicialmente detectada a partir de uma procura por distribuições não-gaussianas nos mapas da RCF gerados a partir de dados do satélite WMAP (CRUZ et al., 2005; VIELVA et al., 2004); a existência desta anomalia foi confirmada posteriormente por observações realizadas pelo satélite *Planck* (PLANCK COLLABORATION et al., 2020c).

3.1 O *Cold Spot*

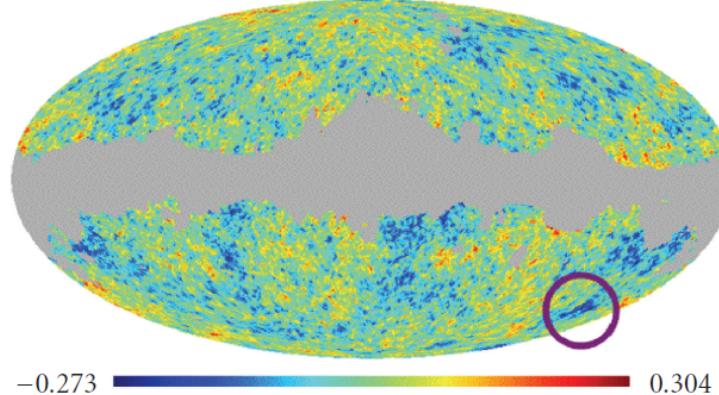
Os dados do WMAP e, posteriormente, do satélite *Planck*, mostraram que o campo de flutuações de temperaturas da RCF é de fato consistente com uma distribuição

Gaussiana e isotrópica (PLANCK COLLABORATION et al., 2020c; NASELSKY et al., 2006; KOMATSU et al., 2003). Porém, diferentes análises permitiram identificar uma região anômala, a qual desvia das condições de gaussianidade e isotropia previstas pelo MCP, o *Cold Spot* (CS). Ele está aproximadamente centrado nas coordenadas galácticas (208° ; -57°) (Figura 3.3), possui flutuação média de temperatura $\Delta T \approx -150 \mu K$ em relação à temperatura média do céu e um diâmetro angular em torno de 10° . Outra característica interessante do CS é que ele é rodeado por um anel quente ($\Delta T \approx 50 \mu K$) de aproximadamente 15° de raio (Figura 3.6) (FARHANG; MOVAHED, 2021; NAIDOO et al., 2016; ZHAO, 2013; VIELVA, 2010). A região do céu no qual se encontra o CS parece ser composta por pequenas regiões frias de diâmetro angular inferior a 1° ; quando tal região do céu é analisada no espaço de *wavelets* a anomalia se torna mais evidente (Figura 3.4) (VIELVA, 2010).

Os autores Vielva et al. (2004) encontraram o CS a partir de uma busca, nos dados do WMAP, por assinaturas de não-gaussianidades. Para tanto, os autores citados fizeram uso de mapas do WMAP em diferentes bandas de frequências (Q-V-W), tal como proposto pela equipe do WMAP (BENNETT et al., 2003) e se valeram da aplicação de filtros do tipo *Spherical Mexican Hat Wavelet* (SMHW) no espaço de *wavelets*, em diferentes escalas angulares. Eles concluíram que o desvio de gaussianidade verificado pelo excesso de curtose se apresenta nas três bandas citadas, tendo sido detectado em mapas produzidos a partir de cada uma delas separadamente ou de sua combinação, quando analisadas em escalas de 250 e 300 arcmin , no espaço de *wavelets*. Ainda sobre os dados do WMAP, os autores Zhang e Huterer (2010) procuraram pelo CS fazendo uso de filtros *top-hat*, em escalas angulares de 2° até 8° . Eles não encontraram evidência de qualquer sinal anômalo, além disto, como o CS foi identificado por filtros SMHW numa escala angular específica, Zhang e Huterer (2010) sugerem que o CS pode se tratar de um efeito aparente causado pela escolha da ferramenta, não sendo, portanto, uma anomalia. Em oposição à isto, Vielva (2010) argumenta que alguns filtros gaussianos (os mais genéricos) não são tão sensíveis quando comparados com aqueles que foram projetados para captar certas características. Os filtros *top-hat* são menos eficientes do que os SMHW na remoção de sinais de fundo, o que garante uma maior amplificação do sinal não-gaussiano do CS ao se utilizar filtros SMHW. Ademais, ele ainda argumenta que as características anômalas do CS foram identificadas por ao menos outras cinco ferramentas estatísticas, confirmando de fato a sua existência. Isto deixa claro que diferentes testes podem identificar diferentes tipos de não-gaussianidades (BENNETT et al., 2011).

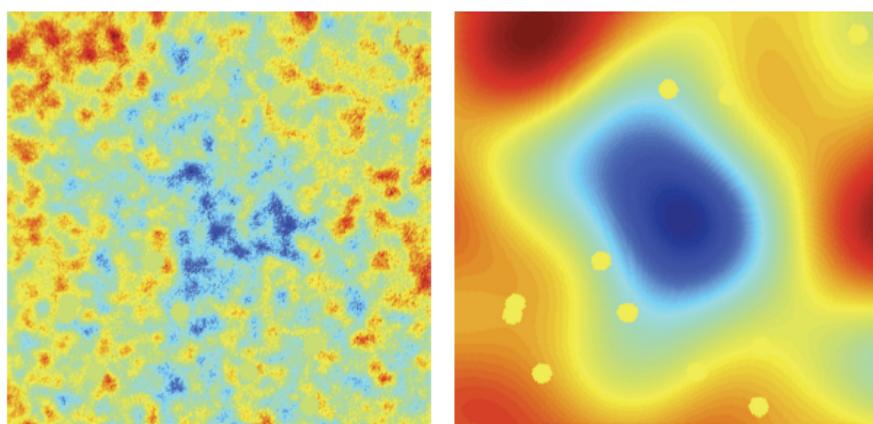
Por causa da forma aproximadamente simétrica do CS, conjecturou-se que a sime-

Figura 3.3 - Mapa do campo de flutuações de temperatura da RCF gerado a partir dos dados do WMAP. A localização do CS se encontra na região marcada com um círculo. E a região cinza denota a aplicação de uma máscara sobre os dados.



Fonte: [Vielva \(2010\)](#).

Figura 3.4 - Imagem do CS real à esquerda. À direita encontra-se o CS no espaço de *wavelets*. Os pontos cobertos acima indicam a posições de fontes extragalácticas que foram mascaradas.



Fonte: [Vielva \(2010\)](#).

tria seria induzida pelo filtro simétrico do tipo SMHW, o qual havia sido utilizado nas observações que buscavam por sinais não-gaussianos. Contudo, diferentes análises com diferentes filtros indicam que o CS de fato possui uma simetria intrínseca (VIELVA, 2010).

Ainda que o CS represente um desvio das condições de Gaussianidade e isotropia, o campo de flutuações de temperatura da RCF é bastante consistente com o MCP (??). Neste contexto, é razoável questionar sobre a possibilidade do CS ter surgido ao acaso dentro das condições do MCP.

Segundo Farhang e Movahed (2021), as chances de que condições iniciais isotrópicas e gaussianas têm de gerar uma região grande e fria tal como CS é menor do que 0,5%. Contudo, há divergências sobre este valor. Há autores que defendem que esta probabilidade é inferior à 1% (SCHWARZ et al., 2016), enquanto outros autores defendem, a partir de simulações, que tal probabilidade é da ordem de 0,2% (CRUZ et al., 2005). Apesar de não ser possível rejeitar inteiramente a hipótese de que o CS seja primordial, uma vez que o CS equivale a uma flutuação de aproximadamente 3σ nas condições estabelecidas pelo MCP (OWUSU et al., ; KOVÁCS et al., 2022), diante dessa baixa probabilidade, diversos trabalhos têm investigado outras possíveis causas desta anomalia.

3.2 Possíveis causas para o CS

O CS não é resultado da combinação de sinais eletromagnéticos provenientes de diferentes fontes astrofísicas, tais como ondas de rádio e infravermelho, oriundos de galáxias, pois a anomalia em questão ainda pode ser identificada em diferentes intervalos de frequência (ZHAO, 2014; VIELVA, 2010; CRUZ et al., 2006). Além disto, a mesma não pode ser resultado de contaminação por *foregrounds* da Galáxia, dado que o CS se encontra em uma latitude distante do disco da Galáxia, ou seja, distante da região de maior contaminação eletromagnética (Figura 3.3) (FARHANG; MOVAHED, 2021; VIELVA, 2010). Sendo assim, dificilmente emissões dos tipos síncrotron, *free-free*, térmica e emissão anômala de poeira poderiam ser responsáveis por uma anomalia do tamanho angular do CS (VIELVA, 2010). Ademais, se o CS fosse causado pela combinação de estruturas não-Gaussianas, tais como fontes pontuais e *foregrounds*, sua variância local, curtose e obliquidade (*skewness*) seriam grandes, em pequenas escalas (ZHAO, 2013). Seria extremamente improvável que diferentes erros sistemáticos se propagassem por uma região do tamanho angular do CS ou que diferentes ferramentas estatísticas apresentassem os mesmos erros exatamente na mesma região do céu (VIELVA, 2010). Diante desta situação tem havido, também,

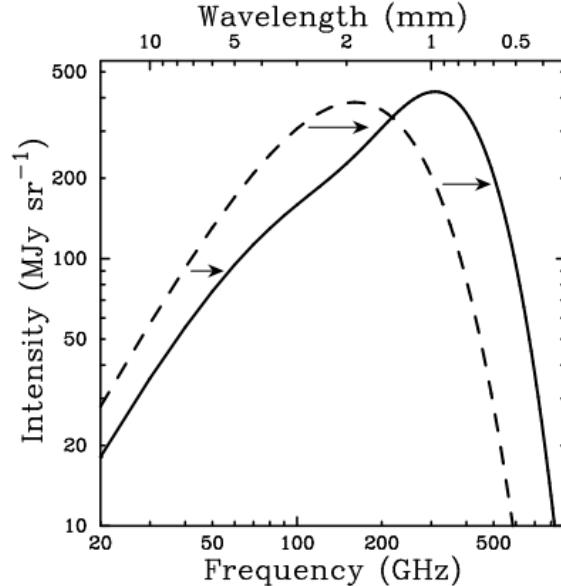
investigações sobre a contribuição do efeito Sunyaev-Zeldovich (SZ), de texturas cósmicas e de *voids* e na criação do CS.

As texturas cósmicas podem modificar o comprimento de onda dos fótons e por esta razão elas também foram analisadas como causadoras do CS (FARHANG; MOVAHED, 2021; VIELVA, 2010). Durante o resfriamento do Universo causado pela expansão cósmica, teriam surgido diferentes defeitos topológicos, tais como os monopólos magnéticos, cordas cósmicas, domínios de superfície e texturas cósmicas (SOUZA, 2004; KOLB; TURNER, 1988). Estes últimos defeitos ocorreriam nas quatro dimensões do espaço-tempo. Embora existam autores que defendam a existência de texturas cósmicas sob o argumento de que elas são consequência direta da física de partículas que visa unificar as interações fundamentais da natureza (CRUZ et al., 2008), é adequado ressaltar que ainda não existe confirmação observational de sua existência (OWUSU et al.,). Por outro lado, simulações das flutuação de temperatura que texturas cósmicas poderiam induzir nos fótons da RCF se mostram insuficientes para gerar o anel quente que circunda o CS (FARHANG; MOVAHED, 2021).

Por outro lado, os fótons da RCF interagem com os elétrons relativísticos do gás intra-aglomerado pelo efeito Compton inverso, tem-se o efeito Sunyaev-Zeldovich (SZ) (SUNYAEV; ZELDOVICH, 1969). O efeito SZ é uma distorção do espectro de corpo negro da RCF que independe do *redshift* do aglomerado. Este mesmo efeito se manifesta de duas maneiras: o efeito SZ cinemático e térmico. O primeiro se deve à velocidade peculiar do aglomerado em relação à RCF enquanto que o segundo é causado pela agitação térmica (isotrópica) dos elétrons do gás aprisionado no meio intra-aglomerado supostamente em repouso em relação à RCF (MROCKOWSKI et al., 2019; KITAYAMA, 2014; HOLANDA, 2011; CARLSTROM et al., 2002).

A Figura 3.5 mostra como o efeito SZ modifica a energia (frequência) dos fótons da RCF, de forma que este efeito poderia, ao menos em teoria, ser uma possível explicação para a origem do CS. A massa e a temperatura do gás necessário para reproduzir o CS são muito superiores aos valores estimados para grupos de galáxias; para tanto seria necessário um aglomerado grande como o aglomerado do Coma, porém tal aglomerado não é observada na região do CS (KOVÁCS et al., 2022; CRUZ et al., 2005). Além disto, a flutuação de temperatura induzida pelo efeito SZ depende da frequência dos fótons que passam pelo meio intra-glomerado. Contudo, observações indicam que as flutuações de temperatura observadas na região do CS não dependem da frequência e além disto, o tamanho angular do CS é muito maior do que aquele de aglomerados de galáxias (CRUZ et al., 2008; CRUZ et al., 2006).

Figura 3.5 - A linha tracejada e contínua indicam, respectivamente, o espectro sem e com distorção. Note que o ESZ térmico é nulo para frequência 217 GHz (*cross-over*); para frequências inferiores à 217 GHz tem-se $\Delta T < 0$; caso contrário tem-se $\Delta T > 0$.



Fonte: Carlstrom et al. (2002).

Em relação aos efeitos no comprimento de onda dos fótons da RCF que *voids* podem infundir, é adequado, primeiramente, definir o que se entende por *void*. Ainda não há na literatura uma definição rigorosa de *void*; diferentes autores apresentam critérios distintos para defini-los (RICCIARDELLI et al., 2013). Aqui um *void* é definido a partir de uma grandeza denominada contraste de densidade. Para tanto, seja ρ_0 a densidade média de uma região, uma dada sub-região na posição indicada pelo vetor comóvel \mathbf{r} tem contraste de densidade δ definido como

$$\delta = \frac{\rho(\mathbf{r}) - \rho_0}{\rho_0}. \quad (3.1)$$

O contraste de densidade é uma grandeza que indica o desvio que a densidade de uma dada região apresenta em relação à densidade média do todo. Uma região com contraste de densidade negativo de valor aproximadamente $-0,8$ é definida como sendo um *void* (RICCIARDELLI et al., 2013). Note, então, que uma região completamente vazia teria contraste de densidade igual a -1 . Ao atravessar um *void*, bem como uma sobredensidade, os fótons da RCF tem sua frequência alterada. Esse efeito é chamado de efeito Sachs-Wolfe Integrado (ISW). Os fótons ganham energia ao atravessar este poço de potencial, e o oposto ao atravessar um *void*. Neste

contexto uma região com contraste de densidade igual a $-0,3$ e com raio comóvel da ordem de $200 - 300 \text{ Mpc}/h$ num *redshift* igual a 1 poderia, ao menos em teoria, criar o CS através do efeito ISW. Uma segunda possibilidade de geração do CS pelo efeito ISW seria a partir de *void* completamente vazio com um raio comóvel da ordem de $120 \text{ Mpc}/h$. Porém, simulações indicam que o tamanho típico de *voids* que podem surgir no MCP é da ordem de 10 Mpc de raio comóvel e com contraste de densidade típico da ordem de $-0,8$ (FARHANG; MOVAHED, 2021; NADATHUR et al., 2014). Além do mais, observações não corroboram a existência de um *void* com as características necessárias para gerar o CS pelo efeito ISW (MACKENZIE et al., 2017). Com esta lógica, o efeito ISW só poderia explicar o CS parcialmente. É adequado notar que os *voids* devem ser procurados num intervalo de *redshift* inferior à unidade, pois é necessário que as grandes estruturas cósmicas se formem para haver a formação de *voids*. Neste sentido, Mackenzie et al. (2017) e Nadathur et al. (2014) ainda afirmam que a probabilidade de um *void* imenso em $z < 1$ surgir dentro do modelo cosmológico padrão é muito menor do que a probabilidade do CS surgir ao acaso de flutuações gaussianas primordiais.

Mackenzie et al. (2017) descartam que o CS tenha sido causado por um *void* via efeito ISW. Para tanto, eles analisam um conjunto com quatro *voids* cujas características estão descritas na Tabela 3.1. Os três primeiros *voids* são observados enquanto que o quarto não tem sua existência confirmada, pois os valores atribuídos às características do mesmo parecem estar dominados por erros sistemáticos. A existência destes *voids* tem como base observações do *VLT Survey Telescope ATLAS* (SHANKS et al., 2015).

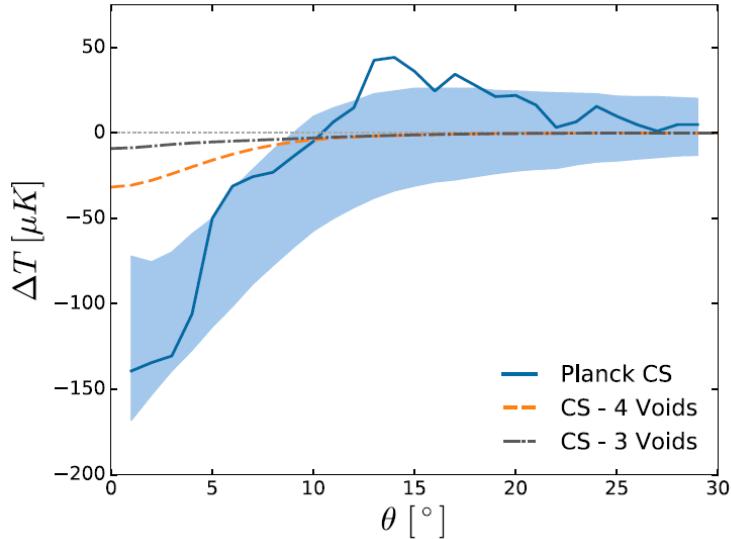
Tabela 3.1 - Parâmetros descrevendo os quatro *voids* analisados. Os símbolos R_V , z_V e δ_V são os parâmetros que caracterizam os *voids* e indicam, nesta ordem, o raio, o *redshift* e seu contraste de densidade.

	Void 1	Void 2	Void 3	Void 4
$R_V (\text{Mpc})$	119	50	59	168
z_V	0,14	0,26	0,3	0,42
δ_V	-0,34	-0,87	-1,00	-0,62

Fonte: Adaptado de Mackenzie et al. (2017).

A modelagem adotada para cada um dos *voids* influencia os resultados obtidos. MACKENZIE et al. (2017) escolhem para tal o *void* Lambda Lamâitre-Tolman-Bondi

Figura 3.6 - Flutuações de temperatura em função do raio angular medido a partir do centro do CS. A linha azul denota o perfil de temperatura do CS medido satélite *Planck*. As outras denotam a soma das flutuações de temperaturas induzidas pelos *voids* que são descritos na Tabela 3.1. A região sombreada em azul claro indica o intervalo de confiança de 68% ($\approx 1\sigma$) em relação aos valores médios dos perfis de temperatura ao redor dos pontos mais frios identificados em simulações Gaussianas.



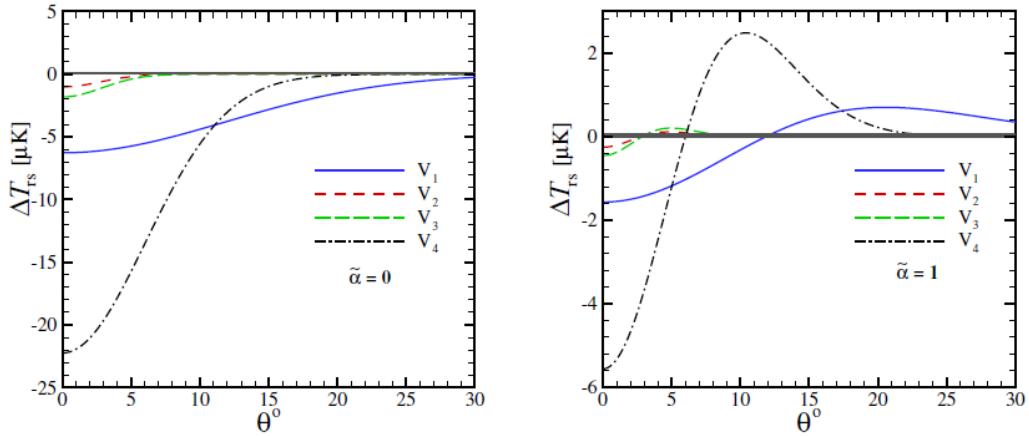
Fonte: Mackenzie et al. (2017).

($\Lambda LT B$), o qual é descrito pela métrica que leva este nome; detalhes desta métrica podem ser encontrados em Farhang e Movahed (2021) e em Nadathur et al. (2014). A partir desta métrica e das características do *void* adotado pode-se deduzir uma expressão para o perfil de flutuações de temperatura gerado pelo efeito ISW. A Figura 3.6 mostra as somas de flutuação de temperatura via efeito ISW gerada por cada *void* descrito na Tabela 3.1. Verifica-se que o CS não pode ser consequência física destes *voids*.

Há ainda outro modelo de *void* considerado em Farhang e Movahed (2021); estes *voids* seriam construídos a partir de uma função contraste de densidade que possui um formato semelhante a uma cartola (por isso são comumente chamados de *voids top-hat*). Tais análises mostram que não é possível em explicar o CS a partir do efeito ISW induzido por *voids top-hat*. Os mesmos autores também apresentam alguns resultados obtidos via efeito ISW ao considerar os mesmos *voids* utilizados na análise de Mackenzie et al. (2017), contudo eles acrescentam uma sutileza em sua análise: o desvio ou deflexão dos fótons devido ao efeito de lenteamento gravitacional causado pelo *void*. Ainda assim o CS não é explicado de modo satisfatório; os resultados

Figura 3.7 - Perfil radial das flutuações de temperatura causada por *voids* ALTB via ISW.

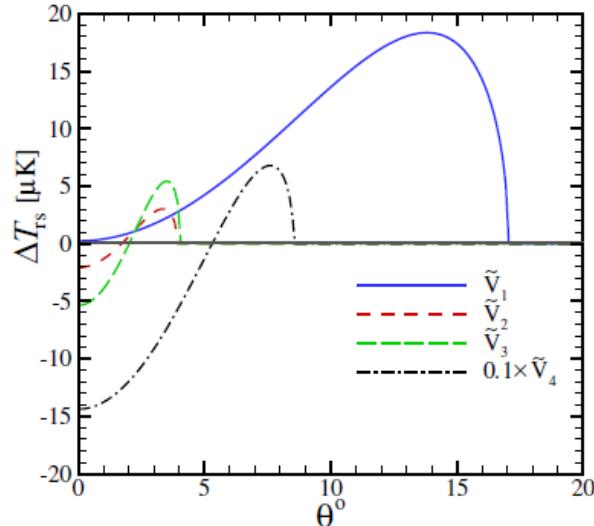
À esquerda assume-se que os fótons não sofrem o efeito de lenteamento gravitacional, quantificado pelo parâmetro $\tilde{\alpha} = 0$; à direita leva-se em conta o efeito de lenteamento, ($\tilde{\alpha} = 1$). As linhas representam o perfil de temperatura de cada *void* descrito na Tabela 3.1.



Fonte: Farhang e Movahed (2021).

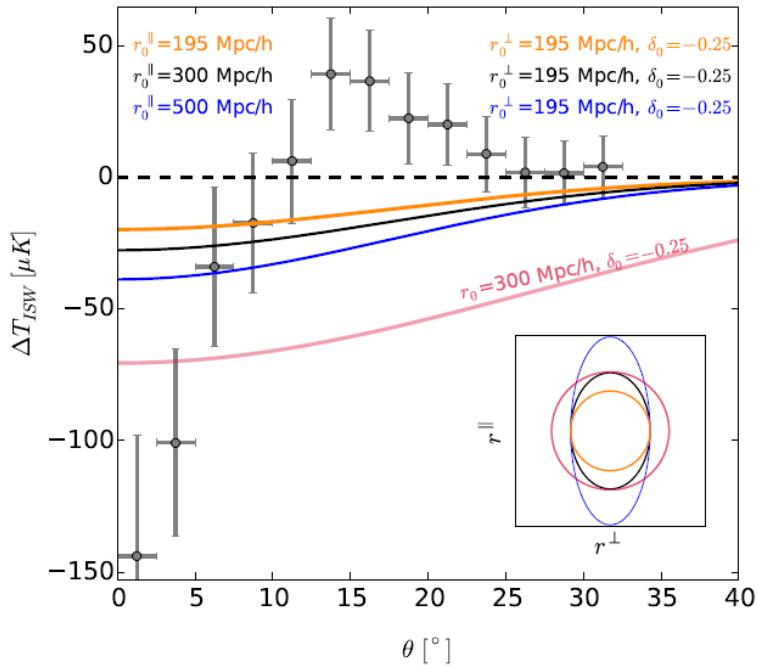
podem ser verificados nas Figuras 3.7 e 3.8.

Figura 3.8 - Perfil radial das flutuações de temperatura causada por *voids top-hat*, descritos na Tabela 3.1, via ISW. As linhas representam o perfil de temperatura de cada *void* e o til sobreescrito na legenda indica que se trata de *voids top-hat*.



Fonte: Farhang e Movahed (2021).

Figura 3.9 - Perfil radial de flutuações de temperatura induzidas pelo efeito ISW para três *supervoids* elipsoidais e um esférico (linha em rosa). Os pontos e as barras em cinza indicam, respectivamente, o perfil de temperatura do CS e as barras de erro de acordo com os dados do satélite *Planck*. Os símbolos sobreescritos \parallel e \perp denotam, nessa ordem, os valores dos comprimentos do *void* paralelos e perpendiculares à linha de visada. Cada uma das linhas corresponde às flutuações de temperatura do *void* com parâmetros descritos na cor correspondente. O formato de cada *void* é ilustrado no canto direito inferior.



Fonte: Kovács e García-Bellido (2016).

Além disto, Kovács e García-Bellido (2016) propuseram investigar se *supervoids* com formato elipsoidal poderiam contribuir de modo mais significativo para a geração do CS. Para tanto, eles simularam um perfil de temperatura para cada um dos três *voids*, todos eles com contraste de densidade igual a $\delta_0 = -0,25$ e com excentricidades diferentes. Em todos os casos analisados, o efeito ISW se mostra insuficiente para gerar o CS; os parâmetros envolvidos e os resultados simulados estão expressos na Figura 3.9. Em particular, nenhum dos *voids* considerados tende a reproduzir o anel quente que circunda o CS.

Outros trabalhos também evidenciaram, dentro do MCP, a impossibilidade do CS ter sido gerado por um *void* através do efeito ISW, pois as características de um *void* capaz de gerar o CS seriam tão anômalas quanto o próprio CS, ainda assim, diferentes autores apontaram indícios de um *supervoid* na linha de visada do CS (NAIDOO et al., 2016; FINELLI et al., 2015; SZAPUDI et al., 2015; SZAPUDI et al., ;

NADATHUR et al., 2014).

A existência do incomum *supervoid* Eridanus ($R_V \approx 200 Mpc$; $\delta \approx -0,2$) em $z \approx 0,15$ e na linha de visada do CS foi confirmada por Kovács et al. (2022), sugerindo uma possível conexão ou relação física entre eles, pois ambos são eventos raros dentro do MCP (KOVÁCS; GARCÍA-BELLIDO, 2016). Por este motivo, a relação entre eles ainda é objeto de investigação científica e, neste âmbito, trabalhos mais recentes, tais como Kovács et al. (2022) e Owusu et al. (), têm apresentado e argumentado sobre a possível relação física entre eles.

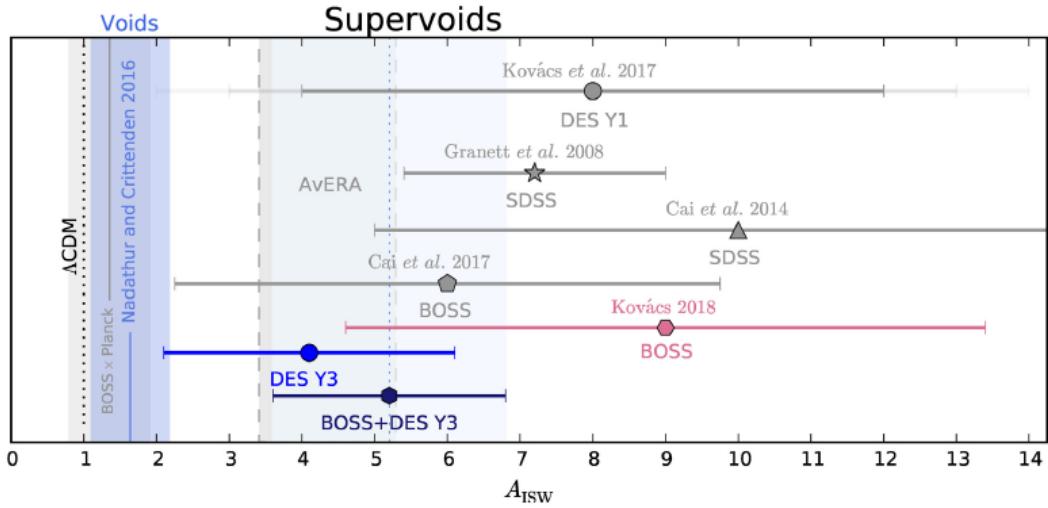
Dentro do MCP, o *supervoid* Eridanus seria responsável por aproximadamente 15% da flutuação de temperatura observada na região central do CS (KOVÁCS et al., 2022; FARHANG; MOVAHED, 2021; MACKENZIE et al., 2017; KOVÁCS; GARCÍA-BELLIDO, 2016; SZAPUDI et al., 2015), porém o efeito ISW está sujeito a anomalias, isto é, divergências entre a amplitude do sinal observado e previsto pela teoria; a causa destas anomalias ainda é desconhecida (KOVÁCS et al., 2022; HANG et al., 2021; KOVÁCS et al., 2019). Com o objetivo de quantificar esta discrepância, define-se a seguinte grandeza:

$$A_{ISW} = \frac{\Delta T_{data}}{\Delta T_{theory}}. \quad (3.2)$$

Em caso de concordância da teoria com as observações, tem-se $A_{ISW} \approx 1$. Entretanto, uma análise com 87 *supervoids* dos catálogos *Dark Energy Survey* (DES), no intervalo de *redshift* $0,2 < z < 0,9$, tem demonstrada a existência de um excesso de potência no sinal em que $A_{ISW} \approx 4,1 \pm 2,0$; estes mesmos *supervoids* quando combinados com outros do catálogo *Baryon Oscillations Spectroscopic Survey* (BOSS), resultam em $A_{ISW} \approx 5,2 \pm 1,6$ (KOVÁCS et al., 2019). A Figura 3.10 quantifica a discrepância observada entre *voids* e *supervoids*.

A amplificação do sinal observado em *supervoids* é compatível, em grande medida, com o modelo cosmológico *Average Expansion Rate Approximation* (AvERA) quando restrito aos multipolos $10 < l < 100$ (KOVÁCS et al., 2019). Além disto, a Figura 3.10 apontaria para uma limitação ou incompletude do MCP que se contrasta com o modelo AvERA. Este último assume a inexistência da energia escura e uma taxa de expansão cósmica inhomogênea e, por conseguinte, prediz um valor de maior amplitude do sinal para o efeito ISW em relação ao que prevê o MCP (BECK et al., 2018). Detalhes sobre o modelo AvERA podem ser encontrados em Rácz et al. (2017). Em contrapartida, deve-se expor que este excesso de sinal observado em *supervoids* não é verificado em outros trabalhos (HANG et al., 2021).

Figura 3.10 - Valores de A_{ISW} para diferentes *supervoids* obtidos a partir dos catálogos: *Dark Energy Survey* (DES), Baryon Oscillations Spectroscopic Survey (BOSS) e Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Todas as barras de erro correspondem à 1σ . A linha pontilhada de cor preta, em $A_{ISW} = 1$, indica o valor esperado dentro do MCP (Λ CDM). As faixas cinza e azul em torno da linha pontilhada indicam o intervalo de confiança de 1σ gerados, nesta ordem, a partir de BOSS \times *Planck* e Nadathur e Crittenden (2016). As duas linhas tracejadas em cinza correspondem aos valores extremos esperados no modelo AvERA quando restritos aos multipolos $10 < l < 100$ (faixa cinza onde está escrito AvERA).

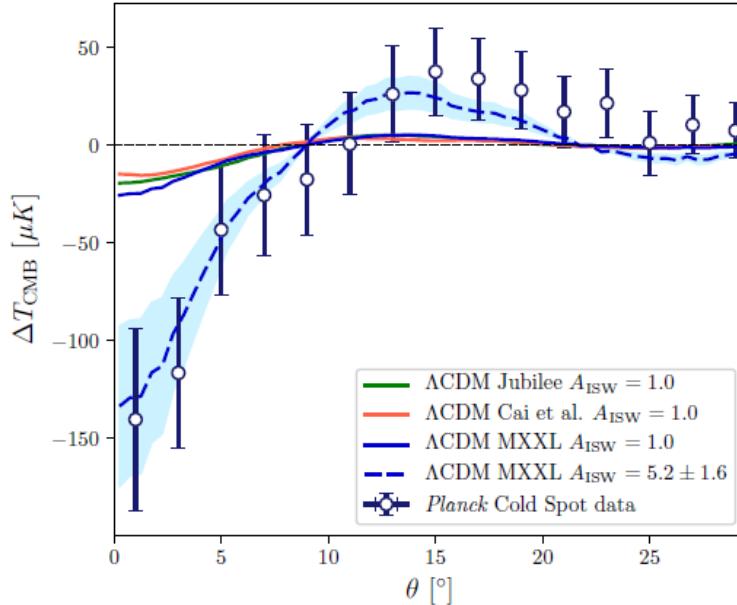


Fonte: Kovács et al. (2019).

Isto posto, Kovács et al. (2022) propuseram investigar a relação causal entre o CS e o *supervoid* Eridanus. Os autores argumentam que se o sinal oriundo do *supervoid* Eridanus estiver sujeito à amplificação dado por $A_{ISW} \approx 5,2 \pm 1,6$ (intervalo de valores apresentados em Kovács et al. (2019), então o CS poderia ser explicado a partir do *supervoid* Eridanus. A Figura 3.11 apresenta o perfil de flutuação de temperatura do CS medido das observações do *Planck* juntamente com três tipos de simulações baseadas no MCP.

A linha tracejada em azul na Figura 3.11 se aproxima do perfil do CS, porém existe uma aparente contradição: o autor utiliza simulações baseadas no MCP e introduz o termo de correção $A_{ISW} \approx 5,2$ de causa física desconhecida e que desafia os limites do MCP. Isto é, trocar uma anomalia por outra. Além disto, uma análise mais detalhada mostra uma que a amplitude do sinal lenteado pelo *supervoid* Eridanus, no centro do CS (raio angular $\theta < 5^\circ$), é cerca de 30% menor em relação aos dados obtidos em simulações de N-corpos que concordam com o MCP. Neste contexto, Kovács et al. (2022) mencionam a necessidade de se realizar *surveys* mais detalhados

Figura 3.11 - Diferentes perfis radiais de temperatura. Os pontos e as barras de erro denotam o perfil do CS observado pelo satélite *Planck*. As linhas contínuas representam os valores obtidos a partir de três tipos de simulações de N-corpos descritas na legenda. A linha tracejada e a faixa azul representam as flutuações de temperatura das simulações MXXL amplificadas pelo fator $A_{ISW} = 5,2 \pm 1,6$.

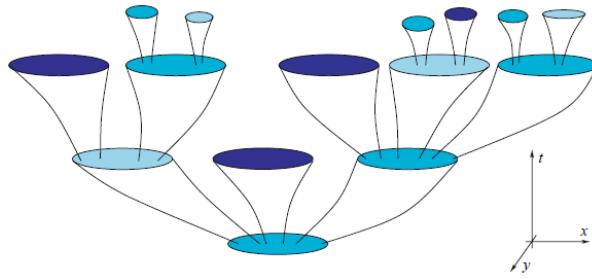


Fonte: Kovács et al. (2022).

e precisos na região do CS; Farhang e Movahed (2021) também identificaram falta de potência no sinal lenteado pelos *voids* analisados por eles. Além disto, Owusu et al. () afirmam que a presença de um *supervoid* causador do CS geraria um efeito de lenteamento gravitacional significativo nesta região. Neste sentido, estes autores previamente citados descartam a possibilidade do CS ter sido causado por qualquer *void* que esteja em qualquer lugar entre a superfície de último espalhamento e um observador comóvel.

Uma alternativa mais exótica para explicar a origem do CS seria a existência de multiversos, como mencionado por Mackenzie et al. (2017). Os multiversos são uma consequência teórica direta de alguns modelos da teoria da inflação cósmica (NASTASE, 2019; LINDE, 2007; GUTH, 2007). O MCP estabelece que a inflação cósmica é causada por algum campo escalar de energia denominado ínflaton. Por causa das flutuações quânticas que ocorrem neste campo, a inflação poderia ocorrer de modo não uniforme, gerando regiões que se isolariam de outras regiões, tal como um Universo próprio ou um Multiverso (Figura 3.12). Contudo, há modelos que não implicam na existência de multiversos (HAWKING; HERTOG, 2018). Posto isto, o CS poderia ser,

Figura 3.12 - Diagrama qualitativo da inflação caótica. Cada mancha representa uma região com tamanho de Hubble e com diferente valor para o campo ínflaton.



Fonte: Winitzki (2009).

ao menos em teoria dentro de uma classe específica de modelos inflacionários, resultado de alguma perturbação induzida aos fótons da RCF por algum multiverso. Os autores Chang et al. (2009) e Czech et al. (2010) tentaram modelar os efeitos que o contato entre dois multiversos poderiam causar nos fótons da RCF. As modelagens apresentadas são baseadas em muitas hipóteses e pressupostos sem base observacional. Em suma, a explicação do CS a partir dos multiversos é propor uma explicação sobre algo desconhecido a partir de algo ainda mais desconhecido. Vale mencionar que a colaboração *Planck* não encontrou uma assinatura característica ao analisar mapas de polarização de modos-E na região do CS (PLANCK COLLABORATION et al., 2020c). Porém, diante das limitações impostas pelo instrumento para observação de sinais polarizados, mapas de polarização mais precisos e acurados - para além da capacidade do satélite *Planck* - são necessários para quaisquer análises futuras. A Tabela 3.2 apresenta uma síntese das explicações físicas para o CS.

Tabela 3.2 - Síntese das possíveis causas do CS e seus respectivos *status*.

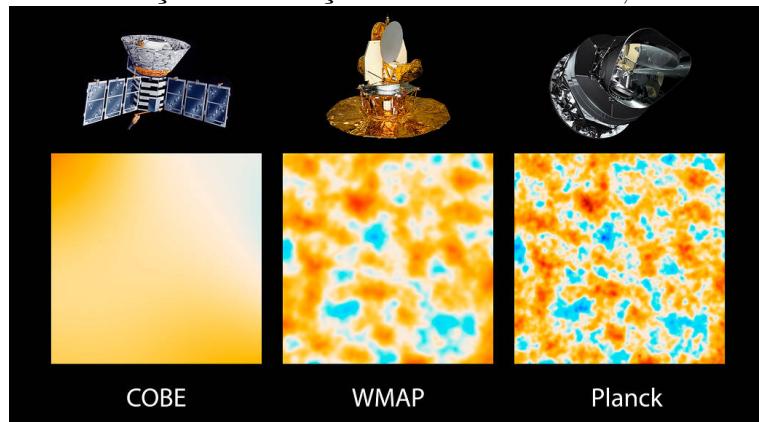
Causas	<i>Status</i>
Acaso	Possível, mas improvável.
Erros sistemáticos	Diferentes instrumentos confirmam sua existência.
<i>Foregrounds</i>	Não há dependência com a frequência.
Texturas cósmicas	Ainda não foram observadas e simulações as descartam.
Efeito SZ	Incompatível com a frequência e a escala angular.
Efeito ISW ordinário	O <i>void</i> com as características necessárias não existe.
Efeito ISW anômalo	Possível, mas ainda inconclusivo.
Multiversos	Resultado puramente teórico.

Portanto, é razoável concordar com a Planck Collaboration et al. (2020a), que sugerem que o CS e outras anomalias da RCF poderiam ter origem no Universo primordial. Dado o tamanho das anomalias e a dificuldade em encontrar um processo físico que atue nestas grandes escalas, é razoável assumir, por enquanto, que o CS é resultado de uma flutuação improvável das condições iniciais do MCP.

4 METODOLOGIA

O desenvolvimento de novos instrumentos para observação astronômica impulsionaram a criação de ferramentas de manipulação e tratamento de grandes volumes de dados. No que se refere aos instrumentos de observação da RCF, se destacam as missões *COBE*, *WMAP* e *Planck*, sendo este último o satélite de maior precisão até o momento (Figura 4.1).

Figura 4.1 - Ilustração da resolução dos satélites *COBE*, *WMAP* e *Planck*.



Fonte: NASA (2013).

O software *Hierarchical Equal Area isoLatitude Pixelation of a Sphere* (*HEALPix*) é um exemplo de ferramenta de tratamento de dados (GORSKI et al., 2005; GORSKI et al.,). O objetivo principal de sua criação foi o de permitir a discretização de dados com simetria esférica, criando uma estrutura matemática que facilite a análise de funções nessas esferas discretizadas. Desde sua criação, diversos grupos têm desenvolvido e implementado novas capacidades ao software. Atualmente, o *HEALPix* é utilizado em diversos campos da astronomia e astrofísica, tais como: astronomia de raios-x, raios cósmicos de altas energias, astronomia de neutrinos e ondas gravitacionais (ver, p.ex., MARTINEZ-CASTELLANOS et al., 2022).

As análises apresentadas ao longo deste trabalho se baseiam na comparação de indicadores obtidos de mapas produzidos a partir de observações feitas pelo satélite *Planck* e mapas simulados, no formato *HEALPix*. Nas duas seções seguintes serão apresentados maiores detalhes sobre o uso do *HEALPix* e sobre a forma como mapas reais e simulados foram produzidos.

Os indicadores produzidos a partir dos mapas se baseiam na aplicação dos Funcionais de Minkowski (FM) (MINKOWSKI, 1903) sobre regiões específicas dos mapas reais e simulados. A definição e a forma como os FM serão aplicados é expressa na Seção 4.3. Por fim, a última seção descreve como os dados coletados serão tratados, bem como as grandezas que permitem comparar os mapas reais com os resultados do modelo simulado.

4.1 O *HEALPix*

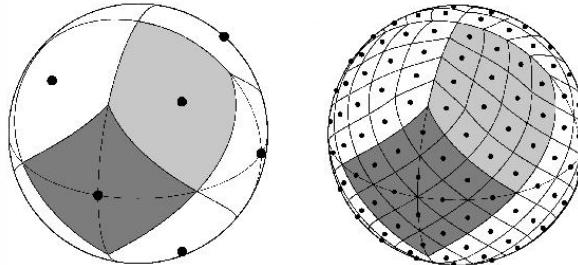
Como o próprio nome do *software* sugere, o *HEALPix* permite dividir o céu ou a esfera celeste em quadriláteros de áreas iguais, isto é, em pixels de mesmo tamanho (GORSKI et al., 2005; GORSKI et al.,). A pixelização de um mapa por meio desta ferramenta está atrelada ao parâmetro N_{side} que é definido do seguinte modo:

$$N_{pix} = 12 \times N_{side}^2, \quad (4.1)$$

tal que N_{pix} denota o número de pixels sobre a esfera. Ou seja, o número de pixels ou a resolução de um mapa, é diretamente proporcional ao quadrado do número N_{side} . É adequado destacar ainda que o centro de cada pixel é posicionado sobre uma curva de mesma latitude. A Figura 4.2 ilustra esta situação.

Em todos os casos tratados aqui será utilizado $N_{side} = 512$, de forma que cada pixel terá diâmetro angular aproximado de $6,87 \text{ arcmin}$ (GORSKI et al., 2005). Como o CS possui raio angular de aproximadamente 15° , tal resolução é suficiente para os objetivos deste trabalho.

Figura 4.2 - Exemplos de discretização da esfera com diferentes pixels. O caso à esquerda corresponde à resolução base cujo $N_{side} = 1$, com 12 pixels no total. O caso à direita representa a situação para $N_{side} = 4$.



Fonte: Adaptado de Gorski et al. () .

4.2 Mapas reais e simulados

Os mapas de flutuações de temperatura da RCF observados pelo satélite *Planck* estão disponibilizados na página *Planck Legacy Archive*¹ bem como diversos outros produtos disponibilizados pela colaboração.

Como não é possível evitar a contaminação das observações da RCF por emissões provenientes da Galáxia e de fontes extragalácticas, é necessário realizar um processo de separação de componentes, ou seja, fazer a limpeza dos dados de forma a extrair apenas o sinal cosmológico. Este processo permite remover grande parte do sinal contaminante. A colaboração *Planck* utilizou quatro códigos diferentes para realizar a limpeza dos dados da RCF, obtendo, portanto, quatro mapas distintos de RCF. Tais mapas recebem os nomes dos correspondentes códigos de separação de componente, que são: SMICA, SEVEM, NILC e COMMANDER; os detalhes técnicos sobre como os mapas foram obtidos podem ser encontrados em Planck Collaboration et al. (2020c). Estes quatro mapas de flutuações de temperatura são consistentes entre si, sobretudo em regiões mais afastadas do disco da galáxia. Destarte, não há um mapa de flutuações de temperatura melhor do que outro (PLANCK COLLABORATION et al., 2020c). Para os objetivos propostos neste trabalho, as análises serão realizadas sobre os quatro mapas citados.

Para a análise dos mapas de flutuações de temperatura, uma máscara deve ser aplicada aos mapas. Isto é realizado porque o processo de separação de componentes ainda deixa alguns resíduos nos mapas de RCF. A região do disco da galáxia é uma fonte intensa de contaminação eletromagnética e por este motivo espera-se que a maior parte dos resíduos se concentre nesta região, sendo necessário remover os píxels correspondentes a ela com o uso de uma máscara. As máscaras são criadas com base no que se espera ter de resíduo nesses mapas, o que muda para cada método de separação de componentes.

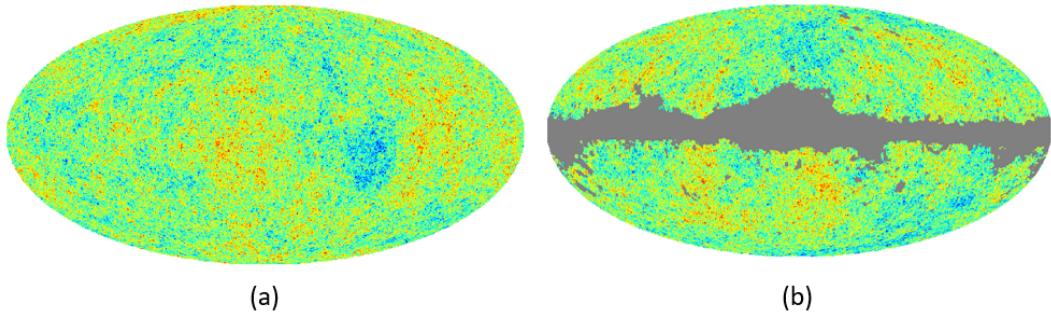
Por conseguinte, cada um dos quatro mapas citados possui uma máscara própria, denominada máscara de confiança. Em particular, a máscara denominada *Component Separation Common Mask in Intensity* (ou simplesmente, *Common mask*) é gerada a partir da combinação das máscaras de confiança de cada um dos quatro mapas citados. Ou seja, ela é uma máscara que pode ser utilizada adequadamente sobre qualquer um dos quatro mapas de RCF. Esta é a máscara utilizada em todas as análises deste trabalho, correspondendo a uma fração do céu de $f_{sky}=0.779^2$. A

¹<https://pla.esac.esa.int/>

²<https://pla.esac.esa.int/#maps>

Figura 4.3 ilustra a aplicação da máscara *Common* sobre um mapa simulado de flutuações de temperatura da RCF.

Figura 4.3 - (a) Simulação de mapa de flutuações de temperatura da RCF sem máscara.
 (b) *Common mask* aplicada ao mapa simulado.



Posteriormente diversos mapas de flutuações de temperatura foram simulados a partir do espectro de potência angular obtido a partir dos mapas reais e disponibilizados no *Planck Legacy Archive*. O espectro de potência utilizado é o melhor ajuste feito pelo Planck para as anisotropias da RCF (PLANCK COLLABORATION et al., 2020a). As simulações foram produzidas com resolução $N_{side} = 2048$, sendo posteriormente degradadas para $N_{side} = 512$; os mapas reais, originalmente em $N_{side} = 2048$, também foram degradados para a mesma resolução.

4.3 Funcionais de Minkowski

O Teorema de Hadwiger estabelece que todas as propriedades morfológicas, invariáveis sob rotação e translação de um conjunto n -dimensional convexo e compacto podem ser descritas por $n + 1$ grandezas, conhecidas como Funcionais de Minkowski (FM) (HADWIGER, 1957). Seu uso na análise de dados da RCF data do final da década de 90 (SCHMALZING; GÓRSKI, 1998; NASELSKY et al., 2006; LIM; SIMON, 2012; ZHAO, 2014; DURRER, 2021), mas a visão de que a análise de regiões muito quentes ou muito frias (“*Hot and Cold Spots*”) seria uma ferramenta interessante no estudo da distribuição de temperatura da RCF já foi apresentada, por exemplo, por (VITTORIO; JUSZKIEWICZ, 1987; GOTTFRIED et al., 1990).

Seja F_i um FM qualquer aplicado numa região R_j de um domínio qualquer, tais FM estão sujeitos às seguintes propriedades (NOVAES, 2015; NOVIKOV et al., 1999):

Aditividade: dadas duas regiões distintas R_1 e R_2 , vale

$$F_i(R_1 \cup R_2) = F_i(R_1) + F_i(R_2) - F_i(R_1 \cap R_2). \quad (4.2)$$

Invariância sob movimentos rígidos (isometrias): seja M uma isometria (rotação ou translação) aplicada sobre a região R_1 ,

$$F_i(R_1) = F_i(M(R_1)). \quad (4.3)$$

Continuidade condicional: a aproximação da região R_1 por uma região R_2 , implica na aproximação dos valores dos FM de cada região.

$$\text{se } R_1 \rightarrow R_2, \text{ então } F_i(R_1) \rightarrow F_i(R_2). \quad (4.4)$$

Esta última propriedade estabelece que regiões diferentes possuem FM distintos. Isto significa que se uma dada região do céu possui os mesmos FM da anomalia CS, então esta região é a própria anomalia CS. Este critério é útil para identificar a existência de regiões com características similares às do CS em mapas simulados, o que também motiva o uso dos FM neste trabalho. Ademais, os FM ainda possuem a vantagem de serem aditivos, o que permite que eles sejam eficientemente aplicados a regiões pequenas do céu.

Os fóttons da RCF são projetados na esfera celeste bidimensional S^2 e isto significa que todas as propriedades morfológicas da RCF são caracterizadas por 3 FM. Dada a esfera celeste discretizada em pixels de mesma área, tal como na Figura 4.2, denota-se por \mathbf{x} o vetor unitário que aponta na direção de cada pixel a partir do centro da esfera celeste. O campo de flutuações de temperatura da RCF pode ser expresso como $\Delta T(\mathbf{x}) = (T(\mathbf{x}) - T_0)/T_0$ em que T_0 é a temperatura média do campo. Tomando σ_0 como o desvio-padrão da distribuição de temperatura da região analisada, então pode-se escrever a seguinte normalização (DURRER, 2021; ZHAO, 2014; NASELSKY et al., 2006; SCHMALZING; GÓRSKI, 1998)

$$\nu = \frac{\Delta T(\mathbf{x})}{\sigma_0}. \quad (4.5)$$

Posto isto, para cada ν , designam-se como regiões conexas $Q(\nu)$ o conjunto de pixels adjacentes dentro de uma curva isoterma $\partial Q(\nu)$, definidos como (DURRER, 2021;

NOVAES, 2015; ZHAO, 2014; NASELSKY et al., 2006; SCHMALZING; GÓRSKI, 1998)

$$Q(\nu) = Q_\nu = \left\{ \mathbf{x} \in S^2 : \Delta T(\mathbf{x}) > \sigma_0 \nu \right\}, \quad (4.6)$$

$$\partial Q(\nu) = \partial Q_\nu = \left\{ \mathbf{x} \in S^2 : \Delta T(\mathbf{x}) = \sigma_0 \nu \right\}. \quad (4.7)$$

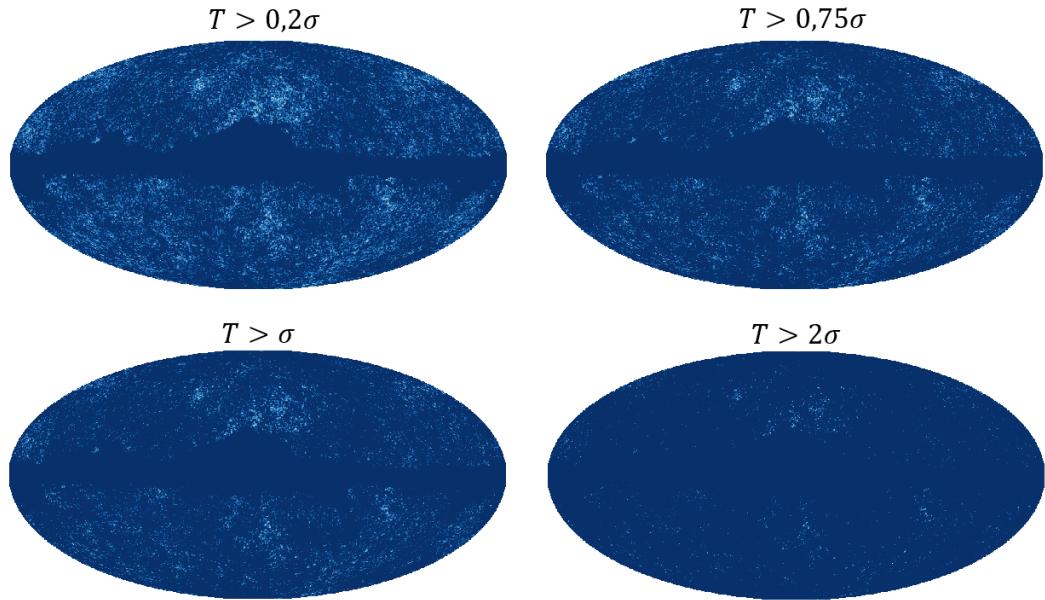
A Figura 4.4 ilustra os conjuntos definidos em 4.6 e 4.7.

Define-se os três FM que caracterizam todas a propriedades morfológicas de um mapa denominados Área, Perímetro e Genus, respectivamente dados pelas expressões (SCHMALZING; GÓRSKI, 1998; DURRER, 2021):

$$F_0(\nu) = \int_{Q_\nu} \frac{da}{4\pi}; \quad F_1(\nu) = \int_{\partial Q_\nu} \frac{dl}{16\pi}; \quad F_2(\nu) = \int_{\partial Q_\nu} \frac{\kappa dl}{8\pi^2}. \quad (4.8)$$

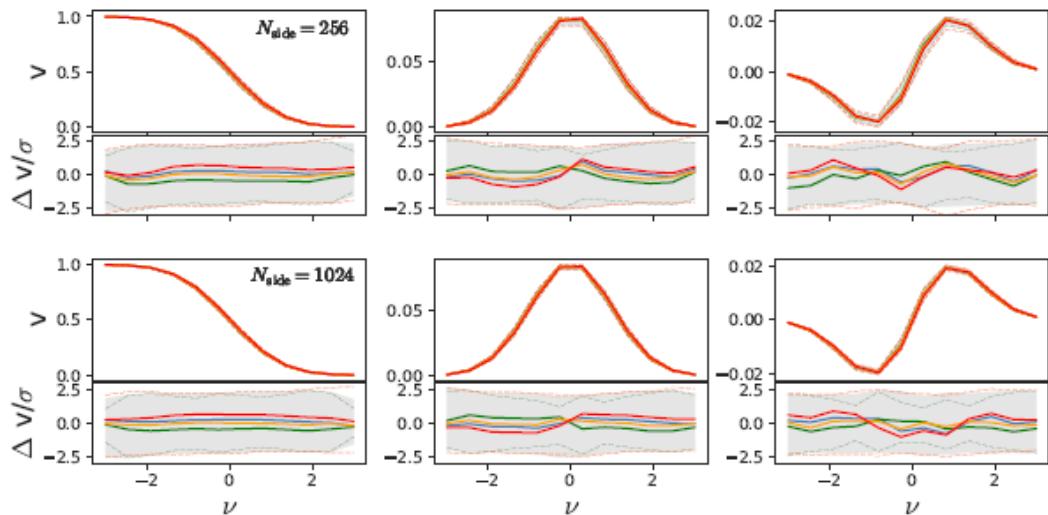
da e dl denotam, respectivamente, o elemento infinitesimal de superfície sobre a esfera S^2 e de linha ao longo de ∂Q ; κ denota a curvatura geodésica.

Figura 4.4 - Exemplos de mapas com $N_{side} = 512$ gerados para diferentes valores de ν .



Os FM são ferramentas que podem ser aplicadas em várias áreas da ciência visto que eles permitem caracterizar todas as propriedades relativas à forma ou morfologia de uma região ou espaço. Em particular, na Cosmologia, eles têm sido amplamente utilizados. A colaboração *Planck* utilizou-os para verificar, em diferentes resoluções,

Figura 4.5 - Funcionais de Minkowski para dois valores diferentes de N_{side} (colunas da esquerda para direita, respectivamente, mostram Área, Perímetro e Genus) dos mapas de flutuações de temperatura SMICA (azul), SEVEM (verde), NILC (laranja) e Commander (vermelho) para dois valores de N_{side} . Os resíduos estatísticos se encontram na parte inferior de cada gráfico. A região em cinza denota o intervalo de confiança de 99% estimado a partir de simulações *Full Focal Plane* (FFP10) processados pelo método SMICA. As linhas tracejadas denotam o mesmo intervalo de confiança obtidos por outros métodos.



Fonte: Adaptado de Planck Collaboration et al. (2020c).

a consistência entre os mapas SMICA, SEVEM, NILC e Commander (??). Os resultados deste teste de consistência são mostrados na Figura 4.5.

Os FM (Área, Perímetro e Genus) também foram aplicados à RCF na análise da morfologia de sinais sujeitos ao efeito de lenteamento gravitacional no contexto de se testar teorias modificadas ou alternativas de gravitação (MUNSHI et al., 2016). Além disto, a comparação entre os FM de mapas reais e simulados de RCF permitiu inferir a existência de sinais não-gaussianos de diversas regiões do céu (NOVAES et al., 2016). Outros trabalhos também utilizaram os FM na busca por sinais não-gaussianos nos mapas de RCF (BUCHERT et al., 2017; MODEST et al., 2012; DUCOUT et al., 2012; NOVIKOV et al., 1999).

Em particular, Zhao (2014) examinou a região do CS à luz dos FM, nos dados do WMAP, e concluiu que, de fato, esta região é anômala. Com este objetivo, o autor calculou os FM sobre diversas regiões angulares, começando em 2° e terminando em 15° , variando de 1 em 1 grau, centrados no CS. A análise teve como base a comparação destes valores dos FM calculados sobre 1000 simulações aleatórias e

gaussianas de mapas de RCF e sobre observações do WMAP, em todos os casos foram utilizados mapas com a resolução atrelada ao $N_{side} = 512$. Houve também a aplicação de um feixe de 60 arcmin . O critério utilizado para classificar a região sob análise como anômala se baseou no desvio dos valores de um intervalo de confiança de 99% criado a partir das simulações. Como resultado, a Área não se mostrou anômala para quaisquer uma das escalas angulares analisadas; o Perímetro e o Genus se mostraram anômalos apenas em escalas superiores a 7° , apresentando um desvio ainda mais significativo entre 10° e 11° .

Ao contrário de [Zhao \(2014\)](#), que considera escalas angulares de até 15° , a análise apresentada aqui investiga discos com raios de até 60° , além de também avaliar a combinação dos diferentes MF. Além disto, os mapas utilizados neste trabalho foram obtidos pelo satélite *Planck*, que é um instrumento mais preciso que o WMAP, e o parâmetro utilizado para quantificar o grau de concordância entre o MCP e as observações, é ligeiramente diferente daquele utilizado por [Zhao \(2014\)](#) e será definido na seção seguinte.

Por fim, os FM também já foram aplicadas na identificação de anisotropias secundárias da RCF ([MUNSHI et al., ; SCHMALZING; GÓRSKI, 1998](#)). De fato, embora não seja objetivo desta dissertação expor uma linha do tempo completa das aplicações e usos dos FM na Cosmologia, esta breve exposição mostra que eles certamente constituem uma ferramenta poderosa e amplamente usada em análises da RCF.

4.4 Aplicação dos FM, coleta e tratamento de dados

O código computacional utilizado neste trabalho foi desenvolvido por [Ducout et al. \(2012\)](#) e [Gay et al. \(2012\)](#) visando o cálculo dos FM de mapas no formato *HEALPix*, para um conjunto de valores de ν definido sobre o mapa, tal como ilustra a Figura 4.4.

Primeiramente, os FM foram calculados sobre cada um dos mapas reais: SMICA, SEVEM, NILC e Commander. Na sequência, o conjunto todo foi degradado para a resolução $N_{side} = 512$ e um feixe de feixe de 10 arcmin foi aplicado. Por fim, a máscara com $N_{side} = 512$ foi aplicada sobre cada um dos mapas. A Figura 4.6 ilustra os passos até o cálculo dos FM sobre os mapas reais.

Semelhantemente, os mapas simulados foram preparados para o cálculo dos FM, como ilustra a Figura 4.7. Neste caso, é adequado relembrar que um instrumento de observação possui uma resolução finita, no caso do satélite *Planck* esta resolução

Figura 4.6 - Sequência de passos seguidos até o cálculo dos FM sobre os mapas reais: SMICA, SEVEM, NILC e Commander.

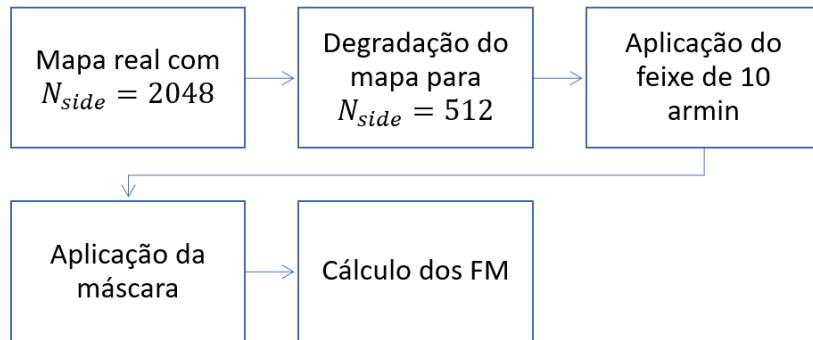


Figura 4.7 - Sequência de passos seguidos para o cálculo dos FM sobre cada mapa simulado.



angular, o tamanho característico do feixe do instrumento (FWHM, do Inglês, *full width half maximum*) é de até 5 arcmin e aproximadamente gaussiano ([PLANCK COLLABORATION et al., 2020a](#)). Um feixe de 10 arcmin foi aplicado aos mapas reais e simulados visando uniformizar os dados.

Os FM foram calculados para 26 valores de ν igualmente espaçados entre $-3,5$ e $3,5$. Os 26 valores de ν são suficientes para as análises propostas, outros autores também fazem uso de 26 valores para ν ([NOVAES et al., 2016](#); [ZHAO, 2014](#)). Estes FM são calculados em discos de diferentes raios angulares e centros fixos na posição do CS; foram utilizados 58 discos com raios de 2° até 60° , variando de 1 em 1 grau. Isto é, para cada disco analisado, Área, Perímetro e Genus são calculados para cada um dos 26 valores de ν .

Por fim, é conveniente definir uma grandeza que descreva o grau de concordância entre os dados coletados sobre os mapas reais e simulações. Define-se, respectivamente,

o fator A e o seu desvio padrão σ_A para cada FM como (PLANCK COLLABORATION et al., 2020c):

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{26} \sum_{j=1}^{26} f_{obs}(\nu_i) C_{ij}^{-1} \overline{f_{sim}(\nu_j)} }{\sum_{i=1}^{26} \sum_{j=1}^{26} \overline{f_{sim}(\nu_i)} C_{ij}^{-1} \overline{f_{sim}(\nu_j)}}, \quad (4.9)$$

e

$$\sigma_A = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{26} \sum_{j=1}^{26} \overline{f_{sim}(\nu_i)} C_{ij}^{-1} \overline{f_{sim}(\nu_j)}}}. \quad (4.10)$$

O símbolo $f_{obs}(\nu_i)$ denota os FM calculado sobre o i -ésimo ν num mapa real e $f_{sim}(\nu_i)$ simboliza os FM obtidos para as simulações no j -ésimo ν . O símbolo C_{ij} denota a matriz de covariância para os dados simulados e é dada por (PLANCK COLLABORATION et al., 2020c; HARTLAP et al., 2006)

$$C_{ij} = \frac{1}{N_{sim} - 1} \sum_{k=1}^{N_{sim}} \left\{ f_{sim}^{(k)}(\nu_i) - \overline{f_{sim}(\nu_i)} \right\} \left\{ f_{sim}^{(k)}(\nu_j) - \overline{f_{sim}(\nu_j)} \right\}, \quad (4.11)$$

onde a barra sobrescrita denota o valor médio dos FM calculados sobre as simulações; o índice (k) indica que o FM é calculado sobre a k -ésima simulação. É válido observar que para cada mapa real, um valor de A é calculado para cada disco centrado no CS. Noutras palavras, o valor de A de cada FM, ou uma combinação deles, poderá ser expresso como uma função do raio de cada disco. O mesmo é obtido para cada simulação, tomando f_{obs} na Equação 4.9 como sendo o FM calculado sobre um mapa simulado.

A matriz de covariância 4.11 fica bem determinada (*unbiased*) quando o número de pontos (p) do vetor de dados é muito menor do que o número de simulações. Por causa do número finito de simulações (N_{sim}), sempre haverá a existência de uma incerteza na matriz de covariância introduzindo um viés (*bias*) em sua inversa, que é a quantidade utilizada em análises cosmológicas. Com o objetivo de minorar a amplitude do *bias* presente na inversa da matriz de covariância, aplica-se um termo de correção de forma que (HARTLAP et al., 2006)

$$C_{ij}^{-1} \rightarrow \left[\frac{N_{sim} - p - 2}{N_{sim} - 1} \right] C_{ij}^{-1}, \quad (4.12)$$

onde os elementos entre colchetes constituem o fator de correção da matriz inversa. Para os objetivos propostos neste trabalho, realizam-se um total de 1000 simulações. No caso da Equação 4.11 o tamanho dos vetores de dados correspondem aos 26 valores de ν para os quais os FM são calculados. Consequentemente, a matriz de

covariância tem dimensão 26 por 26, para cada FM. Contudo, ao combinar dois FM, numa lista, a matriz de covariância tem dimensão 58 por 58 e, por conseguinte, ao combinar os três FM, a matriz tem dimensão 78 por 78. Isso implica que a correção necessária para o presente caso será de 0,92 a 0,97.

De acordo com a expressão 4.9, o fator A tende a 1 quando o valor dos FM calculados a partir dos mapas reais se aproxima da média dos FM obtidos das simulações. Caso contrário, se os FM calculados para as simulações não concordem com os FM obtidos do mapa real, os valores de A para cada FM tendem a se afastar da unidade. Neste sentido, o comportamento da grandeza A , permitirá checar se, utilizando os FM, o CS é confirmado como um sinal anômalo de acordo com o esperado pelo MCP. O capítulo seguinte apresenta os resultados obtidos neste trabalho.

5 RESULTADOS

Os resultados apresentados nesta seção foram obtidos com a comparação entre os FM calculados sobre os mapas reais da RCF observados com o satélite *Planck* e sobre um total de 1000 simulações deste sinal, gerados de acordo com os parâmetros do MCP estimados pelo satélite *Planck* (PLANCK COLLABORATION et al., 2020b).

5.1 Parâmetro A

Uma amostra de um conjunto de dados ou população é classificada como anômala quando ela apresenta algum tipo de comportamento que desvia, sob certos critérios, das características mais frequentes desta população. Neste trabalho, o parâmetro A é o indicador que quantifica o grau de concordância entre o MCP (simulações) e dados reais, que, a partir dos FM calculados para cada caso, permite definir se uma amostra é, sob certos critérios, anômala. Para tanto, se estabelece que um conjunto de dados é anômalo dentro de uma população se seus elementos diferem de ao menos 99% de sua média. Mais precisamente, a hipótese nula (H_0), neste contexto, postula que o parâmetro A de cada um dos FM, Área, Perímetro e Genus, ou uma combinação deles, quando calculados na região do CS, não é anômalo num intervalo de confiança de 99% em relação à média das simulações ou modelo. Em contrapartida, a hipótese alternativa (H_1), ou hipótese da anomalia, estabelece que o valor de A estaria fora do intervalo de confiança, ou seja, a hipótese nula é rejeitada. Em síntese:

H_0 : o parâmetro A tende à unidade, na região do CS ($\approx 15^\circ$) num intervalo de confiança de 99% em relação à media das simulações;

H_1 : o parâmetro A desvia significativamente da unidade e se encontra fora da intervalo de 99%, na região do CS.

Em todos os gráficos seguintes, os pontos que se encontram dentro da área cinza estão em concordância com a hipótese nula. O intervalo de confiança considerado foi construído a partir do cálculo de A para cada simulação individualmente, nos 58 discos, tomando seu FM como sendo f_{obs} na Equação 4.9. Consequentemente, este procedimento resulta numa lista com 1000 valores de A para cada disco, de forma que a linha preta contínua em cada gráfico é obtida calculando a média simples para cada um destes discos. O intervalo de confiança foi construído de forma empírica, isto é, para cada disco estima-se o intervalo de A que engloba 99% dos 1000 valores de A das simulações. Convém explicitar que a forma como o intervalo de confiança foi construído permite quantificar o grau de concordância entre as observações e as

simulações, ou seja, o MCP.

Os valores de A para cada um dos FM, Área, Perímetro e Genus, são apresentados na Figura 5.1. Primeiramente, é importante destacar que a Área parece não ser sensível às características do CS; note que os valores de A para a Área, na Figura 5.1, flutuam em torno da média e sempre dentro da região cinza. No entanto, os outros dois FM, Perímetro e Genus, se mostram mais sensíveis à metodologia adotada. [Ducout et al. \(2012\)](#) também verificaram que a Área parece ser o menos sensível dos três FM.

Ao se considerar apenas a região central do CS ($\approx 5^\circ$), os valores de A para o Perímetro se mostram na fronteira do intervalo de confiança de 95% (Figura 5.1). Neste caso em particular, o Perímetro desta região não seria considerado anômalo, mas apenas como improvável de ocorrer nas condições do MCP. Sob outra perspectiva, ao se levar em conta o anel que circunda a mancha fria ($\approx 15^\circ$), verifica-se que, embora os valores concordem com a hipótese H_0 (faixa cinza), eles ainda se encontram mais próximos à borda do intervalo de confiança de 99%. Sob esta mesma perspectiva, os valores de A para o Genus se mostram concordantes com a hipótese nula tanto em discos de 5° como de 15° , mas confirmam a baixa probabilidade de ocorrer ao acaso, em especial ao se considerar o anel quente. Isto indica a existência de uma preferência angular sob a qual o CS se evidencia nos resultados.

Tais afirmações podem ser melhor visualizadas a partir das Figuras 5.2 e 5.3, que compararam, para cada estimador e raio do disco, os valores de A para cada mapa do *Planck* e aqueles obtidos das simulações. De fato, CS não é apenas raro devido a uma mancha fria de raio angular de 5° , seu entorno se mostra ainda mais improvável dentro do esperado pelo MCP.

A combinação dos três FM permitiria (Figura 5.4), a partir do teorema de Hadwiger, fornecer uma caracterização geral do CS. Todavia, a Área se mostra insensível às características do CS e sua combinação com os outros dois FM parece mascarar o sinal evidenciado por eles quando usados individualmente. Em alternativa, ao se combinar Perímetro + Genus (Figura 5.4), novamente se observa, em torno de 5° , concordância dos dados para com a hipótese H_0 . Por outro lado, em torno de 14° , os valores de A se mostram, para três mapas, fronteiriços entre as hipóteses assumidas e para um único mapa, há concordância dos dados com a hipótese de anomalia. A Figura 5.5 mostra a distribuição dos 1000 valores de A para a combinação Perímetro+Genus para os raios angulares de 5° e 14° , superpondo a ela os valores de A para os mapas do *Planck*.

Figura 5.1 - Valores do parâmetro A para os FM, Área, Perímetro e Genus. As faixas azul e cinza denotam, respectivamente, o intervalo de confiança de 95% e 99% construídos a partir das simulações.

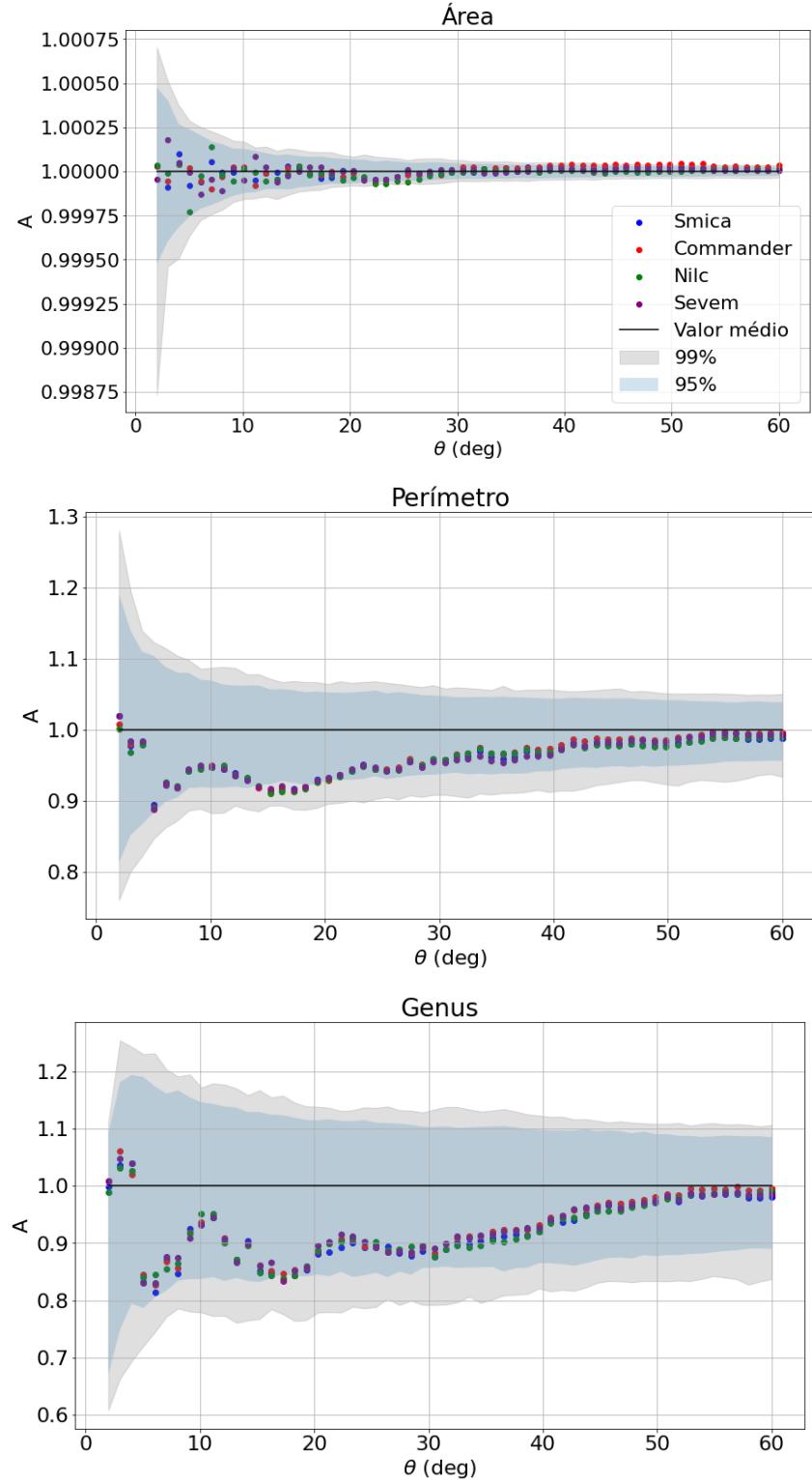


Figura 5.2 - Histogramas dos 1000 valores de A calculados para o Perímetro tomando discos de 5° e 15° sobre as simulações. As linhas coloridas, conforme a legenda, denotam os valores observados sobre cada mapa de dados, enquanto que a linha preta representa o valor médio de A . A região limitada pelas linhas tracejadas denotam o intervalo de confiança de 99% dos valores de A para os discos analisados.

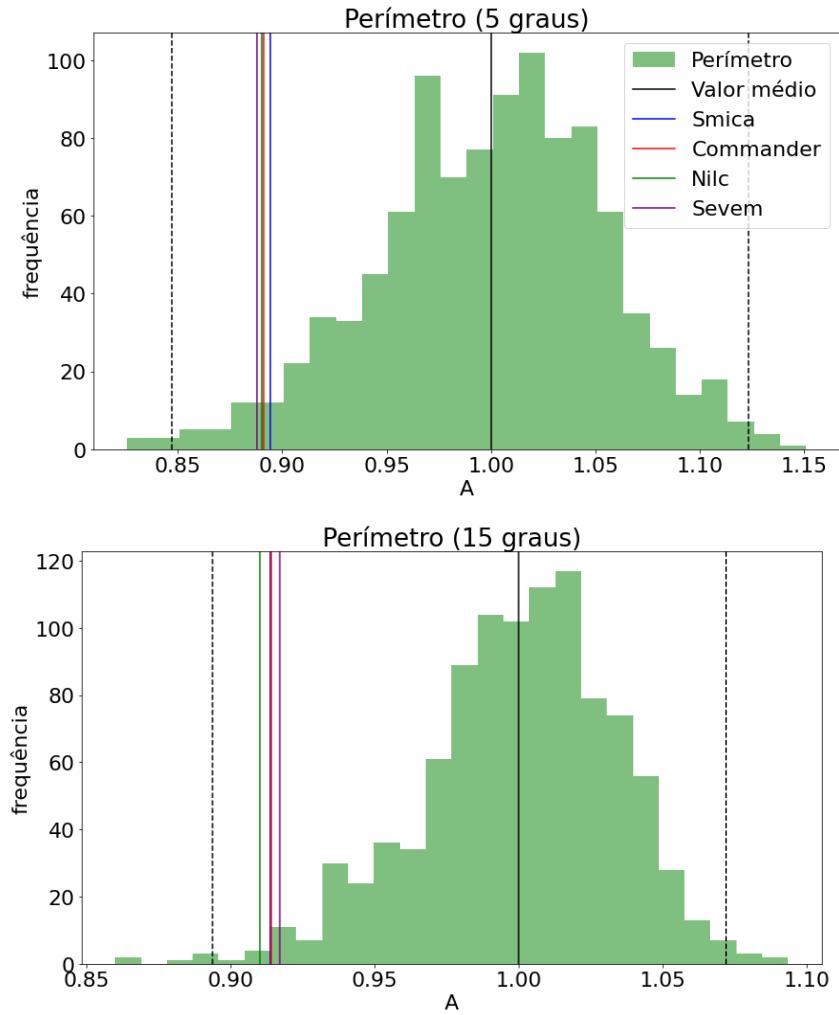


Figura 5.3 - Análogo à Figura 5.2, mas para valores de A calculados para o Genus.

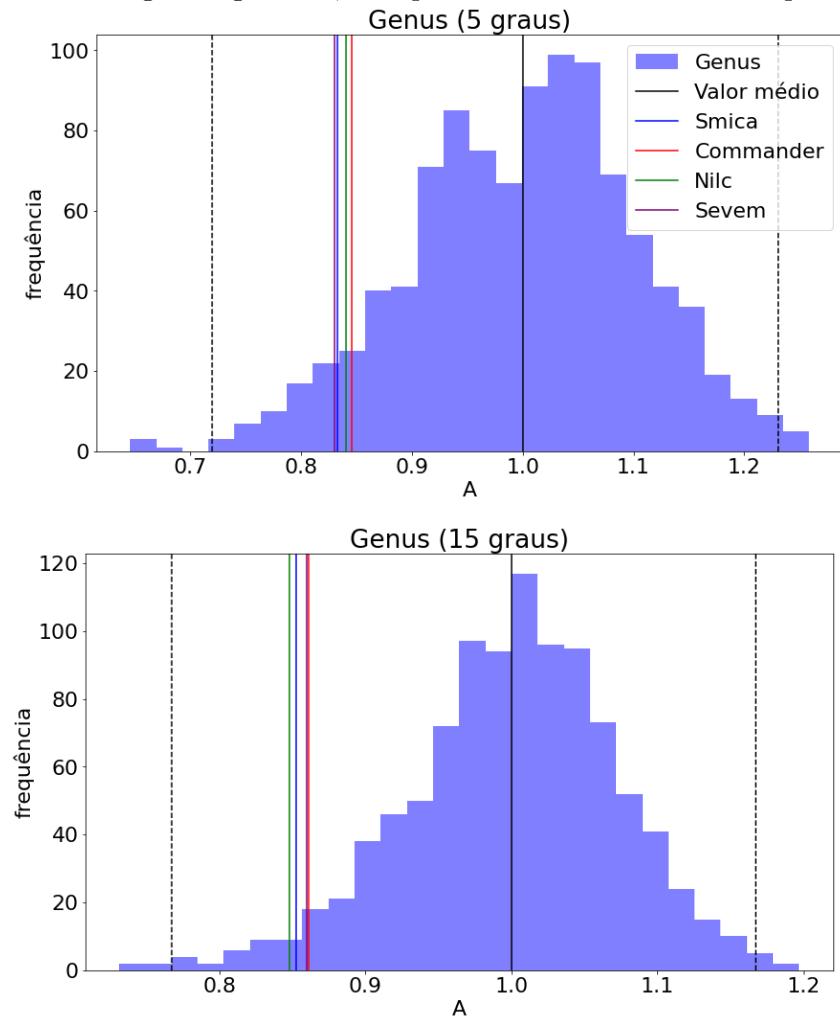


Figura 5.4 - Valores do parâmetro A para a combinação de dois e de três dos FM. As faixas azul e cinza denotam, respectivamente, o intervalo de confiança de 95% e 99% construídos a partir das simulações.

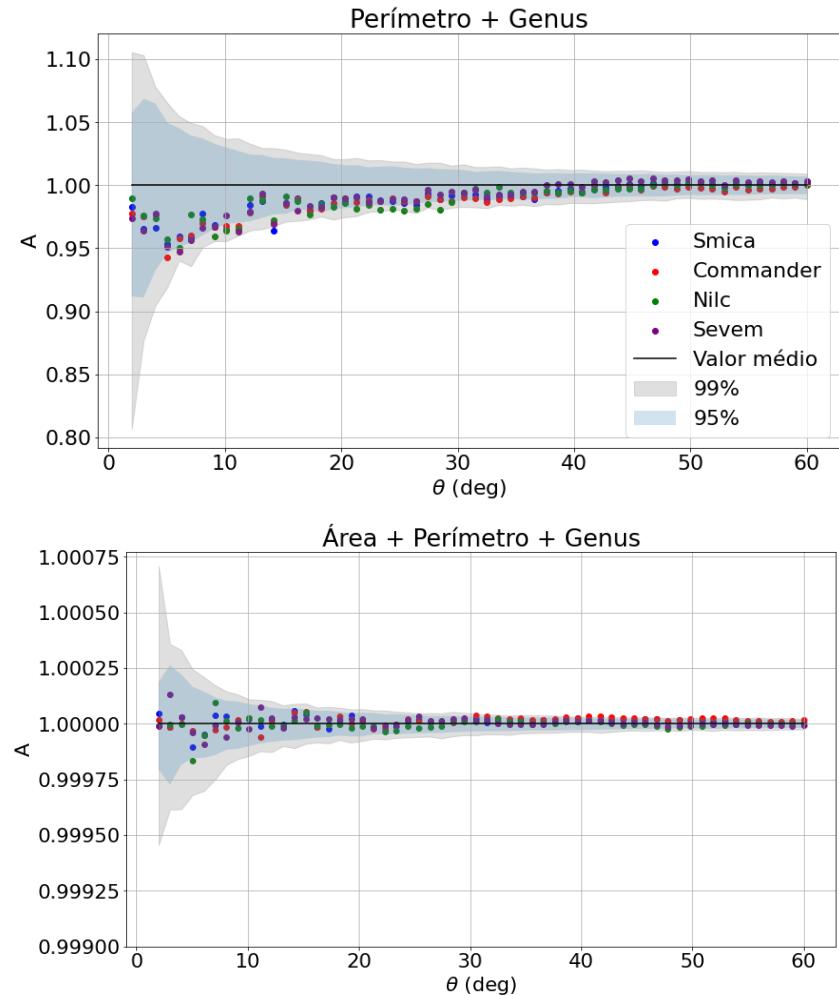
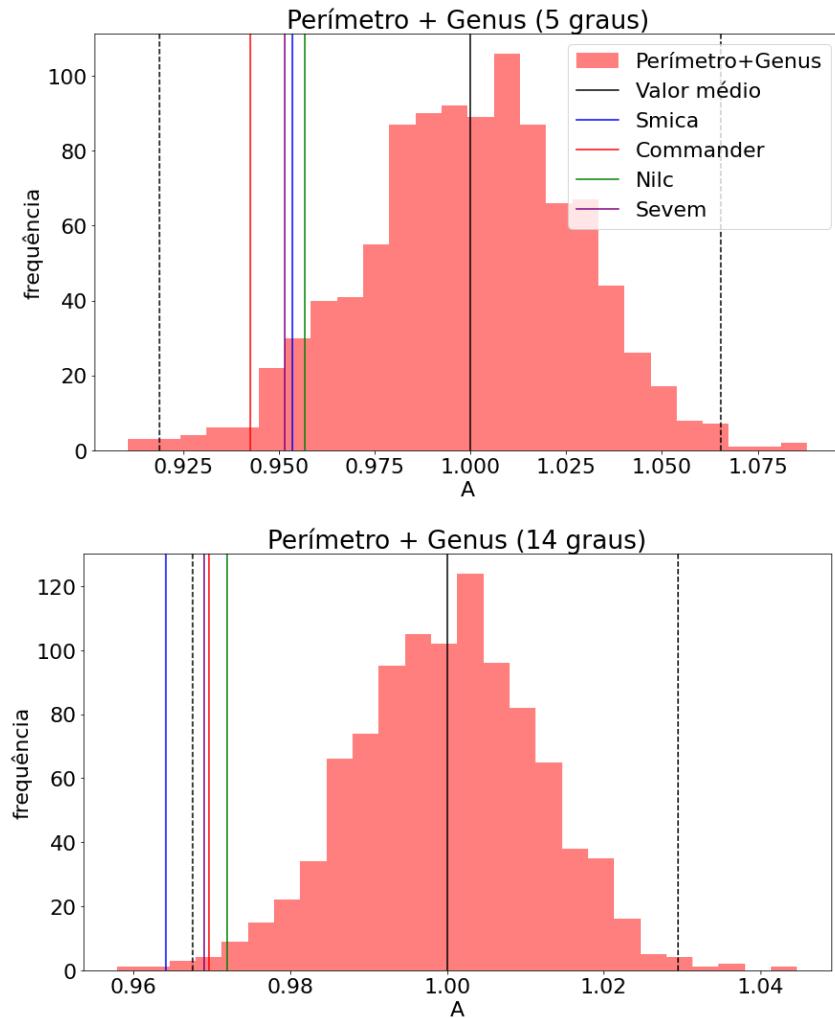
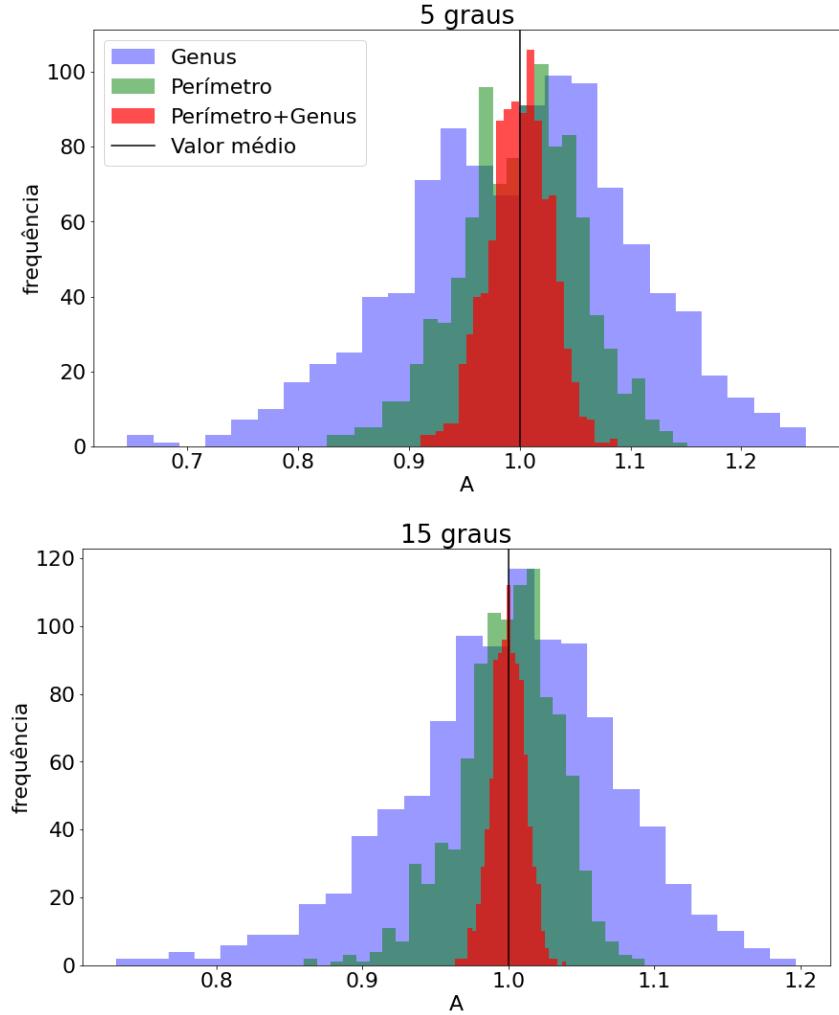


Figura 5.5 - Análogo à Figura 5.2, mas para valores de A calculados para a combinação Perímetro + Genus.



Por fim, nota-se também que a combinação Perímetro + Genus resulta em uma dispersão menor dos valores de A das simulações do que quando analisados separadamente. Tal característica pode ser observada em detalhes na Figura 5.6, que apresenta, para discos de raios distintos, o histograma dos valores de A para o Perímetro e Genus individualmente, e para a combinação deles.

Figura 5.6 - Histogramas dos valores de A obtidos analisando discos de 5° e 15° sobre as simulações. São apresentados os resultados para o Perímetro e o Genus individualmente e a combinação deles. A linha contínua preta indica o valor médio de A das simulações para a combinação Perímetro + Genus.



5.2 *p-value*

De forma a quantificar a probabilidade com a qual o CS apareceria por acaso dentro do MCP utilizamos o teste estatístico conhecido como *p-value* (p). Esta quantidade indica a probabilidade de um dado FM apresentar um valor tão extremo quanto o que de fato se obteve, ao assumir a veracidade da hipótese nula. A partir da definição clássica de probabilidades (DANTAS, 2008), toma-se o *p-value* tal como

$$p = \frac{N^*}{N_{sim}}, \quad (5.1)$$

onde N^* denota o número de simulações cujo valor de A_{sim} é tal que: $(|A_{sim} - 1| > |A_{obs} - 1|)$. Os textos subscritos “sim” e “obs” denotam, respectivamente, o fator A obtido a partir dos FM calculados sobre mapas simulados e sobre os mapas reais.

Com o objetivo de classificar uma anomalia, toma-se o nível de significância igual a 1%, baseado nas hipóteses H_0 e H_1 apresentadas anteriormente. Isto posto, o sinal do CS pode ser classificado, quando observado sob diferentes escalas angulares, como anômalo quando os valores de *p-value* associados aos FM são menores do que 1%. Este valor não provém de uma regra universal, se trata de um critério estabelecido neste trabalho.

Os valores do *p-value* para cada um dos FM são apresentados na Figura 5.7. Como consequência do comportamento da Área apresentado na seção anterior, os *p-values* associados a ela se encontram espalhados de modo que impedem qualquer conclusão segura. O mesmo se pode afirmar sobre a combinação dos três FM (Figura 5.8). Os resultados de *p-value* para Perímetro e Genus, expressos na Figura 5.7, não permitem classificar o CS como uma anomalia dentro do nível de significância estabelecido, entretanto eles ainda indicam que o CS é extremamente raro e, por este motivo, ele pode ser designado como um sinal extremo ($p \approx 2\%$), quando observados sobre regiões em torno de 15° . A Tabela 5.1 resume os menores valores de *p-value* encontrados para os quatro mapas do *Planck*, indicando o tamanho do disco para o qual eles são obtidos.

Analizando a combinação Perímetro + Genus, a Figura 5.8 mostra que, quando se compara com os resultados obtidos utilizando os FM separadamente (Figura 5.7), os valores de *p-value* estão mais espalhados. Entretanto, verifica-se que o sinal é anômalo para três mapas reais e extremo para um único deles quando analisados utilizando discos de 14° . A Figura 5.9 apresenta diferentes valores de *p-value* para diferentes discos, evidenciando a preferência angular em que o sinal do CS se manifesta, para cada FM. Em todos os casos, a região que circunda o CS de aproximadamente 15° se mostra mais extrema do que sua região central. Em particular, para a combinação Perímetro+Genus, o CS se caracteriza como anômalo, dentro de um disco de 14° .

Figura 5.7 - Valores de p -value, em função do raio do disco, vinculados à Área, ao Perímetro e ao Genus.

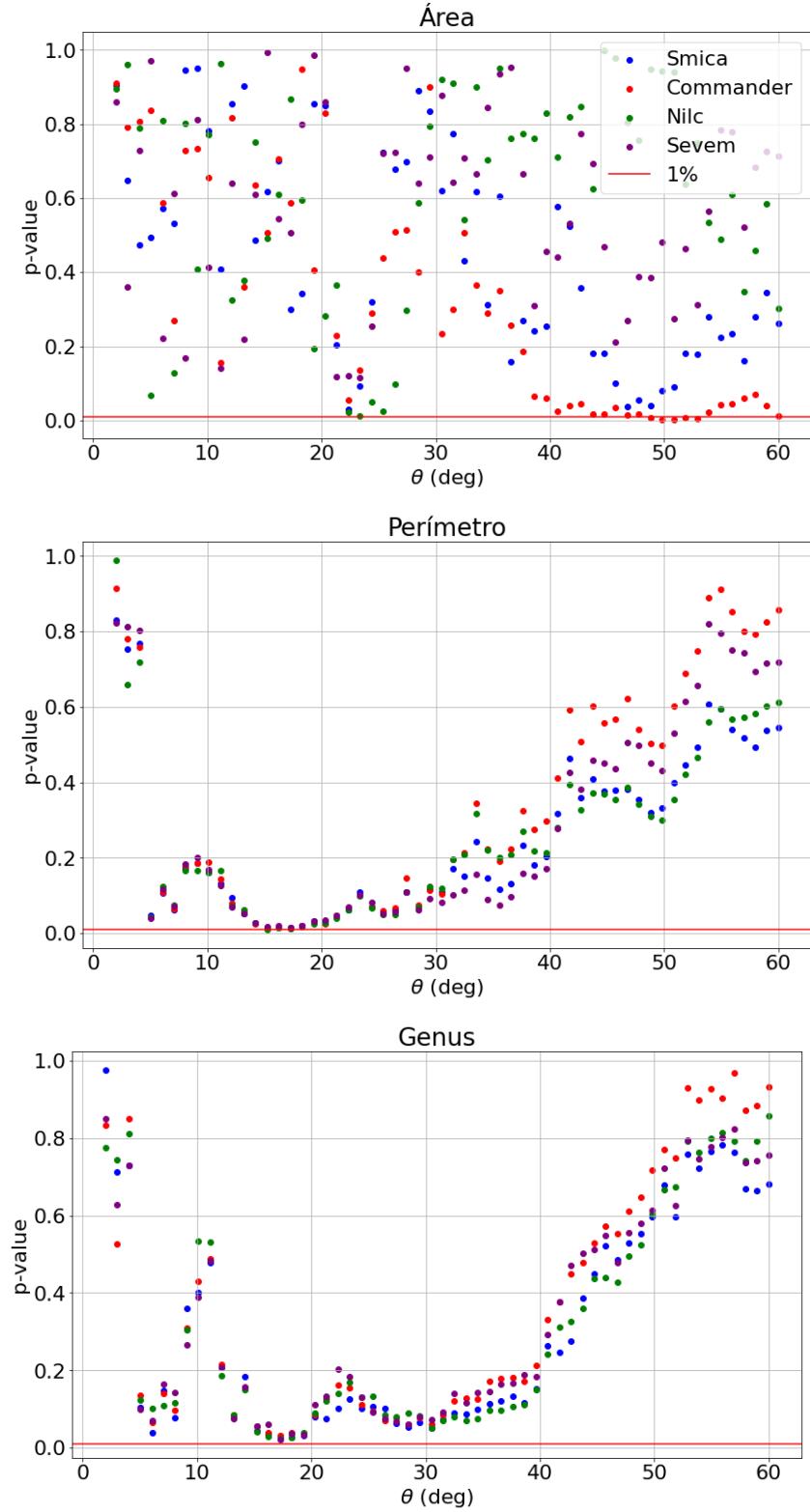


Figura 5.8 - Valores de p -value, em função do raio do disco, para os FM combinados.

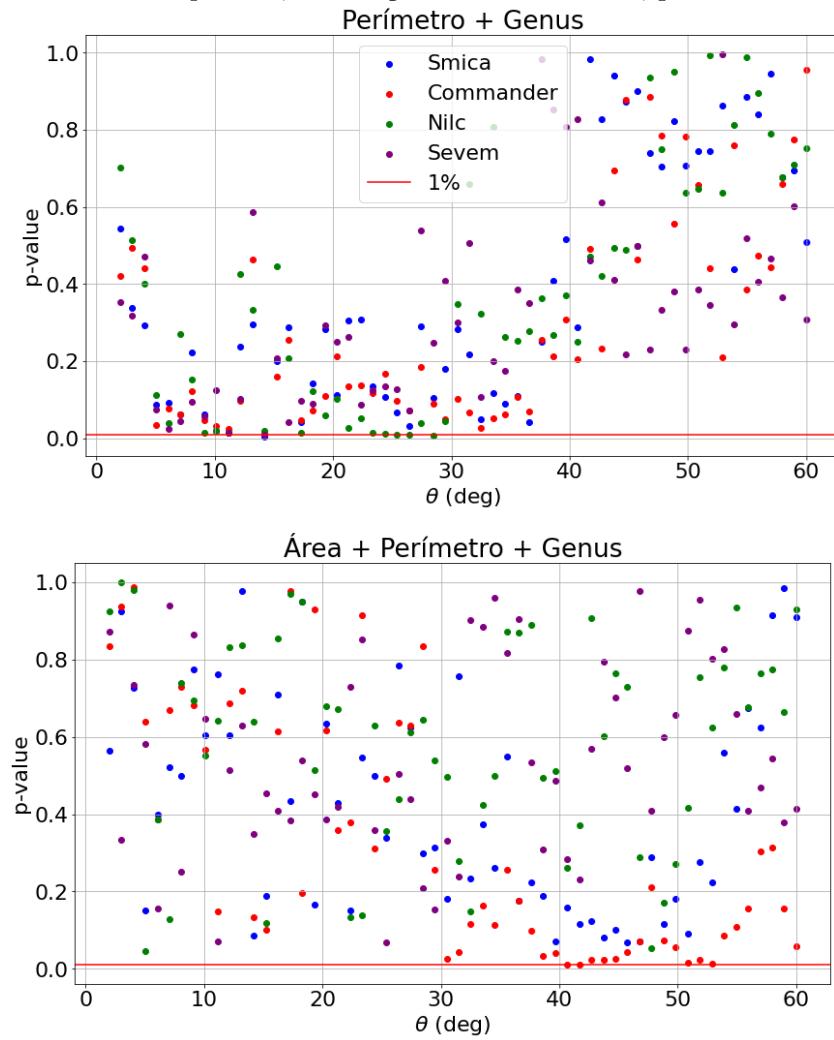


Figura 5.9 - Valores de *p-value* vinculados ao Perímetro, ao Genus e à combinação de ambos, para diferentes discos.

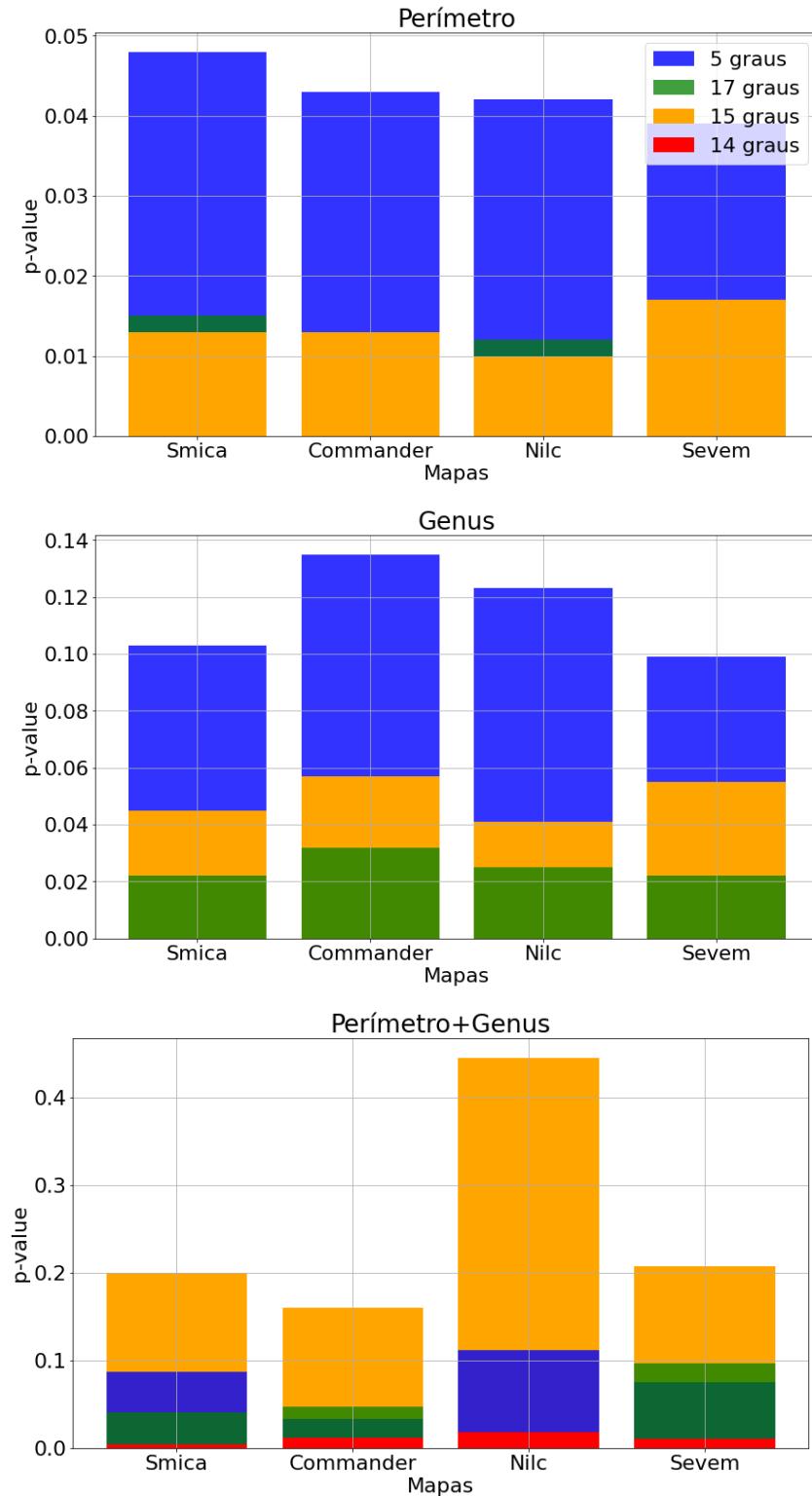


Tabela 5.1 - Valores de *p-value* para os mapas reais, em discos nos quais o sinal do CS se mostra extremo ou anômalo, para diferentes FM ou combinação deles.

Mapas	Perímetro (15°)	Genus (17°)	Perímetro+Genus (14°)
SMICA	0,013	0,022	0,004
COMMANDER	0,010	0,032	0,012
NILC	0,027	0,025	0,010
SEVEM	0,027	0,022	0,018

5.3 Variação do parâmetro A

Inspirado nas grandes flutuações de temperatura do CS, em relação à média do céu, propõe-se analisar a variação do A em função do ângulo de abertura do disco centrado no CS. Noutros termos, a grandeza definida abaixo denota a rapidez, em função do raio angular do disco, com que o parâmetro A varia:

$$\frac{\Delta A}{\Delta \theta} = \frac{A(\theta_{i+1}) - A(\theta_i)}{\theta_{i+1} - \theta_i} \quad (5.2)$$

A Figura 5.10 mostra que a Área, novamente, não parece trazer informação significativa. Em relação aos dados vinculados ao Perímetro e ao Genus, observa-se, para os quatro mapas reais, que em discos menores que a dimensão do CS há uma intensa variação dos valores de A, em particular em torno de 5°. Além disso, em torno de 15°, o Genus apresenta um comportamento singular que evidencia uma variação incomum da amplitude de A. A combinação Perímetro+Genus (Figura 5.11) indica mais uma vez um comportamento atípico nos mapas da RCF, em torno de 15°. Apesar destes pontos serem quase fronteiriços à região confiança em torno de 15°, indicando a presença de um sinal extremo, ainda satisfazem a hipótese nula. Os valores da variação de A em função do raio para a combinação dos três FM, são expressos na Figura 5.11 e não permitem fazer qualquer inferência.

Em síntese, os resultados apresentados apontam que o nível de significância da anomalia depende do FM escolhido e do raio angular em que os estimadores A ou *p-value* são calculados.

Figura 5.10 - Variação do parâmetro A em função do raio do disco para a Área, Perímetro e Genus. As faixas azul e cinza denotam, respectivamente, o intervalo de confiança de 95% e 99% construídos a partir das simulações.

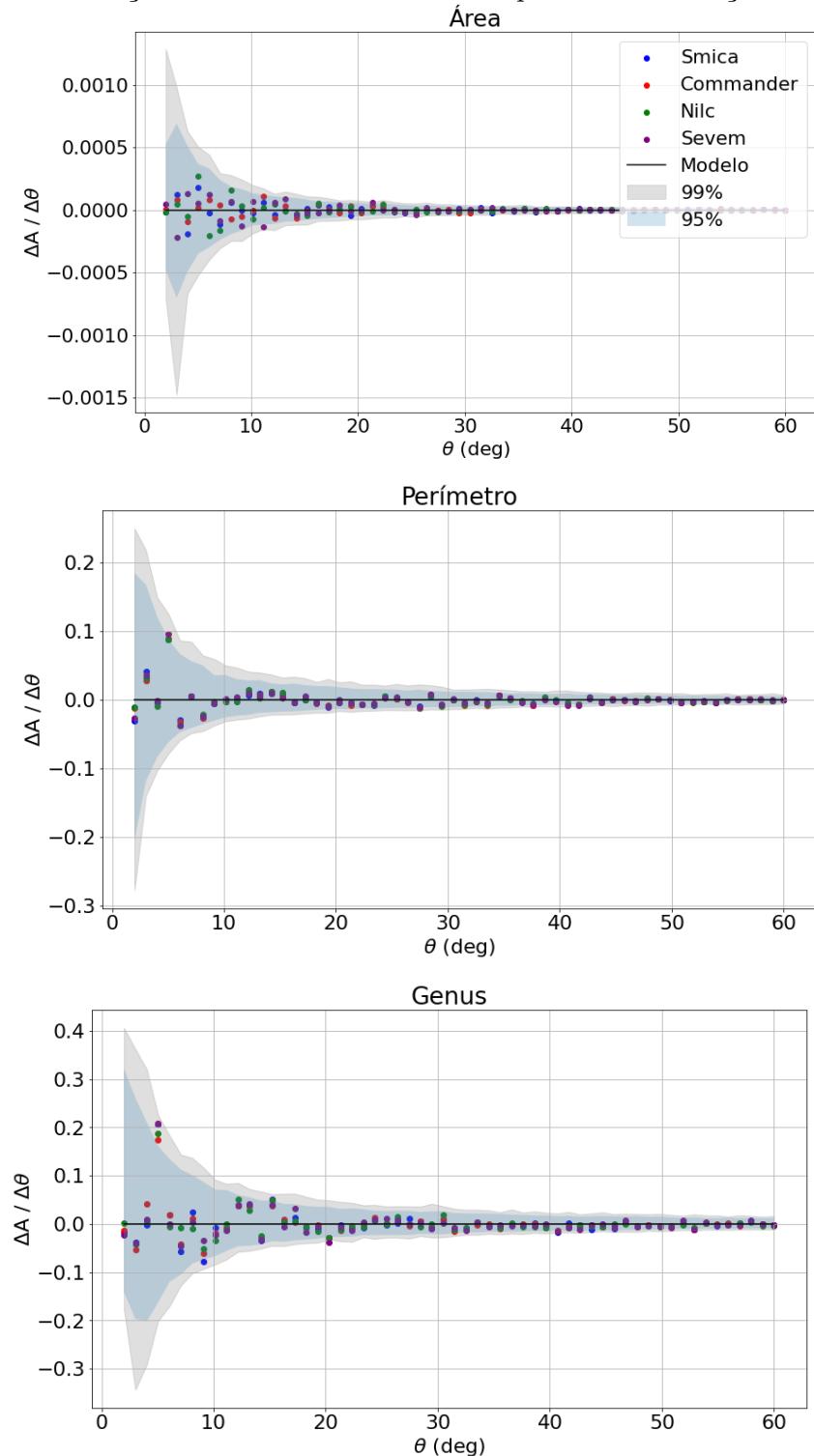
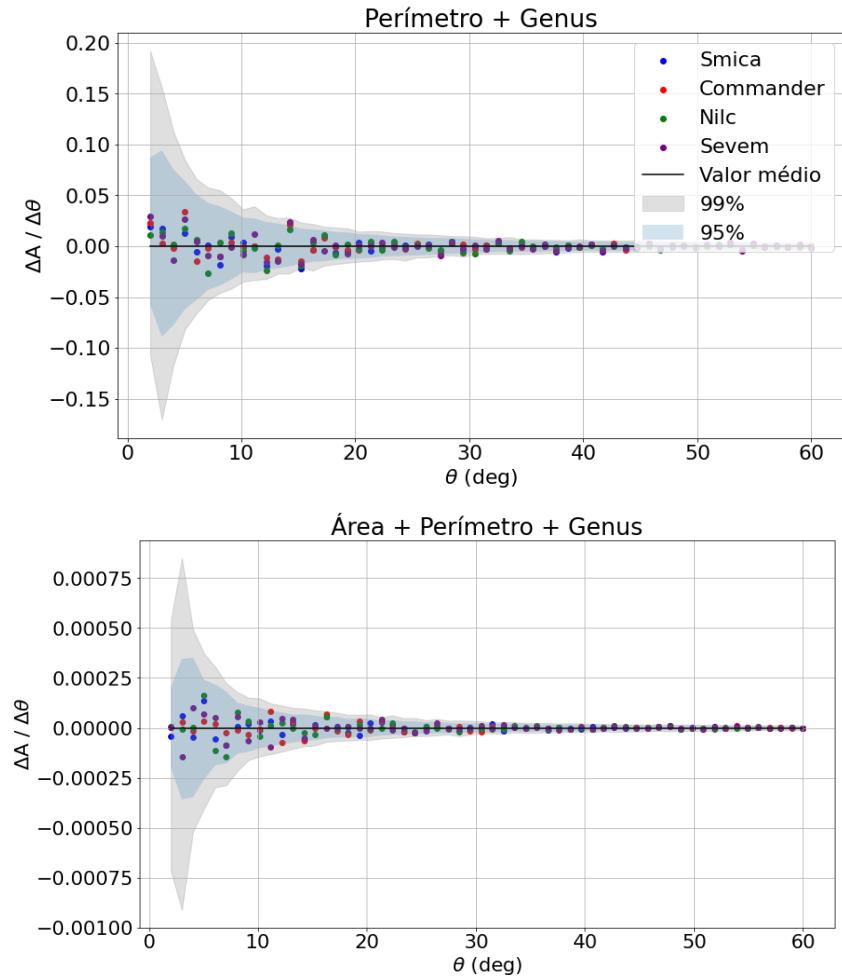


Figura 5.11 - Variação do parâmetro A em função do raio disco para os FM combinados. As faixas azul e cinza denotam, respectivamente, o intervalo de confiança de 95% e 99% construídos a partir das simulações.



6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O CS é uma região do campo de temperatura da RCF cujo perfil médio de temperatura é considerado discrepante quando comparado a outras regiões frias extremas, ou seja, parece discordar do MCP e por isso é investigado por muito autores. A causa física que poderia ter gerado esta anomalia é ainda desconhecida. Diversas explicações foram apresentadas e descartadas ao longo do tempo e, por enquanto, há apenas indícios de que o CS corresponderia a um sinal sujeito ao efeito ISW que foi potencializado, de modo anômalo, pelo *supervoid* Eridanus, o qual se encontra nas proximidades da linha de visada do CS. Estas supostas anomalias ou amplificações sob as quais o efeito ISW estaria sujeito quando geradas por alguns *supervoids* indica uma possível incompletude do MCP. Por outro lado, o efeito ISW associado a um *supervoid* com características incomuns e suficientes para gerar o CS, dentro das condições estabelecidas pelo MCP, seria extremamente raro.

Embora diferentes trabalhos excluam a existência deste *supervoid*, a ínfima possibilidade de sua existência e surgimento refletiria uma significante falha nas teorias sobre formação de grandes estruturas cósmicas e, por conseguinte, uma limitação do MCP; Nadathur et al. (2014) também chegam a conclusão semelhante. Como perspectiva para trabalhos futuros que visam investigar os efeitos relacionados ao *supervoid* Eridanus e sua possível relação causal com o CS, é necessário determinar de modo mais acurado a posição do *supervoid* em relação ao centro do CS, além de realizar de um levantamento do comportamento do contraste de densidade no interior do *supervoid*. Ademais, deve ser investigado sob quais condições físicas o sinal do efeito ISW observado em alguns *supervoids* estaria sujeito à amplificações. Mais singular como alguns *supervoids* raros, é a hipótese de multiversos. Eles são uma solução exótica para a causa física do CS e, por esta ser uma resposta cujas bases estão além dos limites de verificação experimental da cosmologia contemporânea, trata-se de uma explicação pouco provável para o CS.

Esta dissertação propôs testar o nível de significância do CS enquanto anomalia, através de uma metodologia baseada nos MF, não pretendendo explorar as causas que deram origem ao CS nesse momento. O trabalho desenvolvido constituiu-se de uma análise local do CS, aplicada a discos concêntricos com raios de 2° a 60° centrados na posição do CS, utilizando os quatro mapas de RCF produzidos pelo satélite *Planck* e um conjunto de 1000 simulações produzidas de acordo com o MCP.

Por causa da geometria bidimensional dos mapas e como consequência do teorema de Hadwiger, são necessários três FM (Área, Perímetro e Genus) para caracterizar

inteiramente qualquer região destes mapas. O primeiro deles, a Área, se mostrou insensível às características do FM e por causa disto, as conclusões se reduziram aos funcionais Perímetro, Genus e a combinação de ambos. Ainda assim, a aplicação dos FM sobre os mapas observados pelo satélite *Planck* e sua comparação com mapas gerados a partir das configurações estabelecidas pelo MCP permitiram concluir que o CS é de fato um sinal extremo, extrapolando o intervalo de confiança de 95%.

Definindo o intervalo de confiança de 99% como critério para a hipótese de anomalia, verificou-se ainda que uma análise da combinação Perímetro e Genus classifica o CS como sendo um sinal anômalo. Isso foi verificado para a análise em discos com raio de 14°, identificando um sinal anômalo para o mapa SMICA e extremo para COMMANDER, NILC e SEVEM. Neste contexto, quando o CS é analisado sob a combinação Perímetro+Genus, também num raio de 14°, o sinal atípico da região se mostra mais evidente ($p\text{-value} \leq 1\%$) para os mapas SMICA e COMMANDER, e pouco menos evidente ($p\text{-value} < 2\%$) nos mapas NILC e SEVEM.

Os resultados apresentados neste trabalho, em particular a Figura 5.1, mostram que o grau de significância do CS varia conforme o ângulo sob o qual ele é observado. Esta aparente preferência angular em que o sinal do CS se manifesta também foi identificada por [Zhao \(2014\)](#). Com efeito, o autor não identificou qualquer sinal anômalo na região do CS quando observado sob escalas angulares menores do que 6°; a existência de anomalia na região observada se tornou evidente em escalas angulares da ordem de 10° que corresponde à região da mancha fria. Da mesma forma, a primeira identificação do CS também se mostrou mais sensível em escalas no espaço de *wavelets* de cerca de 4° ([VIELVA et al., 2004](#)). Conforme já mencionado neste trabalho, a amplificação do CS em determinadas escalas empregando um tipo específico de filtro no espaço de *wavelets*, o SWHM, serviu para questionar se ele de fato era uma anomalia da RCF.

No entanto, como apontado por [Vielva \(2010\)](#) o CS também é classificado como anômalo a partir de análises utilizando outras ferramentas além do filtro SWHM. É correto concluir que o sinal não-gaussiano do CS é sensível às escalas adotadas e, segundo os resultados apresentados, nas proximidades de um ângulo de aproximadamente 15° centrado no CS é que o sinal torna extremo ou anômalo. Isto implica que o CS não pode ser caracterizado simplesmente como uma mancha fria, mas como uma mancha rodeada por um anel quente. Este anel contribui de modo significativo para o desvio de gaussianidade da região, sendo parte integrante do CS.

Vale notar que uma das características da metodologia adotada nesta dissertação é a localidade das análises que foram feitas sobre discos centrados nas coordenadas do CS. Há uma limitação intrínseca que resulta desta metodologia: como saber se o sinal do CS não aparece em cada mapa simulado, mas fora da região delimitada pela análise? As análises estatísticas apresentadas neste trabalho não levaram em conta a possibilidade do CS ter sido gerado em outra posição do céu, em cada simulação. Por conseguinte, ainda não se pode descartar a hipótese de que o CS possa ser um sinal improvável, mas esperado dentro do MCP; em outras palavras, ainda é necessário investigar se a probabilidade de ocorrência do CS, como obtida pelas presentes análises, não está subestimada devido ao tamanho do espaço de parâmetros. Este problema estatístico é conhecido como *look elsewhere effect* e maiores detalhes sobre ele podem ser encontrados em [Gross e Vitells \(2010\)](#).

Propõe-se que as análises expostas nesta dissertação sejam aprimoradas com o objetivo de investigar se o CS pode ser de fato identificado, de acordo com esta metodologia, como uma anomalia ou sinal extremo levando em conta o *look elsewhere effect*. Além disto, sugere-se que as análises sejam feitas com um número maior de simulações, em torno de 10 mil, e que os mapas utilizados possuam maior resolução ($N_{side} = 1024$). Estas análises permitiriam não apenas investigar a precisão do cálculo do parâmetro A e garantir uma estimativa melhor da matriz de covariância, como também uma avaliação mais robusta da significância estatística dos nossos resultados.

Em resumo, as análises apresentadas nesta dissertação confirmam o CS como sinal extremo podendo ser caracterizado como anômalo, com probabilidade de $\lesssim 1\%$, quando investigado utilizando a combinação de Perímetro e Genus, no disco de 14° . Além disso, conclui-se que o anel quente que envolve o CS pode ser classificado como mais extremo que a mancha fria do CS, sendo um possível responsável pela característica anômala desta região. Por fim, vale lembrar que, ainda que a RCF se apresente como uma das bases para o Princípio Cosmológico, ela requer atenção quando se detectam sinais que parecem quebrar sua característica de isotropia. Este fato reforça a importância do desenvolvimento de novas análises destes sinais, tais como as apresentadas neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDELALI, M. L.; MEBARKI, N. Improved solution to CMB quadrupole problem using ellipsoidal Universes with Chaplygin gas. **arXiv:2006.13750**, 2020. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2006.13750>>. 31
- ANDRADE, U.; GONÇALVES, R. S.; CARVALHO, G. C.; BENGALY, C. A. P.; CARVALHO, J. C.; ALCANIZ, J. The angular scale of homogeneity with SDSS-IV DR16 Luminous Red Galaxies. **arXiv: 2205.07819**, 2022. 2, 29
- AVILA, F.; NOVAES, C. P.; BERNUI, A.; CARVALHO, E. de; NOGUEIRA-CAVALCANTE, J. P. The angular scale of homogeneity in the local Universe with the SDSS blue galaxies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 488, n. 1, p. 1481–1487, July 2019. 30
- BARTOLO, N.; MATARRESE, S.; RIOTTO, A. Adiabatic and isocurvature perturbations from inflation: power spectra and consistency relations. **Physical Review D**, v. 64, n. 12, Nov. 2001. 16
- BASSALO, J. M. F.; CATTANI, M. S. D. **Elementos de física-matemática: volume 1**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2010. (Elementos de Física Matemática). 25, 26
- BECK, R.; CSABAI, I.; RÁCZ, G.; SZAPUDI, I. The integrated Sachs-Wolfe effect in the AvERA cosmology. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 479, n. 3, p. 3582–3591, June 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fsty1688>>. 43
- BENNETT, C. L.; HALPERN, M.; HINSHAW, G.; JAROSIK, N.; KOGUT, A.; LIMON, M.; MEYER, S. S.; PAGE, L.; SPERGEL, D. N.; TUCKER, G. S.; WOLLACK, E.; WRIGHT, E. L.; BARNES, C.; GREASON, M. R.; HILL, R. S.; KOMATSU, E.; NOLTA, M. R.; ODEGARD, N.; PEIRIS, H. V.; VERDE, L.; WEILAND, J. L. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: preliminary maps and basic results. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 148, n. 1, p. 1–27, Sept. 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F377253>>. 9, 34
- BENNETT, C. L.; HILL, R. S.; HINSHAW, G.; LARSON, D.; SMITH, K. M.; DUNKLEY, J.; GOLD, B.; HALPERN, M.; JAROSIK, N.; KOGUT, A.; KOMATSU, E.; LIMON, M.; MEYER, S. S.; NOLTA, M. R.; ODEGARD, N.;

PAGE, L.; SPERGEL, D. N.; TUCKER, G. S.; WEILAND, J. L.; WOLLACK, E.; WRIGHT, E. L. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: are there cosmic microwave background anomalies? **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 192, n. 2, p. 17, Jan. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0067-0049/192/2/17>>. 31, 34

BERNUI, A.; NOVAES, C. P.; PEREIRA, T. S.; STARKMAN, G. D. Topology and the suppression of CMB large-angle correlations. **arXiv:1809.05924**, 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1809.05924>>. 32

BUCHER, M. Physics of the cosmic microwave background anisotropy. **International Journal of Modern Physics D**, v. 24, n. 02, p. 1530004, Feb. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/0218271815300049>>. 23

BUCHERT, T.; FRANCE, M. J.; STEINER, F. Model-independent analyses of non-gaussianity in planck CMB maps using minkowski functionals. **Classical and Quantum Gravity**, v. 34, n. 9, p. 094002, Apr. 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa5ce2>>. 10, 55

BUTKOV, E. **Física-matemática**. [S.l.]: LTC, 2019. 25

CABASS, G.; GERBINO, M.; GIUSARMA, E.; MELCHIORRI, A.; PAGANO, L.; SALVATI, L. Constraints on the early and late integrated Sachs-Wolfe effects from the Planck 2015 cosmic microwave background anisotropies in the angular power spectra. **Physical Review D**, v. 92, n. 6, Sept. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/1539-1134/92/063534>>. 23

CARLIP, S. **General relativity: a concise introduction**. [S.l.: s.n.], 2019. 1

CARLSTROM, J. E.; HOLDER, G. P.; REESE, E. D. Cosmology with the Sunyaev-Zel'dovich effect. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 40, n. 1, p. 643–680, Sept. 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146/annurev.astro.40.060401.093803>>. 37, 38

CHANG, S.; KLEBAN, M.; LEVI, T. S. Watching worlds collide: effects on the cmb from cosmological bubble collisions. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2009, n. 04, p. 025–025, Apr. 2009. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/04/025>>. 46

CHRUSCIEL, P. T. **Elements of general relativity**. [S.l.]: Birkhäuser, 2019. (Compact textbooks in mathematics). 1

COBE COLLABORATION; MATHER, J. C.; CHENG, E. S.; EPLEE R. E., J.; ISAACMAN, R. B.; MEYER, S. S.; SHAFER, R. A.; WEISS, R.; WRIGHT, E. L.; BENNETT, C. L.; BOGESS, N. W.; DWEK, E.; GULKIS, S.; HAUSER, M. G.; JANSSEN, M.; KELSALL, T.; LUBIN, P. M.; MOSELEY S. H., J.; MURDOCK, T. L.; SILVERBERG, R. F.; SMOOT, G. F.; WILKINSON, D. T. A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite. **Astrophysical Journal**, v. 354, p. L37, May 1990. [11](#)

COPI, C. J.; HUTERER, D.; SCHWARZ, D. J.; STARKMAN, G. D. Large-angle anomalies in the CMB. **Advances in Astronomy**, v. 2010, p. 1–17, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155%2F2010%2F847541>>. [31](#), [32](#)

COPI, C. J.; O'DWYER, M.; STARKMAN, G. D. The ISW effect and the lack of large-angle CMB temperature correlations. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 463, n. 3, p. 3305–3310, Aug. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstw2163>>. [23](#)

CRESWELL, J.; NASELSKY, P. Asymmetry of the CMB map: local and global anomalies. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2021, n. 03, p. 103, Mar. 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2021%2F03%2F103>>. [32](#)

CRUZ, M.; MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E.; VIELVA, P.; CAYÓN, L. Detection of a non-Gaussian spot in WMAP. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 356, p. 12, Jan. 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08419.x>>. [33](#), [36](#), [37](#)

CRUZ, M.; MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E.; VIELVA, P.; DIEGO, J. M.; HOBSON, M.; TUROK, N. The CMB Cold Spot: texture, cluster or void? **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 390, n. 3, p. 913–919, Nov. 2008. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13812.x>>. [37](#)

CRUZ, M.; TUCCI, M.; MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E.; VIELVA, P. The non-Gaussian Cold Spot in Wilkinson Microwave Anisotropy Probe: significance, morphology and foreground contribution. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 369, n. 1, p. 57–67, May 2006. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.10312.x>>. [36](#), [37](#)

CZECH, B.; KLEBAN, M.; LARJO, K.; LEVI, T. S.; SIGURDSON, K. Polarizing bubble collisions. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2010, n. 12, p. 1–31, Dec. 2010. ISSN 1475-7516. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2010/12/023>>. 46

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: um curso introdutório**. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 2008. 68

DODELSON, S.; SCHMIDT, F. **Modern cosmology**. [S.l.]: Academic Press, 2021. 3, 8, 16, 19, 20, 25, 27, 28

DUCOUT, A.; BOUCHET, F. R.; COLOMBI, S.; POGOSYAN, D.; PRUNET, S. Non-gaussianity and Minkowski functionals: forecasts for Planck. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 429, n. 3, p. 2104–2126, Dec. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/sts483>>. 10, 55, 56, 62

DURRER, R. The cosmic microwave background: the history of its experimental investigation and its significance for cosmology. **Classical and Quantum Gravity**, v. 32, n. 12, p. 124007, June 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0264-9381/32/12/124007>>. 28

_____. **The cosmic microwave background**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2021. 2, 5, 9, 11, 16, 18, 19, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 52, 53, 54

ERIKSEN, H. K.; HANSEN, F. K.; BANDAY, A. J.; GORSKI, K. M.; LILJE, P. B. Asymmetries in the cosmic microwave background anisotropy field. **The Astrophysical Journal**, v. 605, n. 1, p. 14–20, Apr. 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086/382267>>. 33

FARHANG, M.; MOVAHED, S. M. S. CMB Cold Spot in the planck light. **The Astrophysical Journal**, v. 906, n. 1, p. 41, Jan. 2021. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/abc8e7>>. 34, 36, 37, 39, 40, 41, 43, 45

FINELLI, F.; GARCÍ A-BELLIDO, J.; KOVÁCS, A.; PACI, F.; SZAPUDI, I. Supervoids in the WISE 2MASS catalogue imprinting cold spots in the cosmic microwave background. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 455, n. 2, p. 1246–1256, Nov. 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stv2388>>. 42, 43

GAY, C.; PICHON, C.; POGOSYAN, D. Non-gaussian statistics of critical sets in 2D and 3D: peaks, voids, saddles, genus, and skeleton. **Physical Review D**, v. 85, p. 023011, Jan. 2012. 56

GORSKI, K. M.; HIVON, E.; BANDAY, A. J.; WANDELT, B. D.; HANSEN, F. K.; REINECKE, M.; BARTELmann, M. HEALPix: a framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere. **The Astrophysical Journal**, v. 622, n. 2, p. 759–771, Apr. 2005. ISSN 1538-4357. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1086/427976>>. 49, 50

GORSKI, K. M.; WANDELT, B. D.; HANSEN, F. K.; HIVON, E.; BANDAY, A. J. The HEALPix primer. **arXiv:astro-ph/9905275**, 1999. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9905275>>. 49, 50

GOTT, J. R.; PARK, C.; BIES, W. E.; BENNETT, D. P.; JUSZKIEWICZ, R. Topology of microwave background fluctuations: theory. **The Astrophysical Journal**, v. 352, p. 1–14, 1990. 52

GROSS, E.; VITELLS, O. Trial factors for the look elsewhere effect in high energy physics. **The European Physical Journal C**, v. 70, n. 1-2, p. 525–530, Oct. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-010-1470-8>>. 79

GUTH, A. H. Eternal inflation and its implications. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 40, n. 25, p. 6811–6826, June 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1751-8113%2F40%2F25%2Fs25>>. 45

HADWIGER, H. Vorlesungen über inhalt, oberfläche und isoperimetrie. In: HADWIGER, H. (Ed.). **Grundlehren der mathematischen Wissenschaften**. [S.l.]: Springer, 1957. cap. 6, p. 179–196. 52

HANG, Q.; ALAM, S.; CAI, Y.-C.; PEACOCK, J. A. Stacked CMB lensing and ISW signals around superstructures in the DESI legacy survey. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 507, n. 1, p. 510–523, July 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstab2184>>. 43

HARTLAP, J.; SIMON, P.; SCHNEIDER, P. Why your model parameter confidences might be too optimistic. unbiased estimation of the inverse covariance matrix. **Astronomy & Astrophysics**, v. 464, n. 1, p. 399–404, Dec. 2006. 58

HAWKING, S. W.; HERTOG, T. A smooth exit from eternal inflation? **Journal of High Energy Physics**, v. 2018, n. 4, Apr. 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007%2Fjhep04%282018%29147>>. 45

HOLANDA, R. F. L. de. **O efeito Sunyaev-Zel'dovich: teoria e aplicações cosmológicas**. Tese (Doutorado em Astronomia) - Universidade de São Paulo: São Paulo, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.11606/T.14.2011.tde-13092011-135337>>. 37

HU, W.; DODELSON, S. Cosmic microwave background anisotropies. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 40, n. 1, p. 171–216, Sept. 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1146%2Fannurev.astro.40.060401.093926>>. 22, 23, 29, 30

ISLAM, J. N. **An introduction to mathematical cosmology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. 2, 3

JONES, B. J. T. **Precision cosmology: the first half million years**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. 5, 16, 18

KITAYAMA, T. Cosmological and astrophysical implications of the Sunyaev-Zeldovich effect. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2014, n. 6, p. 6B111–0, June 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fptep%2Fptu055>>. 37

KOLB, E. W.; TURNER, M. S. **The early universe**. [S.l.]: Addison-Wesley, 1988. 37

KOMATSU, E.; KOGUT, A.; NOLTA, M. R.; BENNETT, C. L.; HALPERN, M.; HINSHAW, G.; JAROSIK, N.; LIMON, M.; MEYER, S. S.; PAGE, L.; SPERGEL, D. N.; TUCKER, G. S.; VERDE, L.; WOLLACK, E.; WRIGHT, E. L. First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: tests of gaussianity. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 148, n. 1, p. 119–134, Sept. 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F377220>>. 34

KOVÁCS, A.; BECK, R.; SMITH, A.; RÁCZ, G.; CSABAI, I.; SZAPUDI, I. Evidence for a high- z ISW signal from supervoids in the distribution of eBOSS quasars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 513, n. 1, p. 15–26, Apr. 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstac903>>. 43

KOVÁCS, A.; GARCÍA-BELLIDO, J. Cosmic troublemakers: the Cold Spot, the Eridanus supervoid, and the Great Walls. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 462, n. 2, p. 1882–1893, July 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/mnras/stw1752>>. 42, 43

KOVÁCS, A.; JEFFREY, N.; GATTI, M.; CHANG, C.; WHITEWAY, L.; HAMAUS, N.; LAHAV, O.; POLLINA, G.; BACON, D.; KACPRZAK, T.; MAWDSLEY, B.; NADATHUR, S.; ZEURCHER, D.; GARCIA-BELLIDO, J.; ALARCON, A.; AMON, A.; BECHTOL, K.; BERNSTEIN, G. M.; CAMPOS, A.; ROSELL, A. C.; KIND, M. C.; CAWTHON, R.; CHEN, R.; CHOI, A.; CORDERO, J.; DAVIS, C.; DEROSSE, J.; DOUX, C.; DRLICA-WAGNER, A.; ECKERT, K.; ELSNER, F.; ELVIN-POOLE, J.; EVERETT, S.; FERTÉ, A.; GIANNINI, G.; GRUEN, D.; Gruendl, R.; HARRISON, I.; HARTLEY, W. G.; HERNER, K.; HUFF, E. M.; HUTERE, D.; KUROPATKIN, N.; JARVIS, M.; LEGET, P. F.; MACCRANN, N.; MCCULLOUGH, J.; MUIR, J.; MYLES, J.; NAVARRO-ALSINA, A.; PANDEY, S.; PRAT, J.; RAVERI, M.; ROLLINS, R. P.; ROSS, A. J.; RYKOFF, E. S.; SÁNCHEZ, C.; SECCO, L. F.; SEVILLA-NOARBE, I.; SHELDO, E.; SHIN, T.; TROXE, M. A.; TUTUSAUS, I.; VARGA, T. N.; YANNY, B.; YIN, B.; ZHANG, Y.; ZUNTZ, J.; AGUENA, M.; ALLAM, S.; ANDRADE-OLIVEIRA, F.; ANNIS, J.; BERTIN, E.; BROOKS, D.; BURKE, D.; CARRETERO, J.; COSTANZI, M.; COSTA, L. N. da; PEREIRA, M. E. S.; DAVIS, T.; VICENTE, J. D.; DESAI, S.; DIEHL, H. T.; FERRERO, I.; FLAUGHER, B.; FOSALBA, P.; FRIEMAN, J.; GAZTAÑAGA, E.; GERDES, D.; GIANNANTONIO, T.; GSCHWEND, J.; GUTIERREZ, G.; HINTON, S.; HOLLOWOOD, D. L.; HONSCHIED, K.; JAMES, D.; KUEHN, K.; LIMA, M.; MAIA, M. A. G.; MARSHALL, J. L.; MELCHIOR, P.; MENANTEAU, F.; MIQUEL, R.; MORGAN, R.; OGANDO, R.; PAZ-CHINCHON, F.; PIERES, A.; PLAZAS, A. A.; MONROY, M. R.; ROMER, K.; ROODMAN, A.; SÁNCHEZ, E.; SCHUBNELL, M.; SERRANO, S.; SMITH, M.; SOARES-SANTOS, M.; SUCHYTA, E.; SWANSON, M. E. C.; TARLE, G.; THOMAS, D.; TO, C. H.; WELLER, J. The DES view of the Eridanus supervoid and the CMB cold spot. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 510, n. 1, p. 216–229, Feb. 2022. 36, 37, 43, 44, 45

KOVÁCS, A.; SÁNCHEZ, C.; GARCÍA-BELLIDO, J.; ELVIN-POOLE, J.; HAMAUS, N.; MIRANDA, V.; NADATHUR, S.; ABBOTT, T.; ABDALLA, F. B.; ANNIS, J.; AVILA, S.; BERTIN, E.; BROOKS, D.; BURKE, D. L.; ROSELL, A. C.; KIND, M. C.; CARRETERO, J.; CAWTHON, R.; CROCCE, M.;

CUNHA, C.; COSTA, L. N. da; DAVIS, C.; VICENTE, J. D.; DEPOY, D.; DESAI, S.; DIEHL, H. T.; DOEL, P.; FERNANDEZ, E.; FLAUGHER, B.; FOSALBA, P.; FRIEMAN, J.; GAZTAÑAGA, E.; GERDES, D.; GRUENDL, R.; GUTIERREZ, G.; HARTLEY, W.; HOLLOWOOD, D. L.; HONSCHIED, K.; HOYLE, B.; JAMES, D. J.; KRAUSE, E.; KUEHN, K.; KUROPATKIN, N.; LAHAV, O.; LIMA, M.; MAIA, M.; MARCH, M.; MARSHALL, J.; MELCHIOR, P.; MENANTEAU, F.; MILLER, C. J.; MIQUEL, R.; MOHR, J.; PLAZAS, A. A.; ROMER, K.; RYKOFF, E.; SANCHEZ, E.; SCARPINE, V.; SCHINDLER, R.; SCHUBNELL, M.; SEVILLA-NOARBE, I.; SMITH, M.; SMITH, R. C.; SOARES-SANTOS, M.; SOBREIRA, F.; SUCHYTA, E.; SWANSON, M.; TARLE, G.; THOMAS, D.; VIKRAM, V.; AND, J. W. More out of less: an excess integrated Sachs-Wolfe signal from supervoids mapped out by the Dark Energy Survey. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 484, n. 4, p. 5267–5277, Feb. 2019. Disponível em:
<<https://doi.org/10.1093/mnras/stz341>>. 43, 44

KUMAR, K. S.; MARTO, J. Hemispherical asymmetry of primordial power spectra. **arXiv:2209.03928**, 2022. Disponível em:

<<https://arxiv.org/abs/2209.03928>>. 32

LIDDLE, A. **An introduction to modern cosmology**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. 18, 19

LIM, E.; SIMON, D. Can we detect hot or cold spots in the cmb with minkowski functionals? **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2012, n. 1, Jan. 2012. ISSN 1475-7516. 52

LINDE, A. The inflationary multiverse. In: CARR, B. (Ed.). **Universe or multiverse?** [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. cap. 8, p. 127–149. 45

MAARTENS, R. Is the Universe homogeneous? **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 369, n. 1957, p. 5115–5137, Dec. 2011. 30

MACKENZIE, R.; SHANKS, T.; BREMER, M. N.; CAI, Y.-C.; GUNAWARDHANA, M. L. P.; KOVÁCS, A.; NORBERG, P.; SZAPUDI, I. Evidence against a supervoid causing the CMB Cold Spot. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 470, n. 2, p. 2328–2338, Apr. 2017. ISSN 1365-2966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stx931>>. 39, 40, 43, 45

MARCOS-CABALLERO, A.; MARTÍ NEZ-GONZÁLEZ, E. Scale-dependent dipolar modulation and the quadrupole-octopole alignment in the CMB temperature. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2019, n. 10, p. 053–053, Oct. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2019/10/053>. 32

MARTINEZ-CASTELLANOS, I.; SINGER, L. P.; BURNS, E.; TAK, D.; JOENS, A.; RACUSIN, J. L.; PERKINS, J. S. Multiresolution HEALPix maps for multiwavelength and multimessenger astronomy. **The Astronomical Journal**, v. 163, n. 6, p. 259, May 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ac6260>. 49

MINKOWSKI, H. Vorlumen und oberfläche. **Mathematische Annalen**, v. 57, p. 447–495, 1903. 50

MODEST, H. I.; RÄTH, C.; BANDAY, A. J.; ROSSMANITH, G.; SÜTTERLIN, R.; BASAK, S.; DELABROUILLE, J.; GÓRSKI, K. M.; MORFILL, G. E. Scale-dependent non-Gaussianities in the CMB data identified with Minkowski functionals and scaling indices. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 428, n. 1, p. 551–562, Oct. 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/mnras/sts056>. 10, 55

MROCKOWSKI, T.; NAGAI, D.; BASU, K.; CHLUBA, J.; SAYERS, J.; ADAM, R.; CHURAZOV, E.; CRITES, A.; MASCOLO, L. D.; ECKERT, D.; MACIAS-PEREZ, J.; MAYET, F.; PEROTTO, L.; POINTECOUTEAU, E.; ROMERO, C.; RUPPIN, F.; SCANNAPIECO, E.; ZUHONE, J. Astrophysics with the spatially and spectrally resolved sunyaev-zeldovich effects. **Space Science Reviews**, v. 215, n. 1, Feb. 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11214-019-0581-2>. 37

MUIR, J.; ADHIKARI, S.; HUTERER, D. Covariance of CMB anomalies. **Physical Review D**, v. 98, n. 2, July 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/physrevd.98.023521>. 31, 32

MUNSHI, D.; COLES, P.; HEAVENS, A. Probing CMB secondary anisotropies through minkowski functionals. **arXiv:1207.6217**, 2012. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1207.6217>. 56

MUNSHI, D.; HU, B.; MATSUBARA, T.; COLES, P.; HEAVENS, A. Lensing-induced morphology changes in CMB temperature maps in modified gravity theories. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2016,

n. 04, p. 056–056, Apr. 2016. Disponível em:

<<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2016%2F04%2F056>>. 55

NADATHUR, S.; CRITTENDEN, R. A detection of the integrated Sachs-Wolfe imprint of cosmic superstructures using a matched-filter approach. **The Astrophysical Journal**, v. 830, n. 1, p. L19, Oct. 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847%2F2041-8205%2F830%2F1%2F119>>. xvii, 44

NADATHUR, S.; LAVINTO, M.; HOTCHKISS, S.; RÄSÄNEN, S. Can a supervoid explain the Cold Spot? **Physical Review D**, v. 90, n. 10, Nov. 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.90.103510>>. 39, 40, 42, 43, 77

NAIDOO, K.; BENOIT-LÉVY, A.; LAHAV, O. Could multiple voids explain the cosmic microwave background cold spot anomaly? **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters**, v. 459, n. 1, p. L71–L75, Mar. 2016. ISSN 1745-3933. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1093/mnrasl/slw043>>. 34, 42, 43

NASELSKY, P. D.; NOVIKOV, D. I.; NOVIKOV, I. D. **The physics of the cosmic microwave background**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. 34, 52, 53, 54

NASTASE, H. **Cosmology and string theory**. [S.l.]: Springer, 2019. (Fundamental Theories of Physics). 9, 18, 45

NOVAES, C. P. **Estimador de não Gaussianidade na radiação cósmica de fundo e simulações para a missão OLIMPO**. Tese (Doutorado em Astrofísica) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2015. Disponível em: <<http://urlib.net/ibi/8JMKD3MGP7W/3HSE7T8>>. 52, 53, 54

NOVAES, C. P.; BERNUI, A.; MARQUES, G. A.; FERREIRA, I. S. Local analyses Planck maps with Minkowski functionals. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 461, n. 2, p. 1363–1373, June 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstw1427>>. 55, 57

NOVIKOV, D.; FELDMAN, H. A.; SHANDARIN, S. F. Minkowski functionals and cluster analysis for CMB maps. **International Journal of Modern Physics D**, v. 08, n. 03, p. 291–306, June 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142%2Fs0218271899000225>>. 10, 52, 55

OWUSU, S.; FERREIRA, P. d. S.; NOTARI, A.; QUARTIN, M. The CMB cold spot under the lens: ruling out a supervoid interpretation. **arXiv:2211.16139**, 2022. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2211.16139>>. 36, 37, 43, 45

PAGEL, B. E. **J. Nucleosynthesis and chemical evolution of galaxies**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. 9

PERLMUTTER, S.; ALDERING, G.; GOLDHABER, G.; KNOP, R. A.; NUGENT, P.; CASTRO, P. G.; DEUSTUA, S.; FABBRO, S.; GOOBAR, A.; GROOM, D. E.; HOOK, I. M.; KIM, A. G.; KIM, M. Y.; LEE, J. C.; NUNES, N. J.; PAIN, R.; PENNYPACKER, C. R.; QUIMBY, R.; LIDMAN, C.; ELLIS, R. S.; IRWIN, M.; MCMAHON, R. G.; RUIZ-LAPUENTE, P.; WALTON, N.; SCHAEFER, B.; BOYLE, B. J.; FILIPPENKO, A. V.; MATHESON, T.; FRUCHTER, A. S.; PANAGIA, N.; NEWBERG, H. J. M.; COUCH, W. J.; PROJECT, T. S. C. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. **The Astrophysical Journal**, v. 517, n. 2, p. 565–586, June 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F307221>>. 5

PLANCK COLLABORATION; AGHANIM, N.; AKRAMI, Y.; ARROJA, F.; ASHDOWN, M.; AUMONT, J.; BACCIGALUPI, C.; BALLARDINI, M.; BANDAY, A. J.; BARREIRO, R. B.; BARTOLO, N.; BASAK, S.; BATTYE, R.; BENABED, K.; BERNARD, J.-P.; BERSANELLI, M.; BIELEWICZ, P.; BOCK, J. J.; BOND, J. R.; BORRILL, J.; BOUCHET, F. R.; BOULANGER, F.; BUCHER, M.; BURIGANA, C.; BUTLER, R. C.; CALABRESE, E.; CARDOSO, J.-F.; CARRON, J.; CASAPONSA, B.; CHALLINOR, A.; CHIANG, H. C.; COLOMBO, L. P. L.; COMBET, C.; CONTRERAS, D.; CRILL, B. P.; CUTTAIA, F.; BERNARDIS, P. de; ZOTTI, G. de; DELABROUILLE, J.; DELOUIS, J.-M.; DÉ SERT, F.-X.; VALENTINO, E. D.; DICKINSON, C.; DIEGO, J. M.; DONZELLI, S.; DORÉ, O.; DOUSPIS, M.; DUCOUT, A.; DUPAC, X.; EFSTATHIOU, G.; ELSNER, F.; ENSSLIN, T. A.; ERIKSEN, H. K.; FALGARONE, E.; FANTAYE, Y.; FERGUSSON, J.; FERNANDEZ-COBOS, R.; FINELLI, F.; FORASTIERI, F.; FRAILIS, M.; FRANCESCHI, E.; FROLOV, A.; GALEOTTA, S.; GALLI, S.; GANGA, K.; GÉNOVA-SANTOS, R. T.; GERBINO, M.; GHOSH, T.; GONZÁLEZ-NUEVO, J.; GÓRSKI, K. M.; GRATTON, S.; GRUPPUSO, A.; GUDMUNDSSON, J. E.; HAMANN, J.; HANDLEY, W.; HANSEN, F. K.; HELOU, G.; HERRANZ, D.; HILDEBRANDT, S. R.; HIVON, E.; HUANG, Z.; JAFFE, A. H.; JONES, W. C.; KARAKCI, A.; KEIHÄNEN, E.; KESKITALO, R.; KIIVERI, K.; KIM, J.; KISNER, T. S.; KNOX, L.; KRACHMALNICOFF, N.; KUNZ, M.; KURKI-SUONIO, H.;

LAGACHE, G.; LAMARRE, J.-M.; LANGER, M.; LASENBY, A.; LATTANZI, M.; LAWRENCE, C. R.; JEUNE, M. L.; LEAHY, J. P.; LESGOURGUES, J.; LEVRIER, F.; LEWIS, A.; LIGUORI, M.; LILJE, P. B.; LILLEY, M.; LINDHOLM, V.; LÓPEZ-CANIEGO, M.; LUBIN, P. M.; MA, Y.-Z.; MACÍAS-PÉREZ, J. F.; MAGGIO, G.; MAINO, D.; MANDOLESI, N.; MANGILLI, A.; MARCOS-CABALLERO, A.; MARIS, M.; MARTIN, P. G.; MARTINELLI, M.; MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E.; MATARRESE, S.; MAURI, N.; MCEWEN, J. D.; MEERBURG, P. D.; MEINHOLD, P. R.; MELCHIORRI, A.; MENNELLA, A.; MIGLIACCIO, M.; MILLEA, M.; MITRA, S.; MIVILLE-DESCHÈNES, M.-A.; MOLINARI, D.; MONETI, A.; MONTIER, L.; MORGANTE, G.; MOSS, A.; MOTET, S.; MüNCHMEYER, M.; NATOLI, P.; NØRGAARD-NIELSEN, H. U.; OXBORROW, C. A.; PAGANO, L.; PAOLETTI, D.; PARTRIDGE, B.; PATANCHON, G.; PEARSON, T. J.; PEEL, M.; PEIRIS, H. V.; PERROTTA, F.; PETTORINO, V.; PIACENTINI, F.; POLASTRI, L.; POLENTA, G.; PUGET, J.-L.; RACHEN, J. P.; REINECKE, M.; REMAZEILLES, M.; RENAULT, C.; RENZI, A.; ROCHA, G.; ROSSET, C.; ROUDIER, G.; RUBIÑO-MARTÍN, J. A.; RUIZ-GRANADOS, B.; SALVATI, L.; SANDRI, M.; SAVELAINEN, M.; SCOTT, D.; SHELLARD, E. P. S.; SHIRAI, M.; SIRIGNANO, C.; SIRRI, G.; SPENCER, L. D.; SUNYAEV, R.; SUUR-USKI, A.-S.; TAUBER, J. A.; TAVAGNACCO, D.; TENTI, M.; TERENZI, L.; TOFFOLATTI, L.; TOMASI, M.; TROMBETTI, T.; VALIVIITA, J.; TENT, B. V.; VIBERT, L.; VIELVA, P.; VILLA, F.; VITTORIO, N.; WANDEL, B. D.; WEHUS, I. K.; WHITE, M.; WHITE, S. D. M.; ZACCHEI, A.; ZONCA, A.

Planck 2018 results. I. overview and the cosmological legacy of Planck.

Astronomy & Astrophysics, v. 641, p. A1, Sept. 2020. Disponível em:
<[https://doi.org/10.1051%2F0004-6361%2F201833880](https://doi.org/10.1051/2F0004-6361%2F201833880)>. 31, 52, 57

PLANCK COLLABORATION; AGHANIM, N.; AKRAMI, Y.; ASHDOWN, M.; AUMONT, J.; BACCIGALUPI, C.; BALLARDINI, M.; BANDAY, A. J.; BARREIRO, R. B.; BARTOLO, N.; BASAK, S.; BATTYE, R.; BENABED, K.; BERNARD, J.-P.; BERSANELLI, M.; BIELEWICZ, P.; BOCK, J. J.; BOND, J. R.; BORRILL, J.; BOUCHET, F. R.; BOULANGER, F.; BUCHER, M.; BURIGANA, C.; BUTLER, R. C.; CALABRESE, E.; CARDOSO, J.-F.; CARRON, J.; CHALLINOR, A.; CHIANG, H. C.; CHLUBA, J.; COLOMBO, L. P. L.; COMBET, C.; CONTRERAS, D.; CRILL, B. P.; CUTTAIA, F.; BERNARDIS, P. de; ZOTTI, G. de; DELABROUILLE, J.; DELOUIS, J.-M.; VALENTINO, E. D.; DIEGO, J. M.; DORÉ, O.; DOUSPIS, M.; DUROCUT, A.; DUPAC, X.; DUSINI, S.; EFSTATHIOU, G.; ELSNER, F.; ENSSLIN, T. A.;

ERIKSEN, H. K.; FANTAYE, Y.; FARHANG, M.; FERGUSSON, J.; FERNANDEZ-COBOS, R.; FINELLI, F.; FORASTIERI, F.; FRALIS, M.; FRAISSE, A. A.; FRANCESCHI, E.; FROLOV, A.; GALEOTTA, S.; GALLI, S.; GANGA, K.; GÉNOVA-SANTOS, R. T.; GERBINO, M.; GHOSH, T.; GONZÁLEZ-NUEVO, J.; GÓRSKI, K. M.; GRATTON, S.; GRUPPUSO, A.; GUDMUNDSSON, J. E.; HAMANN, J.; HANDLEY, W.; HANSEN, F. K.; HERRANZ, D.; HILDEBRANDT, S. R.; HIVON, E.; HUANG, Z.; JAFFE, A. H.; JONES, W. C.; KARAKCI, A.; KEIHÄNEN, E.; KESKITALO, R.; KIIVERI, K.; KIM, J.; KISNER, T. S.; KNOX, L.; KRACHMALNICOFF, N.; KUNZ, M.; KURKI-SUONIO, H.; LAGACHE, G.; LAMARRE, J.-M.; LASENBY, A.; LATTANZI, M.; LAWRENCE, C. R.; JEUNE, M. L.; LEMOS, P.; LESGOURGUES, J.; LEVRIER, F.; LEWIS, A.; LIQUORI, M.; LILJE, P. B.; LILLEY, M.; LINDHOLM, V.; LÓPEZ-CANIEGO, M.; LUBIN, P. M.; MA, Y.-Z.; MACÍAS-PÉREZ, J. F.; MAGGIO, G.; MAINO, D.; MANDOLESI, N.; MANGILLI, A.; MARCOS-CABALLERO, A.; MARIS, M.; MARTIN, P. G.; MARTINELLI, M.; MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E.; MATARRESE, S.; MAURI, N.; MCEWEN, J. D.; MEINHOLD, P. R.; MELCHIORRI, A.; MENNELLA, A.; MIGLIACCIO, M.; MILLEA, M.; MITRA, S.; MIVILLE-DESCHÈNES, M.-A.; MOLINARI, D.; MONTIER, L.; MORGANTE, G.; MOSS, A.; NATOLI, P.; NØRGAARD-NIELSEN, H. U.; PAGANO, L.; PAOLETTI, D.; PARTRIDGE, B.; PATANCHON, G.; PEIRIS, H. V.; PERROTTA, F.; PETTORINO, V.; PIACENTINI, F.; POLASTRI, L.; POLENTA, G.; PUGET, J.-L.; RACHEN, J. P.; REINECKE, M.; REMAZEILLES, M.; RENZI, A.; ROCHA, G.; ROSSET, C.; ROUDIER, G.; RUBIÑO-MARTÍN, J. A.; RUIZ-GRANADOS, B.; SALVATI, L.; SANDRI, M.; SAVELAINEN, M.; SCOTT, D.; SHELLARD, E. P. S.; SIRIGNANO, C.; SIRRI, G.; SPENCER, L. D.; SUNYAEV, R.; SUUR-USKI, A.-S.; TAUBER, J. A.; TAVAGNACCO, D.; TENTI, M.; TOFFOLATTI, L.; TOMASI, M.; TROMBETTI, T.; VALENZIANO, L.; VALIVIITA, J.; TENT, B. V.; VIBERT, L.; VIELVA, P.; VILLA, F.; VITTORIO, N.; WANDEL, B. D.; WEHUS, I. K.; WHITE, M.; WHITE, S. D. M.; ZACCHEI, A.; ZONCA, A.

Planck 2018 results. VI. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, v. 641, p. A6, Sept. 2020. Disponível em:

<<https://doi.org/10.1051/2F0004-6361%2F201833910>>. 5, 6, 7, 8, 61

PLANCK COLLABORATION; AKRAMI, Y.; ASHDOWN, M.; AUMONT, J.; BACCIGALUPI, C.; BALLARDINI, M.; BANDAY, A. J.; BARREIRO, R. B.; BARTOLO, N.; BASAK, S.; BENABED, K.; BERSANELLI, M.; BIELEWICZ, P.; BOCK, J. J.; BOND, J. R.; BORRILL, J.; BOUCHET, F. R.; BOULANGER,

F.; BUCHER, M.; BURIGANA, C.; BUTLER, R. C.; CALABRESE, E.; CARDOSO, J.-F.; CASAPONA, B.; CHIANG, H. C.; COLOMBO, L. P. L.; COMBET, C.; CONTRERAS, D.; CRILL, B. P.; BERNARDIS, P. de; ZOTTI, G. de; DELABROUILLE, J.; DELOUIS, J.-M.; VALENTINO, E. D.; DIEGO, J. M.; DORÉ, O.; DOUSPIS, M.; DUCOUT, A.; DUPAC, X.; EFSTATHIOU, G.; ELSNER, F.; ENSSLIN, T. A.; ERIKSEN, H. K.; FANTAYE, Y.; FERNANDEZ-COBOS, R.; FINELLI, F.; FRALIS, M.; FRAISSE, A. A.; FRANCESCHI, E.; FROLOV, A.; GALEOTTA, S.; GALLI, S.; GANGA, K.; GÉNOVA-SANTOS, R. T.; GERBINO, M.; GHOSH, T.; GONZÁLEZ-NUEVO, J.; GÓRSKI, K. M.; GRUPPUSO, A.; GUDMUNDSSON, J. E.; HAMANN, J.; HANDLEY, W.; HANSEN, F. K.; HERRANZ, D.; HIVON, E.; HUANG, Z.; JAFFE, A. H.; JONES, W. C.; KEIHÄNEN, E.; KESKITALO, R.; KIIVERI, K.; KIM, J.; KRACHMALNICOFF, N.; KUNZ, M.; KURKI-SUONIO, H.; LAGACHE, G.; LAMARRE, J.-M.; LASENBY, A.; LATTANZI, M.; LAWRENCE, C. R.; JEUNE, M. L.; LEVRIER, F.; LIGUORI, M.; LILJE, P. B.; LINDHOLM, V.; LÓPEZ-CANIEGO, M.; MA, Y.-Z.; MACÍAS-PÉREZ, J. F.; MAGGIO, G.; MAINO, D.; MANDOLESI, N.; MANGILLI, A.; MARCOS-CABALLERO, A.; MARIS, M.; MARTIN, P. G.; MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, E.; MATARRESE, S.; MAURI, N.; MCEWEN, J. D.; MEINHOLD, P. R.; MENNELLA, A.; MIGLIACCIO, M.; MIVILLE-DESCHÈNES, M.-A.; MOLINARI, D.; MONETI, A.; MONTIER, L.; MORGANTE, G.; MOSS, A.; NATOLI, P.; PAGANO, L.; PAOLETTI, D.; PARTRIDGE, B.; PERROTTA, F.; PETTORINO, V.; PIACENTINI, F.; POLENTA, G.; PUGET, J.-L.; RACHEN, J. P.; REINECKE, M.; REMAZEILLES, M.; RENZI, A.; ROCHA, G.; ROSSET, C.; ROUDIER, G.; RUBIÑO-MARTÍN, J. A.; RUIZ-GRANADOS, B.; SALVATI, L.; SAVELAINEN, M.; SCOTT, D.; SHELLARD, E. P. S.; SIRIGNANO, C.; SUNYAEV, R.; SUUR-USKI, A.-S.; TAUBER, J. A.; TAVAGNACCO, D.; TENTI, M.; TOFFOLATTI, L.; TOMASI, M.; TROMBETTI, T.; VALENZIANO, L.; VALIVIITA, J.; TENT, B. V.; VIELVA, P.; VILLA, F.; VITTORIO, N.; WANDELT, B. D.; WEHUS, I. K.; ZACCHEI, A.; ZIBIN, J. P.; ZONCA, A. Planck 2018 results. VII. isotropy and statistics of the CMB. **Astronomy & Astrophysics**, v. 641, p. A7, Sept. 2020. Disponível em: <[https://doi.org/10.1051%2F0004-6361%2F201935201](https://doi.org/10.1051/2F0004-6361%2F201935201)>. 10, 29, 30, 31, 33, 34, 46, 51, 58

POLASTRI, L.; GRUPPUSO, A.; NATOLI, P. CMB low multipole alignments in the LCDM and dipolar models. **Journal of Cosmology and Astroparticle**

Physics, v. 2015, n. 04, p. 018–018, Apr. 2015. Disponível em:
<<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2015%2F04%2F018>>. 32

RASSAT, A.; STARCK, J. L.; PAYKARI, P.; SUREAU, F.; BOBIN, J. Planck CMB anomalies: astrophysical and cosmological secondary effects and the curse of masking. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2014, n. 08, p. 006–006, Aug. 2014. Disponível em:
<<https://doi.org/10.1088%2F1475-7516%2F2014%2F08%2F006>>. 31

RAYDEN, B. **Introduction to cosmology**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2017. 7, 8, 14, 15, 16, 17, 18

RICCIARDELLI, E.; QUILIS, V.; PLANELLES, S. The structure of cosmic voids in a LCDM universe. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 434, n. 2, p. 1192–1204, July 2013. Disponível em:
<<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstt1069>>. 38

RIESS, A. G.; FILIPPENKO, A. V.; CHALLIS, P.; CLOCCHIATTI, A.; DIERCKS, A.; GARNAVICH, P. M.; GILLILAND, R. L.; HOGAN, C. J.; JHA, S.; KIRSHNER, R. P.; LEIBUNDGUT, B.; PHILLIPS, M. M.; REISS, D.; SCHMIDT, B. P.; SCHOMMER, R. A.; SMITH, R. C.; SPYROMILIO, J.; STUBBS, C.; SUNTZEFF, N. B.; TONRY, J. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, Sept. 1998. Disponível em:
<<https://doi.org/10.1086%2F300499>>. 5

RIOTTO, A. Inflation and the theory of cosmological Perturbations **arXiv:hep-ph/0210162**. 2017. 16

RUGH, S. E.; ZINKERNAGEL, H. Weyl's principle, cosmic time and quantum fundamentalism. **arXiv:1006.5848**, 2010. Disponível em:
<<https://arxiv.org/abs/1006.5848>>. 2, 4

RYBICKI, G. B.; LIGHTMAN, A. P. **Radiative processes in astrophysics**. [S.l.]: Wiley, 2004. 4

RÁCZ, G.; DOBOS, L.; BECK, R.; SZAPUDI, I.; CSABAI, I. Concordance cosmology without dark energy. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 469, July 2017. 43

SACHS, R. K.; WOLFE, A. M. Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. **The Astrophysical Journal**, v. 147, p. 73, Jan. 1967. 22

SAHOO, I.; GUINNESS, J.; REICH, B. J. A test for isotropy on a sphere using spherical harmonic functions. **Statistica Sinica**, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.5705%2Fss.202017.0475>>. 24

SCHMALZING, J.; GÓRSKI, K. M. Minkowski functionals used in the morphological analysis of cosmic microwave background anisotropy maps. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 297, n. 2, p. 355—365, June 1998. 52, 53, 54, 56

SCHWARZ, D. J.; COPI, C. J.; HUTERER, D.; STARKMAN, G. D. CMB anomalies after Planck. **Classical and Quantum Gravity**, v. 33, n. 18, p. 184001, Aug. 2016. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/18/184001>>. 31, 32, 36

SCOLNICK, D. M.; JONES, D. O.; REST, A.; PAN, Y. C.; CHORNOCK, R.; FOLEY, R. J.; HUBER, M. E.; KESSLER, R.; NARAYAN, G.; RIESS, A. G.; RODNEY, S.; BERGER, E.; BROUT, D. J.; CHALLIS, P. J.; DROUT, M.; FINKBEINER, D.; LUNNAN, R.; KIRSHNER, R. P.; SANDERS, N. E.; SCHLAFLY, E.; SMARTT, S.; STUBBS, C. W.; TONRY, J.; WOOD-VASEY, W. M.; FOLEY, M.; HAND, J.; JOHNSON, E.; BURGETT, W. S.; CHAMBERS, K. C.; DRAPER, P. W.; HODAPP, K. W.; KAISER, N.; KUDRITZKI, R. P.; MAGNIER, E. A.; METCALFE, N.; BRESOLIN, F.; GALL, E.; KOTAK, R.; MCCRUM, M.; SMITH, K. W. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe ia from pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample. **The Astrophysical Journal**, v. 859, n. 2, p. 101, May 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.3847%2F1538-4357%2Faab9bb>>. 5

SHANKS, T.; METCALFE, N.; CHEHADE, B.; FINDLAY, J. R.; IRWIN, M. J.; GONZALEZ-SOLARES, E.; LEWIS, J. R.; YOLDAS, A. K.; MANN, R. G.; READ, M. A.; SUTORIUS, E. T.; VOUTSINAS, S. The VLT Survey Telescope ATLAS. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 451, n. 4, p. 4238–4252, Aug. 2015. 39

SMOOT, G. F. **The cosmic microwave background spectrum**. arXiv, 1997. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/astro-ph/9705101>>. 11

SOUZA, R. E. de. **Introdução à cosmologia**. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 2004. 37

SUNYAEV, R.; ZELDOVICH, Y. Distortions of the background radiation spectrum. **Nature**, v. 223, p. 721–722, Aug. 1969. 37

SZAPUDI, I.; KOVÁCS, A.; GRANETT, B. R.; FREI, Z.; SILK, J.; BURGETT, W.; COLE, S.; DRAPER, P. W.; FARROW, D. J.; KAISER, N.; MAGNIER, E. A.; METCALFE, N.; MORGAN, J. S.; PRICE, P.; TONRY, J.; WAINSCOAT, R. Detection of a supervoid aligned with the cold spot of the cosmic microwave background. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 450, n. 1, p. 288–294, Apr. 2015. Disponível em:

<<https://doi.org/10.1093/mnras/stv488>>. 42, 43

SZAPUDI, I.; KOVÁCS, A.; GRANETT, B. R.; FREI, Z.; SILK, J.; GARCIA-BELLIDO, J.; BURGETT, W.; COLE, S.; DRAPER, P. W.; FARROW, D. J.; KAISER, N.; MAGNIER, E. A.; METCALFE, N.; MORGAN, J. S.; PRICE, P.; TONRY, J.; WAINSCOAT, R. The cold spot in the cosmic microwave background: the shadow of a supervoid. **arXiv:1406.3622**, 2014. Disponível em:

<<https://arxiv.org/abs/1406.3622>>. 42, 43

TEGMARK, M.; OLIVEIRA-COSTA, A. de; HAMILTON, A. J. S. High resolution foreground cleaned CMB map from WMAP. **Physical Review D**, v. 68, n. 12, Dec. 2003. Disponível em:

<<https://doi.org/10.1103/physrevd.68.123523>>. 32

UZAN, J.-P. The Big Bang Theory: construction, evolution and status. **arXiv:1606.06112**, 2016. 1, 16

VIELVA, P. A comprehensive overview of the Cold Spot. **Advances in Astronomy**, v. 2010, p. 1–20, 2010. ISSN 1687-7977. Disponível em:

<<http://dx.doi.org/10.1155/2010/592094>>. 34, 35, 36, 37, 78

VIELVA, P.; MARTINEZ-GONZALEZ, E.; BARREIRO, R. B.; SANZ, J. L.; CAYON, L. Detection of Non-Gaussianity in the Wilkinson microwave anisotropy probe first-year data using spherical wavelets. **The Astrophysical Journal**, v. 609, n. 1, p. 22–34, July 2004. Disponível em:

<<https://doi.org/10.1086/421007>>. 10, 33, 34, 78

VITTORIO, N.; JUSZKIEWICZ, R. Hot spots in the microwave sky. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 314, p. L29, Mar. 1987. 52

WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.** [S.l.]: Wiley, 1972. 1

_____. **Cosmology.** [S.l.]: OXFORD, 2008. 2, 3, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16

WINITZKI, S. **Eternal inflation.** [S.l.: s.n.], 2009. 46

ZHANG, R.; HUTERER, D. Disks in the sky: a reassessment of the WMAP cold spot. **Astroparticle Physics**, v. 33, n. 2, p. 69–74, Mar. 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.astropartphys.2009.11.005>>. 34

ZHAO, W. Local properties of wilkinson microwave anisotropy probe cold spot. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 433, n. 4, p. 3498–3505, June 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093%2Fmnras%2Fstt979>>. 34, 36

_____. Probing the CMB cold spot through local minkowski functionals. **Research in Astronomy and Astrophysics**, v. 14, n. 6, p. 625–634, May 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F1674-4527%2F14%2F6%2F002>>. 36, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 78

ZHAO, W.; SANTOS, L. **Preferred axis in cosmology.** arXiv, 2016. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1604.05484>>. 32

APÊNDICE A

Considere a equação integral a ser resolvida

$$\int_0^t dt = \int_0^{a_0} H_0^{-1} \left(\Omega_m a^{-1} + \Omega_r a^{-2} + \Omega_\Lambda a^2 \right)^{-\frac{1}{2}} da \quad (\text{A.1})$$

De acordo com o modelo padrão da cosmologia, a densidade de energia devida a radiação é muito pequena em relação a outras grandezas envolvidas - matéria e energia escura. Assim sendo, toma-se a aproximação

$$t(a) \cong H_0^{-1} \int_0^a \left(\Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2 \right)^{-\frac{1}{2}} da \quad (\text{A.2})$$

$$\cong H_0^{-1} \int_0^a a^{\frac{1}{2}} \left(\Omega_m + \Omega_\Lambda a^3 \right)^{-\frac{1}{2}} da. \quad (\text{A.3})$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \quad (\text{A.4})$$

que implica

$$\frac{du}{da} = \frac{3}{2} \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.5})$$

se, e somente se,

$$a^{\frac{1}{2}} da = \frac{2}{3} \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{\frac{1}{2}} du. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo A.3 em A.6, segue

$$t(a) = \frac{2}{3} H_0^{-1} \int_0^a \left(\Omega_m + \Omega_\Lambda a^3 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{\frac{1}{2}} du. \quad (\text{A.7})$$

Note ainda que a partir da mudança de variável adotada, pode-se escrever

$$a^3 = \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} u^2. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo A.8 em A.7, tem-se a seguinte sequência de igualdades

$$t(a) = \frac{2}{3} H_0^{-1} \int_0^a \left(\Omega_m + \Omega_\Lambda \frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} u^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{\frac{1}{2}} du \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{2}{3} H_0^{-1} \int_0^a \left(\Omega_m + \Omega_m u^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{\frac{1}{2}} du \quad (\text{A.10})$$

$$= \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^a \left(\Omega_m + \Omega_m u^2 \right)^{-\frac{1}{2}} (\Omega_m)^{\frac{1}{2}} du \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^a \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_m + \Omega_m u^2} \right)^{\frac{1}{2}} du \quad (\text{A.12})$$

$$= \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_0^a \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} \quad (\text{A.13})$$

$$= \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \sinh^{-1}(u). \quad (\text{A.14})$$

Portanto,

$$t(a) = \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \text{arsinh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}} a^{\frac{3}{2}} \right). \quad (\text{A.15})$$

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programas de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o International Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. Aceitam-se tanto programas fonte quanto os executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.