



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

## COSMOLOGIA NA TEORIA DE VISSER

Márcio Eduardo da Silva Alves

Dissertação de Mestrado em Astrofísica,  
orientada pelo Dr. Oswaldo Duarte Miranda e Dr. José Carlos Neves de Araujo.

INPE

São José dos Campos

Agosto, 2006

XXX.XX.XX.XX(XX.XX)

ALVES, M. E. S.

Cosmologia na Teoria de Visser / M. E. S. Alves.  
– São José dos Campos: INPE, Agosto, 2006.

XXp. – (INPE-XXXX-TDI/XXX).

1. Cosmologia. 2. Energia Escura. 3. Grávitons  
Massivos. 4. Teoria Alternativa de Gravitação.

Aprovada pela Banca Examinadora  
em cumprimento a requisito exigido  
para a obtenção do Título de Mes-  
trado em Astrofísica.

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza \_\_\_\_\_  
Presidente

Dr. Oswaldo Duarte Miranda \_\_\_\_\_  
Orientador

Dr. José Carlos Neves de Araujo \_\_\_\_\_  
Orientador

Dr. Jorge Ernesto Horvath \_\_\_\_\_  
Membro da Banca

Candidato: Márcio Eduardo da Silva Alves

São José dos Campos, 30 de Agosto de 2006.



*Aos meus pais.*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, sem os quais jamais teria chegado onde cheguei.

Agradeço à Dani, a pessoa mais maravilhosa e o coração mais puro que já conheci, por suportar minhas ausências, pela paciência, compreensão, amor, apoio e além de tudo isso, por me auxiliar em meu crescimento individual como ninguém jamais havia feito.

Agradeço ao Oswaldo e José Carlos, pesquisadores brilhantes que além de professores e orientadores, foram amigos com os quais sempre pude contar e que depositaram em mim uma confiança fora do comum.

Agradeço ao César, meu companheiro de sala, por sua grande amizade (praticamente irmandade), pela paciência com que sempre atendeu todas as minhas dúvidas (que não foram poucas) e aos auxílios técnicos que me forneceu inúmeras vezes.

Agradeço à todos os amigos incríveis que fiz em Rio Claro, os quais, através de nossas conversas e discussões, possibilitaram não só minha iniciação no mundo do pensamento científico e filosófico, mas também me acolheram de tal forma que juntos, passamos a formar uma verdadeira família.

Agradeço ao Tiago e ao Lucas, que como meus amigos de infância sempre estiverem comigo em certo sentido.

Agradeço ao César Lenzi e sua mãe, pela hospitalidade e amizade que me permitiu iniciar uma nova vida em São José dos Campos.

Agradeço a todos os novos amigos que fiz na Divisão de Astrofísica, pessoas fascinantes que sempre me incentivaram e que me acolheram alegremente ao seu convívio.

Agradeço à Marina, pelas diversas noites de estudo, nas quais compartilhamos também nossas frustrações e realizações (além de cachorro quente), ao Fábio, pelo incentivo e incontáveis caronas e à Clara que, de certa forma, esteve conosco desde o início da jornada.

Agradeço ao Mauro, que apesar de ir além do que eu poderia ir, me deu incentivo para continuar buscando a essência de todas as coisas.

Agradeço à Valdirene e à Nilda, nossas secretárias, pela simpatia e eficiência fora do comum com as quais sempre atenderam minhas solicitações.

Agradeço aos membros dessa banca, pela paciência e atenção que prestaram ao meu trabalho nesse momento de grande importância em minha vida.

Agradeço a todas as pessoas que não foram mencionadas aqui, mas que, de alguma forma, deram sua contribuição para este trabalho.

Agradeço à CAPES, a agência que financiou esse projeto, sem a qual o trabalho seria inviabilizado.





## RESUMO

O advento da cosmologia observacional tem nos levado à conclusão de que apenas 4% do Universo é constituído pela matéria conhecida (bárions). Por outro lado 23% correspondem à matéria escura não bariônica, enquanto o domínio da dinâmica cósmica foi legado à, assim chamada, energia escura (geralmente considerada um tipo de fluido), correspondendo a 73% da densidade de energia de todo o cosmos. Nos últimos anos, surgiram muitas propostas para tal fluido, paralelamente desenvolvem-se teorias de gravitação alternativas à Relatividade Geral (RG) no intuito de nos levar a uma melhor compreensão das leis físicas. No presente trabalho revisamos fluidos que nos permitem obter modelos com expansão acelerada através da parametrização de suas equações de estado, onde a constante cosmológica é um caso particular. A seguir apresentamos as bases da teoria de gravitação de M. Visser, uma teoria alternativa que admite a hipótese de grávitons massivos em contraponto à RG. Em sua teoria, Visser acrescenta uma métrica de fundo não dinâmica que entra na construção do tensor responsável pela inserção da massa do gráviton. No limite não relativístico, o potencial não é mais Newtoniano, mas sim do tipo Yukawa. Estudos do movimento planetário no sistema solar, utilizando um potencial desse tipo, nos levam ao limite  $m_g < 10^{-54} g$ . No regime radiativo, grávitons massivos implicam na dispersão das ondas gravitacionais e surgem estados de polarização adicionais que não encontramos na RG. Dessa forma, as futuras detecções da radiação gravitacional constituem-se novos testes para a RG e teorias alternativas. Nossas análises nos mostram a possibilidade de impor limites para a massa do gráviton através do modelo cosmológico resultante dessa teoria bimétrica que estejam em concordância com os dados observacionais. Mesmo com um gráviton com massa aparentemente desprezível, nosso intuito é mostrar que a teoria pode nos levar a um modelo cosmológico consistente que explique os atuais dados observacionais sem a necessidade de energia (e talvez de matéria) escura.



# COSMOLOGY FROM THE VISSER'S THEORY

## ABSTRACT

The advent of observational cosmology has led us to conclude that only 4% of whole Universe is composed by known matter (baryons). On the other hand 23% comes from a kind of non barionic dark matter. Moreover the cosmic dynamics is almost fully dominated by the so called dark energy (usually considered a kind of fluid), which corresponds to 73% of the energy density of the cosmos. In the last years, a lot of proposals arises in order to explain such a fluid, while many alternative gravitational theories have been developed aiming to lead us to know more about the physics laws. In this work we review a parametric equation of state of such fluids, which imply on models with accelerated expansion where the cosmological constant is a particular case. We then present the gravitational theory proposed by M. Visser. Such alternative theory assumes that the graviton is massive. In his theory, Visser uses a non-dynamic background metric in order to construct a tensor, which is necessary to take in account a massive graviton. In the non-relativistic limit, the potential is non-Newtonian, it is instead Yukawian. Some studies about orbital motions in the solar system (using this kind of potential) give an upper limit to the graviton mass of  $m_g < 10^{-54}$  g. Under the radiative regime, massive gravitons produce dispersive gravitational waves and introduce new polarization states which are not found in the GR. So, future detections of gravitational radiation will offer new tests to GR and to the alternative theories of gravity. In particular, our results show the possibility to constrain the graviton mass through a cosmological model that results from this bimetric theory. Although the graviton has an apparently negligible mass, our aim is to show that the theory may lead us to a consistent cosmological model, which explains the current observational data without dark energy (and maybe without dark matter).



*Perceber o quanto somos pequenos pode ajudar a nos libertar da arrogância, o pecado que persegue os cientistas.*

(Freeman Dyson)



# SUMÁRIO

Pág.

## LISTA DE FIGURAS

<b>CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>CAPÍTULO 2 – O ANTIGO E O NOVO CENÁRIO COSMOLÓGICO</b>	<b>23</b>
2.1. Uma Pequena Revisão da Relatividade Geral . . . . .	23
2.2. O modelo FRW . . . . .	25
2.3. O Universo Acelerado e a Constante Cosmológica . . . . .	29
2.4. Parametrizando a Energia Escura . . . . .	32
2.5. O que é a Energia Escura? . . . . .	34
<b>CAPÍTULO 3 – TEORIA DE GRAVITAÇÃO E GRÁVITONS MASSIVOS</b>	<b>37</b>
3.1. Massa para o Gráviton? . . . . .	37
3.2. A aproximação linear e o termo de massa . . . . .	40
3.3. Equações de movimento no limite não relativístico . . . . .	42
3.4. A Teoria de Gravitação de Visser . . . . .	44
3.5. Sobre a Escolha de Uma Métrica de Fundo . . . . .	46
3.6. Sobre as Equações de Movimento . . . . .	47
<b>CAPÍTULO 4 – IMPLICAÇÕES COSMOLÓGICAS DA TEORIA DE VISSER</b>	<b>51</b>
4.1. Sobre as Densidades de Energia . . . . .	51
4.2. Da Dinâmica do Universo . . . . .	55
4.3. O Universo Observável e a Massa do Gráviton . . . . .	56
4.4. A Idade do Universo . . . . .	58
4.5. O Passado e o Futuro . . . . .	60
4.6. Universo Acelerado? . . . . .	63
<b>CAPÍTULO 5 – TESTANDO O MODELO</b>	<b>67</b>
5.1. O <i>Redshift</i> . . . . .	67
5.2. Uma Definição Cosmológica de Distância . . . . .	68
5.3. A Distância de Luminosidade e a Massa do Gráviton . . . . .	71
5.4. As Supernovas Tipo Ia . . . . .	74

<b>CAPÍTULO 6 – CONCLUSÃO</b>	<b>81</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>85</b>



## LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Evolução dos parâmetros de densidade no modelo $\Lambda$ CDM. . . . .	31
2.2 Evolução do parâmetro de desaceleração no modelo XCDM. . . . .	33
2.3 Evolução do parâmetro de Hubble no modelo XCDM. . . . .	34
2.4 Relação entre a idade do Unvierso e o parâmetro de estado $\omega_x$ . . . . .	35
3.1 Decaimento orbital do pulsar binário PSR B1913+16 . . . . .	38
3.2 Os seis modos de polarização de ondas gravitacionais permitidos em qualquer teoria métrica de gravitação . . . . .	39
4.1 Evolução dos parâmetros de densidade no modelo massivo. . . . .	54
4.2 Relação dentre a idade do Universo e a massa do gráviton. . . . .	59
4.3 Evolução do fator de escala normalizado . . . . .	61
4.4 Relação entre o tempo de vida do Universo com a massa do gráviton. . . . .	61
4.5 Evolução do parâmetro de Hubble no modelo massivo para diferentes valores de $\Omega_m^A$ . . . . .	62
4.6 Evolução do parâmetro de Hubble para diferentes valores de $m_g$ . . . . .	63
4.7 Evolução do parâmetro de desaceleração no modelo massivo para diferentes valores de $\Omega_m^A$ . . . . .	64
4.8 Evolução do parâmetro de desaceleração para diferentes valores de $m_g$ . . . . .	65
4.9 Relação entre o valor atual do parâmetro de desaceleração, a massa do gráviton e $\Omega_m^A$ . . . . .	66
5.1 Definindo distância de luminosidade . . . . .	70

5.2	Distância de luminosidade para o modelo massivo, $\Lambda$ CDM, matéria dominante e de Sitter. . . . .	73
5.3	Distância de luminosidade para diferentes combinações dos parâmetros $\Omega_m^0$ e $m_g$ comparadas com o modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	74
5.4	Comparação entre as distâncias de luminosidade calculadas no modelo massivo e no modelo $\Lambda$ CDM . . . . .	75
5.5	Comparação espectral entre duas supernovas tipo Ia em diferentes redshifts .	76
5.6	Melhor ajuste dos dados das Supernovas Ia com o módulo de distância no modelo $\Lambda$ -CDM . . . . .	77
5.7	Comparação dos dados das Supernovas Ia com o módulo de distância no modelo massivo . . . . .	78

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

O passado sempre influencia o presente. Quando olhamos para o céu noturno, o que vemos são estrelas que, muitas vezes, sequer existem mais. Isso se deve a um simples, porém fundamental, princípio. A informação tem velocidade finita de propagação. E a máxima velocidade permitida pela natureza é  $c$ , a velocidade da luz. Então, a luz das estrelas que vemos hoje as deixaram há muito tempo atrás.

Mas o mais curioso é que essa velocidade máxima é a mesma para qualquer observador! Quer eles estejam em movimento relativo ou não. Isto implica, entre outras coisas, que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial. Esse é o alicerce da relatividade restrita publicada por Einstein em 1905.

Por que a relatividade restrita é restrita? Porque ela não leva em conta a ação de campos gravitacionais, sendo válida apenas para os casos nos quais eles não são relevantes. Como construir uma teoria que leve em conta a gravidade e a velocidade máxima de informação? Einstein deu a resposta 10 anos depois.

Uma das questões mais fundamentais para a construção de uma teoria geral da relatividade é: o que sentiríamos se estivéssemos, por exemplo, num elevador em queda livre sob a ação de um campo gravitacional uniforme? A resposta é nada. Um observador em queda livre não sente a ação do campo gravitacional que age sobre ele. Então, não existirão experimento locais que permitam esse observador distinguir-se de outro que não sofra a ação de campos gravitacionais. Os dois são equivalentes. E aqui se inicia toda a jornada intelectual que levou Einstein à criação de uma teoria relativística de gravitação descrita numa linguagem geométrica.

Após a relatividade geral (doravante denominada RG) a cosmologia nunca mais foi a mesma.

O próprio Einstein iniciou o estudo do Universo em grandes escalas através de suas equações de campo. Mas ele tinha uma crença, o Universo deveria ser estático. As equações de campo não diziam isso, elas eram despidas de consistência física quando o Universo estático era assumido *a priori*. Para tornar seu modelo condizente com sua visão, Einstein adicionou uma constante em suas equações de campo, uma nova constante da natureza segundo ele, que não abalava nenhum fundamento da teoria. Esta era a constante cosmológica, que tornava o Universo estático, com curvatura positiva e portanto finito.

Alguns anos depois, Edwin Hubble revolucionava a cosmologia por outra via: a observacional. Hubble foi capaz, pela primeira vez, de medir grandes distâncias com considerável precisão. Confirmou que as supostas nebulosas estavam, na realidade, fora de nossa galáxia e mais, eram galáxias semelhantes à nossa. Além disso, descobriu que as linhas

espectrais desses objetos estavam deslocadas para o vermelho. A magnitude desses deslocamentos só podia ser explicada se essas galáxias estivessem se afastando da nossa. Estava descoberta a expansão do Universo.

Após esse fato, Einstein recomendou que a constante cosmológica fosse retirada de suas equações de campo, pois ela já não fazia mais sentido.

A busca, agora, era por encontrar o modelo cosmológico mais adequado que explicasse a expansão, origem e destino do Universo. E a RG era a melhor alternativa para se fazer isso, pois era a teoria de gravitação que fornecia os resultados mais condizentes com as observações, como as medidas de desvio da luz por corpos massivos, o avanço do perihélio de Mercúrio, o *redshift* gravitacional entre outros testes que, cada vez mais precisos, têm consolidado, até os dias de hoje, o sucesso da RG perante outras teorias de gravitação. Nesse contexto, desenvolveu-se um modelo simples, considerado o mais adequado. Era o modelo de Alexander Friedmann, o qual associava a evolução da expansão com a curvatura espacial. Em seu modelo, não importando a curvatura, a expansão sempre se daria de forma desacelerada.

Dando um salto na história, em 1965 Arno Penzias e Robert W. Wilson dos laboratórios da *Bell Telephone*, uma empresa de telecomunicações de Nova Jersey, estavam trabalhando num radiômetro. Havia um ruído em seus equipamentos que eles não podiam identificar a origem. Esse ruído correspondia a uma temperatura de aproximadamente 3 K. Não muito longe dali, Robert Dicke, Jim Peebles e David Wilkinson estavam planejando medir o fundo de radiação em microondas conforme havia sido previsto por Gamow e colaboradores no final dos anos 1940. Se o Universo está em expansão, no passado a densidade e a temperatura são maiores. Em alguma época, matéria e radiação estavam acopladas em equilíbrio térmico. Com a expansão, num dado momento, a radiação desacopla da matéria e espalha-se livremente. A radiação cósmica de fundo é o resíduo desta época, e o modelo de Friedmann estava de acordo com essa idéia. Em 1978, Penzias e Wilson são agraciados com o Prêmio Nobel pela descoberta da radiação cósmica de fundo em microondas (RCF).

Para evitar a absorção atmosférica, a melhor maneira de se medir a CMB é através de satélites. Com esse intuito, em 1989, a agência espacial americana (NASA) colocou em órbita o satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*). Em 1992, um grupo de cientistas americanos anunciou que haviam sido encontradas as sementes primordiais das estruturas de matéria, as anisotropias na CMB haviam sido identificadas nos dados do COBE. Com os dados do COBE mostrou-se que a CMB era a uma radiação de corpo negro de 2,726 K. Verificou também que essas anisotropias correspondem a desvios na temperatura de  $\Delta T/T \simeq 10^{-5}$ [1].

O estudo da CMB tornou-se uma nova e rica área dentro da cosmologia. Em 2001, o su-

cessor do satélite COBE foi lançado, em homenagem a David Wilkinson ele foi nomeado WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe). Sua alta resolução angular permitiu medir com precisão as anisotropias na CMB, obtendo novos e interessantes resultados. Confrontando as medidas do satélite WMAP com o modelo cosmológico de Friedmann, confirmou-se que o Universo é, com boa aproximação, plano. Resultado esse que já havia sido encontrado por experimentos precedentes. Além disso, a matéria total do Universo deve corresponder a cerca de 27 %, enquanto a matéria bariônica que compõe tudo o que conhecemos corresponde a apenas 4%! Os 23 % de diferença devem corresponder a um tipo de matéria desconhecida que tem sido chamada de matéria escura. Mas e os 73 % restantes da energia do Universo? A partir do modelo de Friedmann só há uma forma de responder a essa pergunta, é necessário acrescentar um fluido nas equações dinâmicas. A maneira mais simples de se fazer isso é “ressuscitar” a constante cosmológica, a mesma repudiada por Einstein, porém sem a premissa de um Universo estático.

Mas essa não era a única evidência da existência de um fluido adicional. Em 1999 grupos de astrofísicos interessados em testar as teorias cosmológicas tinham observado a recessão de Supernovas do Tipo Ia [2] que, por serem eventos que apresentam luminosidade intrínseca aproximadamente uniforme, nos fornecem um padrão de luminosidade permitindo assim a obtenção de medidas diretas da expansão do Universo, constituindo uma ótima forma de testar nossos modelos cosmológicos. Quando observadas a alto redshift trouxeram a tona a informação de que o Universo expande-se aceleradamente no tempo presente. E para explicar esse efeito, o modelo mais adequado, surpreendentemente, era o mesmo que emergiria dos dados do WMAP alguns anos depois.

Um novo e revolucionário cenário cosmológico tomou lugar no meio científico, o modelo  $\Lambda$ CDM, ou seja, um modelo com constante cosmológica e matéria escura fria.

Porém, se a constante cosmológica for uma realidade, ela deve estar associada à energia do vácuo e portanto deve ser possível estimar seu valor no contexto da mecânica quântica. No entanto, o cálculo nos leva a uma discrepância de 120 ordens de grandeza maior do que o valor observado. Algo inaceitável no que diz respeito à consistência das leis físicas.

Desde a constatação de um Universo em expansão acelerada muitas têm sido as sugestões para candidatos à “Energia Escura”, como tem sido denominado esse fluido desconhecido. Além da constante cosmológica, que apresenta densidade de energia constante ao longo do tempo, surgiram propostas de fluidos com diferentes equações de estado e dos mais variados comportamentos. Um dos candidatos muito explorados pela literatura é o Gás de Chaplygin [3], um fluido que apresenta uma equação de estado exótica que implica num comportamento dual, numa fase da evolução do Universo o fluido se comporta como matéria escura e em outra como energia escura. Outra possibilidade é um vácuo dinâmico

ou quintessência [4, 5].

De qualquer forma, a energia e a matéria escura são problemas abertos. Não há, até o momento, um modelo completo e satisfatório capaz de dar conta de todos os observáveis cosmológicos e, ao mesmo tempo, possuir a consistência física requerida.

Todos esses fatos podem nos suscitar uma questão: a RG é, realmente, a teoria física que melhor descreve os efeitos da gravidade? E se existir uma teoria que dê conta de todos os testes da RG, mas que apresente diferenças significativas em grandes escalas?

Estas, sem dúvida, são questões que não podem ser ignoradas.

Por exemplo, a teoria de Einstein admite que o campo gravitacional possui alcance infinito. Será uma premissa verdadeira? Se o campo gravitacional possuir longo, porém finito, alcance o que mudaria na RG? Uma forma de restringir o alcance da interação gravitacional é considerar que o campo seja massivo. Numa linguagem de física de partículas, significa dizer que o bóson (partícula de interação fundamental) responsável pela interação gravitacional tenha massa de repouso não nula, assim como nas interações nucleares. Chamemos esse bóson de gráviton.

Assim, no limite não relativístico, o potencial não seria mais Newtoniano, mas sim do tipo Yukawa que descreve interações de alcance finito. O alcance da interação é inversamente proporcional à massa do gráviton. Mas quão pequena deveria ser a massa do gráviton para que essa nova gravitação descreva, por exemplo, os movimentos dos planetas no sistema solar tão bem quanto a teoria Newtoniana? Estes estudos existem, observando pequenas variações na terceira lei de Kepler, aplicadas para as órbitas dos planetas no sistema Solar, foi encontrado o seguinte limite superior para a massa do gráviton  $m_g < 10^{-54}g$  [6].

Bem (alguém poderia pensar), então uma massa dessa ordem não deveria fazer qualquer diferença para o estudo do Universo como um todo. Esse ponto demanda séria atenção, e essa afirmação pode não ser correta. Lembremo-nos que estamos falando de escalas da ordem do tamanho do sistema solar e da teoria não relativística. Quando consideramos grandes escalas, a finitude da interação poderá implicar em diferenças consideráveis, que serão mensuráveis desde que o alcance seja inferior à distância do horizonte observável. Então, o que precisamos é de uma teoria relativística de gravitação com grávitons massivos. A construção de tal teoria é um trabalho não trivial. Em 1998 Matt Visser publicou um trabalho [7] lançando nova luz a esse problema. O que Visser fez, de forma simplista, foi acrescentar uma geometria definida *a priori* como alternativa para o acréscimo de um termo massivo nas equações de campo. Isso torna a teoria não Einsteniana, pois a RG não necessita de nenhuma geometria “especial” para sua construção. Mas, por outro lado, a teoria respeita outros princípios básicos “canonizados” por Einstein como, por exemplo, o princípio da equivalência e o princípio da covariância geral. Além disso, aparentemente

recupera todos os resultados da RG para grávitons com massa suficientemente pequenas. Mas, como saber se tal teoria é a mais adequada se passar por todos os testes que a RG passa?

A resposta para essa questão provavelmente está num futuro não muito distante. A RG prevê que objetos massivos emitem ondas gravitacionais, deformações do espaço tempo que propagam-se à velocidade da luz. Se esses objetos forem de alta massa (sistemas estelares binários ou buracos negros, por exemplo), as amplitudes dessas ondas podem, em princípio, ser medidas em nosso planeta. Há diversos trabalhos pelo mundo, que tem esse objetivo. Existem detectores de base terrestre como LIGO e VIRGO, detectores de massa ressonante como o brasileiro Mario Schenberg e até projetos desafiadores de detectores espaciais como o LISA. A detecção da radiação gravitacional, além de abrir uma nova janela para a compreensão do cosmos, nos permitirá submeter a RG, e as teorias alternativas de gravitação, a testes no regime radiativo, os quais nos darão pistas decisivas na busca dos melhores modelos de gravitação como, por exemplo, informações a respeito dos estados de polarização das ondas gravitacionais e de sua velocidade de propagação.

Se o gráviton possuir massa, diversas características das ondas gravitacionais serão distintas do modelo previsto pela RG como, por exemplo, velocidade de propagação (a velocidade seria menor do que  $c$  no modelo massivo), dispersão das ondas gravitacionais e número dos estados de polarização.

No presente trabalho, propomos um primeiro teste para a teoria de Visser, o teste cosmológico. Poderá a teoria de Visser explicar a expansão acelerada sem a necessidade da energia (e talvez, da matéria) escura? Como veremos no decorrer do trabalho, a resposta para essa questão nos reserva algumas surpresas.

O plano do presente trabalho é o seguinte:

- No capítulo 2, após uma breve revisão da relatividade geral, exploramos os conceitos básicos do modelo Friedmann-Robertson-Walker padrão, discutimos equações de estado de diferentes tipos de fluidos alternativos à energia escura e, através da análise do parâmetro de desaceleração, mostramos como podem produzir expansão acelerada;
- No capítulo 3 apresentamos a hipótese de massa para o gráviton, mostramos como ela se aplica na teoria linearizada da RG a partir do qual recuperamos um potencial do tipo Yukawa no limite não relativístico. Extrapolando para campos fortes mostramos como a teoria de Visser é construída a partir da inclusão de uma métrica de fundo não dinâmica, mostramos ainda como as equações de Visser mantêm inalteradas as equações de movimento e adotamos

um critério de simplicidade na escolha da métrica de fundo;

- No capítulo 4 calculamos as equações de evolução das densidades de energia cosmológicas para enfim obter uma descrição da dinâmica do Universo. Mostramos ainda como é possível estabelecer limites para a massa do gráviton através do modelo cosmológico e discutimos a possibilidade de uma expansão acelerada como um resultado natural do modelo resultante da teoria de Visser;
- No capítulo 5 derivamos as expressões analíticas para a distância de luminosidade em função do redshift, para então compararmos os resultados obtidos do modelo massivo com os dados de Supernovas tipo Ia existentes na literatura;
- Finalmente, no último capítulo, apresentamos nossas discussões e conclusões a respeito do trabalho.



## CAPÍTULO 2

### O ANTIGO E O NOVO CENÁRIO COSMOLÓGICO

#### 2.1 Uma Pequena Revisão da Relatividade Geral

As equações de campo para a gravitação serão inevitavelmente mais complicadas do que as do eletromagnetismo. As equações de Maxwell são lineares porque o campo eletromagnético por ele mesmo não carrega carga, de outra forma, os campos gravitacionais carregam energia e momentum e devem, portanto, contribuir para sua própria fonte. Assim, as equações de campo gravitacional deverão ser equações diferenciais parciais não lineares, a não linearidade representa o efeito da gravitação sobre ela mesma.

A relatividade geral (RG) descreve a gravitação como geometria. Qualquer geometria suave é localmente plana, e na RG isto significa que ela é localmente Minkowskiana. Quando dizemos *local* estamos nos referindo ao espaço-tempo. O sistema de referência de Minkowski é um observador em queda livre. Nesse sistema de referência um elemento de linha do espaço-tempo é dado por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde  $\eta$  denota a matriz  $diag(1, -1, -1, -1)$ , os índices repetidos indicam a soma de 0 a 3 e os diferenciais das coordenadas são denotadas da seguinte forma:  $dx^0 = cdt$ ,  $dx^1 = dx$ ,  $dx^2 = dy$  e  $dx^3 = dz$  em coordenadas cartesianas.

Num sistema geral de coordenadas o elemento de linha de Minkowski é trocado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

onde  $g$  é uma matriz simétrica  $4 \times 4$  que é função das coordenadas. Assim como na relatividade especial, a *métrica* mede tempo próprio e distância própria. As coordenadas são arbitrárias na RG, mas em muitas situações a análise é facilitada com a escolha apropriada das coordenadas.

Uma partícula livre segue uma *geodésica* desta métrica, definida como uma linha de mundo localmente reta.

A descrição tensorial da geometria é feita através do *tensor curvatura de Riemann*, que contém derivadas segundas da métrica. Ele é dado por:

$$R_{\mu\nu\kappa}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\mu\kappa}^\lambda - \partial_\kappa \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\kappa}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\kappa}^\lambda, \quad (2.3)$$

onde  $\Gamma$  é a *conexão métrica* que relaciona-se com a métrica por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu}g_{\kappa\nu} + \partial_{\nu}g_{\kappa\mu} - \partial_{\kappa}g_{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

Se a métrica é Minkowski,  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = 0$  e portanto  $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = 0$ .

De particular interesse, podemos construir o *tensor de Einstein* a partir do tensor de Riemann:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.5)$$

onde  $R_{\mu\nu} = g^{\sigma\kappa}g_{\lambda\sigma}R_{\mu\kappa\nu}^{\lambda}$  e  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ . O tensor de Einstein é a base das equações de campo.

Em resumo, uma teoria de gravitação é Einsteniana se [8]:

- a) for uma teoria métrica (grosso modo: satisfaz o *princípio da equivalência*);
- b) as equações de campo forem lineares na segunda derivada da métrica;
- c) não tiver derivadas de ordem mais alta nas equações de campo;
- d) satisfaz o limite Newtoniano para campos fracos;
- e) e, *não depende de qualquer geometria a priori*.

Respeitando todos esses itens, as *equações de campo da RG* tal qual derivadas por Einstein são [9, 10]:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momentum cujas componentes contêm a densidade de energia, densidade de momento e pressão da fonte do campo. Na RG, momento e pressão assim como densidade de energia geram gravidade. O tensor de Einstein é livre de divergência para qualquer métrica:

$$\nabla_{\nu}G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.7)$$

Esta é a chamada *identidade de Bianchi*. Ela implica, das equações de campo, que

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.8)$$

que é a *equação de conservação de energia e momentum* nas fontes materiais.

No limite não relativístico as equações de campo (2.6) recuperam a equação de Poisson:

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho. \quad (2.9)$$

Uma vez que a ausência da gravidade deixa o espaço plano, um campo gravitacional fraco é aquele no qual o espaço-tempo é aproximadamente plano. A métrica, nesse caso, pode ser representada por:

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu, \quad |h_{\mu\nu}|. \quad (2.10)$$

Definindo o tensor chamado traço-reverso:

$$\bar{h}^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h, \quad (2.11)$$

e adotando o *calibre de Lorentz*:

$$\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.12)$$

as equações de Einstein tornam-se simplesmente um conjunto de *equações de onda desacopladas*[11, 12]:

$$\square^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.13)$$

A solução para essas equações no vácuo são as *ondas planas*:

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(2\pi i k_\alpha x^\alpha), \quad (2.14)$$

para amplitudes constantes  $A_{\mu\nu}$  e vetor de onda  $k_\alpha$ . As equações de Einstein implicam que o vetor de onda é um vetor nulo  $k_\alpha k^\alpha = 0$ [13], o que significa que *a onda se propaga à velocidade da luz*, e a condição de calibre implica que a amplitude e o vetor de onda são ortogonais,  $A^{\mu\nu} k_\nu = 0$ .

Assim, num paralelo com a teoria de campos, as equações da RG são compatíveis com uma partícula de interação (gráviton) de massa nula.

## 2.2 O modelo FRW

Um dos conceitos fundamentais que o estudo da cosmologia tem fundamentado nas últimas décadas é que o Universo não é uma mera coleção de matéria distribuída irregularmente, mas sim uma entidade única, partes da qual estão, de alguma forma, em união com todas as outras partes. Esta, em certo sentido, é a visão assumida no “modelo padrão” que será assunto na continuidade do capítulo <sup>1</sup>.

Consideraremos que a matéria está distribuída no Universo de forma homogênea e isotrópica. Esse ponto de vista é chamado de “princípio cosmológico”. Ele implica, entre outras coisas, que a distância entre duas galáxias típicas tem um fator universal, o mesmo para cada par de galáxias. Esse fator é chamado de “fator de escala”  $R(t)$  e entra na constru-

---

<sup>1</sup>Alguns textos que contribuíram para esse e os próximos tópicos são e.g. [14, 15, 16, 17, 18]

ção da métrica que utilizaremos. Num espaço com curvatura  $k$ , assumindo o princípio cosmológico, a métrica será dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.15)$$

Essa é a métrica de Robertson-Walker (RW). O comportamento do fator de escala dita a evolução temporal de uma seção espacial do espaço-tempo.

O tensor energia-momentum para fluido perfeito é tipicamente utilizado em cosmologia devido à sua simplicidade e consistência com o conteúdo observado no Universo. Sua forma é:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

onde  $U^\mu$  é a quadrivelocidade do fluido,  $\rho$  é a densidade de energia no referencial em repouso em relação ao fluido e  $p$  é a pressão no mesmo referencial.

Os elementos do fluido movem-se em conjunto num referencial cosmológico em repouso, a quadrivelocidade nesse referencial é dada por:

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (2.17)$$

Com as equações (2.15), (2.16) e (2.17) nas equações de Einstein (2.6) somos capazes de obter relações que regem a evolução do fator de escala. Elas são chamadas equações de Friedmann:

$$\left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{kc^2}{R^2} \quad (2.18)$$

e

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = -\frac{4\pi G}{c^2} p - \frac{kc^2}{2R^2} \quad (2.19)$$

Nas equações anteriores,

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad \text{e} \quad p = \sum_i p_i$$

onde a soma corre sobre todos os fluidos que compõem o Universo tais como matéria bariônica, radiação, neutrinos, matéria escura não bariônica entre outros.

A curvatura  $k$  que aparece nas equações precedentes pode ser:

$$k = \begin{cases} +1, & \text{curvatura positiva} \\ 0, & \text{espaço plano} \\ -1, & \text{curvatura negativa} \end{cases}$$

Assim, a partir da equação (2.18) definimos a *densidade crítica de energia* para a qual as seções espaciais são precisamente planas ( $k = 0$ ):

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2 c^2}{8\pi G} \quad (2.20)$$

onde  $H$  é o parâmetro de Hubble definido como  $H = \frac{\dot{R}}{R}$ .

Com o auxílio de (2.20) podemos definir um parâmetro adimensional da distribuição de matéria chamado *parâmetro de densidade* dado por:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (2.21)$$

lembrando que o índice  $i$  refere-se a cada fluido considerado e portanto:

$$\Omega_{total} = \sum_i \Omega_i$$

Quando fazemos a substituição desta equação em (2.18) fica clara a conexão entre curvatura e conteúdo energético. Encontramos a relação:

$$(\Omega_{total} - 1) \dot{R}^2 = k. \quad (2.22)$$

A partir dessa expressão concluímos que:

$$\begin{cases} k = +1, & \text{se } \Omega_{total} > 1 \\ k = 0, & \text{se } \Omega_{total} = 1 \\ k = -1, & \text{se } \Omega_{total} < 1 \end{cases}$$

Utilizando o tensor dado por (2.16) em (2.8) e fazendo o cálculo chegamos à seguinte *equação de evolução* para os fluidos cosmológicos:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.23)$$

Desta forma dada a equação de estado de determinado fluido é possível saber como evolui o parâmetro de densidade do mesmo. Por exemplo, na aproximação de poeira a matéria é descrita através da equação de estado:

$$p_m = 0$$

que levando em (2.23) nos fornece após integração:

$$\rho_m(R) = \rho_{mA} \left( \frac{R}{R_A} \right)^{-3} . \quad (2.24)$$

Por sua vez, a radiação é regida pela equação de estado:

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r$$

que, adotando o procedimento anterior nos dá:

$$\rho_r(R) = \rho_{rA} \left( \frac{R}{R_A} \right)^{-4} . \quad (2.25)$$

Veja que as equações (2.24) e (2.25) descrevem a evolução das densidades de energia da matéria e radiação *em função do fator de escala*. Nessas equações o índice  $A$  indica o valor das grandezas no tempo atual.

É usual pensar sobre uma curvatura espacial não nula como mais uma componente do conteúdo energético cosmológico, tal que:

$$\rho_k = -\frac{3kc^4}{8\pi GR^2} \quad (2.26)$$

$$p_k = \frac{kc^4}{8\pi GR^2} . \quad (2.27)$$

É claro que não é uma densidade de energia, mas simplesmente uma maneira conveniente de avaliar a quantidade de energia que sobra ou falta em comparação com um Universo plano.

Um parâmetro que será muito útil em nossas análises é o *parâmetro de desaceleração*, definido como:

$$q(a) \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} \quad (2.28)$$

onde  $a$  é o fator de escala normalizado em relação ao seu valor no tempo atual, ou seja:

$$a(t) \equiv \frac{R(t)}{R_A} \quad \text{com} \quad R(t_A) = R_A$$

O termo “parâmetro de desaceleração” é de cunho histórico pois imaginava-se que o Universo estava em expansão desacelerada, então criou-se esse parâmetro adimensional para medir sua desaceleração. Portanto, quando tivermos expansão desacelerada  $q$  será positivo, caso contrário será negativo.

Quando utilizamos a definição (2.28) em conjunto com as equações (2.18) e (2.19) somos levados a:

$$q = \frac{4\pi G}{H^2 c^2} \left( p + \frac{1}{3}\rho \right) \quad (2.29)$$

Fica claro nesta equação que quando consideramos um Universo permeado somente pelos fluidos “comuns”, tais como matéria e radiação, que o parâmetro de desaceleração é positivo, pois densidade de energia e pressão sempre são positivos. Ou seja, num Universo dominado por matéria e radiação a expansão deve se dar de forma desacelerada em qualquer época. No entanto, as recentes observações da recessão de Supernovas do tipo Ia têm mostrado que o Universo se expande de forma acelerada no tempo presente. Assim somos levados a pensar na existência de outro fluido, além dos conhecidos, que domine a dinâmica cósmica.

Desenvolvido o cenário FRW padrão, nos dedicaremos, a partir da próxima seção, aos modelos que apresentam uma fase de expansão acelerada começando pelo problema da constante cosmológica.

### 2.3 O Universo Acelerado e a Constante Cosmológica

Analisando a relação (2.6) vemos que é possível introduzir um termo cosmológico sem interferir nas equações de conservação, assim as equações de Einstein tomam a forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.30)$$

onde  $\Lambda$  é a *constante cosmológica*. Passando o termo cosmológico para o lado direito de (2.30) podemos interpretá-lo como a inclusão de um novo tensor energia-momentum. Ou seja:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} (T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{\Lambda}) \quad (2.31)$$

onde identificamos:

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu} \quad (2.32)$$

Considerando (2.32) um fluido perfeito tal qual descrito pela equação (2.16) encontramos que:

$$T_{00}^{\Lambda} = \rho_{\Lambda} \quad (2.33)$$

e portanto:

$$\rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (2.34)$$

Da mesma forma:

$$p_{\Lambda} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \quad (2.35)$$

Estas duas últimas equações combinadas levam-nos à seguinte equação de estado:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (2.36)$$

Levando (2.36) à equação de conservação (2.23) verificamos que:

$$\rho_\Lambda = \text{constante},$$

ou seja, a constante cosmológica implica num fluido com densidade de energia constante ao longo do tempo.

Como visto, para levar a constante cosmológica em consideração em nosso modelo de Universo basta acrescentar sua densidade de energia nas equações de Friedmann, desenvolvidas na seção precedente. Tomando a relação (2.29) e a definição (2.21) podemos obter:

$$q(a) = \frac{1}{2}\Omega_m(a) + \Omega_r(a) - \Omega_\Lambda(a) \quad (2.37)$$

onde  $\Omega_m(a)$ ,  $\Omega_r(a)$  e  $\Omega_\Lambda(a)$  são os parâmetros de densidade para a matéria, radiação e constante cosmológica respectivamente. Para obter a evolução temporal dos parâmetros de densidade basta aplicar a definição (2.21) nas equações (2.24) e (2.25), e no caso da constante cosmológica basta considerar sua densidade de energia constante ao aplicar a definição (2.21). As expressões que obtemos para esses parâmetros são as seguintes:

$$\Omega_m(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \frac{\Omega_m^A}{a^3}, \quad (2.38)$$

$$\Omega_r(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \frac{\Omega_r^A}{a^4}, \quad (2.39)$$

e

$$\Omega_\Lambda(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \Omega_\Lambda^A. \quad (2.40)$$

Na figura 2.1 vemos a evolução da densidade relativa de cada tipo de fluido. Veja que a contribuição do termo cosmológico só se dá numa época tardia, sendo dominante no tempo atual.

As análises recentes das anisotropias na radiação cósmica de fundo em microondas realizadas pelo grupo do satélite WMAP têm indicado, com boa aproximação, que o Universo é plano. Por questões de completeza, podemos assumir um parâmetro de densidade relacionado com a curvatura que quando somado com os outros parâmetros de densidade nos fornece:

$$\Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_k(a) + \Omega_\Lambda(a) = 1, \quad (2.41)$$



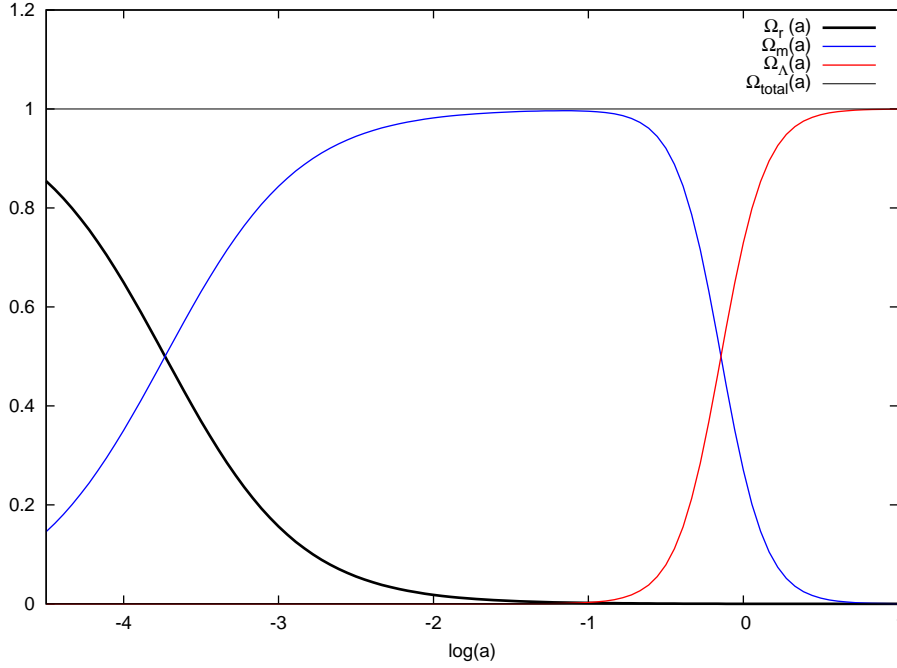


FIGURA 2.1 – Evolução dos parâmetros de densidade no modelo  $\Lambda$ CDM.

a partir da qual obtemos:

$$H^2(a) = H_A^2(\Omega_m^A a^{-3} + \Omega_r^A a^{-4} + \Omega_k^A a^{-2} + \Omega_\Lambda^A), \quad (2.42)$$

que é a equação que nos dá a evolução do parâmetro de Hubble em função em função do fator de escala.

Voltando nossa atenção para a expressão (2.37) e substituindo as equações (2.38), (2.39) e (2.40) encontramos:

$$q(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \left[ \frac{1}{2}\Omega_m^A a^{-3} + \Omega_r^A a^{-4} - \Omega_\Lambda^A \right] \quad (2.43)$$

E como já conhecemos o comportamento de  $H^2(a)$ , podemos obter a evolução do parâmetro de desaceleração em função do fator de escala normalizado. Na figura 2.2 vemos que nesse cenário a evolução se inicia de forma desacelerada, a desaceleração diminui até que o Universo inicia uma fase de expansão acelerada na qual continua no tempo presente.

## 2.4 Parametrizando a Energia Escura

Os fluidos que vimos até o momento podem ser resumidos considerando uma equação de estado geral com parâmetro  $\omega$ :

$$p = \omega\rho.$$

Assim, o que determina o tipo de fluido é simplesmente o valor de  $\omega$  como vemos na tabela 2.1. Dessa forma, podemos sugerir fluidos com pressões negativas assim como a constante cosmológica porém com densidades de energia que não são constantes ao longo do tempo. Esse enfoque é conhecido como *parametrização XCDM* e foi analisado em detalhes em [19].

fluido	$\omega$
matéria	0
radiação	$\frac{1}{3}$
$\Lambda$	-1

TABELA 2.1 – Relação entre o parâmetro de estado e o tipo de fluido

Na parametrização XCDM tomamos, portanto, a seguinte equação de estado para a energia escura:

$$p_x = \omega_x \rho_x \quad (2.44)$$

Onde  $\omega_x$  é o parâmetro que determina a evolução da densidade de energia do “fluido  $x$ ”. Veja que a constante cosmológica é um caso particular da equação (2.44) quando  $\omega_x = -1$ .

A análise da evolução do fluido  $x$  segue o mesmo procedimento tomado para a constante cosmológica. Substituímos a equação de estado (2.44) na equação (2.23) para obter:

$$\rho_x = \rho_{xA} a^{-3(1+\omega_x)} \quad (2.45)$$

e o parâmetro de densidade fica:

$$\Omega_x(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \Omega_x^A a^{-3(1+\omega_x)}. \quad (2.46)$$

O parâmetro de desaceleração toma a forma:

$$q(a) = \frac{1}{2}\Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \frac{1+3\omega_x}{2}\Omega_x(a). \quad (2.47)$$

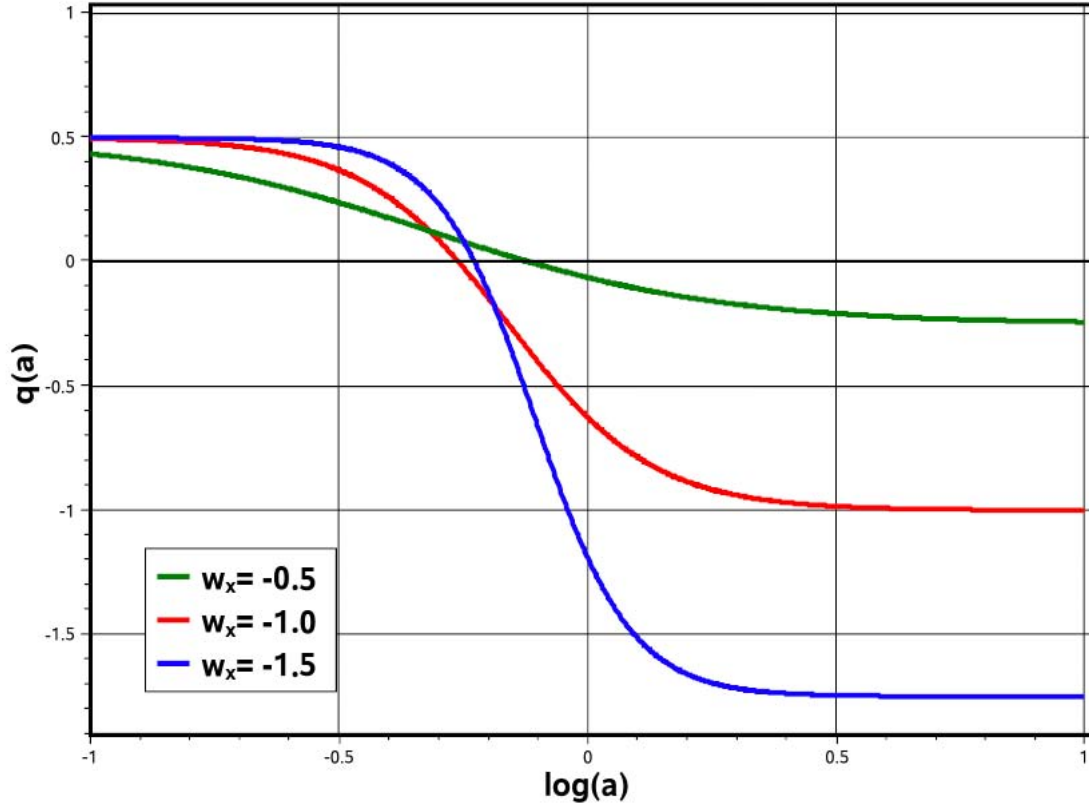


FIGURA 2.2 – Evolução do parâmetro de desaceleração no modelo XCDM.

Para que ocorra aceleração devemos ter  $\omega_x < -\frac{1}{3}$  e o valor absoluto do termo que carrega  $\Omega_x$  deve preponderar sobre os outros. Substituindo as respectivas funções dos parâmetros de densidade, a expressão (2.47) fica:

$$q(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \left[ \frac{1}{2} \Omega_m^A a^{-3} + \Omega_r^A a^{-4} + \frac{1 + 3\omega_x}{2} \Omega_x^A a^{-3(1+\omega_x)} \right]. \quad (2.48)$$

E o comportamento do parâmetro de Hubble pode ser obtido fazendo-se  $\Omega_{total}(a) = 1$ , que nos fornece:

$$H^2(a) = H_A^2 \left[ \Omega_m^A a^{-3} + \Omega_r^A a^{-4} + \Omega_k^A a^{-2} + \Omega_x^A a^{-3(1+\omega_x)} \right]. \quad (2.49)$$

Dessa forma, escolhido o fluido  $x$  através do parâmetro  $\omega_x$ , temos expressões gerais que nos permitem estudar sua influência na evolução do fator de escala bem como a evolução dos parâmetros de densidade de cada um dos constituintes do cosmos. Na figura 2.2 vemos o comportamento do parâmetro de desaceleração para alguns valores de  $\omega_x$ .

A Figura 2.3 mostra a evolução do parâmetro de Hubble para um Universo permeado com esses mesmos tipos de fluidos. Os valores atuais dos parâmetros de densidade que

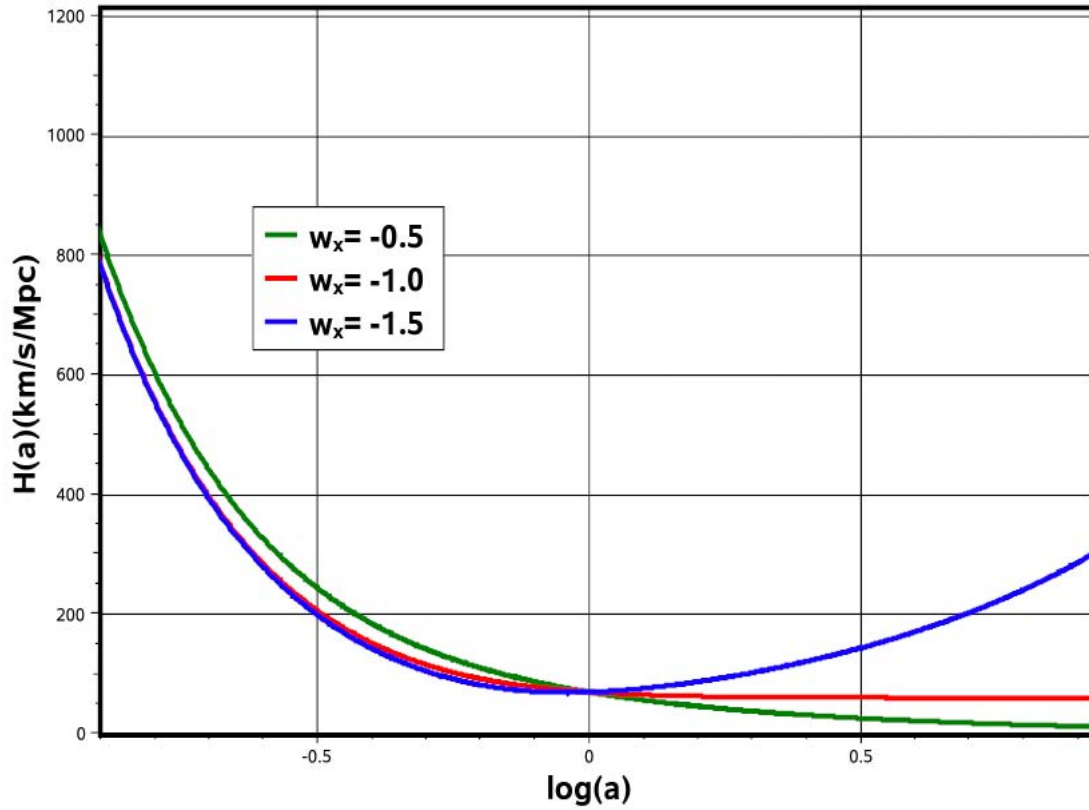


FIGURA 2.3 – Evolução do parâmetro de Hubble no modelo XCDM.

usamos são  $\Omega_m^A = 0,25$  sendo a soma de 0,20 de matéria escura e 0,05 de matéria bariônica,  $\Omega_r^A \simeq 0$  e  $\Omega_x^A = 0,75$ . Além de estarmos considerando um Universo plano ( $k = 0$  e portanto  $\Omega_k^A = 0$ ) [1, 2].

Adotando esse tipo de equação de estado geral para a energia escura (2.44), podemos restringir o parâmetro de estado através dos observáveis cosmológicos. Além disso, a idade do Universo também é dependente desse parâmetro (fig. 2.4). Tanto mais negativa é a pressão, mais antigo é o Universo.

É interessante notar que  $\omega_x < -1$  descreve um fluido cuja densidade de energia aumenta com a expansão do Universo (eq. 2.45), esse fluido é conhecido como fluido fantasma [20]. Para  $\omega_x > -1$  a densidade de energia diminui. O grupo do satélite WMAP [1] limita  $\omega_x < -0,78$  que é consistente, portanto, com a constante cosmológica.

## 2.5 O que é a Energia Escura?

Através de argumentos puramente clássicos nós não podemos dizer se o valor absoluto de  $\Lambda$  é “grande” ou “pequeno”. Ela é simplesmente uma constante da natureza que poderíamos obter através de experimentos.

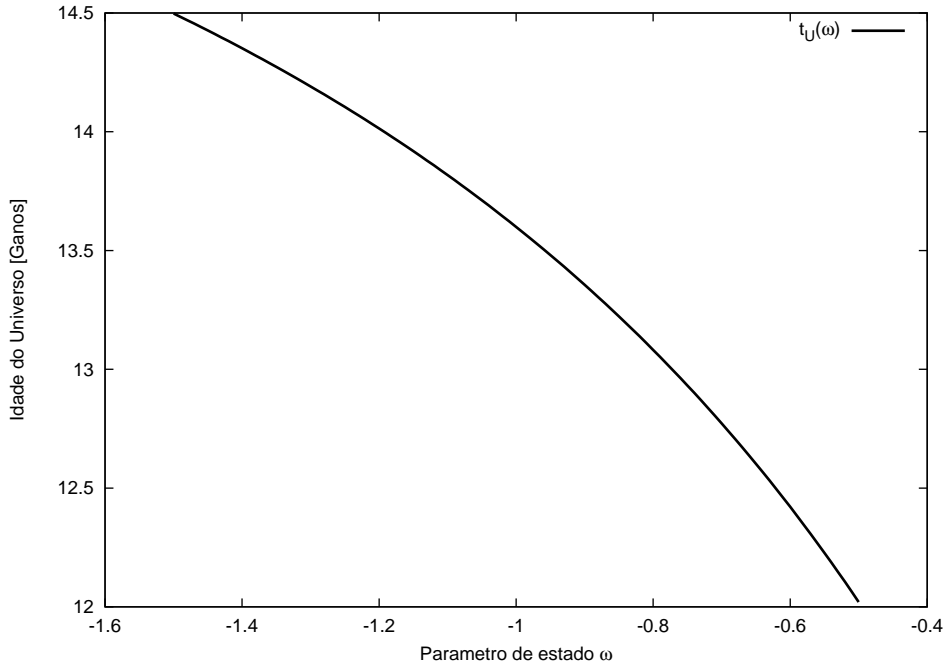


FIGURA 2.4 – Relação entre a idade do Unvierso e o parâmetro de estado  $\omega_x$

Por outro lado, na teoria quântica, podemos vincular a densidade de energia associada a  $\Lambda$  como sendo a energia do estado fundamental (ou energia do ponto zero) do oscilador harmônico, ou seja a densidade de energia do vácuo. Tal cálculo leva-nos, todavia, a uma das maiores discrepâncias no que diz respeito à concordância entre as leis físicas [15]:

$$\rho_{vac}^{obs} \sim 10^{-120} \rho_{vac}^{teoria} . \quad (2.50)$$

Esse é o famoso problema de 120 ordens de magnitude. O enigma tem incentivado as pesquisas em duas vias. A primeira é a busca de novas alternativas para a Energia Escura. A segunda é uma melhor compreensão do cálculo da energia do vácuo através das teorias de grande unificação (GUTs).

Entre outras alternativas à constante cosmológica, o Gás de Chaplygin (e.g. [3]) tem se destacado na literatura. Caracteriza-se como sendo um fluido perfeito com equação de estado:

$$p = -\frac{A}{\rho} , \quad (2.51)$$

onde  $A$  é uma constante positiva. Chaplygin utilizou essa equação de estado em 1904 como uma adequada aproximação matemática para o cálculo da força de sustentação produzida sobre a asa de um avião. O modelo foi redescoberto no início dos anos 40 sob

o mesmo contexto.

A conveniência do Gás de Chaplygin está ligada ao fato de que as correspondentes equações de Euler tem um grande grupo de simetria, o que implica em sua integrabilidade.

O interesse por esse modelo em cosmologia remonta ao final do século XX e vem da sua conexão com a teoria de cordas. Além disso, a equação de estado  $p = -A/\rho$  pode ser obtida a partir da ação de Nambu-Goto para “D-Branas” se movendo num espaço-tempo a  $(d + 2)$  dimensões [21].

Quando tomamos a equação de estado (2.51) e seguimos o mesmo procedimento realizado para o fluido  $x$ , também encontramos expressões analíticas para o parâmetro de desaceleração [22], as quais exibem um comportamento similar ao dos fluidos da Figura 2.2. Algo interessante que obtemos, dessa análise, é que o Gás de Chaplygin apresenta um comportamento dual, ou seja, no passado sua densidade de energia comporta-se como matéria escura, assumindo um comportamento de energia escura no futuro. Por isso diz-se que ele possui um caráter dual ou unificado. Todavia, para esse modelo, a influência da Energia Escura é desprezível quando inicia-se a formação de estruturas e a aglomeração de matéria ocorre de forma mais coerente num modelo CDM [3].

Outra possibilidade é um vácuo dinâmico ou quintessência. Os modelos de quintessência envolvem, na maior parte dos casos, um único campo escalar [4] ou dois campos escalares acoplados [5]. Nesses modelos, o problema da coincidência cósmica, i.e. porque a energia escura começou a dominar a evolução cósmica apenas tão recentemente, não tem solução satisfatória e ajustes finos são requeridos.

De qualquer forma, a energia e a matéria escura são problemas abertos. Não há, até o momento, um modelo completo e satisfatório capaz de dar conta de todos os observáveis cosmológicos e, ao mesmo tempo, possuir a consistência física requerida.

No próximo capítulo iniciaremos o estudo de uma nova possibilidade, até o momento praticamente inexplorada, mas que pode nos levar a algumas surpresas.

## CAPÍTULO 3

### TEORIA DE GRAVITAÇÃO E GRÁVITONS MASSIVOS

#### 3.1 Massa para o Gráviton?

O gráviton pode ter massa de repouso não nula? Como podemos construir uma teoria consistente de gravitação com grávitons massivos? Estas são questões que têm gerado discussões ao longo dos anos e que não possuem até o momento respostas unívocas ou definitivas.

Do ponto de vista experimental, existem limites estabelecidos para a massa do gráviton para campos gravitacionais estáticos. Se o gráviton possuir massa de repouso não nula, o potencial altera-se de um potencial Newtoniano para um potencial do tipo Yukawa  $\phi(r) \propto r^{-1} \exp(-r/\lambda_g)$ . Uma das restrições mais robustas para a massa do gráviton provém do movimento planetário do sistema solar. Variações na terceira lei de Kepler quando comparadas as órbitas da Terra e de Marte levam a  $m_g < 7,8 \times 10^{-55} g$  [6]. Outra restrição para a massa dessa partícula provém da análise do movimento das galáxias em aglomerados ligados que levam a  $m_g < 2 \times 10^{-62} g$  [23]. Embora seja um limite mais restritivo, esse segundo resultado é considerado menos robusto devido à incerteza em torno do conteúdo do Universo em grandes escalas.

Em 2002, Finn e Sutton [24] apresentaram o primeiro limite para  $m_g$  independente do potencial de Yukawa. O método empregado por eles foi baseado na concordância com a RG dos dados observacionais existentes do decaimento orbital dos pulsares binários PSR B1913+16 (o pulsar binário de Hulse-Taylor) e PSR B1534+12. O limite encontrado por eles foi de  $m_g < 1,4 \times 10^{-52} g$ , cerca de duas ordens de grandeza menor do que o limite imposto pelo movimento planetário no sistema solar. Vale ressaltar que as medidas do pulsar binário de Hulse-Taylor ([25] ou mais recentemente [26]), por exemplo, são muito precisas, e concordam muito bem com a emissão de radiação gravitacional (ver Figura 3.2). O limite imposto por Finn e Sutton demonstra que as equações de campo fraco da RG permitem o acréscimo de um termo massivo sem a alteração dos resultados observacionais.

Além disso, existem estimativas para a massa do gráviton a partir de futuros testes gravitacionais no regime radiativo, tais como a *back-reaction* gravitacional, a polarização de ondas gravitacionais e a velocidade das ondas gravitacionais (ver por exemplo [27, 28]). Se o gráviton for uma partícula massiva, então a velocidade das ondas gravitacionais é dependente da frequência. Um sistema binário em revolução espiralada devido à emissão de ondas gravitacionais. A frequência da órbita aumenta ao longo do tempo, aumentando rapidamente nos últimos estágios de sua evolução antes da coalescência.

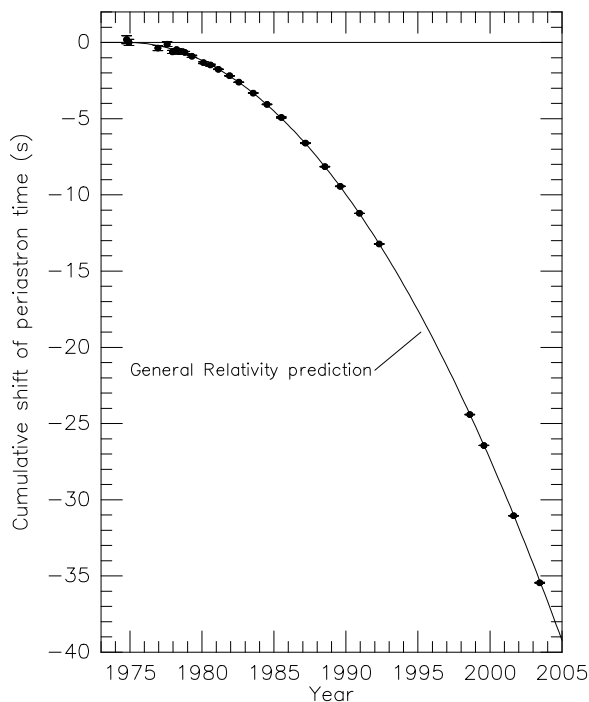


FIGURA 3.1 – Decaimento orbital de PSR B1913+16. Os pontos indicam a mudança observada na época do periastro com a data, enquanto a parábola ilustra a mudança esperada teoricamente para um sistema emitindo radiação gravitacional de acordo com a relatividade geral. Figura tomada de [26].

Os detectores interferométricos laser de ondas gravitacionais devem ser capazes de acompanhar a evolução temporal da forma de onda desses sistemas usando as técnicas de *matched filtering* requerida para esse tipo de análise. Detectores de base espacial como o LISA seriam capazes de observar a coalescência de buracos negros binários massivos ou estrelas compactas (estrelas de nêutrons ou estrelas de nêutrons binárias). Se o gráviton possuir massa, então os sinais observados não serão compatíveis com os modelos extraídos da RG, pois um gráviton massivo causaria dispersão das ondas gravitacionais. Usando o *matched filtering* poderia-se estabelecer limites para a dispersão, restringindo a massa do gráviton. Will [27] encontrou que o LIGO poderia restringir a massa do gráviton em  $m_g < 3,7 \times 10^{-55} g$  observando a espiralação de dois buracos negros de  $10M_\odot$ , enquanto interferômetros de base espacial como o LISA poderiam nos dar  $m_g < 6,9 \times 10^{-55} g$  observando a espiralação de dois buracos negros de  $10^7 M_\odot$ . Os números representam a mínima massa detectável por tais observações se o gráviton for massivo.

Ainda poderiam ser estabelecidas restrições para a massa do gráviton realizando-se observações simultâneas na faixa do óptico e de radiação gravitacional. Por exemplo, comparando-se a fase do sinal eletromagnético orbitalmente modulado (a curva de luz) e um sinal de onda gravitacional de um sistema estelar IBWD (*Interacting Binary White Dwarf*). Observações do LISA, de fontes de IBWD conhecidas, poderiam nos levar a um



## Gravitational-Wave Polarization

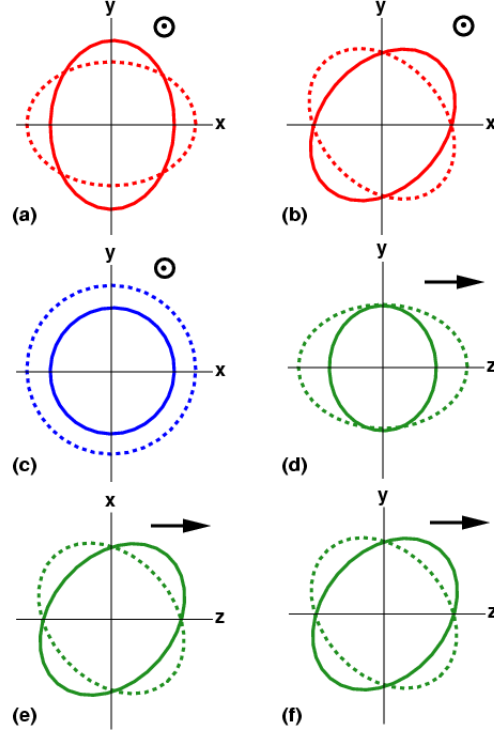


FIGURA 3.2 – Os seis modos de polarização de ondas gravitacionais permitidos em qualquer teoria métrica de gravitação. Aqui mostramos a deformação que cada modo induz em uma esfera de partículas teste. A onda gravitacional propaga-se para fora do plano em (a), (b) e (c), e propaga-se no plano em (d), (e) e (f). A teoria de gravitação de Visser apresenta todos os seis estados de polarização. Figura retirada de [29]

limite tão forte quanto  $m_g < 4 \times 10^{-58}g$ , consideravelmente mais restritivo do que os presentes limites inferidos a partir do sistema solar[28].

Para a inclusão de um termo massivo nas equações linearizadas da RG, Boulware e Deser [30] utilizaram um termo do tipo Pauli-Fierz (PF), no entanto as previsões de tal teoria não reduzem-se para aquelas da relatividade geral quando  $m_g \rightarrow 0$  (e.g. [31] e [32]). Todavia, não há razão para preferir termos do tipo PF no lugar de outros termos não-PF. É importante enfatizar que estes termos de massa não possuem clara extrapolação para campos fortes. Uma maneira de fazer isso foi proposta por M. Visser [7] que procura realizar esse processo através da inserção de uma métrica de fundo não dinâmica, preservando o princípio da equivalência e o princípio da covariância. Outras teorias alternativas de gravitação que apresentam duas métricas têm sido propostas ao longo dos anos. Dentre elas uma das mais conhecidas é a teoria de Rosen [33] que insere uma segunda métrica

representativa das forças inerciais. Mas a idéia de Visser possui a característica singular de unir o fato de ser uma teoria bimétrica e abarcar a massa do gráviton no mesmo modelo de gravitação.

Lembremos também que as ondas gravitacionais na RG apresentam dois estados de polarização ( $h_+$  e  $h_\times$ ). No entanto, de forma geral, em uma teoria métrica de gravitação qualquer, podemos ter no máximo seis estados de polarização [29](fig. 3.2). Se forem detectadas com certeza mais de duas polarizações de uma onda incidente, o resultado será devastador para a RG. A teoria de Visser apresenta todos os seis estados de polarização [34]. Assim, as observações das polarizações das ondas gravitacionais além de serem mais um teste para as teorias de gravitação, também servem para impor restrições para a massa do gráviton.

Nas seções que seguiremos desenvolveremos as bases de uma teoria de gravitação com grávitons massivos, partindo do limite de campo fraco escolhendo o termo massivo mais adequado. Mostraremos, em seguida, como Visser generaliza a teoria para campos arbitrários através da inclusão de uma métrica de fundo.

### 3.2 A aproximação linear e o termo de massa

No regime de campo fraco podemos assumir a métrica como sendo aproximadamente plana definindo-a como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} , \quad |h| \ll 1. \quad (3.1)$$

Desprezando os termos de ordem maior ou igual a dois em  $h$  obtemos a chamada teoria linearizada. Esse tratamento é caracterizado por podermos considerar essa pequena perturbação da métrica como um tensor num plano de fundo Minkowskiano, ou seja, é a métrica plana de Minkowski que atua como métrica dinâmica responsável por operações como subir e abaixar índices.

Esse formalismo é utilizado no estudo de campos gravitacionais gerados por fontes distantes do observador e corresponde uma boa aproximação da RG nesses casos. Utilizando (3.1), a lagrangiana linearizada da RG fica escrita na forma:

$$\mathcal{L}_{RG} = \frac{1}{2} [h_{\mu\nu,\lambda} h^{\mu\nu,\lambda} - 2h_{\mu\nu}{}^{,\nu} h^{\mu\lambda}{}_{,\lambda} + 2h_{\mu\nu}{}^{,\nu} h^{,\mu} - h^{,\mu} h_{,\mu}] - \frac{8\pi G}{c^4} h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

onde o traço da perturbação é dado por:

$$h \equiv \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

e a vírgula representa a diferenciação parcial ordinária.

A teoria resultante dessa lagrangiana, como sabemos, é consistente com um bóson de massa nula que viaja à velocidade da luz.

A maneira fenomenológica de introduzir um bóson massivo na teoria é adicionar uma lagrangiana que seja proporcional a termos quadráticos de  $h_{\mu\nu}$ , cuja forma mais geral é [32]:

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2}m^2 (h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \kappa h^2), \quad (3.4)$$

onde

$$m = \frac{m_g c}{\hbar}. \quad (3.5)$$

Portanto a ação linearizada mais geral de uma teoria relativística de gravitação com gráviton massivo é dada por:

$$I = \int d^4x (\mathcal{L}_{RG} + \mathcal{L}_{mass}). \quad (3.6)$$

As equações de campo resultantes dessa ação são:

$$\square^2 h_{\mu\nu} - h_{\mu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda\nu} - h_{\nu}{}^{\lambda}{}_{,\lambda\mu} + h_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} h^{\rho\sigma}{}_{,\rho\sigma} - \eta_{\mu\nu} \square^2 h - m^2 (h_{\mu\nu} - \kappa \eta_{\mu\nu} h) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.7)$$

Embora a escolha para o termo de massa não seja única, pode ser demonstrado que a mais natural é quando utilizamos  $\kappa = 1/2$  (essa demonstração pode ser encontrada em [24]). Para tal, vamos requerer que a teoria possua as seguintes propriedades: (1) as equações de campo para perturbações métricas possam ser escritas na forma padrão:

$$(\square^2 - m^2)h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} S_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

onde o termo fonte  $S_{\mu\nu}$  é uma função local do tensor energia momentum e é independente de  $h_{\mu\nu}$ ; e (2) tomando o limite  $m \rightarrow 0$  na teoria massiva recobramos as predições da relatividade geral.

Partindo das equações de campo (3.7) e aplicando a divergência em ambos os lados encontramos a condição:

$$h^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \kappa h{}^{,\mu}. \quad (3.9)$$

Tomando o traço de (3.7) e utilizando (3.9) chegamos à relação:

$$2(1 - \kappa)\square^2 h + (1 - 4\kappa)m^2 h = \frac{16\pi G}{c^4} T \quad (3.10)$$

onde

$$T \equiv \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu}. \quad (3.11)$$

Retornando (3.9) e (3.10) para as equações de campo chegamos a

$$(\square^2 - m^2) h^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} T \right) + (2\kappa - 1) \left[ h^{\cdot\mu\nu} + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} m^2 h \right], \quad (3.12)$$

que é da forma desejada (3.8) exceto pelo último termo do lado direito. Este pode ser removido para apenas dois valores especiais de  $\kappa$ . Para  $\kappa = 1/2$  o termo anula-se, deixando a expressão:

$$(\square^2 - m^2) h^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} T \right). \quad (3.13)$$

Para  $\kappa = 1$  (o termo de massa Pauli-Fierz usado por Boulware e Deser [30]) podemos utilizar a condição (3.10) para reescrever o termo em colchetes como uma função local do tensor energia momentum, o que nos conduz a

$$(\square^2 - m^2) h^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left( T^{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta^{\mu\nu} T + \frac{1}{3m^2} T^{\mu\nu} \right), \quad (3.14)$$

que também é da forma desejada (3.8). Todavia, é bem conhecido que as previsões da teoria para esse caso não reduzem para aquelas da RG quando  $m \rightarrow 0$ , essa é, a assim chamada, descontinuidade van Dam-Veltman-Zakharov [31]. Assim, somos levados a escolher  $\kappa = 1/2$  para representar o termo massivo nessa teoria de gravitação com equações de campo dadas por (3.13).

Se reescrevemos a condição (3.9) na forma:

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \quad (3.15)$$

onde

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h, \quad (3.16)$$

notamos que ela representa o calibre de Lorentz, utilizado na teoria linearizada derivada da RG, mas aqui é uma condição que surge naturalmente da conservação de energia.

### 3.3 Equações de movimento no limite não relativístico

A RG é construída de tal forma que esteja em concordância com a gravitação Newtoniana no limite não relativístico. Esse é um fator essencial para que a teoria abarque os resultados experimentais em todos os casos. Verificaremos nessa seção qual o resultado das equações de campo linearizadas com gráviton massivo, desenvolvidas anteriormente, nesse regime de baixas velocidades (comparadas à velocidade da luz), e campos gravitacionais de baixa intensidade.

Aplicando a condição (3.15) nas equações de campo (3.7) podemos reescrevê-las em ter-

mos de  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , assim:

$$(\square^2 - m^2) \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.17)$$

que é equivalente à forma (3.13).

Lembrando que o operador D'Alembertiano é dado por:

$$\square^2 = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (3.18)$$

vemos que ao tomar campos aproximadamente estacionários podemos fazer:

$$\square^2 \simeq \nabla^2. \quad (3.19)$$

O tensor energia-momentum no limite não relativístico reduz-se a:

$$T_{\mu\nu} \simeq T_{00} = \rho, \quad (3.20)$$

onde  $\rho$ , em nossa notação, representa a densidade de energia.

Retornando agora (3.19) e (3.20) para (3.17) ficamos com:

$$(\nabla^2 - m^2) \bar{h}_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} \rho. \quad (3.21)$$

Na correspondência newtoniana identificamos  $h_{00} = -2\phi/c^2$  [17] e portanto  $\bar{h}_{00} = -4\phi/c^4$ . Assim obtemos a equação:

$$(\nabla^2 - m^2) \phi = \frac{4\pi G}{c^2} \rho \quad (3.22)$$

A solução para a equação (3.22) em coordenadas polares esféricas é o potencial do tipo Yukawa:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \exp(-r/\lambda_g) \quad (3.23)$$

onde identificamos  $\lambda_g = \hbar/m_g c$  como sendo o comprimento de onda Compton do gráviton.

Veja que quando tomamos  $m_g \rightarrow 0$  recuperamos o potencial Newtoniano e as equações de campo voltam a ser Einsteinianas.

### 3.4 A Teoria de Gravitação de Visser

Utilizando a condição (3.15) podemos reescrever a ação que resulta na equação (3.17) na seguinte forma:

$$I = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \left[ h^{\mu\nu} \square^2 h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \square^2 h \right] + \frac{1}{2} \frac{m_g^2 c^2}{\hbar^2} \left[ h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^2 \right] - \frac{8\pi G}{c^4} h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \right\} \quad (3.24)$$

O primeiro termo é bem conhecido, sua extrapolação para campos fortes é a ação de Einstein-Hilbert ( $\int d^4x \sqrt{-g} R(g)$ ). No entanto, o segundo termo não possui clara extrapolação para campos fortes. Aqui reside uma grande dificuldade em se construir uma teoria de gravitação completa que inclua grávitons massivos.

Segundo Visser [7], uma maneira de fazer isso é introduzir uma métrica de fundo  $g_0$ , que não está sujeita a equações dinâmicas. A lagrangiana que Visser propõe para representar o termo massivo no regime de campos fortes é:

$$\mathcal{L}_{mass}(g, g_0) = \frac{1}{2} \frac{m_g^2 c^2}{\hbar^2} \sqrt{-g_0} \left\{ (g_0^{-1})^{\mu\nu} (g - g_0)_{\mu\sigma} (g_0^{-1})^{\sigma\rho} (g - g_0)_{\rho\nu} - \frac{1}{2} [(g_0^{-1})^{\mu\nu} (g - g_0)_{\mu\nu}]^2 \right\}, \quad (3.25)$$

que é construída de tal forma que recupere a parte massiva da ação linearizada que vimos anteriormente.

Esse termo depende de duas métricas: a métrica de dinâmica do espaço-tempo  $g$ , e da métrica de fundo  $g_0$ . De fato, há uma certa arbitrariedade em sua construção, qualquer relação algébrica entre a métrica de fundo e a métrica dinâmica que tenha a mesma extrapolação no limite de campos fracos pode ser utilizada.

O mérito desse método é que as equações de campo resultantes continuam respeitando os princípios de covariância geral e o princípio da equivalência.

Veja que tomar o limite de campo fraco, nesse caso, consiste em considerar a métrica dinâmica como sendo  $g = g_0 + h$  com  $h$  pequeno.

Finalmente, a ação completa dessa teoria alternativa de gravitação é dada por:

$$I = \int d^4x \left[ \sqrt{-g} \frac{c^4 R(g)}{16\pi G} + \mathcal{L}_{mass}(g, g_0) + \mathcal{L}_{matter}(g) \right]. \quad (3.26)$$

Note que  $g_0$  aparece somente no termo massivo. A partir da lagrangiana (3.25) podemos mostrar que a contribuição para as equações de movimento é dada por um tensor energia-momentum efetivo:

$$T_{mass}^{\mu\nu} = - \frac{2}{\sqrt{-g_0}} \frac{\delta \mathcal{L}_{mass}}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (3.27)$$

que nos leva a:

$$T_{mass}^{\mu\nu} = -\frac{m_g^2 c^6}{8\pi G \hbar^2} \left\{ (g_0^{-1})^{\mu\sigma} \left[ (g - g_0)_{\sigma\rho} - \frac{1}{2} (g_0)_{\sigma\rho} (g_0^{-1})^{\alpha\beta} (g - g_0)_{\alpha\beta} \right] (g_0^{-1})^{\rho\nu} \right\}. \quad (3.28)$$

Dessa forma, as equações de campo da teoria de Visser podem ser escritas como:

$$G^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} [T^{\mu\nu} + T_{mass}^{\mu\nu}], \quad (3.29)$$

que são semelhantes às equações de Einstein exceto pela inclusão do termo massivo.

Com todas as características que mencionamos, a teoria caracteriza-se como uma teoria quase Einsteniana, no sentido em que possui as mesmas características de invariância requeridas para uma teoria relativística de gravitação, além de recuperar os resultados observacionais para grávitons com massas suficientemente pequenas. Todavia, ela fere um dos princípios fundamentais da RG ao requerer a inserção da métrica representativa de uma geometria definida *a priori*. Mas, como veremos na próxima seção, uma adequada escolha dessa métrica de fundo é de suma importância para que a teoria de Visser esteja o mais próxima possível da teoria de Einstein, o que a coloca na posição de uma forte candidata à teoria de gravitação.

Mas, se essa teoria é praticamente relatividade geral, qual a necessidade, ou importância, em preferí-la à RG?

Segundo o princípio heurístico do filósofo e teólogo medieval Guilherme de Occam, as entidades não devem ser adicionadas além do necessário. Em nosso caso, isso significa que termos adicionais nas equações que descrevem a gravitação seriam desnecessários, uma vez que a RG concorda muito bem com a experimentação.

No entanto, embora grávitons com massa suficientemente pequena, nos proporcionem uma teoria com os mesmos resultados que já obtemos através da RG nas escalas do sistema solar ou até mesmo em escalas galácticas, diferenças consideráveis podem surgir quando consideramos o estudo do Universo em grandes escalas. Em particular, em escalas comparáveis ao comprimento de onda Compton do gráviton.

A cosmologia resultante dessa teoria será assunto do capítulo 4. Como veremos, esse será um contexto no qual o princípio de Occam ainda estará presente, nos mostrando, dessa vez, que essa teoria alternativa de gravitação pode ser a teoria física mais simples que nos permita a explicação dos efeitos cosmológicos dinâmicos observados atualmente. Efeitos estes que, através da RG, somente são explicados postulando-se fluídos exóticos de natureza desconhecida.

### 3.5 Sobre a Escolha de Uma Métrica de Fundo

Qual a melhor escolha para uma métrica de fundo na teoria de Visser? Em princípio a escolha de uma métrica de fundo é completamente arbitrária. No entanto com um pouco de intuição física podemos fazer a escolha mais adequada do ponto de vista cosmológico. Tomemos a equação (3.29) para o vácuo:

$$G^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{mass}^{\mu\nu}. \quad (3.30)$$

Nesse caso particular a conservação de energia implica em:

$$\nabla_\nu T_{mass}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.31)$$

Uma vez que o tensor de massa (eq. 3.28) é construído pela métrica dinâmica e pela métrica de fundo (e não por derivadas de métricas), verificamos que **a maneira mais simples** de satisfazer (3.31) é:

$$\nabla_\nu (g_0^{\mu\nu}) = 0, \quad (3.32)$$

já que a divergência de  $g_{\mu\nu}$  é nula por construção da derivada covariante. Então, a solução natural de (3.32) é dada por:

$$(g_0)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (3.33)$$

A qual, por construção do termo massivo (3.28) leva a

$$T_{mass}^{\mu\nu} = 0 \quad (3.34)$$

e portanto

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (3.35)$$

Na ausência de fontes de campos gravitacionais (ou muito distante de fontes), a solução mais simples dessa última é:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \quad (3.36)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica de Minkowski e por (3.33) nós temos:

$$(g_0)_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (3.37)$$

O significado de nosso resultado pode ser resumido dizendo que na ausência de fontes gravitacionais as duas métricas coincidem, nos deixando com uma única métrica plana: Minkowski. Na realidade, este é um critério de simplicidade, uma vez que esperamos



recuperar os resultados da relatividade especial na ausência de gravidade. Tomemos, por exemplo, a divergência covariante de (3.29) que nos dá:

$$\nabla_{\nu} [T^{\mu\nu} + T_{mass}^{\mu\nu}] = 0. \quad (3.38)$$

Se a métrica de fundo é Minkowski, quando a métrica dinâmica for Minkowski também, somos levados naturalmente para a conservação da energia tal qual dada na relatividade especial:

$$\partial_{\nu}(T^{\mu\nu}) = 0, \quad (3.39)$$

já que o termo de massa se anula.

Se, por outro lado, a métrica de fundo não for Minkowski, a relatividade especial não será recuperada tão naturalmente quanto dessa forma. Isso porque o termo de massa não desaparecerá devido ao acoplamento entre as duas métricas.

Com todas essas características, as bases da teoria, mais uma vez, estão muito próximas dos fundamentos da relatividade geral.

Nosso próximo passo é conjecturar que se a métrica de fundo é a de Minkowski num Universo vazio então ela também o será para um Universo permeado de matéria e radiação. Consideramos esse argumento razoável, uma vez que a métrica de fundo, por definição, não é afetada pela distribuição de matéria-energia.

A forma mais adequada para a métrica de fundo, no tratamento cosmológico do próximo capítulo, é uma transformação de coordenadas de (3.37) para coordenadas polares esféricas. Nesse sistema de coordenadas, o elemento de linha que representa a métrica de fundo Minkowskiana fica escrito na forma:

$$ds_0^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (3.40)$$

onde o índice “0” indica que este é o elemento de linha da métrica de fundo.

### 3.6 Sobre as Equações de Movimento

Verificaremos se a equação (3.38) está de acordo com as equações de movimento de uma partícula teste de baixa massa, em queda livre, descrevendo uma geodésica e, portanto, se ela concorda com o princípio de equivalência. Esse é um ponto importante, uma vez que a equação de uma geodésica pode ser obtida independente das equações de campo da teoria de gravitação.

Para fazer isso, adotaremos o tensor energia-momentum para o fluido perfeito (2.16) e reescrevemos (3.38):

$$[(\rho + p)U^{\mu}U^{\nu} + pg^{\mu\nu}]_{;\nu} = -T_{mass;\nu}^{\mu\nu} \quad (3.41)$$

$$[(\rho + p)U^\nu]_{;\nu} U^\mu + (\rho + p)U^\mu_{;\nu} U^\nu = -T_{mass}^{\mu\nu}{}_{;\nu} \quad (3.42)$$

onde “;” passará a denotar a diferenciação covariante por simplificação. Multiplicando por  $U_\mu$  vem:

$$[(\rho + p)U^\nu]_{;\nu} + (\rho + p)U_\mu U^\mu_{;\nu} U^\nu = -T_{mass}^{\mu\nu}{}_{;\nu} U_\mu \quad (3.43)$$

onde utilizamos o fato de que:

$$U^\mu U_\mu = 1. \quad (3.44)$$

Manipulando (3.44) encontramos que:

$$U^\mu_{;\nu} U^\nu = -U^\mu U^\nu_{;\nu} \quad (3.45)$$

com a qual podemos reescrever a equação (3.43) como sendo:

$$[(\rho + p)U^\nu]_{;\nu} - (\rho + p)U^\mu U_\nu U^\nu_{;\nu} = -T_{mass}^{\mu\nu}{}_{;\nu} U_\mu . \quad (3.46)$$

Ainda a partir de (3.44) podemos mostrar que o segundo termo de (3.46) se anula, simplificando a expressão para:

$$[(\rho + p)U^\nu]_{;\nu} = -T_{mass}^{\mu\nu}{}_{;\nu} U_\mu . \quad (3.47)$$

Agora substituímos (3.47) em (3.42) e obtemos:

$$-U_\alpha T_{mass}^{\alpha\nu}{}_{;\nu} U^\mu + (\rho + p)U^\mu_{;\nu} U^\nu = -T_{mass}^{\mu\nu}{}_{;\nu} . \quad (3.48)$$

Para que as equações de campo estejam de acordo com a equação de geodésica temos:

$$U^\mu_{;\nu} U^\nu = 0 , \quad (3.49)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 , \quad (3.50)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio. Portanto, concluimos que, para que as equações de campo de Visser concordem com as equações de movimento, devemos ter obedecida a seguinte relação:

$$T_{mass}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = U^\mu U_\alpha T_{mass}^{\alpha\nu}{}_{;\nu} . \quad (3.51)$$

e se adotamos a quadrivelocidade no referencial em repouso (2.17) essa condição reduz-se a:

$$T_{mass}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = U^\mu T_{mass}^{0\nu}{}_{;\nu} \quad (3.52)$$

que implica que apenas para  $\mu = 0$  temos um resultado não nulo, ou seja:

$$T_{mass}^{i\nu}{}_{;\nu} = 0 \quad (3.53)$$

Note que a condição imposta para o termo de massa (eq. 3.51) é independente da forma do tensor  $T_{mass}^{\mu\nu}$ , então a expressão (3.38) é válida para qualquer tensor de segunda ordem “interagindo” com o fluido perfeito.



## CAPÍTULO 4

### IMPLICAÇÕES COSMOLÓGICAS DA TEORIA DE VISSER

O que podemos esperar da cosmologia resultante de uma teoria bimétrica de gravitação com grávitons massivos? Tal teoria produz uma expansão acelerada sem a necessidade de uma constante cosmológica? É possível estabelecer limites para a massa do gráviton através de modelos cosmológicos extraídos dessa teoria? É possível julgar se a teoria é correta ou não através do modelo do Cosmos que ela produz?

Buscar as respostas para essas, e outras questões, é o objetivo do presente capítulo.

#### 4.1 Sobre as Densidades de Energia

Os resultados obtidos no capítulo anterior nos garantem que podemos aplicar a equação de conservação de energia (3.38) para determinar a evolução das densidades de energia cosmológicas desde que (3.51) seja satisfeita. De fato, quando calculamos a divergência covariante do tensor de massa para  $\mu = i$ , a condição (3.53) é automaticamente satisfeita. Assim, obteremos a evolução das densidades de energia efetivamente a partir da equação:

$$\nabla_\nu [T^{0\nu}] = -\nabla_\nu [T_{mass}^{0\nu}] \quad (4.1)$$

O resultado do termo do lado esquerdo de (4.1) já é conhecido do capítulo 2 e nos dá:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = [\dot{\rho} + 3H(\rho + p)] \delta^\mu_0 \quad (4.2)$$

Calculando o lado direito de (4.1) utilizando RW como a métrica dinâmica (eq. 2.15) e (3.40) como a métrica de fundo encontramos a seguinte relação:

$$\nabla_\nu T_{mass}^{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{3m_g^2 c^6}{16\pi G \hbar^2} (R^2 - 1) \right] \delta^\mu_0 + 3 \frac{\dot{R}}{R} \left[ \frac{3m_g^2 c^6}{16\pi G \hbar^2} (R^2 - 1) + \frac{m_g^2 c^6}{16\pi G \hbar^2} (R^4 - R^2) \right] \delta^\mu_0 \quad (4.3)$$

Voltando nossa atenção para a definição do tensor energia-momentum para fluido perfeito (2.16) podemos fazer a seguinte identificação:

$$T^0_0 = \rho \quad \text{e} \quad T^i_j = p \delta^i_j \quad (4.4)$$

Tomando a equação (3.28) como a representação de um fluido, podemos associar a densidade de energia e a pressão devido ao tensor massivo por:

$$\rho_{mass} = \frac{3m_g^2 c^6}{16\pi G \hbar^2} (R^2 - 1) \quad (4.5)$$

e

$$p_{mass} = \frac{m_g^2 c^6}{16\pi G \hbar^2} (R^4 - R^2). \quad (4.6)$$

Assim, com o auxílio destas equações podemos reescrever (4.3) na forma:

$$\nabla_\nu T_{mass}^{\mu\nu} = [\dot{\rho}_{mass} + 3H(\rho_{mass} + p_{mass})] \delta^\mu_0 \quad (4.7)$$

e então, com (4.2) e (4.7) em (4.1) a expressão completa para a conservação de energia nessa teoria pode ser escrita de forma simplificada como:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = -[\dot{\rho}_{mass} + 3H(\rho_{mass} + p_{mass})] \quad (4.8)$$

A partir dessa equação podemos obter a evolução dos parâmetros de densidade cosmológicos. Em nosso caso, assumiremos um Universo com matéria e radiação e portanto:

$$\rho = \rho_m + \rho_r \quad e \quad p = p_m + p_r. \quad (4.9)$$

Levando (4.9) em (4.8) obtemos:

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) + \dot{\rho}_r + 3H(\rho_r + p_r) = -[\dot{\rho}_{mass} + 3H(\rho_{mass} + p_{mass})] \quad (4.10)$$

Considerando que o termo massivo contribui isoladamente para a densidade de energia de cada tipo de fluido podemos separar a equação anterior em duas:

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = -\alpha(a) [\dot{\rho}_{mass} + 3H(\rho_{mass} + p_{mass})] \quad (4.11)$$

e

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = -\beta(a) [\dot{\rho}_{mass} + 3H(\rho_{mass} + p_{mass})], \quad (4.12)$$

nas quais utilizamos as equações de estado  $p_m = 0$  e  $p_r = \frac{1}{3}\rho_r$ .

As funções  $\alpha(a)$  e  $\beta(a)$  especificam os pesos com os quais o termo massivo contribui para a densidade de energia de um dado fluido para um dado valor do fator de escala. Para que tenhamos consistência no modelo cosmológico, essas funções devem obedecer algumas características:

- Para que a conservação de energia seja respeitada (eq. 4.8) devemos ter  $\alpha(a) + \beta(a) = 1$ ;
- Quando  $a \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\beta \rightarrow 1$ , ou seja, o termo massivo contribui somente para a radiação no passado, quando a densidade de matéria é desprezível;

- Quando  $a \gg 0$ ,  $\alpha \rightarrow 1$  e  $\beta \rightarrow 0$ , ou seja, o termo massivo contribui somente para a matéria quando a densidade de radiação é desprezível;
- No momento da equi-partição das densidades de energia da matéria e radiação devemos ter  $\alpha(a_{eq}) = \beta(a_{eq})$ .

Duas funções simples que obedecem todas essas características são:

$$\alpha(a) = \frac{\Omega_m^A a}{\Omega_m^A a + \Omega_r^A} \quad (4.13)$$

e

$$\beta(a) = \frac{\Omega_r^A}{\Omega_m^A a + \Omega_r^A}. \quad (4.14)$$

Substituindo essas funções em (4.11) e (4.12) e integrando notamos que a contribuição do termo massivo para a radiação é desprezível ao longo de toda a evolução do Universo. Isso porque a radiação é dominante apenas numa fase muito curta que data aos primórdios da história cósmica. Assim, como os termos massivos são proporcionais a potências de  $R$ , na época em que a densidade de radiação domina, eles tornam-se desprezíveis.

Assim, obtemos as seguintes equações de evolução para as densidades de energia:

$$\rho_m(a) = \frac{\rho_m^A}{a^3} - \frac{3m_g^2 c^6}{8\pi G \hbar^2} \left( \frac{R_A^4}{14} a^4 + \frac{2R_A^2}{5} a^2 - \frac{1}{2} \right) \quad (4.15)$$

e

$$\rho_r(a) = \frac{\rho_r^A}{a^4}. \quad (4.16)$$

Com a definição do parâmetro de densidade adimensional  $\Omega_\omega = \rho_\omega / \rho_c$  podem ser reescritas como:

$$\Omega'_m(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \left\{ \frac{\Omega_m^A}{a^3} - \frac{m_g^2}{m_H^2} \left[ \frac{R_A^4}{14} a^4 + \frac{2R_A^2}{5} a^2 - \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (4.17)$$

e

$$\Omega'_r(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \frac{\Omega_r^A}{a^4}, \quad (4.18)$$

onde

$$m_H = \frac{\hbar H_A}{c^2} \quad (4.19)$$

é uma constante com unidade de massa (como veremos adiante,  $m_H$  é de grande importância no contexto dessa teoria) e  $R_A$  é o valor atual do fator de escala.

Essas expressões são constituídas da soma de duas contribuições:

$$\Omega'_m(a) = \Omega_m(a) + \Omega_m^{mass}(a) \quad (4.20)$$

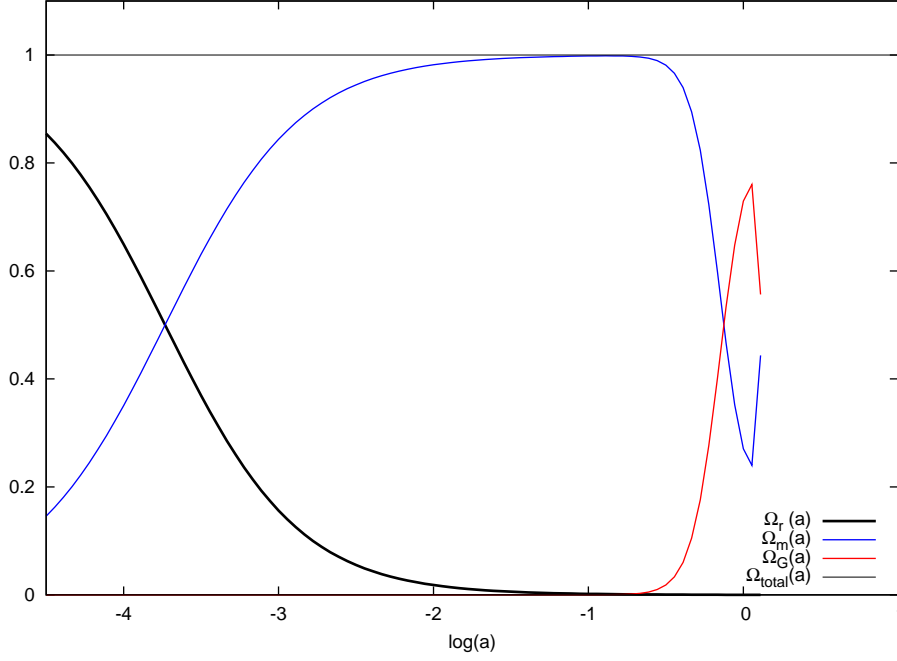


FIGURA 4.1 – Evolução dos parâmetros de densidade no modelo massivo.

e

$$\Omega'_r(a) = \Omega_r(a) + \Omega_r^{mass}(a), \quad (4.21)$$

onde  $\Omega_m(a)$  e  $\Omega_r(a)$  são dados pelas equações (2.38) e (2.39) respectivamente. Esses são os termos provenientes puramente da RG. Enquanto os termos

$$\Omega_m^{mass}(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \left\{ -\frac{m_g^2}{m_H^2} \left[ \frac{1}{14} a^4 R_A^4 + \frac{2}{5} a^2 R_A^2 - \frac{1}{2} \right] \right\} \quad (4.22)$$

e

$$\Omega_r^{mass}(a) = 0 \quad (4.23)$$

são as contribuições do termo massivo devido à mudança na interação gravitacional.

Podemos, ainda, associar um parâmetro de densidade com a equação (4.5):

$$\Omega_{mass}(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{m_g^2}{m_H^2} (R_A^2 a^2 - 1) \right]. \quad (4.24)$$

A contribuição total do tensor massivo para as densidades de energia pode ser resumida por:

$$\Omega_G(a) = \Omega_m^{mass}(a) + \Omega_r^{mass}(a) + \Omega_{mass}(a)$$



e assim

$$\Omega_G(a) = -\frac{H_A^2}{H^2} \frac{m_g^2}{m_H^2} \left( \frac{R_A^4}{14} a^4 - \frac{R_A^2}{10} a^2 \right). \quad (4.25)$$

Na figura 4.1 apresentamos a evolução dos parâmetros de densidade de cada tipo de fluido (a dedução da função  $H(a)$ , utilizada na construção dessas funções, será mostrada na próxima seção). Note que a evolução dos parâmetros de densidade de matéria e radiação é idêntica ao modelo  $\Lambda$ -CDM. Veja também que a contribuição do termo massivo evolui da mesma forma como  $\Omega_\Lambda(a)$  (fig. 2.1), desde o passado até o presente. Porém, o futuro é drasticamente diferente, pois teremos um valor máximo para o fator de escala. Estudaremos esse ponto com mais detalhes nas seções que seguem.

## 4.2 Da Dinâmica do Universo

O caminho para a obtenção das equações dinâmicas é similar ao processo de obtenção das equações de Friedmann a partir das equações de Einstein. Se assumimos a métrica RW (eq. 2.15) com  $k = 0$  e (3.40) como a métrica de fundo e desenvolvemos as equações de campo de Visser (eq. 3.29) obtemos:

$$\left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left[ \rho' + \frac{3m_g^2 c^6}{16\pi G \hbar^2} (R^2 - 1) \right] \quad (4.26)$$

e

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = -\frac{4\pi G}{c^2} \left[ p' + \frac{m_g^2 c^6}{16\pi G \hbar^2} (R^4 - R^2) \right], \quad (4.27)$$

que com o auxílio de (4.5) e (4.6) podem ser reescritas na forma:

$$\left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} [\rho' + \rho_{mass}], \quad (4.28)$$

e

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = -\frac{4\pi G}{c^2} [p' + p_{mass}]. \quad (4.29)$$

Note que as equações (4.28) e (4.29) são semelhantes às equações de Friedmann e as contribuições do termo massivo aparecem como o acréscimo de um termo de densidade de energia e um termo de pressão.

Se utilizamos a definição do parâmetro de desaceleração (eq. 2.28) e combinamos as expressões acima chegamos a:

$$q(R) = \frac{H_A^2}{H^2} \left[ \frac{1}{2} \Omega'_m(R) + \Omega'_r(R) + \frac{1}{2} (R^2 + 1) \Omega'_{mass}(R) \right] \quad (4.30)$$

Substituindo (4.17), (4.18) e (4.24) em (4.30) obtemos a equação de evolução do parâmetro de desaceleração em função do fator de escala:

$$q(R) = \frac{H_A^2}{H^2} \left[ \frac{1}{2} \Omega_m^A \left( \frac{R_A}{R} \right)^3 + \Omega_r^A \left( \frac{R_A}{R} \right)^4 - \frac{m_g^2}{m_H^2} \left( -\frac{3}{14} R^4 + \frac{R^2}{5} \right) \right] \quad (4.31)$$

ou, em função do fator de escala normalizado:

$$q(a) = \frac{H_A^2}{H^2} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Omega_m^A}{a^3} + \frac{\Omega_r^A}{a^4} - \frac{m_g^2}{m_H^2} \left( -\frac{3R_A^4}{14} a^4 + \frac{R_A^2}{5} a^2 \right) \right]. \quad (4.32)$$

A evolução do parâmetro de Hubble, assim como no capítulo 2, pode ser obtida através de:

$$\Omega'_m(a) + \Omega'_r(a) + \Omega_{mass}(a) = 1 \quad (4.33)$$

ou:

$$\Omega_m(a) + \Omega_r(a) + \Omega_G(a) = 1, \quad (4.34)$$

da qual encontramos:

$$H^2(a) = H_A^2 \left[ \frac{\Omega_m^A}{a^3} + \frac{\Omega_r^A}{a^4} - \frac{m_g^2}{m_H^2} \left( \frac{R_A^4}{14} a^4 - \frac{R_A^2}{10} a^2 \right) \right] \quad (4.35)$$

Com essa última em (4.32) obtemos enfim a expressão completa para a evolução do parâmetro de desaceleração em função do fator de escala.

### 4.3 O Universo Observável e a Massa do Gráviton

Veja que a equação (4.35) a princípio possui duas constantes desconhecidas; uma delas é  $R_A$  e a outra é  $m_g$ . No entanto podemos estabelecer uma relação entre as duas se tomamos (4.35) para o tempo presente ( $a = 1$ ), obtendo:

$$\Omega_m^A + \Omega_r^A - \frac{m_g^2}{m_H^2} \left( \frac{R_A^4}{14} - \frac{R_A^2}{10} \right) = 1 \quad (4.36)$$

ou ainda:

$$\frac{R_A^4}{14} - \frac{R_A^2}{10} + \frac{m_H^2}{m_g^2} (1 - \Omega_m^A - \Omega_r^A) = 0. \quad (4.37)$$

Solucionando (4.37) para  $R_A = R_A(m_g)$  encontramos:

$$R_A = \sqrt{\frac{7}{10}} \left\{ 1 \pm \left[ 1 - \frac{200}{7} \left( \frac{m_H}{m_g} \right)^2 (1 - \Omega^*) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.38)$$

onde

$$\Omega^* = \Omega_m^A + \Omega_r^A.$$

Assim dado o valor atual do parâmetro de densidade da matéria e da radiação podemos encontrar o valor de  $R_A$  para um dado  $m_g$ .

Note que para que tenhamos valores reais de  $R_A$ , o termo entre colchetes em (4.38) deve obedecer a relação:

$$1 - \frac{200}{7} \left( \frac{m_H}{m_g} \right)^2 (1 - \Omega^*) > 0, \quad (4.39)$$

o que impõe um limite inferior para a massa do gráviton, em nosso modelo, dado por:

$$m_g > \sqrt{\frac{200}{7} (1 - \Omega^*)} m_H. \quad (4.40)$$

Por exemplo, se adotarmos  $\Omega^* = 0,05$ , obtemos:

$$m_g > 5,21 m_H, \quad (4.41)$$

ou tomando  $\Omega^* = 0.27$ :

$$m_g > 4,57 m_H. \quad (4.42)$$

A constante  $m_H$  que temos usado por simplicidade, é chamada de “massa de Hubble” em [35] e, como vemos, parece haver algo de mais fundamental devido à coincidência com a ordem de grandeza da massa do gráviton. Essa questão pode ser melhor compreendida se convertemos a relação (4.40) num limite superior para o comprimento de onda Compton associado ao gráviton:

$$\lambda_g < \left[ \frac{200}{7} (1 - \Omega^*) \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{c}{H_A}, \quad (4.43)$$

que nos leva a

$$\lambda_g < 0,19 \frac{c}{H_A} \quad (4.44)$$

e

$$\lambda_g < 0,22 \frac{c}{H_A}, \quad (4.45)$$

para  $\Omega^* = 0,05$  e  $\Omega^* = 0,27$  respectivamente.

Ou seja, se o gráviton possuir massa, o comprimento de onda Compton associado deve ser inferior ao tamanho atual do horizonte observável, o que é um ponto de vista razoável uma vez que o comprimento de onda Compton diz respeito ao alcance da interação. Portanto, essa informação nos mostra que a contribuição do termo massivo deve ser relevante em nosso Universo no tempo atual.

## 4.4 A Idade do Universo

A escala de tempo que nos dá a ordem de grandeza da idade do Universo em um modelo cosmológico, assim como nos modelos de Friedmann, é o inverso da constante de Hubble:

$$t_H = \frac{1}{H_A}. \quad (4.46)$$

Com o valor dado pelo satélite WMAP, que é de  $H_A = 71 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , chegamos a:

$$t_H = 13,7 \text{ Ganos}$$

Esperamos portanto que um modelo cosmológico razoável apresente idades dessa ordem, que contempla a idade das estrelas mais antigas e o tempo de formação de estruturas. Para calcular a idade em nosso modelo basta tomar a definição do parâmetro de Hubble:

$$H(a) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$$

$$t_U = \int_0^1 \frac{da}{aH(a)} \quad (4.47)$$

Então, substituímos (4.35) em (4.47) e com o auxílio de (4.38), a idade do Universo dependerá apenas de  $m_g$  e  $\Omega^*$ .

Na figura 4.2 mostramos a dependência da idade do Universo com a massa do gráviton, considerando dois casos particulares. Em primeiro lugar, consideramos que a contribuição atual do termo de massa para a densidade corresponde a  $\Omega_G^A = 0,73$ , ou seja, o valor atual do parâmetro de densidade que tem sido atribuído à constante cosmológica, ou a algum dos fluido-X como vimos no capítulo 2. Nesse caso, o valor atual da densidade de matéria corresponderia à soma das densidades de matéria bariônica e de matéria escura. Em segundo lugar, consideramos a possibilidade do termo massivo também representar matéria escura em grandes escalas, e para tal consideramos  $\Omega_G^A = 0,95$ . Como vemos, a Idade do Universo é bastante sensível a pequenas variações na massa do gráviton. Assim, essa relação proporciona um limite superior bastante restritivo para a massa.

Para estabelecer um limite superior podemos levar em conta, por exemplo, a idade das estrelas e aglomerados mais antigos estimada a partir da metalicidade. Essas idades podem chegar a aproximadamente 14 *Ganos* (ver e.g. [36]), o que, pela figura 4.2, nos leva a um limite de

$$m_g < 1,26 \times 10^{-65} \text{ g} \quad (4.48)$$

quando  $\Omega_m^A = 0,27$  e de

$$m_g < 3,53 \times 10^{-65} \text{ g} \quad (4.49)$$

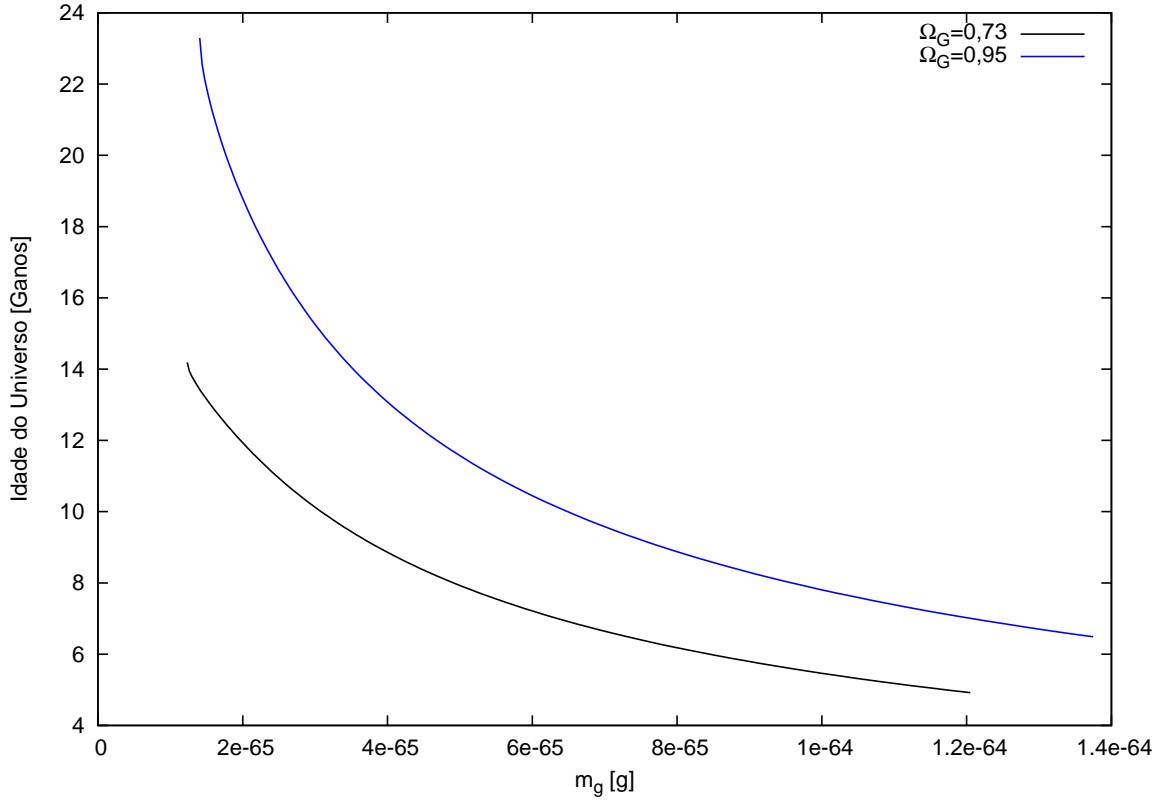


FIGURA 4.2 – Relação dentre a idade do Universo e a massa do gráviton.

para  $\Omega_m^A = 0,05$ . Esses valores nos deixam com limites cerca de 10 ordens de magnitude mais restritivos do que os atuais limites impostos para a dinâmica planetária no sistema solar, e cerca de 3 ordens de magnitude mais restritivos do que as inferências em aglomerados de galáxias.

Resumindo esses resultados com os resultados da seção precedente, a massa do gráviton, nesse modelo, estará restrita aos intervalos:

$$2,00 \times 10^{-65} h g < m_g \lesssim 3,53 \times 10^{-65} g \quad \text{para } \Omega_G^A = 0,95 \quad (4.50)$$

$$1,75 \times 10^{-65} h g < m_g \lesssim 1,26 \times 10^{-65} g \quad \text{para } \Omega_G^A = 0,73, \quad (4.51)$$

onde  $h = 0,71_{-0,03}^{+0,04}$  [1].

Note que a relação (4.38) possui duas respostas: a primeira para o sinal “+” e outra para o sinal “-” do termo que aparece entre colchetes. Os resultados dessa seção foram obtidos utilizando a primeira alternativa. Nossa escolha foi fundamentada na curva  $idade \times m_g$  resultante para ambas as relações. Quando consideramos a segunda relação (com o sinal “-

”), a idade do Universo é maior para massas maiores, o que, fisicamente, não faz sentido. Esperamos que quando  $m_g \rightarrow 0$  recuperemos os resultados da RG, e portanto, que tenhamos idades maiores. Quando tomamos maiores valores de massa o modelo deve apresentar resultados diferentes da RG, o que significa idades menores em nosso caso. Então, foi para que tivéssemos consistência física, que escolhemos a primeira solução de (4.38):

$$R_A = \sqrt{\frac{7}{10}} \left\{ 1 + \left[ 1 - \frac{200}{7} \left( \frac{m_H}{m_g} \right)^2 (1 - \Omega^*) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.52)$$

a qual, quando utilizada no cálculo da idade, gera o comportamento da curva representada na figura 4.2.

## 4.5 O Passado e o Futuro

Podemos obter a história evolutiva completa do Universo integrando a equação (4.28), uma vez que já conhecemos a evolução das densidades de energia. Utilizaremos também a relação entre  $R_A$  e  $m_g$  dada por (4.52). Com isso, obtivemos numericamente a evolução do fator de escala normalizado em função do tempo, o resultado pode ser visto na figura 4.3.

É interessante notar que o comportamento da curva  $a(t)$  no passado e presente assemelha-se à evolução dos modelos de Friedmann com constante cosmológica. Porém, o futuro é drasticamente diferente. O termo massivo contribui de tal forma que, no passado é capaz de gerar uma força cosmológica repulsiva, tornando-a atrativa no futuro e levando o Universo a colapsar no evento chamado de *big crunch*. Além disso, embora a evolução seja qualitativamente a mesma para qualquer valor da massa do gráviton, é notável a forte dependência do tempo de evolução com  $m_g$ . Na figura 4.4 mostramos a relação entre o tempo de vida do Universo e a massa do gráviton. As curvas são semelhantes ao comportamento da idade visto anteriormente. Novamente, apresentamos os resultados para o caso de  $\Omega_m^A = 0,27$ , que é a soma das densidades de matéria bariônica e matéria escura, e  $\Omega_m^A = 0,05$ , ou seja, somente matéria bariônica.

Apresentamos, ainda, nas figuras 4.5 e 4.6 a evolução do parâmetro de Hubble em função do fator de escala normalizado, obtido da equação (4.35). Mais uma vez, identificamos a semelhança entre o comportamento do Universo, no passado, em nosso modelo e o modelo  $\Lambda$ CDM apresentado na figura 2.3 do capítulo 2.

No gráfico 4.5, fixamos um valor de  $m_g$  e comparamos a diferença de comportamentos quando consideramos os diferentes valores de densidade de matéria, os quais temos assumido como possibilidade. Variar a densidade de matéria ou radiação tem um efeito de deslocamento da curva e para pequenos valores de  $a$  as duas curvas tendem para o

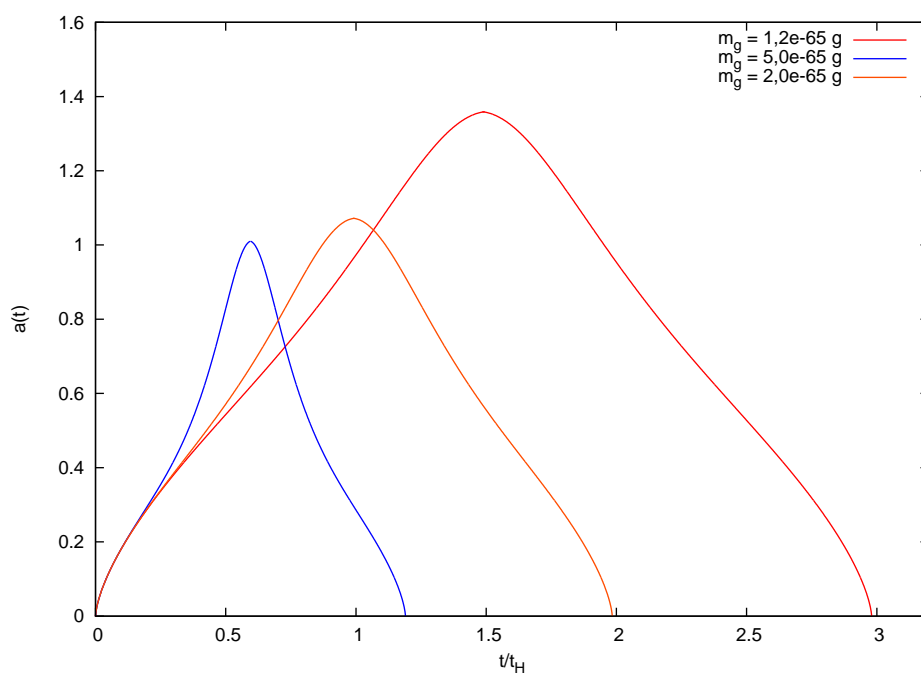


FIGURA 4.3 – Evolução do fator de escala normalizado com o tempo (em unidades do tempo de Hubble).

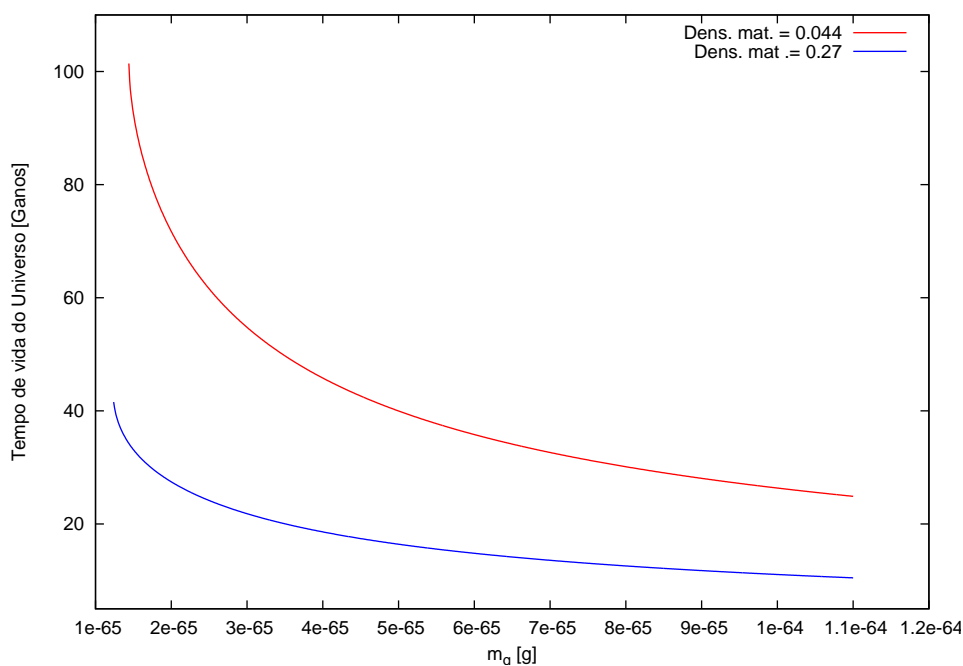


FIGURA 4.4 – Relação entre o tempo de vida do Universo com a massa do gráviton.

mesmo comportamento. Já no gráfico 4.6 fixamos um valor de densidade para a matéria e comparamos o comportamento da curva para diferentes valores de massa para o gráviton. Repare que no passado as curvas confundem-se, mostrando, mais uma vez, que

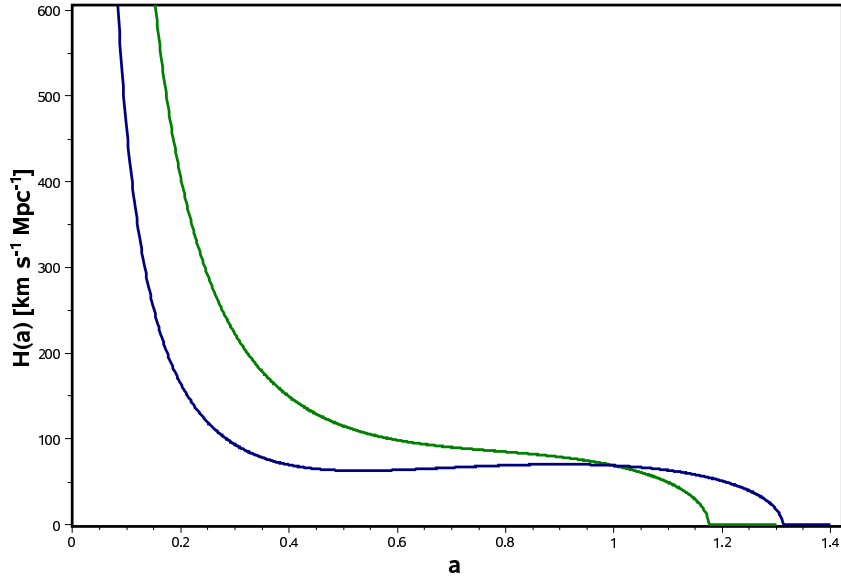


FIGURA 4.5 – Evolução do parâmetro de Hubble em função do fator de escala normalizado. A curva azul corresponde a  $\Omega_m^A = \Omega_b^A = 0,044$  enquanto a verde corresponde a  $\Omega_m^A = 0,27$ . As duas curvas foram construídas usando  $m_g = 1.4 \times 10^{-65} g$ .

o termo massivo tem influência numa época mais tardia da história do Universo. Essa característica também pode ser observada na evolução de  $a(t)$  vista na figura 4.3, já que  $H(a)$  dá a evolução modulada da derivada temporal do fator de escala. Na realidade, devido à estrutura da contribuição do termo massivo para o parâmetro de Hubble (eq. 4.35), quando  $a \rightarrow 0$  ele pode ser desprezado se comparado com a contribuição da matéria e radiação.

O ponto em que as curvas tocam o eixo das abcissas corresponde ao valor máximo que o fator de escala atinge (*turn point*), e pode ser calculado fazendo-se:

$$H(a_{max}) = 0. \quad (4.53)$$

Quanto menor a massa do gráviton maior é esse valor. Isso mostra a relação entre o ponto de retorno e o alcance da interação gravitacional, pois quanto menor a massa do gráviton maior é o comprimento de onda Compton associado.

A contração que se inicia após  $a_{max}$  pode ser representada pelo mesmo gráfico de  $H(a)$  com os sinais trocados (ou seja,  $\dot{a} < 0$ ).



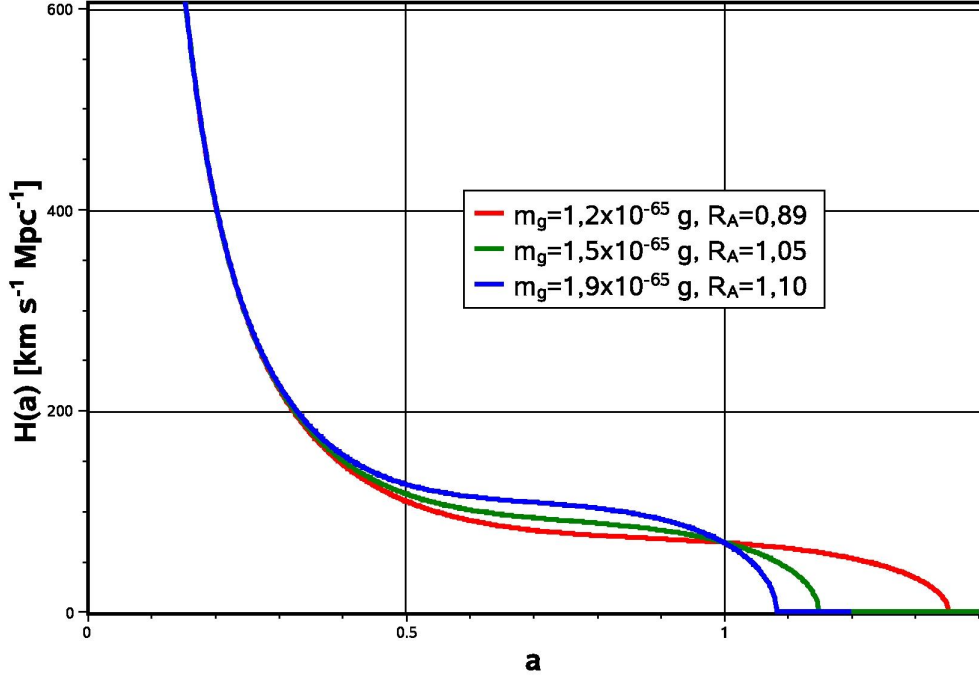


FIGURA 4.6 – Evolução do parâmetro de Hubble para diferentes valores de  $m_g$ . Utilizamos  $\Omega_m^A = 0,27$

## 4.6 Universo Acelerado?

Na figura 4.7 e 4.8 apresentamos a evolução do parâmetro de desaceleração (eq. 4.32) cuja expressão derivamos anteriormente.

Vemos que ter uma expansão acelerada no tempo presente é um fator fortemente dependente do valor de  $m_g$  e dos parâmetros de densidades atuais que consideramos. Quanto ao passado, o Universo tem uma fase de expansão desacelerada tal qual apresentada no modelo  $\Lambda$ CDM. O crescimento da função  $q(a)$  no futuro é explicado pela reversão na expansão que vimos na seção anterior. No ponto de retorno, o valor do parâmetro de desaceleração vai a infinito. No período de contração, os valores de  $q(a)$  são os mesmos do que aqueles para a expansão, indicando que, em um ciclo completo, temos duas fases aceleradas, uma enquanto o Universo se expande, e outra quando está em contração. Para verificar a dependência entre o valor atual do parâmetro de desaceleração e os parâmetros de densidade basta fazer  $a = 1$  na equação (4.32):

$$q_A = \frac{\Omega_m^A}{2} + \Omega_r^A - \left(\frac{m_g}{m_H}\right)^2 \left(-\frac{3R_A^4}{14} + \frac{R_A^2}{5}\right). \quad (4.54)$$

Apresentamos essa dependência na figura 4.9. Se assumimos  $\Omega_m^A = 0,27$  teremos o Uni-

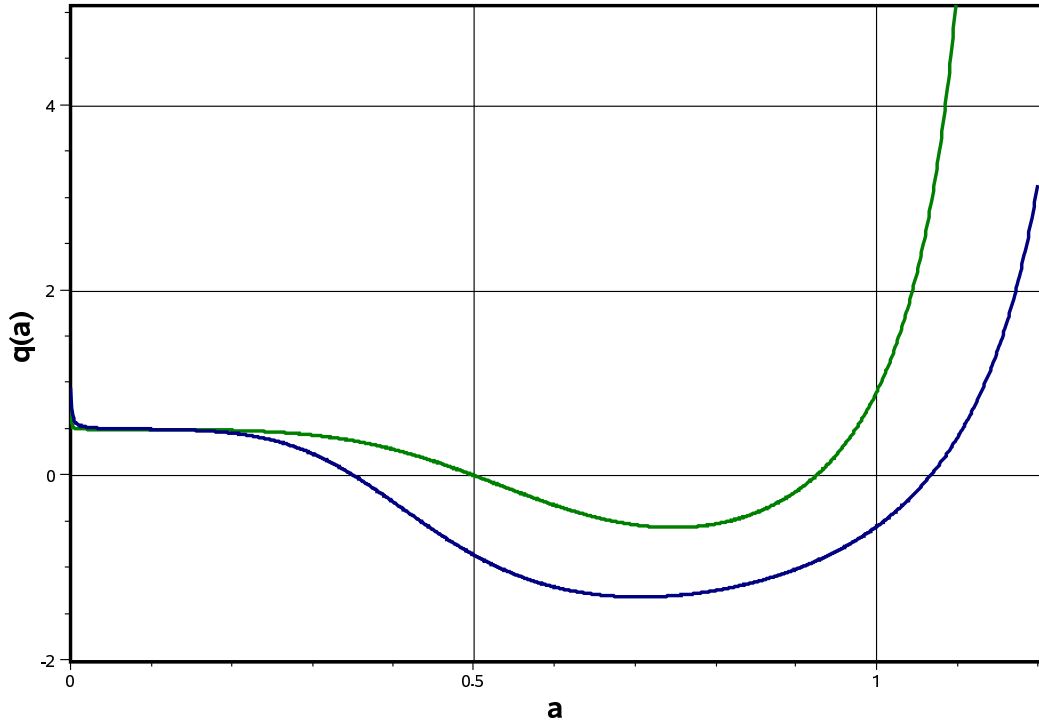


FIGURA 4.7 – Evolução do parâmetro de desaceleração em função do fator de escala normalizado. A curva azul corresponde a  $\Omega_m^A = \Omega_b^A = 0,044$  enquanto a verde corresponde a  $\Omega_m^A = 0,27$ . As duas curvas foram construídas usando  $m_g = 1.4 \times 10^{-65} g$ .

verso acelerado no presente para  $m_g < 1,27 \times 10^{-65} g$ . Se  $\Omega_m = 0,044$  então o Universo estará acelerado no tempo presente se  $m_g < 1,47 \times 10^{-65} g$ .

É interessante notar que esse resultado é compatível com universos de idades e ciclos maiores, o que pode indicar uma tendência para o melhor modelo nessas faixas de massas. No entanto, é possível obter um modelo com idade coerente e com desaceleração no presente. Assim, o modelo poderia explicar a grande parcela de densidade de energia desconhecida, porém sem proporcionar uma fase de expansão acelerada no tempo presente, embora tenhamos obrigatoriamente fases de aceleração na história do Universo independentemente do valor da massa do gráviton.

A única evidência até o momento de uma fase de expansão acelerada no tempo presente provém da observação das Supernovas do tipo Ia a altos redshifts. Porém os dados observacionais indicam que há aceleração da expansão no tempo presente quando confrontados com os modelos  $\Lambda$ CDM, gás de Chaplygin ou outros. É de suma importância, portanto, que nosso modelo possa explicar as observações e, só assim, poderemos decidir sobre a expansão acelerada atual nesse novo contexto.

O estudo dos observáveis no modelo massivo será assunto do próximo capítulo.

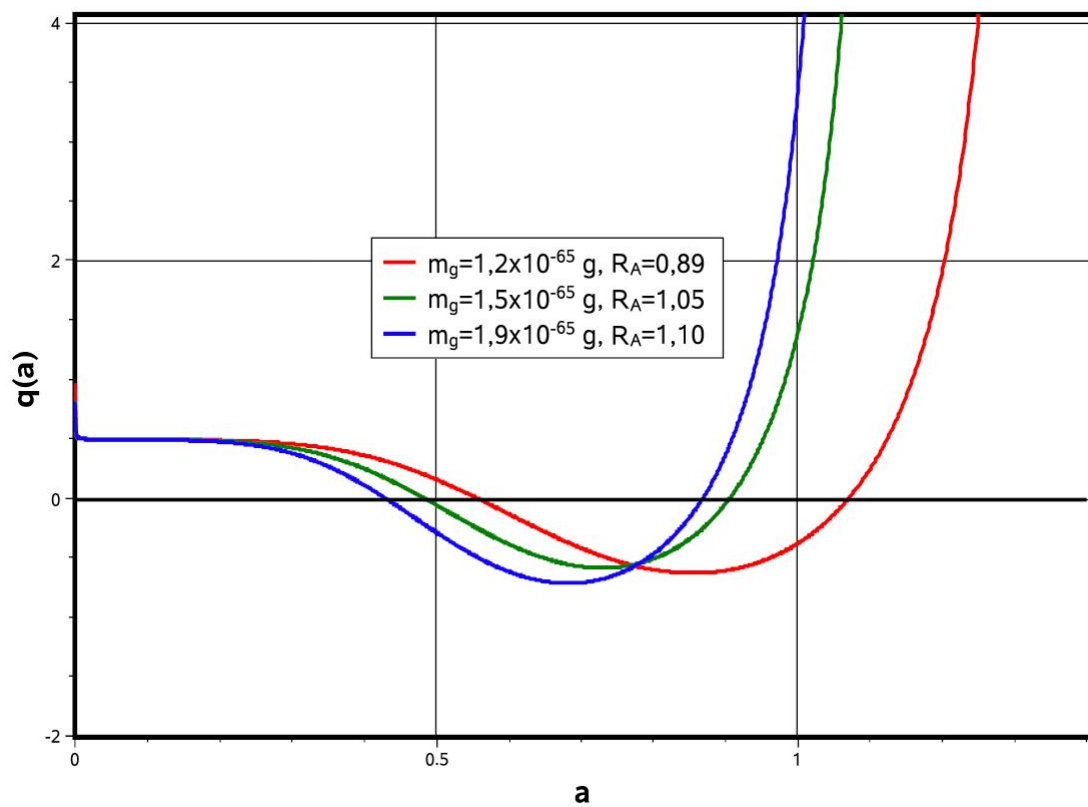


FIGURA 4.8 – Evolução do parâmetro de desaceleração para diferentes valores de  $m_g$ . Foi utilizado  $\Omega_m^A = 0,27$

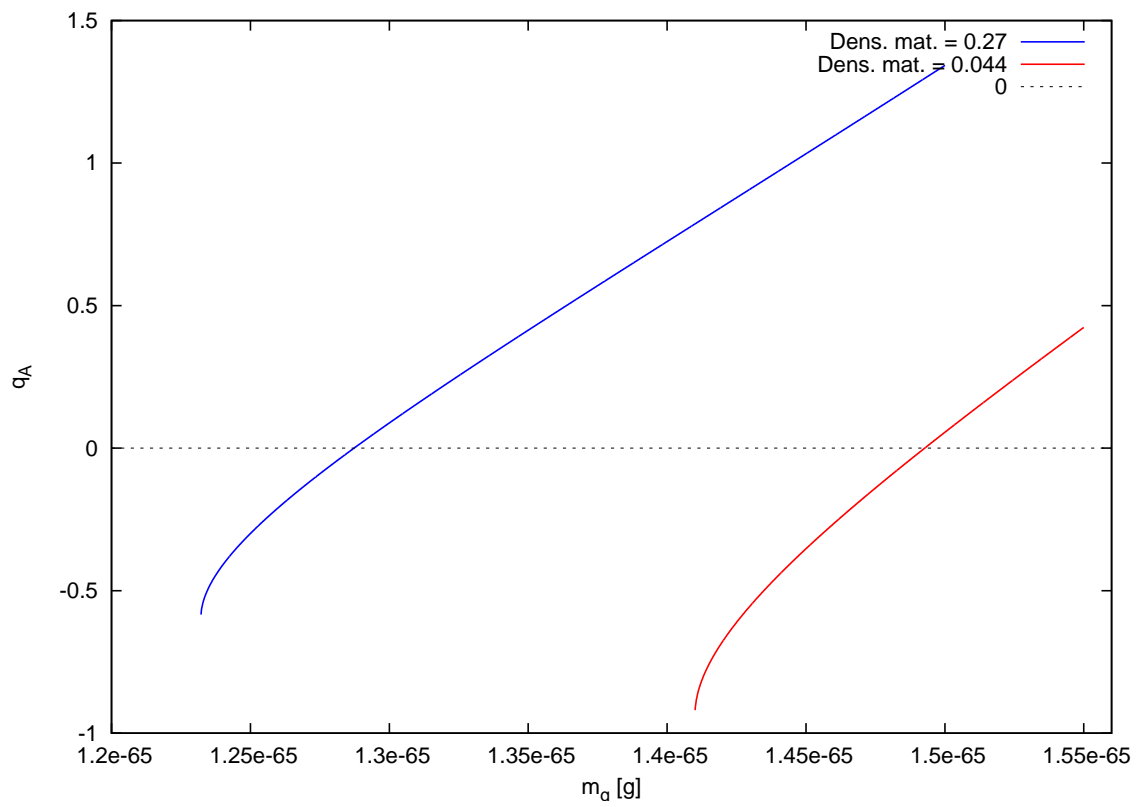


FIGURA 4.9 – Relação entre o valor atual do parâmetro de desaceleração, a massa do gráviton e  $\Omega_m^A$

## CAPÍTULO 5

### TESTANDO O MODELO

#### 5.1 O *Redshift*

A informação mais importante a respeito do fator de escala  $R(t)$  provém das observações dos deslocamentos em frequência da luz emitida por fontes distantes. Para calcular tal deslocamento, podemos nos colocar na origem  $r = 0$  das coordenadas (de acordo com o princípio cosmológico, isso é mera convenção) e considerar uma onda eletromagnética viajando até nós ao longo da direção  $-r$ , com  $\theta$  e  $\phi$  fixados. Na teoria de Visser, assim como na teoria de Einstein, é a métrica dinâmica a responsável por descrever as equações de movimento. Da métrica RW (2.15), a equação de movimento de uma frente de crista de onda é então (e.g. [17]):

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0. \quad (5.1)$$

Se a onda deixa uma galáxia típica, localizada em  $r_1, \theta_1, \phi_1$ , no tempo  $t_1$ , então ela chegará a nós no tempo  $t_0$ <sup>1</sup> dado por:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = f(r_1), \quad (5.2)$$

onde  $f(r_1)$  é independente do tempo, e dada por:

$$f(r_1) \equiv \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} r_1 & k = +1 \\ r_1 & k = 0 \\ \sinh^{-1} r_1 & k = -1 \end{cases}$$

Se a próxima crista deixa  $r_1$  no tempo  $t_1 + \delta t_1$ , ela nos alcançará no tempo  $t_0 + \delta t_0$ , que mais uma vez é dado por:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} = f(r_1). \quad (5.3)$$

Considerando que  $R(t)$  varia muito pouco no período típico de um sinal luminoso, podemos fazer:

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{R(t)}. \quad (5.4)$$

---

<sup>1</sup>Neste capítulo, utilizaremos o índice “0” para simbolizar quando o valor das grandezas for tomado no tempo atual

Renomeando a integral:

$$\int \frac{cdt}{R(t)} = A(t) \quad \text{e} \quad \frac{dA(t)}{dt} = \frac{1}{R(t)}, \quad (5.5)$$

podemos reescrever (5.4) na forma:

$$\begin{aligned} A(t_0 + \delta t_0) - A(t_1 + \delta t_1) &= A(t_0) - A(t_1) \\ A(t_0 + \delta t_0) - A(t_0) &= A(t_1 + \delta t_1) - A(t_1) \\ \delta t_0 \left[ \frac{A(t_0 + \delta t_0) - A(t_0)}{\delta t_0} \right] &= \delta t_1 \left[ \frac{A(t_1 + \delta t_1) - A(t_1)}{\delta t_1} \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Tomando  $\delta t_0 \rightarrow 0$  e  $\delta t_1 \rightarrow 0$ , a equação (5.6) fica:

$$\delta t_0 \left( \frac{dA(t)}{dt} \right)_{t_0} = \delta t_1 \left( \frac{dA(t)}{dt} \right)_{t_1}, \quad (5.7)$$

e por (5.5) encontramos:

$$\frac{\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)}. \quad (5.8)$$

A frequência observada  $\nu_0$  é, então, relacionada com a frequência emitida por:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}. \quad (5.9)$$

Essa relação pode ser convenientemente expressa através do parâmetro conhecido como redshift  $z$ . Ele é definido como a fração do crescimento do comprimento de onda:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1, \quad (5.10)$$

assim temos:

$$a(t) = \frac{1}{1 + z}, \quad (5.11)$$

onde  $a(t) = R(t)/R(t_0)$  e  $t$  é o tempo em que o fóton foi emitido.

Assim, se o Universo está expandindo, então  $R(t_0) > R(t)$ , e (5.11) dá um deslocamento para o vermelho, enquanto que se o Universo está contraindo, então  $R(t_0) < R(t)$ , e (5.11) dá um desvio para o azul.

## 5.2 Uma Definição Cosmológica de Distância

Nossa definição de distância será baseada na luminosidade aparente de uma fonte distante.

Seja  $E = h\nu$  a energia de um fóton emitido pela fonte, e  $E_0 = h\nu_0$  a energia observada do mesmo fóton. Devido à expansão do Universo, por (5.10), a energia recebida é dada por  $E_0 = h\nu(z+1)^{-1}$ , ou seja, a energia recebida é reduzida por um fator  $(1+z)^{-1}$  em relação à energia emitida:

$$E_0 = \frac{E}{(z+1)}. \quad (5.12)$$

Admitindo que a fonte irradie isotropicamente, e que os fótons são emitidos num intervalo de tempo  $\delta t$ , num período  $T$  o número de fótons emitidos é:

$$\frac{T}{\delta t} = n.$$

No mesmo intervalo de tempo, numa superfície esfericamente simétrica distante, ao redor da fonte, o número de fótons que chegam é:

$$\frac{T}{\delta t_0} = n_0.$$

Fazendo a razão entre essas duas equações:

$$\frac{\delta t}{\delta t_0} = \frac{n_0}{n}, \quad (5.13)$$

e por (5.9) encontramos que o número de fótons que chegam na superfície esférica é alterado por

$$n_0 = n(1+z)^{-1}. \quad (5.14)$$

Assim, a energia total recebida da fonte no período  $T$  é:

$$E_{T_0} = n_0 E_0$$

$$E_{T_0} = \frac{E_T}{(z+1)^2}, \quad (5.15)$$

onde  $E_T = nE$  é a energia total que emana da fonte no mesmo intervalo de tempo.

Dessa forma, o fluxo recebido é alterado pelo mesmo fator:

$$\mathcal{F}_0 = \frac{\mathcal{F}}{(z+1)^2}. \quad (5.16)$$

Considere, agora, que a luz emanada da fonte  $P$  no tempo  $t_1$ , é observada por nós “agora” em  $O$  no tempo  $t = t_0$  ( $t_1 < t_0$ ) (ver figura 5.1). A luz se espalhará para fora da superfície de uma esfera com centro no evento  $P_0$  ( $t = t_0$ ,  $r = r_1$ ) passando no evento  $O_0$  ( $t = t_0$ ,  $r = 0$ ). A área superficial dessa esfera é a mesma da esfera centrada em  $O_0$  passando através de  $P_0$  (linha pontilhada da fig. 5.1) devido à homogeneidade. Essa

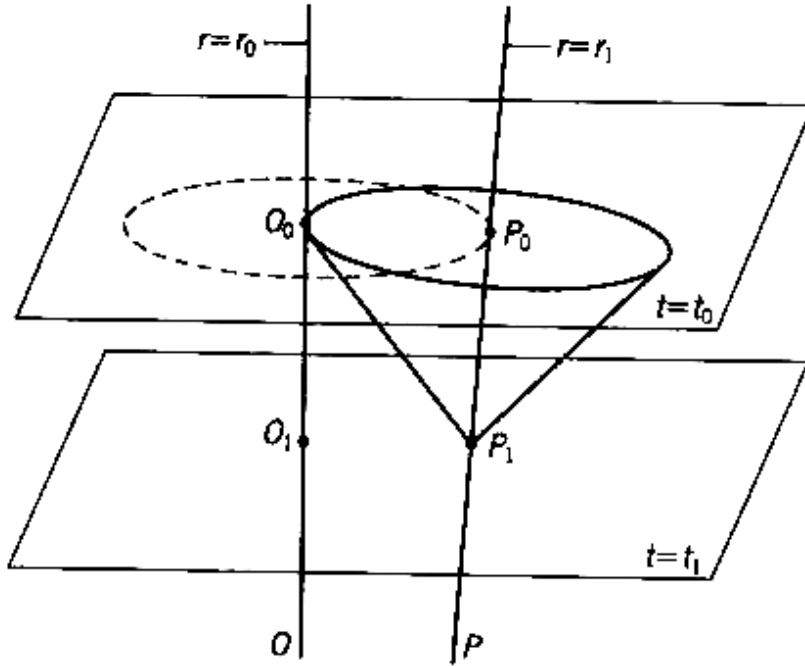


FIGURA 5.1 – Luz de  $P_1$  espalhando-se sobre uma esfera passando por  $O_0$ . Figura de [16]

esfera possui raio  $R(t_0)r_1$  e, portanto, sua área superficial é  $4\pi R^2(t_0)r_1^2$ . Assim, o fluxo será dado por:

$$\mathcal{F} = \frac{L}{4\pi r_1^2 R^2(t_0)}, \quad (5.17)$$

onde  $L$  é a luminosidade absoluta da fonte. Pela equação (5.16) o fluxo observado fica [16]:

$$\mathcal{F}_0 = \frac{L}{4\pi r_1^2 R^2(t_0)(1+z)^2}, \quad (5.18)$$

ou

$$\mathcal{F}_0 = \frac{L}{4\pi d_L^2}, \quad (5.19)$$

onde  $d_L$  é a distância de luminosidade:

$$d_L = r_1 R(t_0)(1+z) \quad (5.20)$$



### 5.3 A Distância de Luminosidade e a Massa do Gráviton

A distância de luminosidade depende tanto da curvatura espacial quanto da dinâmica da expansão do Universo. Para demonstrar isso, tomemos novamente a expressão (5.1) que, como vimos, resulta em:

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \vartheta , \quad (5.21)$$

que nos dá

$$\begin{aligned} r &= \sin \vartheta & k &= +1 \\ r &= \vartheta & k &= 0 \\ r &= \sinh \vartheta & k &= -1 \end{aligned}$$

Pela definição do parâmetro de Hubble e por (5.11) temos que:

$$\frac{dz}{dt} = -(1+z)H(z) , \quad (5.22)$$

que nos permite reescrever a relação (5.21) na forma:

$$\vartheta = \int_t^{t_0} \frac{cdt}{R(t)} = \frac{c}{R_0 H_0} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} , \quad (5.23)$$

onde  $h(z) = H(z)/H_0$ . Tomando a equação de Friedmann (2.18) para o tempo atual, temos a seguinte relação para o parâmetro de densidade total do Universo:

$$\frac{k}{R_0^2 H_0^2} = \Omega_{total} - 1 . \quad (5.24)$$

Assim, com (5.24) e (5.23) em (5.20) temos a expressão geral para a distância de luminosidade num Universo com diversos componentes [37]:

$$d_L(z) = \frac{(1+z)cH_0^{-1}}{|\Omega_{total} - 1|^{\frac{1}{2}}} S(\vartheta) \quad (5.25)$$

onde

$$\vartheta = |\Omega_{total} - 1|^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{dz'}{h(z')} , \quad (5.26)$$

e  $S(\vartheta)$  é definido como segue:

$$S(\vartheta) = \begin{cases} \sin \vartheta & k = +1 \ (\Omega_{total} > 1) \\ \vartheta & k = 0 \ (\Omega_{total} = 1) \\ \sinh \vartheta & k = -1 \ (\Omega_{total} < 1) \end{cases}$$

Tomando, por exemplo, o modelo com matéria dominante e Universo plano, temos:

$$d_L^{MD} = (1+z)cH_0^{-1} \int_0^z \frac{dz'}{h(z')} = (1+z)cH_0^{-1} \int_0^z \frac{dz'}{(1+z')^{\frac{3}{2}}} \quad (5.27)$$

$$d_L^{MD} = 2cH_0^{-1} \left[ (1+z) - (1+z)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (5.28)$$

Para a solução de de Sitter ( $\Omega_\Lambda = 1$  e  $\Omega_m = 0$ ), a distância de luminosidade é simplificada para:

$$d_L^{dS} = cH_0^{-1}z(1+z). \quad (5.29)$$

Considerando o modelo com matéria, radiação e constante cosmológica, a equação (5.25) fica:

$$d_L^{\Lambda CDM} = (1+z)cH_0^{-1} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m^0(1+z')^3 + \Omega_r^0(1+z')^4 + \Omega_\Lambda^0}}, \quad (5.30)$$

e para o modelo que construímos a partir da teoria de Visser, utilizando a equação (4.35), ficamos com:

$$d_L^{mass} = (1+z)cH_0^{-1} \int_0^z dz' \sqrt{\Pi(z')}, \quad (5.31)$$

onde

$$\Pi(z') = \frac{(1+z')^4}{\Omega_m^0(1+z')^7 + \Omega_r^0(1+z')^8 - (m_g/m_H)^2 [R_0^4/14 - (R_0^2/10)(1+z')^2]}. \quad (5.32)$$

Se utilizamos a relação entre o fator de escala tomado para o tempo atual, e a massa do gráviton (eq. 4.52), os parâmetros livres para a relação (5.31) são  $\Omega_r^0$ ,  $\Omega_m^0$  e  $m_g$ .

Calculamos numericamente a distância de luminosidade para o modelo massivo e para o modelo  $\Lambda$ CDM. Na figura 5.2 comparamos esses dois modelos e, de forma ilustrativa, graficamos também  $d_L^{MD}(z)$  e  $d_L^{dS}(z)$ . O cálculo da distância de luminosidade  $d_L^{mass}$  que apresentamos nessa figura foi realizado utilizando  $m_g = 1,25 \times 10^{-65} g$  e  $\Omega_m^0 = 0,27$ , no entanto é interessante verificar, também, como se comporta a distância de luminosidade para outras combinações de parâmetros.

Na figura 5.3 apresentamos diferentes possibilidades, inclusive para  $\Omega_m^0 = 0,04$  que, como vemos, para certos valores de massa, aproxima-se da curva  $d_L^{\Lambda CDM}(z)$  para baixos redshifts. De outra forma, a distância de luminosidade calculada para  $\Omega_m^0 = 0,27$  descreve

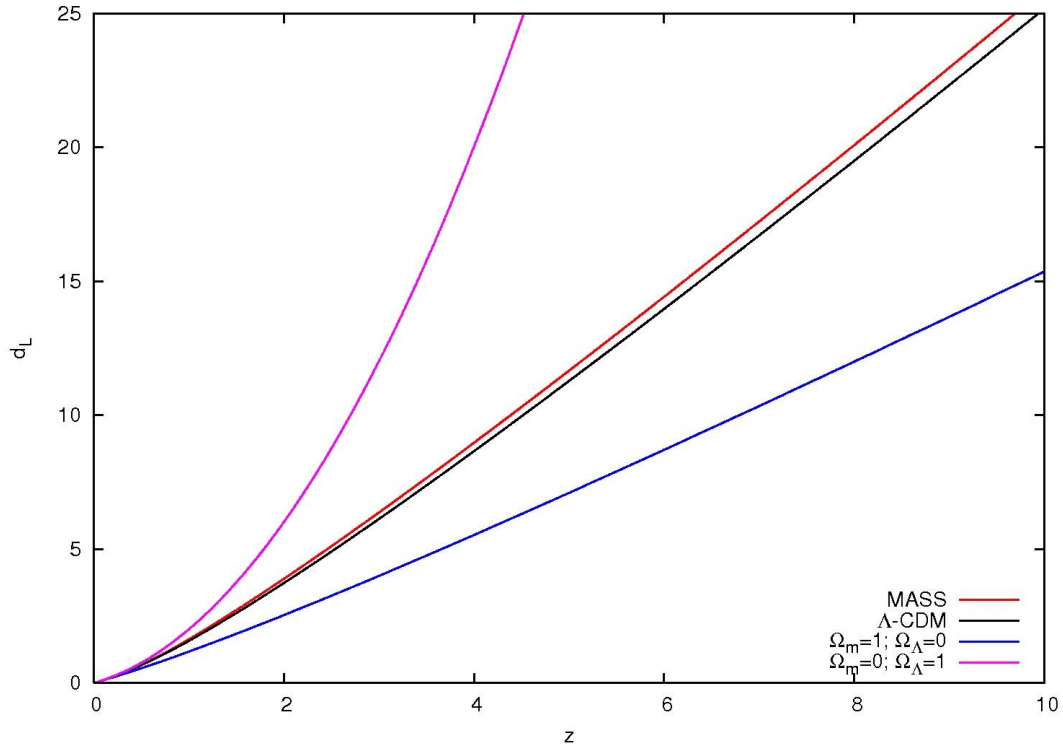


FIGURA 5.2 – Distância de luminosidade (em unidades de  $cH_0^{-1}$ ) para o modelo massivo,  $\Lambda$ CDM, matéria dominante e de Sitter.

o mesmo comportamento que no modelo  $\Lambda$ CDM, sendo possível ajustar um dado valor de massa para o gráviton que sobrepõe as duas curvas, esse valor é  $m_g \approx 1,4 \times 10^{-65} g$ . Para esse valor de massa, o parâmetro de desaceleração possui valor positivo no tempo atual (ver fig 4.9), ou seja, o modelo nos fornece expansão desacelerada no tempo atual para a mesma evolução que, no modelo  $\Lambda$ CDM, nos fornece expansão acelerada.

No entanto, a diferença entre as curvas com diferentes valores de massa é muito sutil, aumentando pouco para altos redshifts. Note, por exemplo, os valores de massa para o gráviton que escolhemos na figura 5.3, o menor valor corresponde a  $q_A < 0$ , enquanto o maior corresponde a  $q_A > 0$ . É claro que, nesses casos, os menores valores são preferíveis, uma vez que eles proporcionam um modelo de Universo com maiores valores de idade.

Para verificar as diferenças entre a distância de luminosidade no modelo massivo e no modelo com constante cosmológica, graficamos  $d_L^{mass}(z) \times d_L^{\Lambda CDM}$  na figura 5.4

Estivemos comparando nosso modelo com o modelo  $\Lambda$ CDM que melhor ajusta os dados observacionais ( $\Omega_m = 0,27$  e  $\Omega_\Lambda = 0,73$ ), no entanto, esse modelo possui suas limitações. Assim, faz-se mister a comparação direta do modelo massivo com os dados observacionais. A próxima seção será dedicada a essa tarefa.

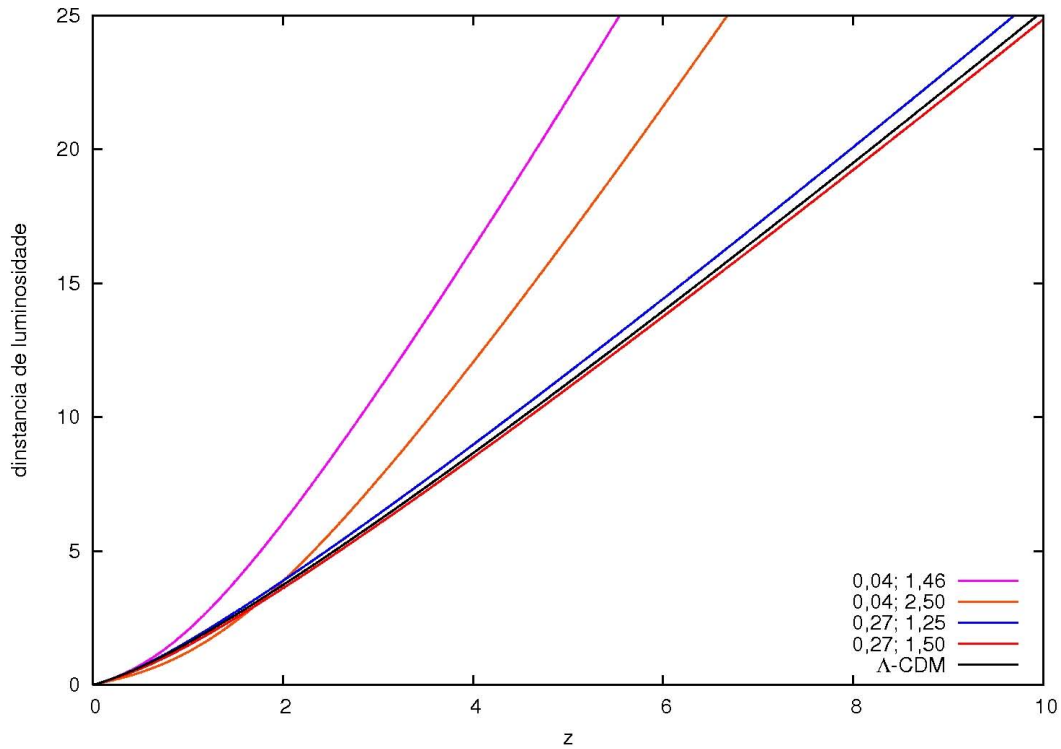


FIGURA 5.3 – Distância de luminosidade (em unidades de  $cH_0^{-1}$ ) para diferentes combinações dos parâmetros  $\Omega_m^0$  e  $m_g$  comparadas com o modelo  $\Lambda$ CDM. A legenda está dada da seguinte forma:  $(\Omega_m^0; m_g[1 \times 10^{-65}g])$

## 5.4 As Supernovas Tipo Ia

Supernova é uma explosão estelar que produz um plasma remanescente extremamente brilhante, que pode emitir na região visível do espectro por semanas ou meses. Há diferentes tipos de supernovas e duas possíveis rotas para sua formação. Uma estrela massiva pode cessar de gerar energia por fusão dos núcleos atômicos em sua região central e colapsar sob a ação de sua própria gravidade, formando uma estrela de nêutrons ou um buraco negro, ou uma anã branca pode acumular material de uma estrela companheira até atingir o limite de Chandrasekhar.

As supernovas do tipo Ia correspondem à segunda classe e são caracterizadas pela ausência completa de linhas de hidrogênio e hélio, além de uma distinta e forte linha de absorção próxima a  $6100 \text{ \AA}$ , a qual vem de um dubleto de silício uma vez ionizado. O alto valor de sua luminosidade ( $M_B \simeq -19,5$ ) sugere que ela pode ser vista a grandes distâncias, o que a torna um candidato ideal para medir e restringir os parâmetros cosmológicos. A importância crucial em utilizar as supernovas tipo Ia para estimar a distância de luminosidade  $d_L$  vem da observação de que: (a) a dispersão em sua luminosidade máxima é extremamente pequena ( $\lesssim 0,3$ ); (b) a largura da curva de luz da supernova

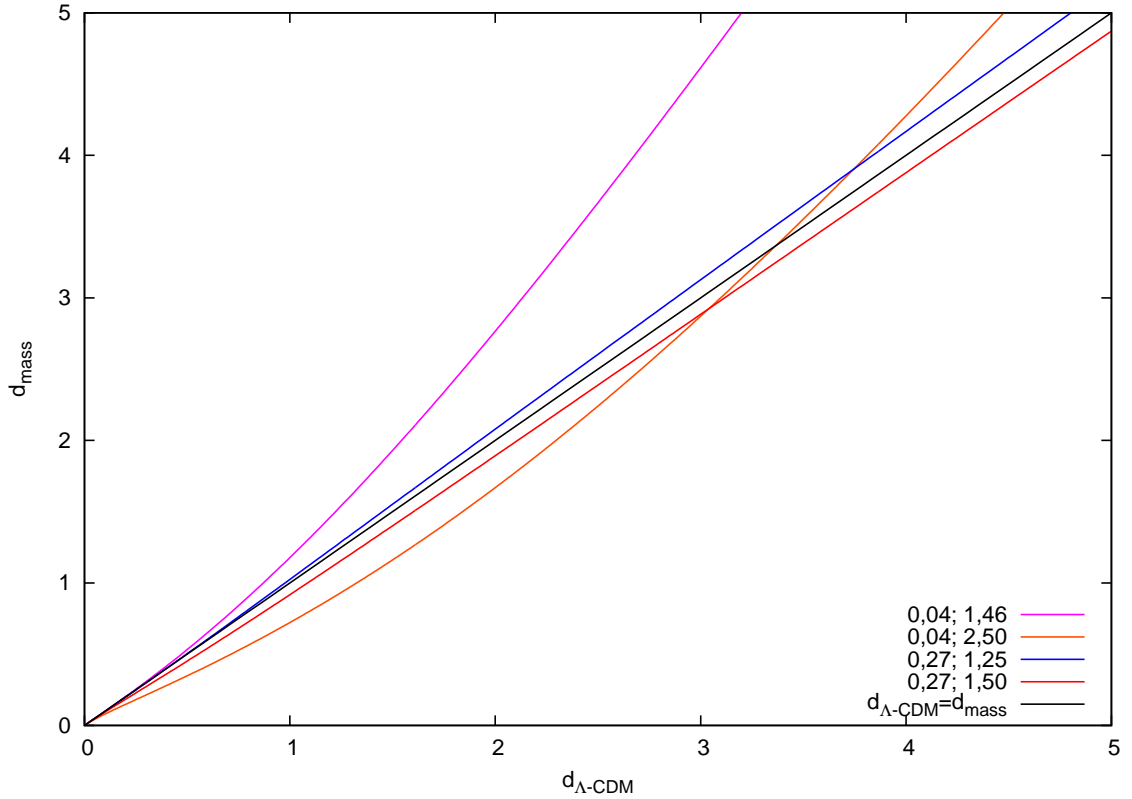


FIGURA 5.4 – Comparação entre as distâncias de luminosidades (em unidades de  $cH_0^{-1}$ ) calculada no modelo massivo e no modelo  $\Lambda$ CDM para diferentes combinações dos parâmetros  $\Omega_m^0$  e  $m_g$ . A legenda está dada da seguinte forma:  $(\Omega_m^0; m_g[1 \times 10^{-65}g])$ .

está fortemente correlacionada com sua luminosidade intrínseca: uma supernova mais brilhante terá uma curva de luz mais larga indicativa de um declínio mais gradual do brilho. As características (a) e (b) reduzem a dispersão da luminosidade absoluta da supernova do tipo Ia para  $\sim 10\%$  [37] tornando-as excelentes “velas padrão” (*standard candle*).

Na figura 5.5 mostamos a comparação entre os espectros de uma supernova descoberta em janeiro de 1999 [38] com outra supernova em diferente redshift. A figura ilustra que não há diferença significativa, o que dá suporte à hipótese de vela padrão.

No intuito de restringir os parâmetros cosmológicos, levantamentos de supernovas tipo Ia foram realizados por alguns grupos de pesquisa tais como o *Supernova Cosmology Project* [2], o *High- $z$  Supernova Search Team* [40] ou mais recentemente Riess et al [39] entre outros.

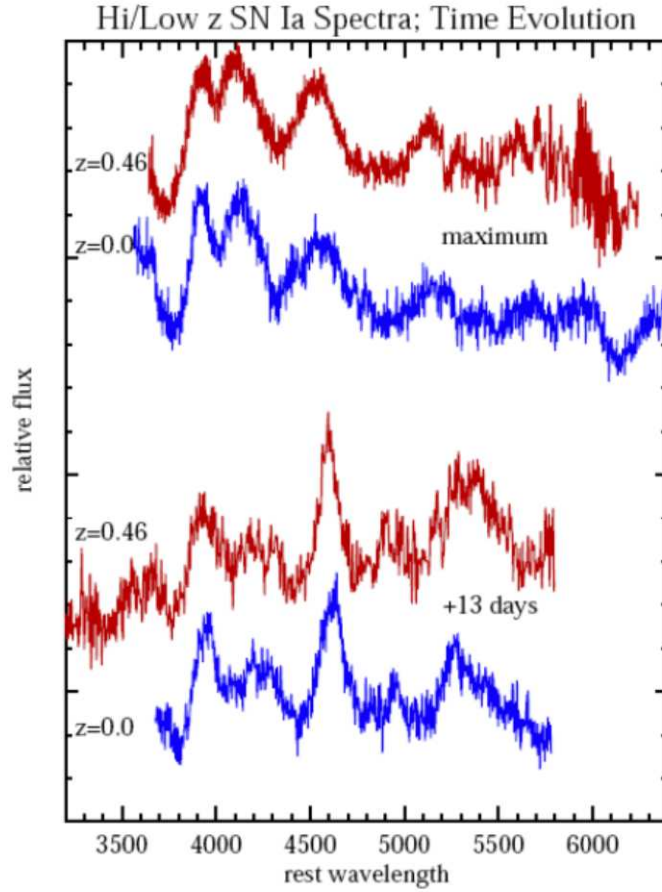


FIGURA 5.5 – Comparação espectral entre duas supernovas tipo Ia a alto ( $z = 0,46$ ) e baixo ( $z = 0,0$ ) redshift mostrando uma notável similaridade. Figura de [38].

Uma quantidade de particular interesse nesse contexto é a magnitude aparente  $m$  de um objeto de magnitude absoluta  $M$ , que relaciona-se com o redshift por:

$$\mu \equiv m - M = 5 \log(d_L) - 5 + A, \quad (5.33)$$

onde  $\mu$  é conhecido como módulo de distância,  $A$  é a absorção em magnitudes e  $d_L$  é a distância de luminosidade (em  $pc$ ) dependente da cosmologia que estudamos nas seções anteriores. Num modelo  $\Lambda$ CDM, a relação (5.33) pode ser utilizada, em princípio, para determinar os parâmetros  $\Omega_m$  e  $\Omega_{total}$  se  $m$  e  $M$  são conhecidos dentro de limites razoáveis. Em nosso modelo ela nos permitirá determinar também  $m_g$ .

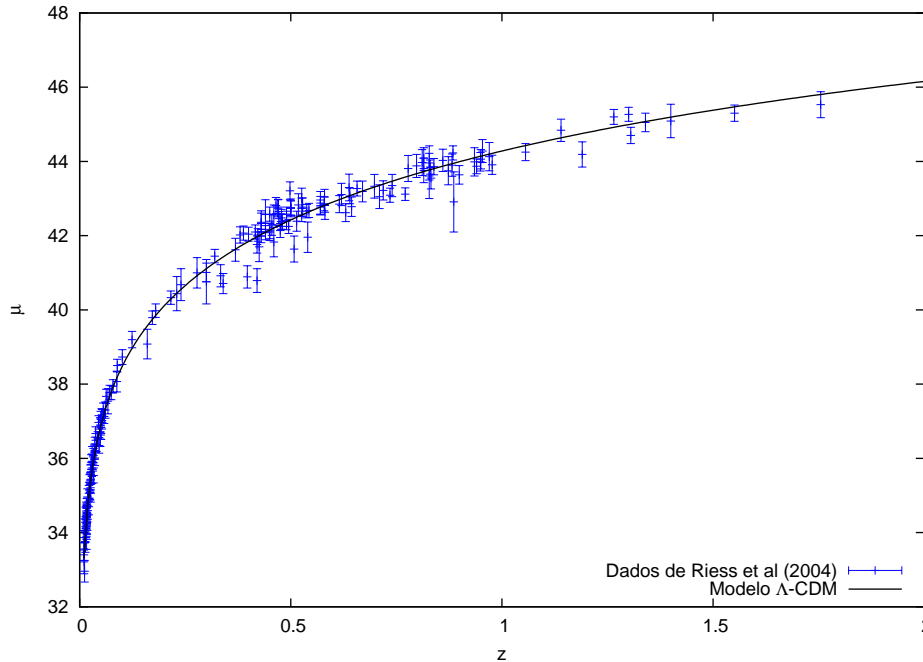


FIGURA 5.6 – Melhor ajuste do módulo de distância teórico (curva sólida), obtida a partir do modelo  $\Lambda$ -CDM, com os dados da tabela 5 de [39]. As barras de erro são aquelas tomadas dos dados publicados.

Na figura 5.6 reproduzimos o melhor ajuste no modelo  $\Lambda$ CDM utilizando (5.30) em (5.33). A curva teórica é comparada com os dados de Riess *et al* [39]. O próximo passo é comparar nosso modelo com os dados observacionais. Aplicando (5.31) em (5.33) obtemos como o módulo de distância se comporta com o redshift. Na figura 5.7 comparamos o modelo massivo para alguns valores de massa do gráviton e para os valores de densidade da matéria que temos tomado como padrões. Veja que o melhor ajuste para todos os dados (e o que descreve o mesmo comportamento que o modelo  $\Lambda$ -CDM) é obtido quando utilizamos  $\Omega_m = 0,27$ . Pequenas variações na massa do gráviton, para esse valor de densidade relativa da matéria, não alteram a concordância com os pontos observacionais, as curvas para  $m_g = 1,25 \times 10^{-65} g$  e  $m_g = 1,35 \times 10^{-65} g$  estão praticamente sobrepostas e caem perfeitamente dentro das barras de erro. No entanto, o primeiro valor nos confere um universo acelerado no tempo presente (ver fig. 4.9), enquanto o segundo nos guia para uma solução desacelerada. Assim, em princípio, nosso modelo pode explicar os dados sem a necessidade de impor um universo acelerado no tempo presente, embora ele tenha passado por uma fase de aceleração da expansão no passado. O modelo massivo admite, inclusive, a possibilidade de que o universo esteja se expandindo com velocidade

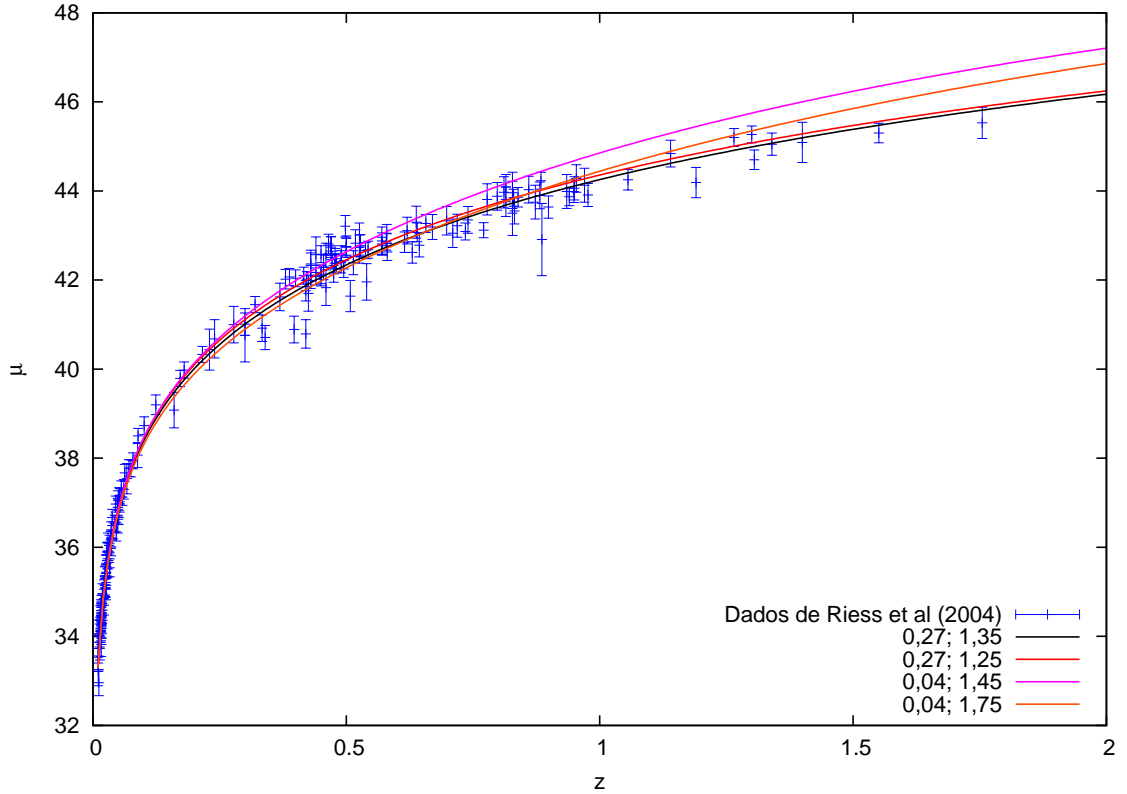


FIGURA 5.7 – Comparação entre o módulo de distância teórico, obtida a partir do modelo massivo, com os dados da tabela 5 de [39]. A legenda é dada na seguinte forma:  $(\Omega_m; m_g [10^{-65} g])$  As barras de erro são aquelas tomadas dos dados publicados.

constante no tempo presente ( $q_A = 0$ ), o valor para a massa do gráviton nesse caso seria de  $1,28 \times 10^{-65} g$  quando utilizamos  $\Omega_m = 0,27$ .

Voltemos nossa atenção para o caso  $\Omega_m = 0,04$ . O que vemos pela figura 5.7 é que, para  $m_g = 1,45 \times 10^{-65} g$  ( $q_A < 0$ ), a curva é condizente com as observações até  $z \approx 1,2$ . Para redshifts mais altos, os objetos observados deveriam parecer menos brilhantes segundo essa curva. Mas, veja que a quantidade de dados para redshifts mais altos é menor, o que mostra também a dificuldade em se observar objetos muito distantes. Para maiores valores de massa do gráviton, a curva se distancia mais dos dados, como é o caso da curva para  $m_g = 1,75 \times 10^{-65} g$  ( $q_A > 0$ ). Mesmo assim essa curva ainda está dentro das barras de erros para baixos redshifts.

Essa análise nos motiva a escolher  $\Omega_m = 0,27$  e valores de massa para o gráviton próximas ao limite inferior como sendo os parâmetros que proporcionam melhor concordância



com as observações. No entanto, como já mencionamos, as diferenças mais significativas na escolha de diferentes parâmetros aparecem para altos redshifts ( $z \gtrsim 1, 2$ ). Assim, somente o acúmulo de observações de eventos cada vez mais distantes pode nos levar a uma inferência a respeito dos corretos valores dos parâmetros.



## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÃO

Há um fato notável que emerge do modelo obtido. Veja que, nas análises que fizemos a respeito da massa do gráviton, em todos os casos, a massa tende para um mesmo, e muito pequeno, conjunto de possíveis valores.

Analisemos em particular o caso  $\Omega_m = 0,27$ . No cálculo da idade obtivemos os limites (4.51), sendo que o limite superior depende do valor da idade que admitimos, em nosso caso assumimos um modelo com idade mínima de  $14Ganos$ . Dentro das massas possíveis nesse intervalo, a curva  $\mu \times z$  praticamente não é alterada, sendo condizente com as observações das supernovas do tipo Ia (ver fig. 5.7) e mais, o comportamento dessa curva é o mesmo do melhor ajuste previsto pelo modelo  $\Lambda$ CDM para os redshifts observados. Então esperamos que a massa do gráviton possua um valor muito próximo do limite inferior para que o modelo tenha consistência. É justamente para esses pequenos valores que teremos um modelo acelerado no tempo presente. No entanto, é importante ressaltar, mais uma vez, que a linha divisória entre um Universo acelerado ou desacelerado no tempo atual é extremamente sensível ao valor da massa do gráviton. De tal forma que se relaxarmos um pouco o critério do valor mínimo da idade, somos capazes de descrever as observações das Supernovas sem que o Universo esteja acelerado no tempo presente, embora tenha passado inevitavelmente por uma fase acelerada em sua história evolutiva. Sendo assim, nossa conclusão a respeito desse modelo, que podemos chamar (abusando da linguagem) de *mass*CDM, é que não é possível distinguí-lo do  $\Lambda$ CDM a partir das observações das Supernovas tipo Ia.

E o caso  $\Omega_m = 0,04$ ? A mesma figura 5.7 nos mostra que os dados podem ser explicados para até aproximadamente  $z = 1,2$  para um dado valor de massa. Para redshifts mais altos, como já vimos, o modelo sai dos pontos experimentais e não é capaz de descrever tão bem os dados como o modelo  $\Lambda$ CDM ou *mass*CDM. Mas é importante ressaltar a baixa quantidade de dados para altos redshifts, o que não nos deixa em posição de excluir o modelo sem outros testes ou medidas em maiores distâncias. Mas aqui devemos estar atentos a um ponto. Explicar matéria ou energia escura são tarefas distintas. A energia escura é necessária para as escalas cosmológicas, e como vimos, em princípio, nosso modelo é capaz de explicá-la. Por outro lado, a matéria escura é necessária já em escalas galácticas, devido à diferença observada nas curvas de rotação teórica (utilizando gravitação Newtoniana) e experimental, surgindo a necessidade então de impor a existência de matéria adicional não observada ou de uma modificação na lei de gravitação.

Esses resultados utilizam-se do limite não relativístico e, nesse limite, a teoria de Visser resulta num potencial do tipo Yukawa. Para grávitons com massas da ordem qua estamos

considerando ( $10^{-65}g$ ), o potencial de Yukawa deve prever os mesmos resultados que o Newtoniano para escalas do tamanho de galáxias típicas [41], pois estes valores de massa nos conferem um comprimento de onda Compton da ordem do tamanho do Universo observável. Desse ponto de vista concluímos que o modelo massivo não pode explicar a matéria escura.

Vale ressaltar que, algumas idéias na construção de nosso modelo foram assumidas *a priori* como por exemplo os valores das densidades de energia e a planura do Universo ( $k = 0$ ). Embora sejam conceitos bem aceitos de forma geral, é interessante manter esses parâmetros livres e, através de estudos estatísticos, determiná-los pelas observações através dos melhores ajustes com os dados.

Cabe aqui algumas palavras sobre a curvatura espacial na teoria de Visser. Se a métrica dinâmica não for plana, é consistente conceitualmente utilizarmos uma métrica de fundo tipo Minkowski? Ou, de outra forma, a métrica de fundo deveria descrever a mesma curvatura que a métrica dinâmica? São questões para as quais ainda não temos respostas, mas que são importantes na construção de um modelo completo que seja capaz de abarcar todas as possibilidades. Só o que podemos adiantar é que, se as curvaturas das duas métricas forem distintas a complexidade das equações aumenta consideravelmente. De qualquer forma, esse é apenas um primeiro teste para o modelo cosmológico com grávitons massivos. Muitas outras questões podem ser levantadas para testar o modelo, dentre elas podemos ressaltar algumas, por exemplo: como é o cenário de formação de estruturas? É possível reproduzir o espectro de potência da radiação cósmica de fundo nesse modelo? Como se daria a evolução de ondas gravitacionais primordiais nesse contexto? É possível encontrar alguma assinatura na CMB que indique a existência de um gráviton com massa não nula?

Em particular, o chamado modo-B de polarização da CMB nos fornece uma oportunidade única de distinguir entre efeitos de perturbações tensoriais (ondas gravitacionais) e escalares, uma vez que este é excitado apenas por modos tensoriais ou vetoriais [42].

Deste ponto de vista, futuras missões com satélites, como o Planck, os quais terão sensibilidade suficiente para detectar ou estabelecer limites para o modo-B da CMB previsto pelos modelos inflacionários mais simples, podem representar o primeiro detector espacial de ondas gravitacionais [43]. Então, as futuras missões da CMB apresentarão uma forma alternativa de impor um novo limite superior para a massa do gráviton e para restringir o número de modos de polarização das ondas gravitacionais.

No que diz respeito à detecção de ondas gravitacionais, podemos dizer que através de seu estudo experimental será possível testar diretamente a gravidade no regime radiativo. A RG poderá ser testada como nunca antes havia sido, e novos limites serão impostos às teorias alternativas.

Um aspecto interessante dentro do estudo de fontes de radiação gravitacional, é que os modelos inflacionários prevêem a geração de um fundo estocástico de ondas gravitacionais primordiais. Esse fundo é uma consequência da amplificação da parte “transversa e sem traço” das flutuações quânticas do tensor métrico. O resultado disso é a formação de um fundo estocástico primordial de ondas gravitacionais distribuído sobre uma grande faixa de frequências [44].

A forma e as características de um fundo estocástico detectado são dependentes tanto da cosmologia como da teoria de gravitação adotada. Esperamos portanto, que teorias alternativas de gravitação, como a teoria de Visser, apresentem fundos estocásticos distintos dos previstos pela RG. Esta via constitui-se numa maneira de identificar a correta teoria de gravitação.

Esses estudos vão de encontro aos interesses do Grupo Gráviton da Divisão de Astrofísica do INPE. Algumas das questões levantadas neste capítulo serão analisadas de forma direta no meu projeto de doutoramento.

Embora o valor da massa do gráviton possa ser tão pequeno e não venha a ser relevante para o sistema solar, há um teste simples, que pode servir para limitar a massa do gráviton ou ainda pode ser um fator excludente da teoria de Visser. Trata-se do avanço do perihélio da órbita dos planetas. Esse problema já é conhecido de longa data e, na relatividade geral, sua solução surge considerando-se termos perturbativos na órbita, que provém da utilização de uma métrica esfericamente simétrica para o vácuo: a métrica de Schwarzschild. Os resultados da RG estão em bom acordo com as observações. A questão é que na teoria de Visser, a solução que encontraríamos considerando simetria esférica no vácuo e na presença de campos gravitacionais seria diferente da métrica de Schwarzschild. Então, será que essa nova métrica estaria também de acordo com as observações? Esta é uma questão importante que deve, com certeza ser levada em consideração.

Como vemos, essa é uma teoria que apenas está começando a ser explorada, mas que demanda atenção em virtude dos bons resultados obtidos no que diz respeito à cosmologia. Perante os atuais modelos para a energia escura, a teoria de Visser vem em boa hora trazendo uma possível explicação que apresenta considerável simplicidade conceitual, procurando manter a física no campo do “conhecido”, ou seja, sem a necessidade de postular a existência de fluidos exóticos que dominem a dinâmica do Universo como um todo. Neste ponto, evocamos mais uma vez o princípio de Occam, para dizer que as soluções mais simples tendem a ser as corretas, tornando desnecessárias a adição de quaisquer termos ou entidades extras.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Spergel, D. N.; Bean, R.; Dore', O.; Nolta, M. R.; Bennett, C. L.; Hinshaw, G.; Jarosik, N.; Komatsu, E.; Page, L.; Peiris, H. V.; Verde, L.; Barnes, C.; Halpern, M.; Hill, R. S.; Kogut, A.; Limon, M.; Meyer, S. S.; Odegard, N.; Tucker, G. S.; Weiland, J. L.; Wollack, E.; Wright, E. L. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology. **ArXiv Astrophysics e-prints**, mar 2006.
- [2] Perlmutter, S.; Aldering, G.; Goldhaber, G.; Knop, R. A.; Nugent, P.; Castro, P. G.; Deustua, S.; Fabbro, S.; Goobar, A.; Groom, D. E.; Hook, I. M.; Kim, A. G.; Kim, M. Y.; Lee, J. C.; Nunes, N. J.; Pain, R.; Pennypacker, C. R.; Quimby, R.; Lidman, C.; Ellis, R. S.; Irwin, M.; McMahon, R. G.; Ruiz-Lapuente, P.; Walton, N.; Schaefer, B.; Boyle, B. J.; Filippenko, A. V.; Matheson, T.; Fruchter, A. S.; Panagia, N.; Newberg, H. J. M.; Couch, W. J.; Project, T. S. C. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. **Astrophysical Journal**, v. 517, p. 565–586, jun 1999.
- [3] Bertolami, O. **Dark Energy - Dark Matter Unification: Generalized Chaplygin Gas Model**. [online], 2005. Disponível em: <http://www.arxiv.org/astro-ph/0504275>. Acesso em: 14/04/2005.
- [4] Albrecht, A.; Skordis, C. Phenomenology of a Realistic Accelerating Universe Using Only Planck-Scale Physics. **Physical Review Letters**, v. 84, p. 2076–2079, mar 2000.
- [5] Bento, M. C.; Bertolami, O.; Santos, N. C. A two-field quintessence model. **Physical Review D**, v. 65, n. 6, p. 067301–+, mar 2002.
- [6] Talmadge, C.; Berthias, J.-P.; Hellings, R. W.; Standish, E. M. Model-independent constraints on possible modifications of Newtonian gravity. **Physical Review Letters**, v. 61, p. 1159–1162, sep 1988.
- [7] Visser, M. Mass for the Graviton. **General Relativity and Gravitation**, v. 30, p. 1717–1728, dec 1998.
- [8] C. W. Misner, K. S. T.; Wheeler, J. A. **Gravitation**. San Francisco: Freeman, 1973.
- [9] Einstein, A. Näherungsweise Integration der Field Gleichungen der Gravitation. In: **Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akad. der Wissenschaften**. Berlin: Erster Halbband, 1916. p. 688–696.

- [10] Einstein, A. The Principal Ideas of the Theory of Relativity. In: Janssen, M.; Schulmann, R.; Illy, J.; Lehner, C.; Buchwald, D. K. (ed.). **The Collected Papers of Albert Einstein. The Berlin Years: Writings, 1918-1921**. Princeton: University Press, 2002. v. 7, p. 3–8.
- [11] Einstein, A. On Gravitational Waves. In: Janssen, M.; Schulmann, R.; Illy, J.; Lehner, C.; Buchwald, D. K. (ed.). **The Collected Papers of Albert Einstein. The Berlin Years: Writings, 1918-1921**. Princeton: University Press, 2002. v. 7, p. 11–29.
- [12] Einstein, A. Über gravitationswellen. In: **Sitzungsberichte der Koniglich Preussischen Akad. der Wissenschaften**. Berlin: Erster Halbband, 1918. p. 154–167.
- [13] Schutz, B. F. **First Course in General Relativity**. UK: Cambridge University Press, 1992.
- [14] Trodden, M.; Carrol, S. M. **TASI Lectures: Introduction to Cosmology**. [online], 2004. Disponível em: <http://www.arxiv.org/astro-ph/0401547>. Acesso em: 26/01/2004.
- [15] Padmanabhan, T. Cosmological constant-the weight of the vacuum. **Physics Reports**, v. 380, p. 235–320, jul 2003.
- [16] d’Inverno, R. **Introducing Einstein’s Relativity**. USA: Oxford, 1992.
- [17] Weinberg, S. **Gravitation and Cosmology**. USA: John Wiley Sons, 1972.
- [18] Islam, J. N. **An introduction to mathematical cosmology**. UK: Cambridge University Press, 1992.
- [19] de Araujo, J. C. N. The dark energy-dominated Universe. **Astroparticle Physics**, v. 23, p. 279–286, jan 2005.
- [20] Caldwell, R. R. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. **Physics Letters B**, v. 545, p. 23–29, oct 2002.
- [21] Gorini, V.; Moschella, U.; Kamenshchik, A.; Pasquier, V. The Chaplygin gas, a model for dark energy in cosmology. In: Esposito, G.; Lambiase, G.; Marmo, G.; Scarpetta, G.; Vilasi, G. (ed.). **AIP Conf. Proc. 751: General Relativity and Gravitational Physics**. [S.l.: s.n.], 2005. p. 108–125.



- [22] Alves, M. E. S.; Miranda, O. D.; Araújo, J. C. N. de. Gás de Chaplygin e Grávitons Massivos - Possíveis Candidatos à Energia Escura? In: Martins, V. A. F.; Santiago, B. X.; Wuensche, C. A.; Gruenwald, R. B. (ed.). **Proceedings of XXXI Reunião Anual da Sociedade Astronômica Brasileira**, Águas de Lindóia, 1-4 Agosto, 2005. São Paulo: IAG/USP, 2005. p. 65–66.
- [23] Goldhaber, A. S.; Nieto, M. M. Mass of the graviton. **Physical Review D**, v. 9, p. 1119–1121, feb 1974.
- [24] Finn, L. S.; Sutton, P. J. Bounding the mass of the graviton using binary pulsar observations. **Physical Review D**, v. 65, n. 4, p. 044022–+, feb 2002.
- [25] Taylor, J. H. Pulsar timing and relativistic gravity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 10, p. 167–+, dec 1993.
- [26] Weisberg, J. M.; Taylor, J. H. The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis. In: Rasio, F. A.; Stairs, I. H. (ed.). **ASP Conf. Ser. 328: Binary Radio Pulsars**. [S.l.: s.n.], 2005. p. 25–+.
- [27] Will, C. M. Bounding the mass of the graviton using gravitational-wave observations of inspiralling compact binaries. **Physical Review D**, v. 57, p. 2061–2068, feb 1998.
- [28] Larson, S. L.; Hiscock, W. A. Using binary stars to bound the mass of the graviton. **Physical Review D**, v. 61, n. 10, p. 104008–+, may 2000.
- [29] Will, C. M. **Theory and experiment in gravitational physics**. New York, U.S.A.: Cambridge University Press, 1993.
- [30] Boulware, D. G.; Deser, S. Can gravitation have a finite range? **Physical Review D**, v. 6, p. 3368–3382, dec 1972.
- [31] Dam, H. van; Veltman, M. Massive and mass-less Yang-Mills and gravitational fields. **Nuclear Physics B**, v. 22, p. 397–411, jun 1970.
- [32] Gabadadze, G.; Gruzinov, A. Graviton mass or cosmological constant? **Physical Review D**, v. 72, n. 12, p. 124007–+, dec 2005.
- [33] Rosen, N. A Theory of Gravitation. **Annals of Physics**, v. 84, p. 455–473, sept 1974.
- [34] Paula, W. L. S. de; Miranda, O. D.; Marinho, R. M. Polarization states of gravitational waves with a massive graviton. **Classical and Quantum Gravity**, v. 21, p. 4595–4605, sept 2004.

- [35] Gershtein, S. S.; Lugonov, A. A.; Mestvirishvili, M. A. **Graviton mass and total relative density of mass  $\Omega_{tot}$  in Universe.** [online], 2003. Disponível em: <http://www.arxiv.org/astro-ph/0302412>. Acesso em: 20/02/2003.
- [36] Oliveira, C. Mendes de; Coelho, P.; González, J.; Barbuy, B. Ages, Metallicities, and  $\alpha$ -Element Enhancement for Galaxies in Hickson Compact Groups. **Astronomical Journal**, v. 130, p. 55–64, jul 2005.
- [37] Sahni, V.; Starobinsk, A. **The Case for a Positive Cosmological  $\Lambda$ -term.** [online], 2000. Disponível em: <http://www.arxiv.org/astro-ph/9904398>. Acesso em: 19/04/2000.
- [38] Robert A. Schommer, N. S.; Smith, R. **Measurements of Faint Supernovae.** [online], 1999. Disponível em: <http://www.arxiv.org/astro-ph/9909088>. Acesso em: 04/09/1999.
- [39] Riess, A. G.; Strolger, L.-G.; Tonry, J.; Casertano, S.; Ferguson, H. C.; Mobasher, B.; Challis, P.; Filippenko, A. V.; Jha, S.; Li, W.; Chornock, R.; Kirshner, R. P.; Leibundgut, B.; Dickinson, M.; Livio, M.; Giavalisco, M.; Steidel, C. C.; Benítez, T.; Tsvetanov, Z. Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution. **Astrophysical Journal**, v. 607, p. 665–687, jun 2004.
- [40] Garnavich, P. M.; Kirshner, R. P.; Challis, P.; Tonry, J.; Gilliland, R. L.; Smith, R. C.; Clocchiatti, A.; Diercks, A.; Filippenko, A. V.; Hamuy, M.; Hogan, C. J.; Leibundgut, B.; Phillips, M. M.; Reiss, D.; Riess, A. G.; Schmidt, B. P.; Schommer, R. A.; Spyromilio, J.; Stubbs, C.; Suntzeff, N. B.; Wells, L. Constraints on Cosmological Models from Hubble Space Telescope Observations of High- $z$  Supernovae. **Astrophysical Journal**, v. 493, p. L53+, feb 1998.
- [41] de Araujo, J. C. N.; Miranda, O. D. A solution for disks with Yukawian gravitational potential. **General Relativity and Gravitation**, 2006. Submetido e aguardando julgamento.
- [42] Kamionkowski, M.; Kosowsky, A.; Stebbins, A. A Probe of Primordial Gravity Waves and Vorticity. **Physical Review Letters**, v. 78, p. 2058–2061, mar 1997.
- [43] Caldwell, R. R.; Kamionkowski, M.; Wadley, L. The first space-based gravitational-wave detectors. **Physical Review D**, v. 59, n. 2, p. 027101–+, jan 1999.

- [44] Allen, B.; Romano, J. D. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities. **Physical Review D**, v. 59, n. 10, p. 102001–+, may 1999.