

INPE-13269-MAN/45 - versão 1

FUNDOS ESTOCÁSTICOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS GERADOS POR BURACOS NEGROS PRÉ-GALÁCTICOS

Eduardo dos Santos Pereira

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr.
Oswaldo Duarte Miranda, aprovada em 22 de Fevereiro de 2008.

INPE
São José dos Campos
2008

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO:**Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Membros:

Dr. Demétrio Bastos Netto - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dra. Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Anselmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Vinicius da Silva Vitor - Serviço de Informação e Documentação (SID) - bolsista

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva e Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Viveca Sant'Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

INPE-13269-MAN/45 - versão 1

FUNDOS ESTOCÁSTICOS DE ONDAS GRAVITACIONAIS GERADOS POR BURACOS NEGROS PRÉ-GALÁCTICOS

Eduardo dos Santos Pereira

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr.
Oswaldo Duarte Miranda, aprovada em 22 de Fevereiro de 2008.

INPE
São José dos Campos
2008

00.000.00(000.0)

PEREIRA. E.S..

FUNDO ESTOCÁSTICO DE ONDAS GRAVITACIONAIS/ PEREIRA. E.S.. – São José dos Campos: INPE, 2008.
[106p.](#); (INPE-13269-MAN/45 - versão 1)

1. Ondas Gravitacionais. 2. Gravitação. 3. Buracos Negros. 4 Galáxias. 5. Cosmologia. 6. Gravitational Waves. 7. Gravitation. 8. Black holes. 9. Galaxies. 10 Cosmology.

Aprovado pela banca examinadora
cumprimento a requisito exigido para
a obtenção do Título de **Mestre** em
Astrofísica. Astrofísica.

Oswaldo Duarte Miranda

Orientador/DAS-INPE

José Carlos Neves de Araujo

Presidente/DAS-INPE

Cláudia Vilega Rodrigues

Membro da Banca/DAS-INPE

Ronaldo Eustáquio de Souza

Membro da Banca/IAG-USP

“O ceticismo deve ser um componente do conjunto de ferramentas do explorador, senão perderemos o rumo”.

CARL SAGAN
em *O Mundo Assombrado pelos Demônios*, 1995.

A meus pais. Nem todas as riquezas do Universo possuem valor que se compare ao fato de ter sido parte de vós.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meus pais, Antônio e Nilce, que são pessoas dignas, lutadoras, vitoriosas e exemplos que me amparam e me indicam aquilo que devo ser.

Agradeço a compreensão e o carinho de minha querida irmã Luciana, que nunca está ausente de meus pensamentos.

Agradeço com um carinho muito especial a Regla, por ter se tornado uma grande amiga, confidente e amante. Por ter sido meu pilar nas horas difíceis e por ter entrado em minha vida para jamais deixá-la.

Agradeço ao meu orientador Dr. Oswaldo Duarte Miranda por ser um guia durante esta jornada.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior -CAPES, pela oportunidade de desenvolvimento profissional, intelectual e pessoal.

Agradeço a todos os meus familiares, por toda consideração.

Agradeço também, com especial atenção à Maria Helena e suas filhas Helem e Heloisa, por terem acreditado em mim e por todo o carinho que me oferecem.

Agradeço à coordenação e ao grupo de pós-graduação da Divisão de Astrofísica do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-INPE, por sua infra-estruturas e atenção oferecida.

Ao meus amigos que sempre estiveram presentes, Carla, Cristiane, Barbara, Priscilla, Edgar, Jorge, Márcio, Cláudio, Dennis, César, Sárgio, Luiz e outros diversos tantos que, embora não tenham sido mencionados, são e sempre serão muito importantes para mim.

Agradeço aos membros desta banca, pela paciência e atenção que prestaram ao meu trabalho neste momento de grande importância em minha vida.

Agradeço a todas as pessoas que não foram mencionadas aqui, mas que, de alguma forma, deram sua contribuição para este trabalho.

RESUMO

A observação da radiação cósmica de fundo em microondas nos fornece informação sobre o momento em que matéria e radiação desacoplaram, como uma fotografia produzida 300.000 anos após o Big-Bang. Hoje, através da observação de estruturas e objetos cósmicos, podemos avaliar o comportamento do Universo em tempos mais recentes (em torno de um bilhão de anos após o início do Universo). Porém, existe uma fase da qual não se têm informações, a chamada “Era Cosmológica das Trevas”. Por outro lado, a primeira detecção de ondas gravitacionais, e a posterior regular observação dessas ondas, certamente está entre os mais importantes objetivos científicos, e avanços tecnológicos, para o começo deste milênio. Em particular, a observação direta de ondas gravitacionais abrirá uma nova janela astronômica para a observação do Universo. Dentro deste contexto, o presente trabalho tem por objetivo o uso de ondas gravitacionais como ferramenta de estudo do Universo primordial. Fizemos o estudo e a caracterização dos fundos estocásticos de ondas gravitacionais geradas pelo colapso para buracos negros de estrelas primordiais. Para isso, utilizamos o cenário hierárquico de formação de estruturas, dentro do modelo Λ CDM. Em tal contexto, o formalismo tipo Press-Schechter foi usado no cálculo da função de massa de halos de matéria escura, que forneceu um modelo fisicamente adequado para a formação das estruturas do Universo. Então, pode-se determinar, em função do “*redshift*”, a taxa de formação estelar. Foi obtido que, independentemente do ponto em “*redshift*” que se considera iniciar a formação estelar (z_{ini}), os máximos da Taxa Cósmica de Formação Estelar decrescem com o aumento da massa mínima inicial dos halos de matéria escura, e que ao se aumentar o tempo característico de formação estelar ocorre uma diminuição no número de estrelas formadas, ao mesmo tempo que seus máximos se aproximam do presente. Para os três casos de z_{ini} (20, 30 e 40), ao se aumentar o valor da massa mínima inicial dos halos de matéria escura, do tempo característico de formação estelar e do expoente da função de massa inicial, a amplitude do fundo sofreu uma diminuição de seus valores. Foi observado que a contribuição para a densidade de energia do Universo do sinal gravitacional emitido pelas fontes aqui estudadas, são muito menores que um, não alterando a dinâmica do Universo. Em todos os casos o cálculo da razão sinal/ruído foi menor que um para os detectores interferométricos LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Waves Observatory*) nas configurações: inicial (I), intermediária (II) e avançada (III). Porém, obtivemos $(S/N) \sim 0,7$ (na configuração LIGO III) para alguns dos modelos aqui estudados. Isso abre a possibilidade de obter $(S/N) > 1$, no cenário aqui proposto, pela introdução de um terceiro (ou quarto) interferômetro no cálculo da razão (S/N) .

STOCHASTIC BACKGROUND OF GRAVITATIONAL WAVES GENERATED BY PRE-GALACTIC BLACK HOLE FORMATION

ABSTRACT

Observation of the Cosmic Microwave Background Radiation (CMB) provide us with a clear information about the status of matter and radiation at the decoupling era like a snapshot of the Universe 300.000 years after the Big-Bang. Nowadays, through observations of the cosmic structure, we can build-up the history of the Universe from one billion years after the Big-Bang until the present time. However, there is a period of the history of Universe, known as “Dark Ages”, for which we have no observational data. On the other hand, the first gravitational wave detection will open a new astronomical window for observation of the Universe at high redshifts. The main objective of the present work is to use gravitational waves as a tool for the study of the Universe at high redshifts. To do that, we use a Press-Schechter like-formalism to study the cosmic star formation up to redshift 40. We study three specific cases for z_{ini} (20, 30 and 40), and we follow the star formation history within the dark halos formed from the collapse of primordial density perturbations. In particular, we obtain Signal-to-Noise (S/N) ratios for the correlation of two LIGO’s (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory) operating in the initial, enhanced and advanced configurations. We run several models changing the following parameters: exponent of the initial mass function, time scale for star formation, efficiency for gravitational wave production. We find, for some models , $(S/N) \sim 0,7$ for LIGO III configuration. This kind of result open a possibility to detect such a stochastic background adding a third (or fourth) interferometer to calculate the Signal-to-Noise rate (S/N).

SUMÁRIO

| | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| LISTA DE FIGURAS | |
| LISTA DE TABELAS | |
| 1 INTRODUÇÃO | 21 |
| 2 GRAVITAÇÃO E ONDAS GRAVITACIONAIS | 25 |
| 2.1 Equações de campo de Einstein | 25 |
| 2.2 Ondas gravitacionais - Equações de Einstein linerarizadas | 27 |
| 2.3 Emissão de ondas gravitacionais | 31 |
| 2.4 Estado de polarização da ondas gravitacionias | 34 |
| 3 FONTES, DETECTORES E FUNDO ESTOCÁSTICO DE ONDAS GRAVITACIONAIS | 41 |
| 3.1 Fontes astrofísicas e cosmológicas de ondas gravitacionais | 41 |
| 3.2 Detectores de ondas gravitacionais | 42 |
| 3.2.1 Detectores Massa-Ressonantes | 43 |
| 3.2.2 Detectores Interferométricos | 44 |
| 3.3 Razão sinal/ruído de um fundo estocástico para detectores interferométricos . | 45 |
| 3.4 Amplitude de um fundo estocástico de ondas gravitacionias | 51 |
| 4 FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS E EVOLUÇÃO DO UNIVERSO | 57 |
| 4.1 Cenário hierárquico de formação de estruturas | 57 |
| 4.2 Formalismo “tipo” Press-Schechter | 61 |
| 4.3 Formação estelar- obtendo a função $\rho_*(z)$ | 67 |
| 5 RESULTADOS | 79 |
| 5.1 Amplitude do fundo | 79 |
| 5.2 Densidade de energia do fundo | 87 |
| 5.3 Razão sinal/ruído | 92 |
| 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS | 101 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 103 |

LISTA DE FIGURAS

| | <u>Pág.</u> |
|---|-------------|
| 2.1 Polarização das ondas gravitacionais | 40 |
| 3.1 Esquema de um detector de ondas gravitacionais | 42 |
| 3.2 Detector Mario Schenberg | 43 |
| 3.3 Diagrama básico de um detector interferométrico | 44 |
| 3.4 Detector LIGO- <i>Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory</i> | 44 |
| 4.1 Os reservatórios cósmicos | 59 |
| 4.2 As perturbações primordiais | 63 |
| 4.3 Evolução da fração de bárions em estruturas | 66 |
| 4.4 Taxa de acresção de bárions em estruturas | 67 |
| 4.5 Formação estelar e a massa inicial dos halos | 73 |
| 4.6 Escala de tempo característica para formação estelar | 74 |
| 4.7 Função de massa inicial e formação estelar | 75 |
| 4.8 Comprando as taxas cósmicas de formação estelar | 76 |
| 5.1 Amplitude do fundo estocástico e a massa inicial dos halos | 82 |
| 5.2 Amplitude do fundo estocástico e tempo característico de formação estelar . . . | 83 |
| 5.3 Amplitude do fundo estocástico e função de massa inicial | 84 |
| 5.4 Amplitude do fundo estocástico e eficiência de geração de ondas gravitacionais | 85 |
| 5.5 Comparação de fundos estocásticos em dois diferentes cenários cosmológicos . | 86 |
| 5.6 Densidade de energia do fundo e massa inicial dos halos | 88 |
| 5.7 Densidade de energia do fundo e tempo característico de formação estelar . . . | 89 |
| 5.8 Densidade de energia do fundo e função de massa inicial | 90 |
| 5.9 Densidade de energia do fundo e eficiência de geração de ondas gravitacionais | 91 |

LISTA DE TABELAS

| | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| 4.1 Fração de bárions no presente | 66 |
| 5.1 Largura de banda dos modelos | 80 |
| 5.2 Máximos da amplitude do fundo estocástico ($z_{ini} = 20$) | 86 |
| 5.3 Máximos da amplitude do fundo estocástico ($z_{ini} = 30$) | 95 |
| 5.4 Máximos da amplitude do fundo estocástico ($z_{ini} = 40$) | 96 |
| 5.5 Sinal/Ruído para $z_{ini} = 20$ e $\tau = 2,5\text{Gyr}$ | 97 |
| 5.6 Sinal/Ruído para $z_{ini} = 40$ e $\tau = 2,5\text{Gyr}$ | 98 |
| 5.7 Sinal/Ruído para $z_{ini} = 20$ e $\tau = 3,5\text{Gyr}$ | 99 |
| 5.8 Sinal/Ruído para $z_{ini} = 40$ e $\tau = 3,5\text{Gyr}$ | 100 |

1 INTRODUÇÃO

Durante muito tempo acreditou-se que o que ocorre na Terra era muito distinto daquilo que está além da órbita lunar. Um primeiro passo para a unificação entre as leis que regem os planos terrestre e celeste surgiu com o entendimento do movimento das chamadas estrelas errantes, o que hoje se denomina por planetas. Em particular por [Kepler](#), que se mostra motivado, com especial atenção ao movimento de Marte, em sua carta a Michael Mästlin. A partir da análise dos dados de Tycho Brahe, Kepler chega às equações que descrevem o movimento planetário.

Em 1686, Isaac Newton formula a lei que é comum ao movimento dos corpos celestes (força de interação gravitacional no caso) e as dos objetos na superfície da Terra. Em sua obra, *Principia* ([NEWTON, 1871](#)), a gravitação é descrita como [...] “*uma força de ação a distância que aparece sobre o Sol e os planetas de acordo com a quantidade de matéria sólida que eles contém e propaga-se por todos os lados até imensas distâncias sempre decaindo com o inverso do quadrado da distância*”.

Mais tarde, Albert Einstein em “*On the Electrodynamics of Moving Bodies*” ([LORENTZ et al., 1923](#)), diz que, “... a luz propaga no espaço vazio com uma velocidade finita c , a qual é independente do estado de movimento do corpo que a está emitindo”. Partindo disto, Einstein define que esta velocidade c , em um referencial inercial, seria um limite intransponível. Mas, para o caso da gravitação newtoniana, uma mudança na distribuição de matéria em um dado ponto do Universo seria percebida instantaneamente em todas as outras partes do mesmo. Isto significa que a informação sobre o modo como a massa se distribui é transmitida com velocidade infinita, o que não condiz com o novo cenário da física proposto por Einstein e outros autores como Lorentz e Minkowski.

Com o sucesso da Relatividade Restrita, que é comprovada por diversos experimentos, foi preciso haver uma reformulação da teoria da gravitação de tal modo que um sinal gravitacional se propague com velocidade finita.

[Einstein e Grossmann \(1913\)](#) deram os primeiros passos em direção a teoria da Relatividade Geral (RG). Este trabalho tinha um raciocínio incompleto e uma notação confusa. Contudo, ele vincula pela primeira vez o campo gravitacional à curvatura do espaço-tempo ([PAIS, 1982](#)).

Grosmann contribuiu através de uma lúcida exposição da geometria de Riemann, e do seu cálculo tensorial, acrescentando pormenores matemáticos em apoio a alguns argumentos de Einstein ([PAIS, 1982](#)). Outra contribuição desta publicação foi introduzir a idéia de que perturbações da métrica (ou espaço-tempo) não se propagam instantaneamente, mas

sim com uma velocidade igual a da luz. Isso forneceu a primeira conjectura a respeito das ondas gravitacionais (OG's).

Nos anos que seguiram, Einstein apresenta à Academia de Ciências Prussiana, um conjunto de resultados no qual estão presentes seu trabalho sobre as equações de campo, o cálculo da deflexão gravitacional da luz e a precessão do periélio de Mercúrio. Esses resultados foram então organizados e publicados em 1916, com o título “*The Foundation of the General Theory of Relativity*” ([WEINBERG, 1972](#)).

A Relatividade Geral representa uma melhor compreensão da teoria de gravitação e do cenário cosmológico, mas ainda assim há muito a conhecer sobre a formação de grandes estruturas e seu papel na evolução cósmica. Um fato importante a destacar é que, os objetos mais antigos observados (Quasares) são visto à “*redshift*” z da ordem de 6 – 8. Já a radiação cósmica de fundo em microondas fornece uma visão do Universo no momento em que matéria e radiação desacoplaram, em z da ordem de 1000. Por não termos informações sobre o que sucede no período de z entre 1000 – 8, esse leva o nome de “era cosmológica das trevas”. As OG's, por possuírem fraco acoplamento com a matéria e serem emitidas por acelerações de massa, vem a ser uma via de sondagem deste período. Em particular, uma interessante fonte provém da emissão destas ondas devido ao colapso, para buracos negros, de estrelas formadas em estruturas pré-galácticas.

Objetos pré-galáticos são formados quando a densidade de matéria em um dado volume é tal que, por auto gravitação, colapse ([PEACOCK, 1999](#)). Existe a possibilidade de descrevê-los através de aproximações analíticas e utilizando simulações numéricas ([JENKINS et al., 2001](#)). Na busca de um panorama que represente a evolução do Universo, foram desenvolvidos diversos modelos. Dentre estes, o Λ CDM (Matéria Escura Fria com Constante Cosmológica) é um dos mais usados atualmente. Nele, as pequenas estruturas são formadas primeiro a partir do colapso de halos de matéria escura.

Neste contexto, o objetivo geral do presente trabalho é o estudo de fundos estocásticos de ondas gravitacionais gerados pelo colapso, para buracos negros, de estrelas pré-galácticas. Para cumprir esta meta foram determinados os objetivos específicos a seguir:

- Apresentar um modelo fisicamente adequado para a formação das estruturas do Universo;
- Determinar, em função do “*redshift*”, a taxa de formação estelar;
- Calcular a amplitude do fundo estocástico;
- Calcular a razão sinal/ruído de tal fundo para os detectores interferométricos;

Esta dissertação é organizada da seguinte forma. No capítulo II são apresentadas as equações de campo da Relatividade Geral, e o equacionamento que leva às OG's. No capítulo III é apresentada a classificação das diversas fontes de ondas gravitacionais, as características principais dos detectores, o cálculo da razão sinal/ruído para detectores interferométricos e o cálculo da amplitude de um fundo estocástico de ondas gravitacionais gerado pelo colapso, para buracos negros, de estrelas pré-galácticas. No capítulo IV discutimos o modelo de formação de estruturas e a formação das primeiras estrelas. No capítulo V são apresentados os resultados obtidos. No capítulo VI são expostas as considerações finais deste trabalho.

2 GRAVITAÇÃO E ONDAS GRAVITACIONAIS

A radiação é caracterizada pela transmissão de energia e informação através do espaço, ou por uma equação de onda que satisfaz algumas condições, tais como haver uma velocidade de propagação característica de tal onda. Na gravitação newtoniana, energia é transmitida pelo campo gravitacional, definido pelo potencial ϕ . Para o vácuo, este potencial satisfaz a relação

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (2.1)$$

porém esta não é uma equação de onda. Na verdade, esta equação poderia ser entendida como uma equação de onda no limite em que sua velocidade de propagação seja infinita. Mas, assim, se torna impossível associar um comprimento de onda à uma dada freqüência de oscilação.

Por outro lado, a possibilidade de transmissão instantânea de informação é algo que não condiz com o cenário físico descrito pela teoria da Relatividade Especial (RE), proposta por Einstein em 1905. Da necessidade de incluir a gravitação a este novo contexto, nasce a teoria da Relatividade Geral.

2.1 Equações de Campo de Einstein

A motivação para a reestruturação da gravitação newtoniana, com a finalidade de torná-la em acordo com RE, é evocado por Einstein da seguinte forma:

Quando em 1907, eu trabalhava num artigo de síntese sobre a teoria da Relatividade Restrita para o *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, tive também que tentar modificar a teoria newtoniana da gravitação, de modo que suas leis se ajustassem à teoria da Relatividade Restrita. [...] Então me ocorreu o ‘glücklichste gedanke meines lebens’ [pensamento mais feliz de minha vida], da seguinte forma: O campo gravitacional tem apenas uma existência relativa, de algum modo semelhante ao campo elétrico gerado por indução magnetoelétrica. *Porque para um observador que cai livremente do telhado de uma casa não existe -pelo menos no ambiente imediato- campo gravitacional.* Na realidade, se este observador deixar cair alguns corpos, estes permanecerão, em relação a ele, em estado de repouso ou de movimento relativo uniforme, independente da natureza física ou química de cada um (...) (PAIS, 1982)

Este pensamento descreve um dos cinco princípios (D'INVERNO, 1992) em que está fundamentada a teoria da Relatividade Geral. Isto é, o Princípio da Equivalência. Em outras palavras, o que este princípio diz é: O movimento de uma partícula teste em um campo gravitacional é independente de sua massa e composição. O campo gravitacional está acoplado a tudo, e um observador em queda livre não consegue distinguir se está

na presença de um campo gravitacional genuíno ou em um referencial uniformemente acelerado.

Os outros quatro princípios em que a Relatividade Geral está alicerçada são:

Princípio de Mach: A distribuição de matéria determina a geometria do Universo, assim, não há uma geometria pré-definida se não existe matéria. Os processos de inércia estão associados ao momento e energia total do espaço.

Princípio da Covariância: Todos os observadores são equivalentes, ou seja, as leis físicas são válidas independentemente do referencial ser inercial ou acelerado e as equações da física devem ter a forma tensorial.

Princípio do Acoplamento Gravitacional Mínimo: Nenhum termo que contenha explicitamente o tensor de curvatura será adicionado ao se fazer a transição da teoria da Relatividade Especial para a Geral. Isto é, em coordenadas geodésicas locais, as equações do movimento são as da Relatividade Especial.

Princípio da Correspondência: Uma nova teoria precisa ser consistente com uma dada teoria anterior, dentro dos seus limites de validade.

Baseando-se nestes princípios, Einstein chega à sua equação de campo na forma tensorial, em unidades relativísticas ($c = 1$):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico e G a constante gravitacional. A convenção para os índices é: letras gregas variando de $0 - 3$ ($\mu, \nu = 0, 1...3$) e latinas variando de $1 - 3$ ($i, j = 1, ..., 3$). O índice “0” corresponde à coordenada temporal, enquanto os índices 1, 2, 3 correspondem às coordenadas espaciais. A assinatura usada é $\{+, -, -, -\}$.

O tensor de Riemann é escrito em função dos símbolos de Christoffel da seguinte forma,

$$R_{\mu\beta\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu,\beta}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\beta,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\beta}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\beta}^{\sigma}. \quad (2.3)$$

No qual,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{1}{2}g^{\beta\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}). \quad (2.4)$$

A Equação (2.2) indica que a curvatura do espaço-tempo é dada pela distribuição de matéria e energia representada por $T_{\mu\nu}$.

O lado esquerdo da Equação (2.2) é o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$. Isto é:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.5)$$

Como já dito na introdução, a Relatividade Geral fornece uma solução para propagação de perturbações da métrica (espaço-tempo). Na próxima seção será demonstrado como, a partir da Equação (2.2), se chega a esta conclusão.

2.2 Ondas Gravitacionais - Equações de Einstein Linearizadas

Admitindo que o espaço-tempo é Minkowski, e introduzindo uma pequena perturbação na métrica dada por:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação tal que:

$$|h_{\mu\nu}| \ll |\eta_{\mu\nu}| \text{ e } |\partial_{\alpha}h_{\mu\nu}| >> |\partial_{\alpha}h_{\mu\nu}|^2 ; \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1,$$

a métrica contravariante será:

$$g^{\mu\nu} \cong \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

Neste caso, os símbolos de Christoffel podem ser escritos como,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\beta} \cong \frac{1}{2}\eta^{\beta\sigma}(h_{\sigma\mu,\nu} + h_{\sigma\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}), \quad (2.8)$$

com

$$|h_{\sigma\mu,\nu}| >> |h^{\beta\sigma}h_{\sigma\mu,\nu}|.$$

O tensor de Ricci em primeira ordem será:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(\square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h_{\mu,\beta\nu}^\beta - h_{\nu,\beta\mu}^\beta), \quad (2.9)$$

onde $\square = \partial_\alpha \partial^\alpha = (\nabla - \partial/\partial t)$ é o operador D'Alambertiano. O escalar de curvatura toma a forma,

$$R^\mu_\mu = R = \square h - h_{\beta\mu}^{\beta\mu}. \quad (2.10)$$

Ao se contrair a Equação (2.2) tem-se:

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = -8\pi G g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$$

$$R - 2R = -8\pi GT_\mu^\mu$$

$$R = 8\pi GT_\mu^\mu. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.2) é possível escrever:

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_\lambda^\lambda). \quad (2.12)$$

Levando a Equação (2.9) em (2.12), vem:

$$\square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h_{\mu,\beta\nu}^\beta - h_{\nu,\beta\mu}^\beta = -16\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T_\beta^\beta). \quad (2.13)$$

Definindo

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T_\beta^\beta, \quad (2.14)$$

pode-se escrever a Equação (2.13) como,

$$\square h_{\mu\nu} + h_{,\mu\nu} - h_{\mu,\beta\nu}^\beta - h_{\nu,\beta\mu}^\beta = -16\pi G S_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Como $T_{\mu\nu}$ satisfaz a condição de conservação do momento-energia, $T_{\nu,\mu}^\mu = 0$, e sendo o traço do tensor $S_{\mu\nu}$ dado por:

$$S_\beta^\beta = -T_\beta^\beta, \quad (2.16)$$

encontra-se:

$$S_{\nu,\mu}^\mu = \frac{1}{2} S_{\beta,\nu}^\beta. \quad (2.17)$$

Considerando uma transformação de coordenadas do tipo:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu(x), \quad (2.18)$$

no qual $\varepsilon^\mu(x)_{,\nu}$ tem a mesma ordem que $h_{\mu\nu}$, a métrica no novo sistema de coordenadas será:

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\rho} g^{\lambda\rho}. \quad (2.19)$$

Assim, chega-se a

$$h^{\mu\nu} = h^{\mu\rho} - \frac{\partial \varepsilon^\mu(x)}{\partial x^\rho} \eta^{\rho\nu} - \frac{\partial \varepsilon^\nu(x)}{\partial x^\rho} \eta^{\rho\mu}. \quad (2.20)$$

Dessa forma $h_{\mu\nu}$ é escrito como,

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varepsilon_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (2.21)$$

A transformação dada pela Equação (2.21) é conhecida como *transformação de gauge*. Isto significa que sob esta transformação a Equação (2.15) permanece invariante. Porém,

surge agora um problema, essa invariância permite infinitas soluções para uma mesma condição física. Esta dificuldade pode ser removida escolhendo (ou fixando) um sistema particular de coordenadas. O mais conveniente é o *sistema de coordenadas harmônicas*, no qual

$$g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0. \quad (2.22)$$

Partindo da Equação (2.8) obtém-se então:

$$h^\mu_{\nu,\mu} = \frac{1}{2}h_{,\nu}. \quad (2.23)$$

Nota-se que a Equação (2.21) não satisfaz a condição dada por (2.23), mas é possível encontrar um $h_{\mu\nu}$ que a satisfaça, considerando que

$$\square\varepsilon_\nu \equiv \frac{\partial h^\mu_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^\nu}. \quad (2.24)$$

Assim, com (2.24), $h_{\mu\nu}$ passa a satisfazer a (2.23).

Tomando a condição (2.23) na Equação (2.15) chega-se a,

$$\square h_{\mu\nu} = -16\pi GS_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

que é uma equação de onda.

Para o vácuo vem:

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (2.26)$$

Por outro lado, da inspeção direta da (2.26) vem que ondas gravitacionais são perturbações da métrica do espaço-tempo que se propagam, no vácuo, com velocidade da luz. A solução para a Equação (2.25) será, da forma:

$$h_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = 4G \int d^3x' \frac{S(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (2.27)$$

que é uma equação do tipo Potencial Retardado, que permite caracterizar a radiação gravitacional emitida por uma dada fonte.

2.3 Emissão de Ondas Gravitacionais

Agora, a partir da Equação (2.27), será apresentada uma visão geral do processo de emissão de ondas gravitacionais e a energia que estas ondas carregam.

Reescrevendo (2.27) como:

$$h_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -4G \int d^3 \vec{x}' \frac{T_{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}, \quad (2.28)$$

e tendo em conta a chamada zona de onda, em que as dimensões da fonte são muito menores que a distância entre o ponto em que se recebe o sinal e a fonte, tal que:

$$\frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} \ll 1,$$

obtém-se,

$$|\vec{x} - \vec{x}'| \simeq |\vec{x}| - \hat{x} \cdot \vec{x}'; \quad \hat{x} = \frac{|\vec{x}|}{\vec{x}}.$$

Nas relações anteriores, a distância à fonte é $r = |\vec{x}|$, e o vetor que determina distâncias internas na fonte é dado por $R = |\vec{x}'|$. É então possível escrever o potencial retardado como:

$$h^{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -\frac{4G}{r} \int d^3 \vec{x}' T^{\mu\nu}(t - r, \vec{x}'), \quad (2.29)$$

onde $r \gg R \cdot \hat{r}$. Pelas considerações anteriores, note que, a parte radiativa do tensor $h^{\mu\nu}$ é completamente determinada por sua parte espacial h^{ij} .

Da condição de conservação da energia momento ($T_{\nu,\mu}^\mu = 0$), obtém-se:

$$T^{00}_{,0} + T^{0k}_{,k} = 0, \quad (2.30)$$

$$T^{i0}_{,0} + T^{ik}_{,k} = 0 \quad (2.31)$$

Considerando que:

$$\int (T^{ik}x^j)_{,k} d^3x = \int T^{ik}_{,k} x^j d^3x + \int T^{ij} d^3x \quad (2.32)$$

Usando uma superfície gaussiana ao redor da fonte e o teorema de Gauss ([FOSTER; NIGHTINGALE, 2006](#)), o lado esquerdo da equação acima vai se tornar nulo. Com (2.31) chega-se a:

$$\int T^{ij} d^3x = \frac{\partial}{\partial t} \int T^{i0} x^j d^3x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) d^3x. \quad (2.33)$$

Porém,

$$\int (T^{0k} x^i x^j)_{,k} d^3x = \int T^{0k}_{,k} x^i x^j d^3x + \int (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) d^3x, \quad (2.34)$$

Utilizando novamente o teorema de Gauss, chega-se a,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int T^{00} x^k x^l d^3x = \int T^{kl} d^3x. \quad (2.35)$$

Para a matéria não relativística, e tendo em conta o princípio da correspondência, a equação de campo é dada pela equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho. \quad (2.36)$$

Com isto, a densidade de energia T_{00} será:

$$T_{00} \simeq \rho.$$

Assim, a equação do tipo potencial retardado,

$$h_{\kappa l}(t, \vec{x}) = -\frac{4G}{r} \int d^3 \vec{x}' T_{\kappa l}(t-r, \vec{x}') \quad (2.37)$$

pode ser escrita como:

$$h^{\kappa l} = -\frac{2G}{r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho(x') x'^{\kappa} x'^l d^3 x' \right]_{t-r}. \quad (2.38)$$

Por outro lado, o tensor de quadrupolo é definido como

$$Q^{\kappa l} \equiv \int (3x'^{\kappa} x'^l - r'^2 \delta^{\kappa l}) \rho(x') d^3 x'. \quad (2.39)$$

Reescrevendo $h^{\kappa l}$ para obter uma relação com $Q^{\kappa l}$, chega-se a,

$$h^{\kappa l} = -\frac{2G}{3r} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{\kappa l} + \delta^{\kappa l} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int r'^2 \rho(\vec{x}') d^3 x' \right]_{t-r}. \quad (2.40)$$

Na aproximação linear, o tensor energia momentum $t^{\mu\nu}$ do campo gravitacional não está incorporado no tensor $T^{\mu\nu}$ que representa a matéria. Contudo, para calcularmos o fluxo de energia irradiada, por uma dada fonte, é necessário levar $t^{\mu\nu}$ em consideração.

Isto pode ser feito recorrendo ao procedimento usual da teoria quântica de campos, onde uma vez conhecida a densidade de lagrangiana \mathcal{L} , de um dado campo $h^{\mu\nu}$, pode-se obter o tensor energia-momento pela relação ([BOGOLIUBOV; SHIRKOV, 1959](#)),

$$t_{\mu}^{\nu} = \partial_{\mu} h^{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} h^{\alpha\beta})} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L}, \quad (2.41)$$

sendo que \mathcal{L} pode ser escrita como ([OHANIAN, 1976](#)):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (\partial_{\lambda} h_{\mu\nu} \partial^{\lambda} h^{\mu\nu} - 2\partial^{\mu} h_{\mu\nu} \partial_{\lambda} h_{\nu\lambda} + 2\partial^{\mu} h_{\mu\nu} \partial^{\nu} h - \partial_{\mu} h \partial^{\mu} h). \quad (2.42)$$

Considerando que não existe variação de massa da fonte, a segunda parte do lado direito da Equação (2.40) não contribui para a radiação gravitacional. Então, o fluxo de energia radial é escrito como,

$$t_s^0 n^s = \frac{1}{4} (2 \dot{h}^{kl} \dot{h}^{kl} - 4 \dot{h}^{kl} \dot{h}^{km} n^l n^m + \dot{h}^{kl} \dot{h}^{mr} n^k n^l n^m n^r);$$

ou,

$$t_s^0 n^s = \frac{G}{36\pi r^2} \left[\frac{1}{2} \ddot{\bar{Q}}_{kl} \ddot{\bar{Q}}_{kl} - \ddot{\bar{Q}}_{kl} \ddot{\bar{Q}}_{km} n^l n^m + \frac{1}{4} (\ddot{\bar{Q}}_{kl} n^\kappa n^l)^2 \right], \quad (2.43)$$

em que n^s é um vetor unitário na direção radial.

A energia total irradiada por unidade de ângulo sólido e unidade de tempo é igual a $-r^2 t^0 s n^s$. Dessa forma, vem:

$$-\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{G}{36\pi} \left[\frac{1}{2} \ddot{\bar{Q}}_{kl} \ddot{\bar{Q}}_{kl} - \ddot{\bar{Q}}_{kl} \ddot{\bar{Q}}_{km} n^l n^m + \frac{1}{4} (\ddot{\bar{Q}}_{kl} n^\kappa n^l)^2 \right]. \quad (2.44)$$

Considerando,

$$\frac{1}{4\pi} \int n^l n^m d\Omega = \frac{1}{3} \delta^{lm};$$

e

$$\frac{1}{4\pi} \int n^\kappa n^l n^m n^o d\Omega = \frac{1}{15} (\delta^{kl} \delta^{mo} + \delta^{\kappa m} \delta^{lo} + \delta^{\kappa o} \delta^{lm}),$$

é possível escrever (2.44) como:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45} \ddot{\bar{Q}}_{kl} \ddot{\bar{Q}}_{kl}, \quad (2.45)$$

que escrita em unidades não relativísticas fica:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{\bar{Q}}_{kl} \ddot{\bar{Q}}_{kl}. \quad (2.46)$$

Dessa forma, a (2.46) fornece a potência irradiada em ondas gravitacionais por uma dada fonte. Veja que a radiação gravitacional é de natureza quadrupolar, já que envolve o tensor momento de quadrupolo \bar{Q}_{kl} .

2.4 Estados de Polarização das Ondas Gravitacionais

A solução mais simples para a Equação (2.26) é a que representa uma superposição de ondas planas na forma

$$h_{\mu\nu} = \Re[A_{\mu\nu} e^{(\imath k_\alpha x^\alpha)}], \quad (2.47)$$

onde $A_{\mu\nu}$ é a matriz amplitude e \Re significa considerar a parte real da equação entre colchetes.

Considerando que a onda propaga na direção z , de forma que o vetor de onda é dado por:

$$k^\mu = (k, 0, 0, k) \text{ ou } k_\mu = (k, 0, 0, -k);$$

Obtemos, substituindo (2.47) em (2.26)

$$A^{\mu\nu} k_\mu = 0; \quad ; \quad A_{\mu\nu} k^\mu = 0 \quad (2.48)$$

A (2.48) mostra que as componentes da amplitude da onda gravitacional devem ser ortogonais ao vetor de onda \vec{k} . A (2.48) é, de fato, composta por quatro equações lineares, uma para cada valor do índice livre ν . Isto é, sendo $A_{\mu\nu}$ um tensor simétrico, podemos escrever:

$$A_{0\nu} = A_{3\nu} \quad (2.49)$$

Seja agora U um quadrvetor arbitrário com componentes U^μ . Então, nós temos suficiente liberdade para escolher as componentes de ε^μ (vide Equação 2.21) de forma a fazer com que o tensor amplitude de onda satisfaça:

$$A_{\mu\nu} U^\mu = 0. \quad (2.50)$$

Considere agora uma partícula teste experimentando a passagem de uma onda gravitacional numa região plana do espaço-tempo. Nós podemos então fazer uma transformação para um referencial de Lorentz em que a partícula teste esteja em repouso. Isto é, sua quadrvelocidade U^μ tem componentes $(1, 0, 0, 0)$, o que nos permite escrever:

$$U^\mu = \delta_0^\mu \quad (2.51)$$

As equações (2.50) e (2.51) então implicam em

$$A_{\mu 0} = 0, \quad (2.52)$$

para todo μ . E com o uso de (2.48), também podemos escrever:

$$A_{\mu 3} = 0 \quad (2.53)$$

para todo μ . Ou seja, não existe componente da perturbação da métrica na direção de propagação das ondas. Isto é, neste calibre a perturbação da métrica é transversal à direção de propagação da onda gravitacional.

A condição de *gauge* (2.21) aplicada à matriz amplitude $A^{\mu\nu}$ produz:

$$A'^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - \varepsilon^\mu k^\nu - \varepsilon^\nu k^\mu + \eta^{\mu\nu}(\varepsilon^\alpha k_\alpha).$$

Como a onda viaja na direção de z temos, considerando (2.48); (2.52) e (2.53)

$$\begin{aligned} A'^{00} &= -k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) & A'^{11} &= A^{11} - k(\varepsilon^0 + \varepsilon^3) \\ A'^{01} &= -k\varepsilon 1 & A'^{12} &= A^{12} \\ A'^{02} &= -k\varepsilon 2 & A'^{22} &= A^{22} - k(\varepsilon^0 - \varepsilon^3) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Nas equações anteriores, os parâmetros ε^μ são arbitrários. Como $A^{\mu 0} = 0$ e $A^{\mu 3} = 0$, podemos escolher:

$$\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0 \text{ e } \varepsilon^0 + \varepsilon^3 = 0 \Rightarrow \varepsilon^0 = -\varepsilon^3,$$

Logo:

$$A'^{11} + A'^{22} = A^{11} + A^{22} + 4k\varepsilon^3,$$

e

$$\varepsilon^3 = -\frac{A^{11} + A^{22}}{4k}.$$

Dessa forma, o conjunto de equações (2.54) produz sob essa transformação de *gauge*:

$$A'^{11} + A'^{22} = 0 \quad \text{e} \quad A'^{12} = A^{12}.$$

Veja que $A'^{11} + A'^{22} = 0$ significa traço nulo. Portanto, nesse calibre as ondas gravitacionais são sem traço e induzem perturbações transversais à direção de propagação. Por isso, esse calibre é conhecido na literatura como “*Transverse-traceless Gauge*” (Calibre transverso e com traço nulo), ou calibre TT.

Em termos matriciais, temos:

$$\|A^{\mu\nu}\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{11} & A^{12} & 0 \\ 0 & A^{12} & -A^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

e $h_{\mu\nu}$ toma a forma,

$$h_{\mu\nu} = \Re\{[\alpha e_{\mu\nu}(+) + \beta e_{\mu\nu}(\times)]e^{ik.x}\}. \quad (2.56)$$

Onde α e β são duas funções complexas arbitrárias de k , enquanto $e_{\mu\nu}(+)$, $e_{\mu\nu}(\times)$ são dois estados de polarização da onda. Na forma matricial, temos:

$$\|e_{\mu\nu}(+)\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

e

$$\|e_{\mu\nu}(\times)\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Como colocado acima, este calibre é conhecido como TT, que leva a duas polarizações

$(h_+ \text{ e } h_\times)$

Os estados de polarização podem ser interpretados fisicamente da seguinte forma: Considera-se uma partícula teste em um ponto O , na origem de um dado sistema de coordenadas. Uma outra partícula estará em $\eta^\mu = (0, \vec{\eta})$. Inicialmente, estas partículas estão em repouso, uma em relação a outra, antes da onda gravitacional passar. A separação entre elas será:

$$l = |g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu|^{1/2},$$

ou seja,

$$l = |(\delta_{ij} - h_{ij})\eta^i\eta^j|^{1/2}.$$

Com a mudança de coordenadas

$$\eta^i \rightarrow k^i = \eta^i + \frac{1}{2}h^i_j\eta^j \quad (2.59)$$

é possível reescrever l como,

$$l = [\delta_{ij}k^i k^j]^{1/2} + O(\|h_{ij}\|^2), \quad (2.60)$$

onde o vetor k é paralelo ao eixo z e $k^3 = \eta^3$ já que $h^3_j = 0$.

Portanto, se as duas partículas estiverem dispostas em um plano paralelo à direção de propagação da onda, a distância entre elas não será afetada. Contudo, se as partículas estiverem colocadas num plano transversal a direção de propagação da onda, teremos:

$$\|k^i\| = \|\eta^i\| - \frac{1}{2}\alpha \cos[k(t+z)] \left\| \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \eta^i \right\|; \quad (2.61)$$

$$\|k^i\| = \|\eta^i\| - \frac{1}{2}\alpha \cos[k(t-z)] \left\| \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \eta^i \right\|. \quad (2.62)$$

Considerando a equação,

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2} - R^\mu_{\rho\delta\gamma} v^\rho v^\delta \eta^\gamma = 0, \quad (2.63)$$

que fornece os deslocamentos relativos das partículas sob ação de uma onda gravitacional, tem-se então que:

$$\frac{D^2\eta^\mu}{D\tau^2} - R^\mu_{00j} \eta^j_0 = 0. \quad (2.64)$$

Sendo $v^\mu = (1, \vec{0})$ e $\Gamma^\mu_{00} = 0$, obtém-se,

$$\frac{D^2\eta^i}{D\tau^2} \sim R^i_{00j} \eta^j_0, \quad (2.65)$$

ou,

$$\frac{D^2\eta^i}{D\tau^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h^i_j}{\partial t^2} \eta^j_0, \quad (2.66)$$

onde foi usado o tensor de Riemann linearizado no *gauge* TT.

Para a onda propagando na direção $+z$, chega-se a,

$$h_{11} = -h_{22} = \Phi_+(t-z), \quad (2.67)$$

e

$$h_{12} = h_{21} = \Phi_\times(t-z). \quad (2.68)$$

Note que, a oscilação não é paralela a z ($h^3_j = 0$ e $\ddot{\eta}^3 = 0$), isto significa que as ondas gravitacionais são ondas que produzem deslocamentos transversais à direção de propagação.

Pode-se obter uma solução aproximada da Equação (2.66), na forma,

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \eta^1_0 \\ \eta^2_0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \Phi_+(t-z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta^1_0 \\ \eta^2_0 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \Phi_x(t-z) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0^1 \\ \eta_0^2 \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

A Figura (2.1) mostra o efeito da propagação de uma onda gravitacional sobre um anel de partículas teste. A ação é entendida como um *efeito de maré*, que perturba o sistema de partículas.

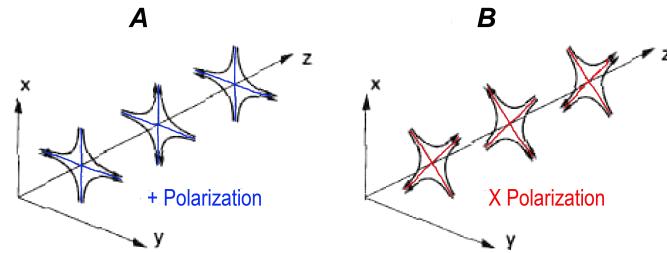


Figura 2.1 - Campo de aceleração produzido pela passagem de uma OG. A e B são os dois modos (+ e ×) de polarização, segundo a Relatividade Geral.

Fonte: [Hughes et al. \(2001\)](#).

Perguntas que vêm naturalmente desse equacionamento são: Quais são as fontes capazes de produzir ondas gravitacionais? É possível detectar tais ondas? Essas questões serão discutidas no capítulo 3 desta dissertação.

3 FONTES, DETECTORES E FUNDO ESTOCÁSTICO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

No capítulo 2 verificamos que ondas gravitacionais são perturbações da métrica do espaço-tempo que se propagam com a velocidade da luz. Vimos também que as ondas gravitacionais, na Relatividade Geral, possuem dois estados de polarização, denominados h_+ e h_\times , e que a radiação gravitacional é de natureza quadrupolar em sua menor ordem. Outro ponto importante a destacar é que a emissão de ondas gravitacionais depende do fator G/c^5 . A pequena dimensão dessa constante mostra que ondas gravitacionais com possibilidade de detecção são aquelas produzidas por sistemas astrofísicos. Este capítulo será dedicado então a descrição das fontes astrofísicas, dos detectores de ondas gravitacionais e da determinação da razão sinal/ruído. Ao final deste capítulo apresentamos o equacionamento que permite determinar a amplitude h gerada por um conjunto de fontes a diferentes distâncias, ou seja, a amplitude de um fundo estocástico de ondas gravitacionais.

3.1 Fontes Astrofísicas e Cosmológicas de Ondas Gravitacionais

As fontes astrofísicas de OG's são classificadas de acordo com o comportamento temporal da radiação. Assim temos:

Fontes Periódicas: são aquelas que emitem sinal a uma freqüência constante, ou aproximadamente constante. Exemplo de fonte periódica é uma estrela de nêutrons em rotação e que possua alguma assimetria em sua superfície.

Fontes “Chirps”: Um sinal “chirp” é produzido por sistemas binários em coalescência formados por estrelas de nêutrons (ENs) e buracos negros (BNs) que emitem radiação gravitacional, aumentando sua amplitude e freqüência quanto mais se aproximam do colapso final do sistema . A taxa de ocorrência para tais eventos é estimada em poucos por ano dentro de um raio de 200 Mpc para sistemas binários EN-EN e é incerta para o caso de sistemas binários BN-BN ([BARISH, 1999](#); [CASTRO, 2002](#)).

Fontes impulsivas ou “bursts”: são aquelas que geram um pulso energético, e curto, cobrindo uma grande faixa de freqüências. Algumas destas fontes são estrelas de nêutrons acretando matéria e sistemas binários em coalescência formados por estrelas compactas tais como buracos negros e/ou estrelas de nêutrons.

Fontes Estocásticas: são caracterizadas por emissões aleatórias de ondas gravitacionais vindas de um grande número de fontes independentes e não correlacionadas que não são resolvidas individualmente. Um exemplo de fonte estocástica é a emissão de OG's devido

ao colapso para buracos negros, de estrelas pré-galácticas a diferentes “*redshifts*”.

3.2 Detectores de Ondas Gravitacionais

Os detectores possuem como base de funcionamento o *efeito de maré* (Figura 3.1) produzido pela passagem da onda gravitacional. [Weber \(1960\)](#), por volta de 1960 , construiu o primeiro detector, o qual procurava por vibrações oriundas das ondas gravitacionais em um cilindro de alumínio maciço. Na literatura é possível encontrar diversos tipos de detectores. Porém, aqui, serão apresentados apenas algumas características de um grupo conhecido por detectores mecânicos. Estes podem ser classificados em massa-resonante (cilíndricos ou esféricos) e interferométricos.

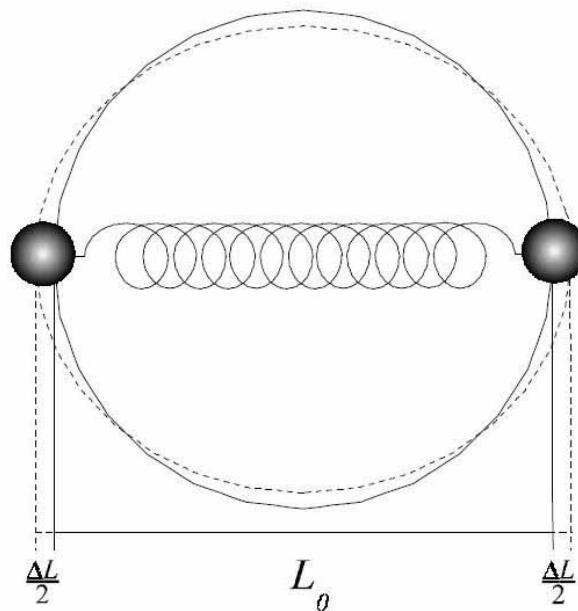


Figura 3.1 - Esquema simplificado de um detector de OG's

Fonte: [Castro \(2002\)](#).

Na figura 3.1 está ilustrado um modelo simples de um detector de OG's. Nessa figura, duas massas estão ligadas por uma mola e separadas por uma distância L_0 . O passar de uma OG distorce o círculo,deslocando ambas as massas por uma distância $\Delta L/2$, relativo ao centro do círculo. A variação relativa da distância entre as massas é dada por [Abramovici et al. \(1992\)](#):

$$\Delta L = \frac{1}{2}hL_0, \quad (3.1)$$

onde h é a amplitude adimensional da OG. Portanto, pelo monitoramento de ΔL pode-se obter informações sobre a passagem de uma OG.

3.2.1 Detectores Massa-Ressonantes

Os detectores tipo Weber são chamados de detectores massa-ressonantes. Esses são desenvolvidos para medir sinais acústicos induzidos pelo acoplamento entre matéria e OG ([CASTRO, 2002](#)). A vibração gerada no detector é transmitida para um transdutor acoplado mecanicamente à antena. Como a massa do transdutor é muito menor que a da antena, sua vibração possuirá uma amplitude muito maior do que a da antena. O que ocorre no detector é a transformação do efeito mecânico em um conjunto de pulsos eletrônicos que serão gravados e analisados posteriormente. As características desse tipo de detector dependem não só do material com o qual é construído, como também da sua forma. Assim, podem ser classificados como cilíndricos ou esféricos.

Existem vários detectores ressonantes cilíndricos espalhados pelo mundo, tais como Allegro nos EUA, o Niobè na Austrália, o Auriga e o Nautilus na Itália e o Explorer na Suíça (os dois primeiros encontram-se desativados). Os detectores massa-ressonantes atuais são cerca de mil vezes mais sensíveis do que o originalmente construído por Weber. Além das barras, existem os detectores ressonantes esféricos que estão sendo desenvolvidos no Brasil e na Holanda (Figura 3.2).



Figura 3.2 - Foto do detector Mario Schenberg.

3.2.2 Detectores Interferométricos

O interferômetro é um instrumento que utiliza a característica ondulatória da luz para gerar um padrão de interferência. Tal padrão é sensível as mudanças de separação dos espelhos que compõe o aparelho. Na Figura 3.3 está uma representação esquemática de um detector interferométrico.

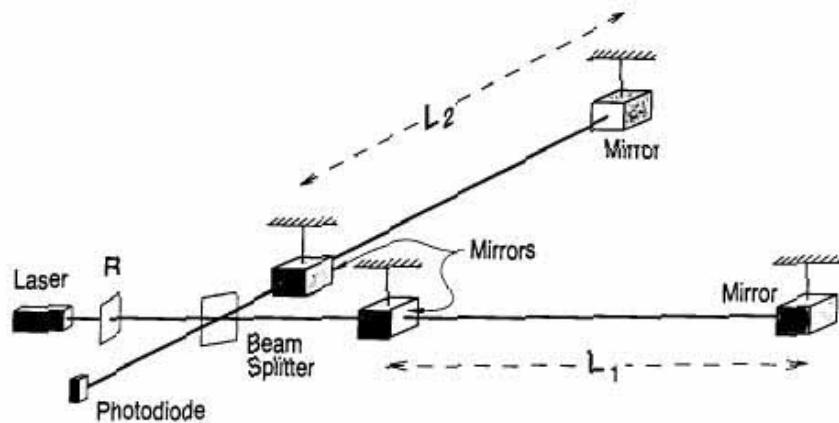


Figura 3.3 - Representação esquemática de um interferômetro.

Fonte: Hughes et al. (2001).



Figura 3.4 - Foto aérea do LIGO no sítio em Hanford, Washington

Fonte: Shoemaker (2007).

O detector interferométrico de OG's é construído com dois grandes braços ortogonais. Nesses são colocados quatro massas de teste, suspensas por fios, próximas ao vértice e no final de cada braço. Os braços possuem a forma de 'L', em que a separação L_1 entre as massas do primeiro braço é aproximadamente igual a L_2 do segundo ($L_1 = L_2 = L$, vide Figura 3.3). A diferença fracional

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{L'_1 - L'_2}{L}, \quad (3.2)$$

em uma direção qualquer é dada por (ABRAMOVICI et al., 1992):

$$\frac{\Delta L}{L} = F_+ h_+(t) + F_\times h_\times(t), \quad (3.3)$$

em que $h(t)$ é o alongamento produzido pela onda, F_+ e F_\times são funções que dependem da direção da fonte e orientação do detector.

Quando uma onda gravitacional atravessa o detector, um dos braços é contraído enquanto o outro é alongado. Esta modificação no caminho óptico leva a uma modificação no padrão de interferência. Porém, como dito anteriormente, o deslocamento relativo dos espelhos, devido a passagem da onda, é muito pequeno. Dessa forma, se faz necessário braços muito longos. Por exemplo, para uma onda de 1kHz são necessários braços da ordem de 100km (HAKIM, 1999). Assim, para se obter braços efetivos dessa ordem, o laser passa pelos braços várias vezes.

A Figura 3.4 mostra o interferômetro norte americano LIGO, que possui braços com comprimento de 4 km.

3.3 Razão Sinal/Ruido de um Fundo Estocástico para Detectores Interferométricos

Como dito anteriormente, a interação entre matéria e as ondas gravitacionais é muito fraca, isto significa que o sinal de um fundo estocástico estará abaixo do ruído intrínseco de um dado detector. Porém, pode-se melhorar a razão sinal/ruído através da correlação entre os sinais de saída de dois detectores, desde que os ruídos internos destes não sejam correlacionados (ALLEN, 1997).

Para o caso mais simples em que se tem dois detectores interferométricos localizados no mesmo ponto e com idênticas orientações, o sinal de saída do primeiro detector será:

$$s_1(t) = h_1 + n_1, \quad (3.4)$$

onde h_1 é o sinal gerado no detector devido ao fundo estocástico e n_1 é o seu ruído interno. Do mesmo modo, para o segundo detector tem-se:

$$s_2(t) = h_2 + n_2. \quad (3.5)$$

Como foi suposto que ambos detectores possuem mesma orientação e estão no mesmo ponto, $h_1(t)$ será igual a $h_2(t)$. Com isto, pode-se obter um sinal efetivo a partir dos sinais de saída de cada detector, o que leva a:

$$S = \langle s_1, s_2 \rangle \equiv \int_{-T/2}^{T/2} s_1(t)s_2(t)dt, \quad (3.6)$$

onde T é o tempo de integração.

Como o sinal é pequeno, comparado com o ruído, tem-se:

$$S = \langle h_1, h_2 \rangle + \langle n_1, h_2 \rangle + \langle h_1, n_2 \rangle + \langle n_1, n_2 \rangle, \quad (3.7)$$

ou,

$$S \cong \langle h_1, h_2 \rangle + \langle n_1, n_2 \rangle, \quad (3.8)$$

onde, $\langle n_1, h_2 \rangle$ são menores que $\langle n_1, n_2 \rangle$.

Para o caso mais realista, é preciso levar em conta o fato de que os braços dos detectores não estão paralelamente alinhados e que há um atraso temporal na recepção do sinal entre os detectores. Isto leva a uma redução da sensibilidade, pois a sobreposição dos sinais não ocorre de forma a maximizar o sinal composto.

Assim, para considerar este efeito é definida uma função de redução para a sobreposição dos sinais, dada por Flanagan (1993):

$$\gamma(f) = \frac{5}{8\pi} \int_{S^2} d\hat{\Omega} e^{2\pi f \hat{\Omega} \cdot \frac{\Delta \vec{x}}{c}} (F_1^+ F_2^+ + F_1^\times F_2^\times), \quad (3.9)$$

onde $\hat{\Omega}$ é um vetor unitário (em esteradianos), $\Delta \vec{x}$ é a separação entre os detectores e $F_i^{+,\times}$ é a resposta do detector i à polarização \times ou $+$, a qual é dada por:

$$F_i^{+,\times} = \frac{1}{2} (\widehat{X}_1^a \widehat{X}_1^b - \widehat{Y}_1^a \widehat{Y}_1^b) e_{ab}^{+,\times}(\hat{\Omega}). \quad (3.10)$$

As direções dos braços dos detectores são definidas por \widehat{X}_1^a e \widehat{Y}_1^a , enquanto $e_{ab}^{+,\times}(\hat{\Omega})$ é o tensor de polarização da onda em uma dada freqüência f .

A Equação (3.9) é normalizada de forma que para $|\Delta \vec{x}| = 0$ e braços paralelos tenhamos $\gamma \rightarrow 1$. O fator exponencial é a fase que leva em conta o atraso temporal na resposta dos detectores, para a radiação chegando na direção de $\hat{\Omega}$.

Em seu trabalho, Flanagan ([FLANAGAN, 1993](#)), utiliza estatística bayesiana para análise da razão sinal/ruido, porém aqui, será feito um tratamento mais simples e de cunho freqüentista.

Uma forma mais geral de correlação entre o sinal dos detectores é dada por:

$$S \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t - t'), \quad (3.11)$$

em que $Q(t - t')$ é uma função filtro.

A escolha da função filtro depende da orientação e localização dos detectores, bem como dos seus ruídos característicos, e também do espectro de potência do fundo estocástico.

Se os detectores estão próximos, em relação ao comprimento de onda do sinal recebido para o qual são sensíveis, possuam estreita largura de banda e estão identicamente orientados, a melhor escolha da função filtro é a delta de Dirac ($Q(t - t') = \delta(t - t')$).

Partindo disto, é possível reescrever a Equação (3.11) como:

$$S \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' s_1(t) s_2(t') Q(t - t'), \quad (3.12)$$

desde que o tempo de integração T seja de pelo menos alguns meses.

Escrevendo a equação anterior no domínio das freqüências, no qual a transformada de Fourier é dada por:

$$\bar{g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-2\pi|f|t} g(t), \quad (3.13)$$

e assumindo que o filtro seja uma função real, tal que $\bar{Q}(-f) = \bar{Q}^*(f)$, onde $*$ denota complexo conjugado, obtém-se:

$$S \equiv \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T(f - f') \bar{s}_1^*(f) \bar{s}_2(f') \bar{Q}(f'). \quad (3.14)$$

A função $\delta_T(f - f')$ é uma aproximação no tempo da delta de Dirac definida como:

$$\delta_T(f) \equiv \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-2\pi i ft} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}, \quad (3.15)$$

a qual se reduz a usual delta de Dirac no limite $T \rightarrow \infty$. Contudo, em observações finitas no tempo, tem-se:

$$\delta_T(0) = T. \quad (3.16)$$

Considerando que o sinal de interesse seja um fundo estocástico isotrópico, não polarizado e Gaussiano, as transformadas de Fourier do sinal e do ruído serão dadas por:

$$\langle \bar{h}_1^*(f) \bar{h}_2(f') \rangle = \delta(f - f') \frac{3H_0^2}{20\pi^2} |f|^{-3} \Omega_{GW}(|f|) \gamma(|f|); \quad (3.17)$$

$$\langle \bar{n}_i^* \bar{n}_j \rangle = \frac{1}{2} \delta(f - f') \delta_{ij} P_i(|f|), \quad (3.18)$$

onde i e j denotam a localização dos detectores, $P_i(f)$ é a função densidade do espectro de potência do ruído, o qual é uma função real não negativa, H_0 é a constante de Hubble e Ω_{GW} é a contribuição para a densidade de energia do Universo devido ao fundo estocástico de OG's.

Considerando a Equação (3.17) na Equação (3.14) tem-se:

$$\langle S \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T(f - f') \left\langle \bar{h}_1^*(f) \bar{h}_2(f') \right\rangle \bar{Q}(f'), \quad (3.19)$$

ou,

$$\langle S \rangle = \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T \int_{-\infty}^{\infty} df \gamma(|f|) |f|^{-3} \Omega_{GW}(|f|) \bar{Q}(f), \quad (3.20)$$

em que foi assumido $\delta_T(0) = T$.

A quantidade de ruído é dada por:

$$N \equiv S - \langle S \rangle. \quad (3.21)$$

Como o ruído de cada detector $n_i(t)$ é muito maior que $h_i(t)$ tem-se que:

$$N \cong \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T(f - f') \bar{n}_1^*(f) \bar{n}_2(f') \bar{Q}(f'). \quad (3.22)$$

Como os ruídos dos detectores não são correlacionados, tem-se:

$$\langle N \rangle = 0, \quad (3.23)$$

Contudo, o valor quadrático médio não será nulo, ou seja,

$$\langle N^2 \rangle = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2. \quad (3.24)$$

Usando a Equação (3.22) e (3.18) obtém-se:

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} df' \delta_T^2(f - f') P_1(|f|) P_2(|f'|) |\bar{Q}(f')|^2, \quad (3.25)$$

para longas observações no tempo, a função delta tem um pico na região $f - f'$, isso quando a escala $1/T$ é muito pequena comparada com a escala na qual as funções P_1, P_2

e \bar{Q} variam. Com isto obtém-se:

$$\langle N^2 \rangle = \frac{T}{4} \int_{-\infty}^{\infty} df P_1(|f|) P_2(|f|) |\bar{Q}(f)|^2. \quad (3.26)$$

É importante encontrar uma função filtro \bar{Q} que maximize a razão sinal/ruído, para que seja possível observar o fundo desejado. Para encontrar \bar{Q} inicia-se definindo a razão sinal/ruído onde:

$$\left(\frac{S}{N} \right) = \frac{\langle S \rangle}{\langle N^2 \rangle^{1/2}}. \quad (3.27)$$

Introduzindo o produto interno entre duas funções complexas e arbitrárias $A(f)$ e $B(f)$, tal que este produto produza um único número complexo (A, B) , o qual é definido como:

$$(A, B) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} df A^*(f) B(f) P_1(|f|) P_2(|f|), \quad (3.28)$$

será possível então expressar o sinal e a quantidade de ruído em função deste produto como:

$$\langle S \rangle = \left(\bar{Q}, \frac{\gamma(|f|) \Omega_{GW}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)} \right) \frac{3H_0^2}{20\pi^2} T; \quad (3.29)$$

$$\langle N^2 \rangle = \frac{1}{4} (\bar{Q}, \bar{Q}) T. \quad (3.30)$$

Com isto, a Equação (3.27) pode ser escrita como:

$$\left(\frac{S}{N} \right)^2 = \left(\frac{3H_0^2}{10\pi^2} \right)^2 T \frac{\left(\bar{Q}, \frac{\gamma(|f|) \Omega_{GW}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)} \right)^2}{\bar{Q}, \bar{Q}}. \quad (3.31)$$

Como o produto interno entre dois vetores é maximizado quando estes apontam na mesma direção, vem:

$$\bar{Q}(f) = \frac{\gamma(|f|) \Omega_{GW}(|f|)}{|f|^3 P_1(|f|) P_2(|f|)}. \quad (3.32)$$

Assim, a expressão da razão sinal/ruído torna-se:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{9H_0^4}{50\pi^4} T \int_0^\infty \frac{\gamma^2(f)\Omega_{GW}^2(f)}{f^6 P_1(f)P_2(f)} df. \quad (3.33)$$

A equação (3.33) é válida para a correlação de dois interferômetros. Para os LIGO's, a função $\gamma(f)$ é obtida por [Allen \(1997\)](#), enquanto que $P_1(f)$ e $P_2(f)$ são obtidos do trabalho de [Owen e Sathyaprakash \(1999\)](#). A distância entre os dois LIGO's situados em Hanford (Washington) e Livingston (Louisiana) é

$$|\Delta \vec{x}| \simeq 2.998 \text{ km.}$$

3.4 Amplitude de um Fundo Estocástico de Ondas Gravitacionais.

Na seção anterior, vimos que a detectabilidade de um fundo estocástico de OG irá depender de sua densidade de energia Ω_{GW} (vide Equação (3.33)). A partir de agora nos concentramos nas características de um fundo estocástico de OG's, provindo da emissão de estrelas pré-galácticas que colapsam para buracos negros.

Primeiramente, para determinar a amplitude de um fundo estocástico, deve-se conhecer o fluxo recebido em OG's por um detector na Terra. Este é obtido através de [de ARAUJO e Miranda \(2005\)](#):

$$F_\nu(\nu_{obs}) = \int \frac{l_\nu}{4\pi d_L^2} \frac{d\nu}{d\nu_{ob}} dV \quad (3.34)$$

onde $l_\nu = dL_\nu/dV$ é a densidade de luminosidade comóvel ($\text{ergs}^{-1}\text{Hz}^{-1}\text{Mpc}^3$), d_L é a distância de luminosidade e dV é o elemento de volume comóvel.

A densidade de luminosidade comóvel, l_ν , pode ser escrita como:

$$l_\nu = \int \frac{dE_{GW}}{d\nu} \dot{\rho}_*(z) \phi(m) dm, \quad (3.35)$$

onde $dE_{GW}/d\nu$ é a energia específica de uma dada fonte, $\dot{\rho}_*(z)$ é a taxa cósmica de formação estelar (TCFE) e $\phi(m)$ é a função de massa inicial.

Com isto, o fluxo recebido na Terra é:

$$F_\nu(\nu_{obs}) = \int \frac{1}{4\pi d_L^2} \frac{dE_{GW}}{d\nu} \frac{d\nu}{d\nu_{obs}} \frac{dV}{dz} \dot{\rho}_*(z) \phi(m) dm dz. \quad (3.36)$$

O fluxo de energia específico é,

$$f_\nu(\nu_{obs}) = \frac{1}{4\pi d_L^2} \frac{dE_{GW}}{d\nu} \frac{d\nu}{d\nu_{obs}}, \quad (3.37)$$

que pode ser escrito como ([de ARAUJO; MIRANDA, 2005](#)):

$$f_\nu(\nu_{obs}) = \frac{\pi c^3}{2G} h_{BN}^2, \quad (3.38)$$

onde h_{BN} é a amplitude adimensional da onda gravitacional gerada por um único buraco negro.

Escrevendo o fluxo em termos da amplitude adimensional do fundo estocástico como,

$$F_\nu(\nu_{obs}) = \frac{\pi c^3}{2G} h_{BG}^2 \nu_{obs}, \quad (3.39)$$

obtém-se, com o uso das equações (3.36), (3.37), (3.38) e (3.39)

$$h_{BG}^2 = \frac{1}{\nu_{obs}} \int h_{BN}^2 dR_{BN}, \quad (3.40)$$

que permite obter a amplitude característica do fundo estocástico. Nessa equação,

$$dR_{BN} = \dot{\rho}_*(z) \phi(m) \frac{dV}{dz} dm dz, \quad (3.41)$$

é a razão diferencial de formação de buracos negros e ν_{obs} é a freqüência observada na Terra. Note que o histórico de formação estelar, dado pela TCFE $\dot{\rho}_*(z)$ e a função de massa $\phi(m)$ (conseqüentemente a própria história de formação e evolução de estruturas, tal como será visto no capítulo 4), estão embutidos na razão diferencial de formação de buracos negros. O h_{BN} , para o “ringdown” do buraco negro, é dado por ([THORNE, 1987](#)):

$$h_{BN} = 7,4 \times 10^{-20} \epsilon_{GW}^{1/2} \left(\frac{M_r}{M_\odot} \right) \left(\frac{d_L}{1 \text{Mpc}} \right)^{-1}, \quad (3.42)$$

em que ϵ_{GW} é a eficiência de geração de OG's, d_L é a distância de luminosidade e M_r é a massa do buraco negro.

O valor máximo de ϵ_{GW} é da ordem de $7,0 \times 10^{-4}$. Este foi obtido por [Piran e Stark \(1986\)](#) através da simulação do colapso assimétrico de uma estrela em rotação gerando um buraco negro. Contudo, recentemente [Fryer et al. \(2001\)](#) obtiveram $\epsilon \simeq 2,0 \times 10^{-5}$, para remanescentes de buracos negros gerados a partir do colapso de estrelas com massa da ordem de $100M_\odot$. Porém, é importante destacar que não existe uma parametrização que relate ϵ como uma função da massa do buraco negro formado.

A distância de luminosidade, relaciona-se ao “*redshift*” por:

$$d_L = r_z(1 + z), \quad (3.43)$$

em que r_z é a distância comóvel, tal que ([de ARAUJO et al., 2001](#)):

$$r_z = \frac{c}{H_0 \Omega_k^{1/2}} S \left(\Omega_k^{1/2} \int_0^z \frac{dz'}{G(\Omega_m, \Omega_\Lambda, z')} \right), \quad (3.44)$$

onde

$$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{DM} \quad \text{e} \quad \Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k$$

são os usuais parâmetros para a densidade de matéria (m), ou seja, de matéria escura (DM) mais a bariônica (b), o de curvatura (k) e o de constante cosmológica (Λ). A função $G(\Omega_m, \Omega_\Lambda, z')$ é:

$$G(\Omega_m, \Omega_\Lambda, z) \equiv \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}}. \quad (3.45)$$

A função S pode assumir os seguintes valores:

$$S(x) = \begin{cases} \operatorname{senh}(x), & \text{se } \Omega_0 < 1 \\ x, & \text{se } \Omega_0 = 1 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{se } \Omega_0 > 1 \end{cases} \quad (3.46)$$

Considerando que o Universo seja plano, ou seja $\Omega_k = 0$ ($\Omega_0 = 1$), tem-se:

$$r_z = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{G(\Omega_m, \Omega_\Lambda, z')} \quad (3.47)$$

A variação do volume comóvel que aparece em (3.41) é então,

$$\frac{dV}{dz} = 4\pi \left(\frac{c}{H_0} \right) r_z^2 G(\Omega_m, \Omega_\Lambda, z'). \quad (3.48)$$

Uma forma de calcular a massa remanescente M_r de um buraco negro gerado por uma estrela de massa m é apresentado por [Heger e Woosley \(2002\)](#), e é dado por:

$$M_r = \frac{13}{24}(m - 20M_\odot), \quad (3.49)$$

para $25 \leq m \leq 140M_\odot$.

A freqüência observada em Hz do fundo, como uma função de M_r é dada por ([THORNE, 1987](#)):

$$\nu_{obs} = 1,3 \times 10^4 \left(\frac{M_\odot}{M_r} \right) (1+z)^{-1}. \quad (3.50)$$

Agora, assumindo (3.42), (3.43) e (3.48), a (3.40) torna-se:

$$h_{BG}^2 = \frac{(7,4 \times 10^{-20} \epsilon^{1/2})^2}{\nu_{obs}} 4\pi \left(\frac{c}{H_0} \right) \int_{z_{cf}}^{z_{ci}} \int_{M_{min}}^{M_{max}} \left(\frac{M_r}{M_\odot} \right)^2 (1+z)^{-2} \dot{\rho}_*(z) G(\Omega_m, \Omega_\Lambda, z) \phi(m) dm dz. \quad (3.51)$$

A contribuição do fundo estocástico para a densidade de energia do Universo do fundo, dado por ([ALLEN, 1997; FERRARI et al., 1999](#)):

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{\rho_c} \frac{d\rho_{GW}}{dlog(\nu_{obs})}, \quad (3.52)$$

relaciona-se com h_{BG} por (de [ARAUJO et al., 2000](#)):

$$\Omega_{GW} = \frac{\nu_{obs}}{c^3 \rho_c} F_\nu = \frac{4\pi^2}{3H_0^2} \nu_{obs}^2 h_{BG}^2. \quad (3.53)$$

Como visto na seção anterior, o parâmetro Ω_{GW} é importante para saber se um dado fundo poderá ser, ou não, observado, ao se realizar a correlação entre sinal/ruído de dois detectores interferométricos (vide Equação 3.33).

No próximo capítulo será apresentado o cenário de formação de estruturas utilizado como “pano de fundo” para o cálculo de h_{BG} . Isto é, o cenário que fornece as funções $\hat{\rho}_*$ e $\phi(m)$.

4 FORMAÇÃO DE ESTRUTURAS E EVOLUÇÃO DO UNIVERSO

No capítulo anterior foram apresentados os conceitos e características associados com as OG's. Agora, apresenta-se a seguinte questão: Seria possível reconstruir a história do Universo, desde a formação de objetos pré-galácticos até o presente momento, usando OG's?

O presente trabalho é uma tentativa de contribuir para essa questão. Neste capítulo é apresentado um modelo de formação de estruturas e de evolução do Universo. A idéia aqui é verificar se através da detecção de um fundo estocástico cosmológico de OG's seria possível ter alguma idéia sobre a formação das primeiras estrelas do Universo.

4.1 Cenário hierárquico de Formação de Estruturas

Um cenário que descreve a formação de estruturas é o chamado “hierárquico”, onde pequenos objetos são formados primeiro. Este modelo vem naturalmente a partir do cenário de *matéria escura fria (cold dark matter -CDM)*, e nas décadas de 70 e 80 era conhecido como *bottom-up* ([NETO, 2004](#)).

Para entender a formação de galáxias, primeiramente vamos considerar o Teorema do Virial. Neste, para que um sistema esteja em equilíbrio, as energias cinética (K) e potencial (U) devem obedecer a relação

$$2K + U = 0. \quad (4.1)$$

Isto significa que para ocorrer o colapso de um gás homogêneo com densidade ρ e temperatura T , a condição $2K < |U|$ deve ser satisfeita. A massa necessária para que um gás colapse é chamada de massa de Jeans e é dada por:

$$M_J = \left(2,5 R_g \frac{T}{\mu G} \right)^{3/2} (4/3 \pi \rho)^{-1/2}, \quad (4.2)$$

onde μ é a massa atômica média por partícula, R_g é a constante de gás ideal, T é a temperatura, G é a constante gravitacional e ρ é a densidade do gás.

O raio mínimo que uma nuvem de gás deve ter para colapsar é conhecido como comprimento de Jeans e é dado por:

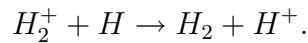
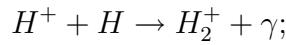
$$R_J = 1,5GM_J/\mu. \quad (4.3)$$

Segundo o modelo Λ CDM (“*Cold dark Matter*” com *Constante Cosmológica*), objetos como estrelas e galáxias são formados a partir da queda de matéria bariônica no poço de potencial gerado por halos de matéria escura. Basicamente, para que os bárions sejam capazes de condensar, a atração gravitacional dos halos deve superar a ação de expansão do Universo.

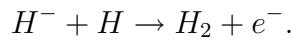
Além disso, é necessário que a matéria bariônica resfrie para que possa ser agregada nos halos de matéria escura. No Universo primordial, não existiam quantidades significativas de metal. O resfriamento radiativo, via transições rotacional e vibracional do hidrogênio molecular, providencia o mecanismo pelo qual os bárions podem condensar nos poços de potencial gerados por halos de matéria escura. Além do H_2 , existiam outras moléculas tais como, HD, LiH, mas o H_2 era o mais abundante, dominando o resfriamento entre 100 – 1000 K ([FULLER; COUCHMAN, 2000](#)).

A maior produção de H_2 era devido a dois principais canais, que são ([OLIVEIRA et al., 1998a](#); [OLIVEIRA et al., 1998b](#)):

a)

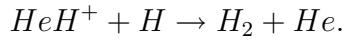
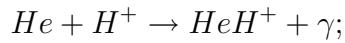


b)



Para “redshifts” z maiores que 200, os fótons da RCF eram energéticos o suficiente para que a reação de $H^- + \gamma \rightarrow H + e^-$ ocorresse, neutralizando todos os ions H^- , tornando dominante o canal “a”. Para baixos valores de z , o canal “b” ocorre muito mais rápido que o “a” o que o faz dominante na formação de H_2 neste período ([FULLER; COUCHMAN, 2000](#)).

Um outro processo sugerido recentemente por [Hirata e Padmanabhan \(2006\)](#) seria o que permite a maior formação de H_2^+ via,



Ao lado do H_2 , a emissão Lyman- α é um importante mecanismo de resfriamento para o gás no intervalo em temperatura de $10^3 - 10^4$ K ([MATTEUCCI, 2001](#)).

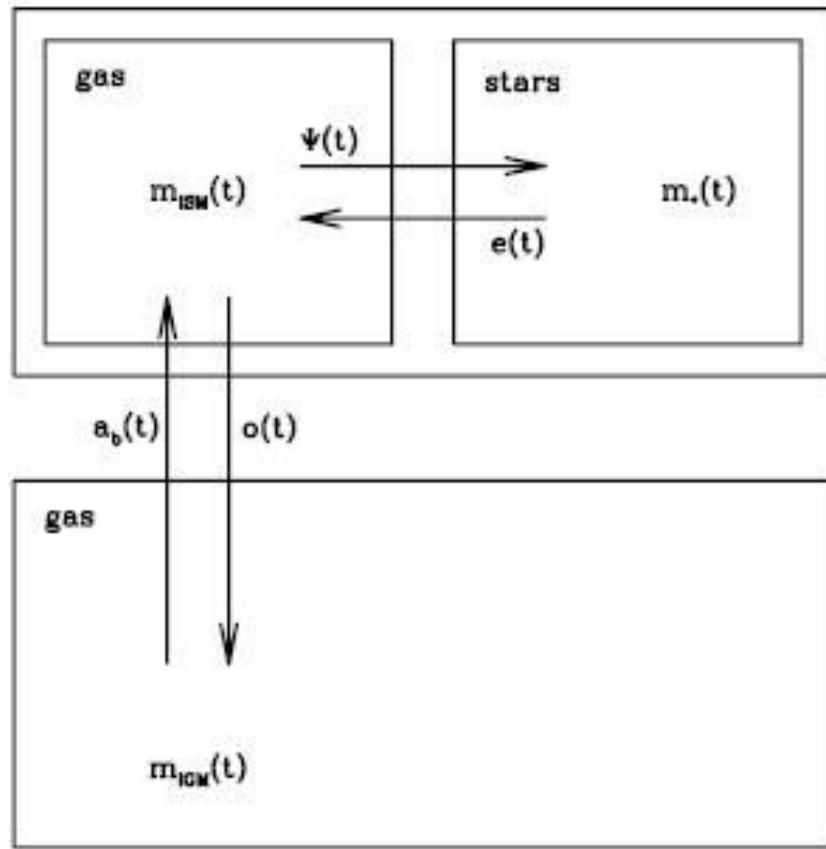


Figura 4.1 - Esquema de intercâmbio de bárions.

Fonte: [Daigne et al. \(2006\)](#).

No nosso estudo, consideramos que num *redshift* $z = z_{ini}$ a matéria bariônica resfriou o suficiente para começar a cair no poço de potencial dos halos de matéria escura. Esquematicamente, consideramos três reservatórios bariônicos como proposto por [Daigne et al. \(2004; 2006\)](#). A Figura 4.1 ilustra esses reservatórios. A parte inferior representa a matéria bariônica no meio intergaláctico (MIG). O termo $a_b(t)$ é a taxa de acresção de bárions em halos de matéria escura (parte superior da figura). Os dois quadrinhos menores

no retângulo superior (halo) representam, da esquerda para direita respectivamente, o gás contido no meio interestelar (MIE) e a matéria bariônica em estrelas. O termo $\Psi(t)$ é a taxa de formação estelar, $e(t)$ é a ejeção de matéria para o MIE devido a supernovas. Eventualmente, o gás contido no MIE recebe energia, podendo retornar ao MIG. A taxa que determina este retorno é dada por $o(t)$

A massa total em bárions no Universo (que é constante) é a soma da massa do meio intergaláctico e a da massa presente nas estruturas, ou seja,

$$M_{tot} = M_{ES} + M_{MIG}. \quad (4.4)$$

A massa total bariônica nas estruturas será:

$$M_{ES} = M_{MIE} + M_*, \quad (4.5)$$

onde M_{MIE} é a massa do meio interestelar e M_* é a massa contida em estrelas.

A variação de massa do meio intergaláctico no tempo pode ser determinada por:

$$\frac{dM_{MIG}}{dt} = -a_b(t) + o(t), \quad (4.6)$$

enquanto a variação de massa bariônica nas estruturas é:

$$\frac{dM_{ES}}{dt} = a_b(t) - o(t). \quad (4.7)$$

Por outro lado, a massa em estrelas é governada por:

$$\frac{dM_*}{dt} = \Psi(t) - e(t). \quad (4.8)$$

Vale destacar que o termo $o(t)$ é mais importante no estudo da evolução química do Universo primordial, que para o estudo de formação de estrelas em objetos pré-galácticos. Isto é, a seguinte relação é mantida: $o(t) < a_b(t)$, ao menos para $z \gtrsim 2$.

Neste trabalho, o interesse está na assinatura em OG's gerada pelo colapso, para buracos negros, de estruturas pré-galácticas. Assim, no nosso modelo não consideraremos o termo

$o(t)$. Temos então que obter a função $a_b(t)$ e tentar relacioná-la com a formação estelar $\dot{\rho}_*(z)$ apresentada no capítulo anterior. Isso será feito nas próximas duas seções.

4.2 Formalismo “Tipo” Press-Schechter

Para determinar a taxa de acresção de bárions em estruturas, e consequentemente, a taxa de formação estelar, é preciso primeiramente um método para compreender a formação e evolução de halos de matéria escura. Press e Schechter (P-S), num seminal artigo ([PRESS; SCHECHTER, 1974](#)), apresentam uma forma de calcular a função de massa de objetos ligados e virializados. Neste modelo, os halos de matéria escura colapsam quando a densidade média em um dado volume excede um limiar da ordem de δ_c ([PEACOCK, 1999](#)).

É possível estimar a distribuição desses objetos a partir da “filtragem” do campo de densidades. Se a função filtro possuir um comprimento característico R_f , então, a escala típica de flutuação do campo de densidade conterá uma massa dada por $M \sim \rho_0 R_f^3$. Normalmente considera-se a função filtro como Gaussiana. Neste caso, a probabilidade de que um dado ponto caia na região em que $\delta > \delta_c$ será dada por:

$$F(> M) = \left[1 - \text{erf} \left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\sigma(R_f)} \right) \right], \quad (4.9)$$

onde $\text{erf}(x)$ é a função erro e $\sigma(R_f)$ é a flutuação de densidade em R_f . Isto é,

$$\sigma = \frac{\rho - \langle \rho \rangle}{\langle \rho \rangle}. \quad (4.10)$$

A função de massa é definida de tal modo que

$$n_{halo} = f(M; P - S) dM \quad (4.11)$$

seja a densidade numérica de halos, que se relaciona com a função probabilidade $F(> M)$ por:

$$\frac{M f(M; P - S)}{\rho_0} = |dF/dM|, \quad (4.12)$$

onde ρ_0 é a densidade ambiente do Universo. Isto conduz a:

$$\frac{M^2 f(M; P - S)}{\rho_0} = \frac{dF}{d \ln(M)} = \left| \frac{d \ln \sigma}{d \ln(M)} \right| \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\delta_c}{\sigma(M)} \exp \left(-\frac{\delta_c^2}{2\sigma(M)^2} \right). \quad (4.13)$$

Expressando a variância em termos do espectro de potência do campo de densidade linearmente extrapolado para $z = 0$ ([JENKINS et al., 2001](#)), tem-se:

$$\sigma^2(M, z) = \frac{D^2(z)}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 P(k) W^2(k; M) dk, \quad (4.14)$$

onde $D(z)$ é o fator de crescimento das perturbações tal que $D = 1$ em $z = 0$ (para $\Omega_m = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$) e k é o número de onda associado a escala R_f de um volume V .

O filtro (ou função janela) é dado por W^2 no espaço de Fourier e $P(k)$ é o espectro de potência das perturbações primordiais.

A função janela mais usada é a “*top-hat*” (densidade constante dentro da janela) e é dada por:

$$W(k, M) = \frac{3}{(kR_f)^3} (\sin kR_f - kR_f \cos kR_f) \quad (4.15)$$

O fator de crescimento para uma cosmologia Λ CDM é ([CARROLL; PRESS, 1992](#)):

$$D(a) = \frac{5\Omega_M(a).a}{2[1 - \Omega_\Lambda(a) + \Omega_M^{4/7} + 1/2\Omega_M(a)]}. \quad (4.16)$$

Quanto, as flutuações de densidade estas podem ser ([NETO, 2004](#)):

- **Isotérmicas:** quando a densidade de radiação é uniforme. Isto é, as flutuações ocorrem nos bárions enquanto os fótons formam um fundo homogêneo.
- **Adiabáticas:** quando a entropia permanece constante. Para este caso, as perturbações afetam tanto os fótons como a matéria.
- **Isocurvaturas:** quando as densidades de matéria e radiação são anti-correlacionadas de modo que:

$$\delta\rho_{rad} + \delta\rho_{mat} = 0, \quad (4.17)$$

assim, neste caso, a flutuação de densidade de energia é nula e, portanto, inicialmente não há perturbação na curvatura do Universo. Devido à expansão do Universo, que reduz $\delta\rho_{rad}$, as perturbações da matéria crescem à medida que $z \rightarrow 0$.

A figura abaixo ilustra o comportamento destas perturbações.

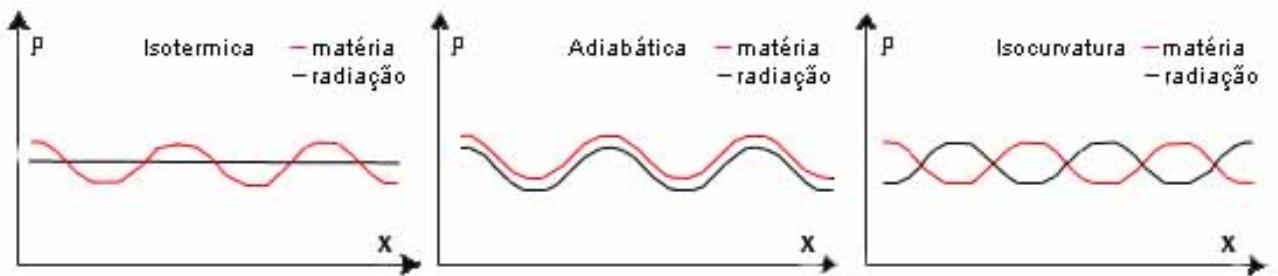


Figura 4.2 - Perturbações de densidade isotérmicas, adiabáticas e isocurvaturas.

Fonte: [Neto \(2004\)](#)

A observação das anisotropias da radiação cósmica de fundo mostra que as flutuações adiabáticas são as que melhor descrevem o processo de formação de estruturas.

Em geral, considera-se que o espectro de flutuações não possui escala privilegiada, o que implica em:

$$|\sigma|^2 \propto k^n, \quad (4.18)$$

que se relaciona com o espectro de potência através de:

$$P(k) \equiv \langle |\sigma|^2 \rangle. \quad (4.19)$$

O espectro de potência nada mais é do que uma média do quadrado da amplitude das componentes de Fourier do campo de densidades.

O espectro de potência pode sofrer modificações por uma variedade de processos, tais como, auto-gravitação, efeitos de pressão e processos dissipativos. Todos estes efeitos são embutidos na função transferência $T(k)$. Para o cenário Λ CDM temos ([BOND et al., 1986](#)):

$$P(k) = A \cdot k \cdot T(k), \quad (4.20)$$

onde A é uma constante de normalização e $T(k)$ é dada por ([EFSTATHIOU et al., 1992](#)):

$$T(k) = \frac{1}{\{1 + [ak + (bk)^{3/2} + (ck)^2]^{\nu}\}^{2/\nu}} \quad (4.21)$$

em que, $a = (6,4/\Gamma)h^{-1}\text{Mpc}$, $b = (3,0/\Gamma)h^{-1}\text{Mpc}$, $c = (1,7/\Gamma)h^{-1}\text{Mpc}$ e $\nu = 1.13$ e $\Gamma = \Omega_0 h$.

Por fim, a normalização da função de massa de P-S é obtida através da condição:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma; P - S) d\ln\sigma^{-1} = 1. \quad (4.22)$$

Simulações numéricas do tipo N-corpos ([JENKINS et al., 2001](#)) mostram que a função de massa de PS subestima a abundância de aglomerados de alta massa e sobreestima a abundância dos aglomerados próximo de uma massa característica M_* . Uma função de massa que ajusta melhor as simulações, face às observações, é a de Sheth e Tormen (S-T) ([SHETH et al., 2001](#)), que é dada por:

$$f(\sigma; S - T) = A \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\sigma^2}{a\delta_c^2} \right)^p \right] \frac{\delta_c}{\sigma} \exp \left(-\frac{a\delta_c^2}{2\sigma^2} \right). \quad (4.23)$$

onde, $A = 0,322$, $a = 0,707$ e $p = 0,3$. Nessa função, são considerados também colapsos assimétricos e não apenas esféricos como no caso P-S. Em particular, usamos a (4.23) para obter a fração de bárions em estruturas (como será discutido adiante).

A flutuação de densidade em $z = 0$ é usualmente medida em uma esfera de $8h^{-1}\text{Mpc}$, tal que:

$$\sigma_8 = \sigma_{\text{materia}}(8h^{-1}\text{Mpc}) = \frac{\sigma_{\text{gal}}(8h^{-1}\text{Mpc})}{b}. \quad (4.24)$$

Onde b é o fator de viés (ou “*bias*”) e σ_{gal} é a variância na distribuição de galáxias (matéria luminosa). O valor observational de σ_8 ([PIERPAOLI et al., 2001](#)) para um Universo plano é $\sigma_8 = (0,50 \pm 0,04)\Omega_m^{-0,6}$ que resulta em $\sigma_8 = (1,03 \pm 0,08)$ para $\Omega_m = 0,3$.

A partir da função de massa, a densidade comóvel de matéria escura (ρ_{DM}) é dada por (DAIGNE et al., 2006):

$$\rho_{DM} = \int_0^\infty dM M f_{PS}(M, z). \quad (4.25)$$

Considerando que as estrelas só possam ser formadas quando a massa inicial dos halos de matéria escura seja M_{min} , podemos escrever:

$$\rho_{halos} = \int_{M_{min}}^\infty dM M f_{PS}(M, z). \quad (4.26)$$

Assim, a fração de bárions em estruturas para um determinado “redshift” é dada por:

$$f_b(z) = \frac{\rho_{halos}}{\rho_{DM}}, \quad (4.27)$$

enquanto a taxa de acresção de bárions em estruturas será dada por:

$$a_b(t) = \rho_b \left(\frac{dt}{dz} \right)^{-1} \left| \frac{df_b(z)}{dz} \right|. \quad (4.28)$$

A relação entre o tempo e o “redshift” para o modelo Λ CDM é dada por:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{9,78 h^{-1} Gyr}{(1+z)\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m(1+z)^3}}. \quad (4.29)$$

As figuras 4.3 e 4.4 mostram a evolução das funções f_b e $a_b(z)$ obtidas numericamente a partir da equação (4.23).

Observe que a fração de bárions em estruturas f_b depende da massa mínima inicial dos halos de matéria escura (M_{min}), mas veja que para valores de $z < 10$ as curvas convergem, indicando que para baixos “redshifts” f_b será fracamente dependente de M_{min} . Outro ponto a destacar é que os maiores valores de f_b , por todo intervalo de z , ocorrerão a medida que M_{min} diminui. Esse resultado pode ser compreendido lembrando que, no cenário Λ CDM, perturbações de densidade com maior massa destacam-se da expansão do Universo mais próximos do presente do que as perturbações associadas com as menores massas.

Assim, quanto maior for o valor de M_{min} mais próximo de $z = 0$ os bárions serão

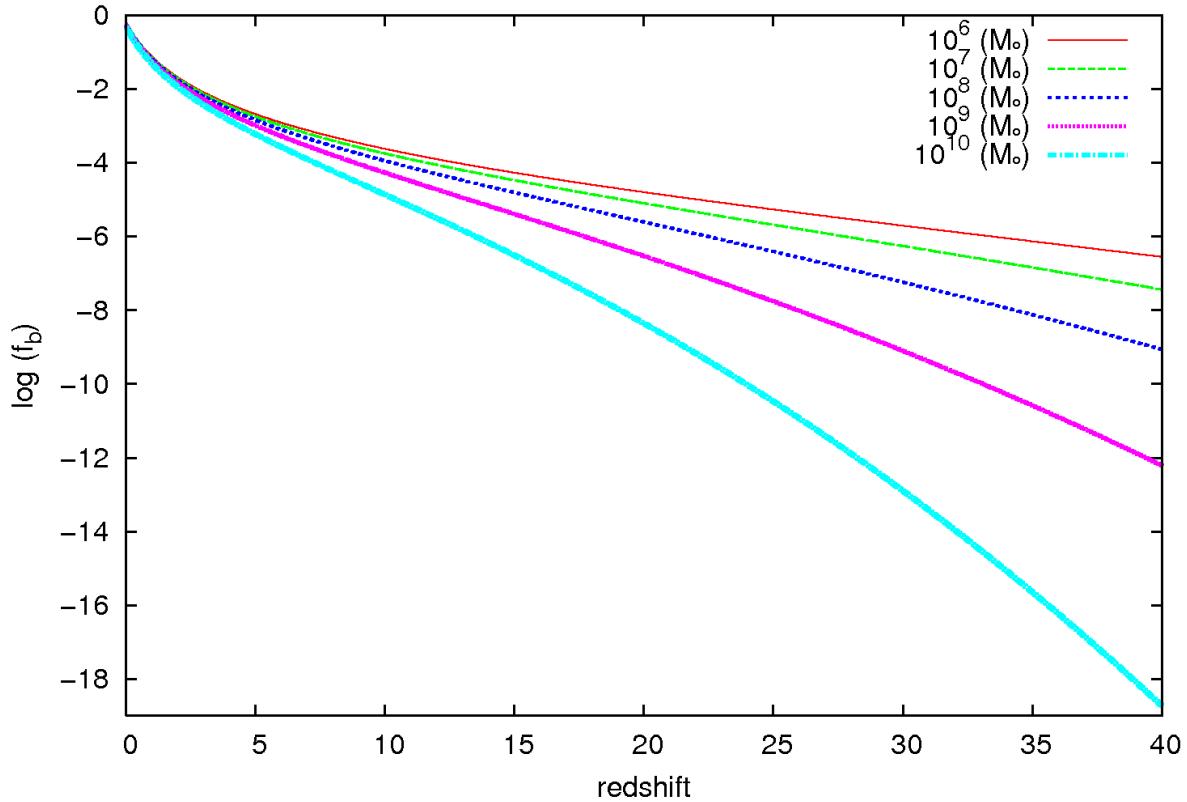


Figura 4.3 - Evolução de Bárions em Estruturas Contra o “Redshift”. As várias curvas representam diferentes valores de M_{min}

incorporados em estruturas, reduzindo o valor atual de f_b .

Na tabela 4.1 estão os valores, para o presente, da fração de bárions em estruturas considerando o $z_{ini} = 40$. Algo importante a destacar é que também foram considerados $z_{ini} = 20$ e 30 , porém, não existem variações significativas para f_b no presente. Em todos os casos as diferenças são menores que 1%.

Tabela 4.1 - Fração de Bárions em estruturas no presente

| $M_{min} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
|---------------------|--------|--------|--------|--------|-----------|
| f_b | 64,0% | 61,1% | 57,5% | 53,2% | 47,7% |

A Figura 4.4 mostra a taxa de acresção de bárions. Veja que a_b se comporta de forma muito semelhante a f_b , sendo que para menores valores de M_{min} , maior será o de a_b em todo intervalo de z .

O ponto fundamental que se coloca agora é como relacionar essas funções com $\dot{\rho}_*(z)$

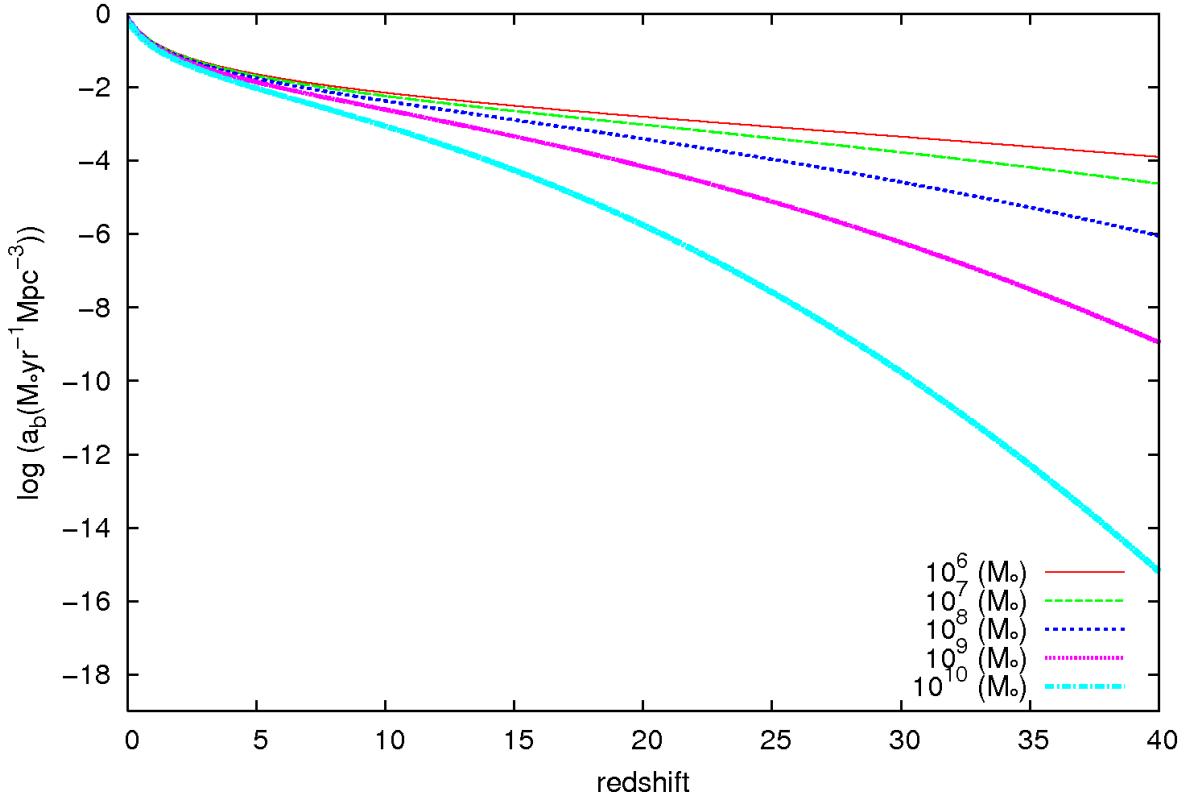


Figura 4.4 - Taxa de Acresção de Bárions em Estruturas contra o “Redshift”.

apresentada no capítulo 3. Essa questão será abordada na próxima seção.

4.3 Formação Estelar- Obtendo a Função $\dot{\rho}_*(z)$

Supondo-se uma independência entre a probabilidade de formar uma estrela de massa m e a rapidez de transformação do gás em estrelas, podemos descrever o número de estrelas formadas por unidade de volume, massa e tempo como sendo:

$$\frac{d^3 N(m, t, r)}{dV dm dt} = \phi(m) \Psi(t), \quad (4.30)$$

onde $\phi(m)$ é a função de massa inicial (FMI) que descreve a freqüência de formação de estrelas para um dado intervalo de massa $[m, m + dm]$ e $\Psi(r, t)$ é a taxa de formação estelar, que descreve quanto de gás é convertido em estrelas por unidade de tempo.

O espectro inicial de massa é definido de forma que $\phi(m)dm$ represente o número de estrelas formadas ao mesmo tempo, no intervalo de massa $[m, m + dm]$ e no instante que começa a queima de hidrogênio na seqüência principal.

A razão de formação de estrelas como função da massa de estrelas pode ser calculada a partir da função de luminosidade observada. Salpeter em 1955 introduziu essa idéia a partir do fato de que uma estrela formada na galáxia passa a maior parte de sua vida na seqüência principal, sendo este tempo proporcional a relação entre a massa e a respectiva luminosidade da estrela. Assim, Salpeter (1955) pôde determinar a função de massa inicial, $\phi(m)$, válida para a vizinhança solar:

$$\phi(m) = Am^{-(1+x)}, \quad (4.31)$$

sendo A uma constante de normalização, pois, embora a (4.31) seja contínua para qualquer massa m diferente de zero, na prática limita-se a FMI em um intervalo de massa $[m_{inf}, m_{sup}]$ fora do qual $\phi(m) = 0$.

Dessa forma, podemos escrever:

$$\int_{m_{inf}}^{m_{sup}} Am^{-(1+x)} mdm = 1. \quad (4.32)$$

A taxa de formação estelar representa, como citado anteriormente, quanto de gás é convertido em estrelas por unidade de volume e tempo. É possível que esta função dependa da quantidade de gás (bárions) disponível, ou seja, da densidade (ou massa) de gás local. Desta forma, usemos a chamada lei de Schmidt (1959):

$$\frac{d^2M_{f*}}{dVdt} = k\rho_g^n(r, t), \quad (4.33)$$

onde ρ_g é a densidade do gás e n fornece o grau de eficiência na conversão de gás em estrelas sendo que para cada valor de n obtém-se distintos modelos evolutivos. A constante k será identificada a seguir.

Porém, também podemos representar a massa de gás convertida em estrelas por unidade de volume e tempo lembrando que todas as estrelas formadas deverão ter massas compreendidas no intervalo de $0,1 - 140M_\odot$. O valor $M_{inf} = 0,1M_\odot$ corresponde a menor massa capaz de iniciar processos de fusão nuclear, enquanto o $M_{sup} = 140M_\odot$ é considerado o limite para que a estrela produza um remanescente do tipo buraco negro.

Dessa forma, podemos escrever:

$$\frac{d^2 M_{f*}}{dVdt} = \left[\int_{M_{inf}}^{M_{sup}} \phi(m) m dm \right] \Psi(r, t), \quad (4.34)$$

substituindo (4.31) em (4.34) e levando em conta (4.32), vem :

$$\frac{d^2 M_{f*}}{dVdt} = \Psi(r, t). \quad (4.35)$$

Tomando $n = 1$ podemos escrever,

$$\frac{d^2 M_{f*}}{dVdt} = \Psi(r, t) = k \rho_g(r, t). \quad (4.36)$$

Dessa forma, a constante k é o inverso da escala de tempo característico de formação estelar. Uma vez formadas, as estrelas devolvem em seu processo evolutivo matéria na forma de ventos estelares e supernovas. O cálculo da taxa ejetada pode ser feito a partir de $\Psi(r, t)$ e $\phi(m)$ e além disso, vamos adotar a aproximação de que uma estrela perde massa somente após um instante de tempo bem definido (τ_m). Dessa forma, a taxa ejetada é uma função do número de estrelas de massa (inicial) m nascidas no tempo $t - \tau_m$ (e que portanto morrem no instante t), e da sua massa remanescente m_r . Isto pode ser representado por:

$$\frac{d^2 M_{ej}}{dVdt} = \int_{m(t)}^{M_{sup}} (m - m_r) \phi(m) \Psi(r, t - \tau_m) dm, \quad (4.37)$$

onde $m(t)$ é a massa no instante em que a estrela sai da seqüência principal.

A aproximação de perda de massa repentina no final da vida de uma estrela é em geral razoável, pois para a maior parte das estrelas a perda de massa ocorre numa pequena fração de tempo de suas vidas.

A equação anterior fica fácil de ser resolvida adotando a “hipótese de reciclagem instantânea” do gás.

Para isso, vamos considerar que as estrelas podem ser divididas em duas classes de massa. Aquelas com $m_i \leq 1M_\odot$ e formadas num instante t vivem até hoje. Aquelas com $m_i > 1M_\odot$ morrem após um curto intervalo de tempo após o nascimento. Isto é $\tau_m \rightarrow 0$.

Com essa aproximação, o limite inferior da integral (4.37) passa a ser independente do

tempo. Assim, podemos escrever:

$$\frac{d^2 M_{ej}}{dV dt} = \left[\int_{M_i}^{m_{sup}} (m - m_r) \phi(m) dm \right] \Psi(r, t). \quad (4.38)$$

Definindo a fração retornada y como:

$$y = \int_{M_i}^{m_{sup}} (m - m_r) \phi(m) dm, \quad (4.39)$$

temos:

$$\frac{d^2 M_{ej}}{dV dt} = y \Psi(r, t). \quad (4.40)$$

Veja que y é a fração média de massa depositada em estrelas que é retornada ao meio interestelar. A comparação de (4.40) com (4.8) permite fazer a identificação:

$$e(r, t) = y \Psi(r, t) \quad (4.41)$$

Considerando as equações (4.35) e (4.36) podemos reescrever a (4.40) como:

$$\frac{d^2 M_{ej}}{dV dt} = y k \rho_g(r, t) \quad (4.42)$$

O cálculo do parâmetro y pode ser feito através das seguintes considerações:

- a) Estrelas que tenham entrado na seqüência principal com massa $m \lesssim 1M_\odot$ ainda não evoluíram para a fase de gigante vermelha. Assim, essas estrelas não contribuem para o cálculo de y ;
- b) Estrelas que tenham entrado na seqüência principal com $1M_\odot \leq m \leq 8M_\odot$ deixam, após evoluírem, uma anã-branca com núcleo $C - O$, sendo que a massa da remanescente pode ser calculada por:

$$m_r = 0,1156m + 0,4551 \quad (4.43)$$

onde m é a massa da progenitora;

- c) Uma anã-branca com núcleo degenerado de $O - Ne - Mg$ e massa $1,35M_{\odot}$ é a remanescente de progenitoras situadas no intervalo de $8 - 10M_{\odot}$;
- d) Estrelas que tenham iniciado a queima de hidrogênio com massa entre $10M_{\odot}$ e $25M_{\odot}$ explodem como supernovas do tipo II deixando, como remanescentes, estrelas de nêutrons com $m_r = 1,4M_{\odot}$;
- e) Estrelas com massa $\geq 25M_{\odot}$ deixam como remanescentes buracos negros com massa dada pelo caroço de hélio. Isto é

$$m_r = m_{He} = \frac{13}{24}(m - 20) \quad (4.44)$$

Com o descrito acima, é possível encontrar a fração retornada a partir de (4.39).

Neste ponto falta identificar a forma de M_{f*} em função do tempo. Isso pode ser obtido se considerarmos a seguinte analogia. Considere uma protogaláxia esférica e isolada. Em $t = t_{ini}$ essa protogaláxia é totalmente gasosa. A partir daí, as estrelas são formadas a uma taxa que pode ser representada pela equação (4.33), enquanto que a matéria é retornada ao meio interestelar a uma taxa dada por (4.42). Se o sistema é isolado, vale a seguinte equação de conservação:

$$\dot{M}_g = -\dot{M}_{f*} + \dot{M}_{ej} \quad (4.45)$$

agora, com o auxílio da (4.36) e (4.42) vem,

$$\dot{M}_g = -(1 - y)kM_g \quad (4.46)$$

Integrando a equação anterior de t_{ini} à t tem-se:

$$M_g(t) = M_G e^{-(1-y)k(t-t_{ini})}. \quad (4.47)$$

Considerando que a presente fração de gás em galáxias $M_g(t = T_{hoje})/M_G$ é da ordem de $10^{-2} - 10^{-1}$ obtemos:

$$\frac{1}{k} = \tau = 2,0 - 4,5 \text{Gyr.}$$

É importante destacar que a (4.47) foi obtida considerando um “sistema isolado” que em $t = t_{ini}$ inicia o processo de formação estelar. A medida que as estrelas vão sendo formadas, e evoluem, parte do gás é retornado ao sistema (dentro da aproximação de reciclagem instantânea).

Apesar de bastante simples, esse cenário é bem pedagógico e nos mostra como obter a TCFE ($\dot{\rho}_*$). Isso em razão da formação estelar nos halos de matéria escura ocorrer numa via parecida com a descrita nesta seção. Contudo, existem algumas diferenças básicas que são:

- As estruturas (ou densidade de halos) evoluem com o tempo;
- A formação estelar ocorre a partir dos bárions que fluem para as estruturas. Isto é, através de $a_b(z)$ ([BARKANA, 2002](#)) ([Daigne et al., 2004; 2006](#)).

Dessa forma, adotamos como TCFE a expressão:

$$\dot{\rho}_*(t) = \alpha a_b(t) e^{-[(1-y)(t-t_{ini})/\tau]} \quad (4.48)$$

onde α é uma constante de normalização determinada de forma a produzir $\dot{\rho}_*(z = 0) = 0,0163 M_\odot \text{yr}^{-1} \text{Mpc}^{-3}$ para todos os modelos. Esse valor corresponde a $\Omega_* = 0,004$ em $z = 0$ ou 10% de todos os bárions em estrelas. Esse resultado está em acordo com recentes determinações da densidade de luminosidade do Universo ([FUKUGITA; PEEBLES, 2004](#)).

O comportamento dessa função, ao se variar os parâmetros M_{min} , τ e x é ilustrado nas Figuras 4.5, 4.6 e 4.7 respectivamente.

Na Figura 4.5 apresenta-se a dependência entre a massa mínima inicial dos halos de matéria escura e a formação estelar, neste caso, foram fixados $\tau = 2,5 \text{Gyr}$ e $x = 1,35$.

Como os halos que têm maior M_{min} destacam-se mais tarde da expansão do Universo, a matéria bariônica, levará mais tempo para condensar e formar estrelas. Este comportamento é claramente observado na Figura 4.5 já que, independente do valor de z_{ini} , o pico da TCFE decresce de $M_{min} = 10^6 M_\odot$ para $M_{min} = 10^{10}$. O máximo da TCFE está entre $z \sim 2,5$ (para $M_{min} = 10^6 M_\odot$) e $z \sim 1$ (para $M_{min} = 10^{10} M_\odot$).

O interesse do exemplo mostrado na Figura 4.6 é avaliar o comportamento da TCFE ao variar o valor da escala característica de formação estelar para $\tau = 2,5; 3,0;$ e $3,5$. Aqui, foram fixados $M_{min} = 10^7$ e $x = 1,35$.

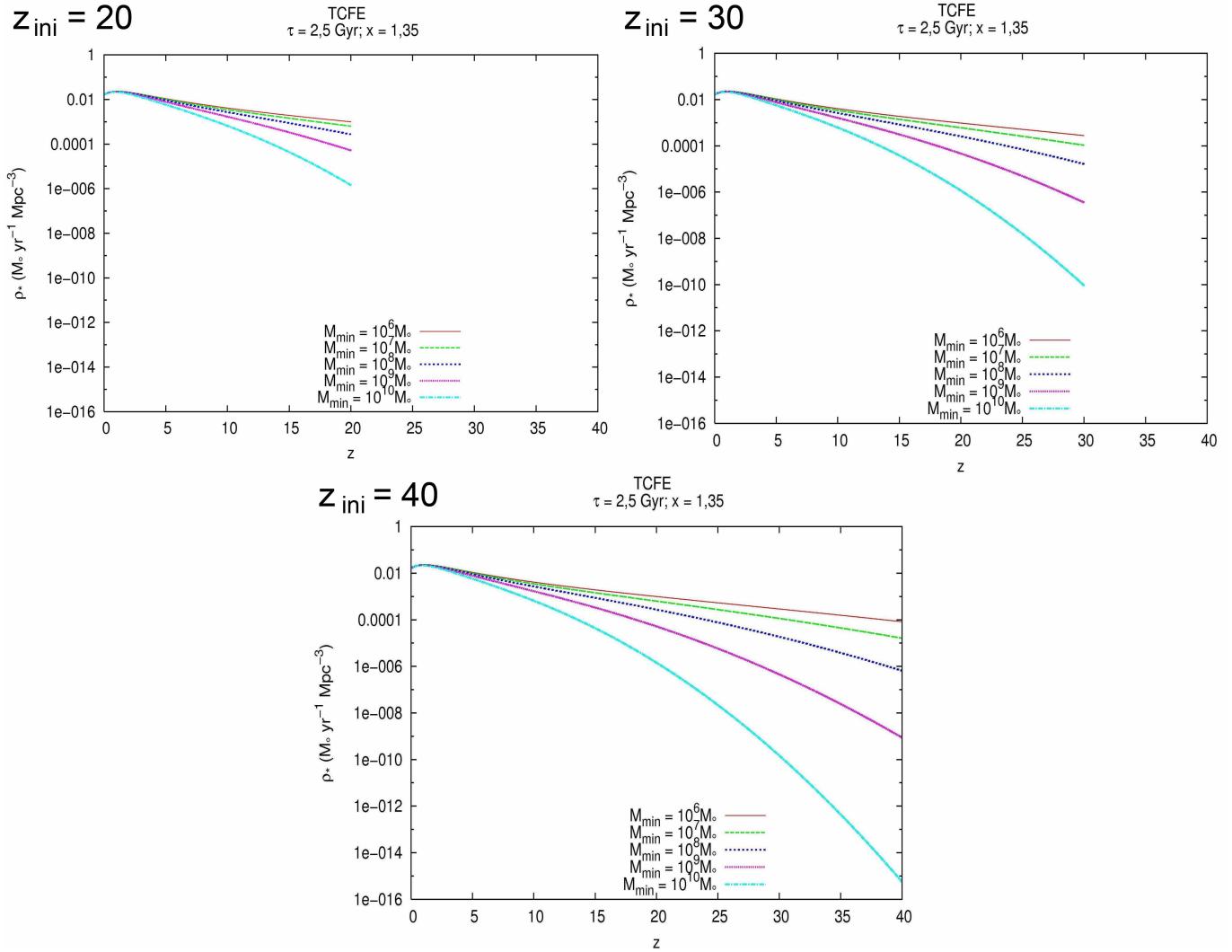


Figura 4.5 - Dependência da taxa cósmica de formação estelar com relação a massa mínima inicial dos halos de matéria escura e ao “*redshift*” (z_{ini}).

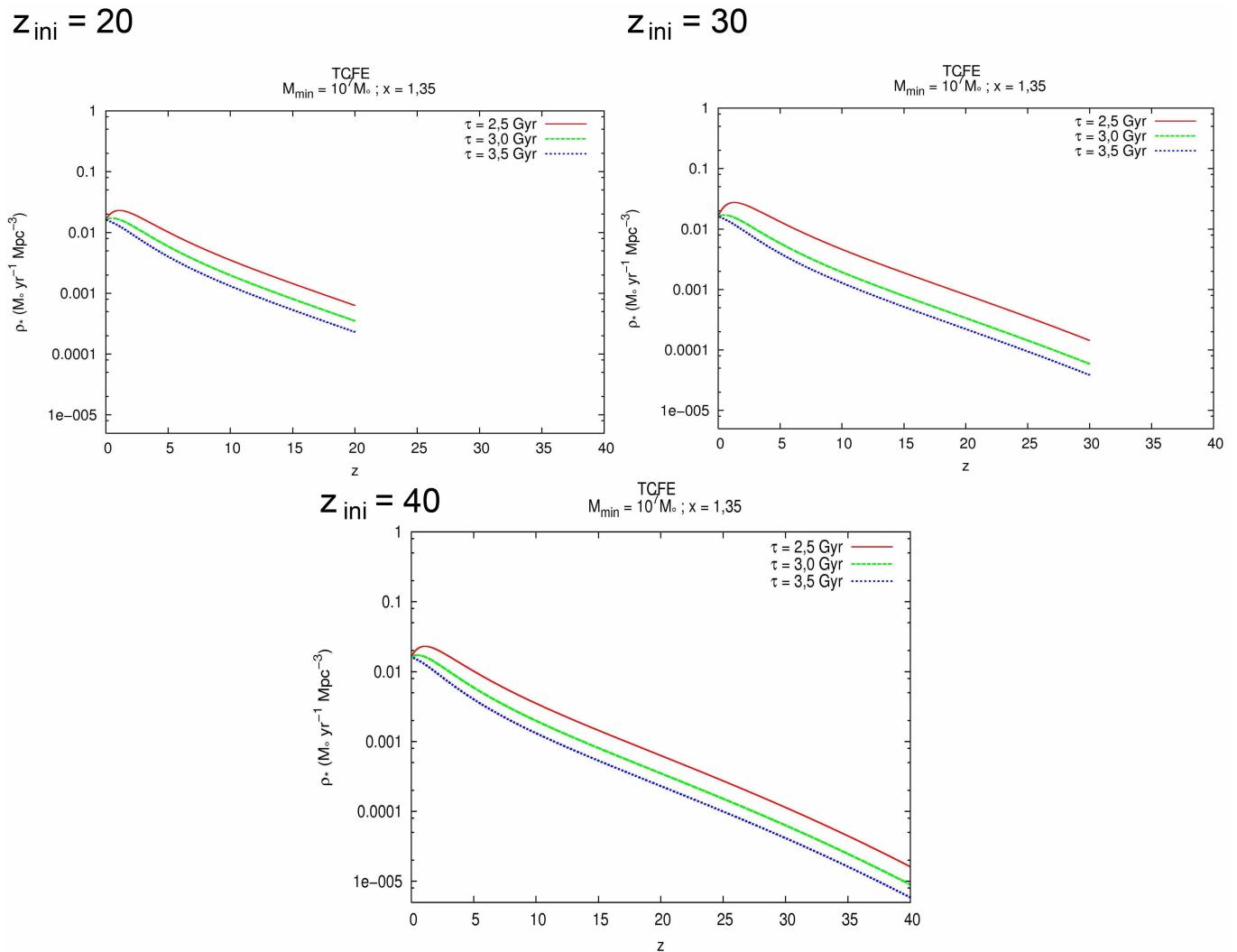


Figura 4.6 - Comportamento da taxa cósmica de formação estelar ao se variar τ

Veja que os máximos ocorrem para valores de z entre 0 e 3. À medida que aumentamos o valor de τ , os picos diminuem e se aproximam de $z = 0$. Com isto, observa-se que quanto maior for a escala característica de formação estelar, menos estrelas serão formadas.

Como a TCFE adotada relaciona-se com a função de massa inicial através da fração retornada, dada por (4.39), representa-se na Figura 4.7 a variação de x (vide Equação (4.31)), para 1,30; 1,35; e 1,40.

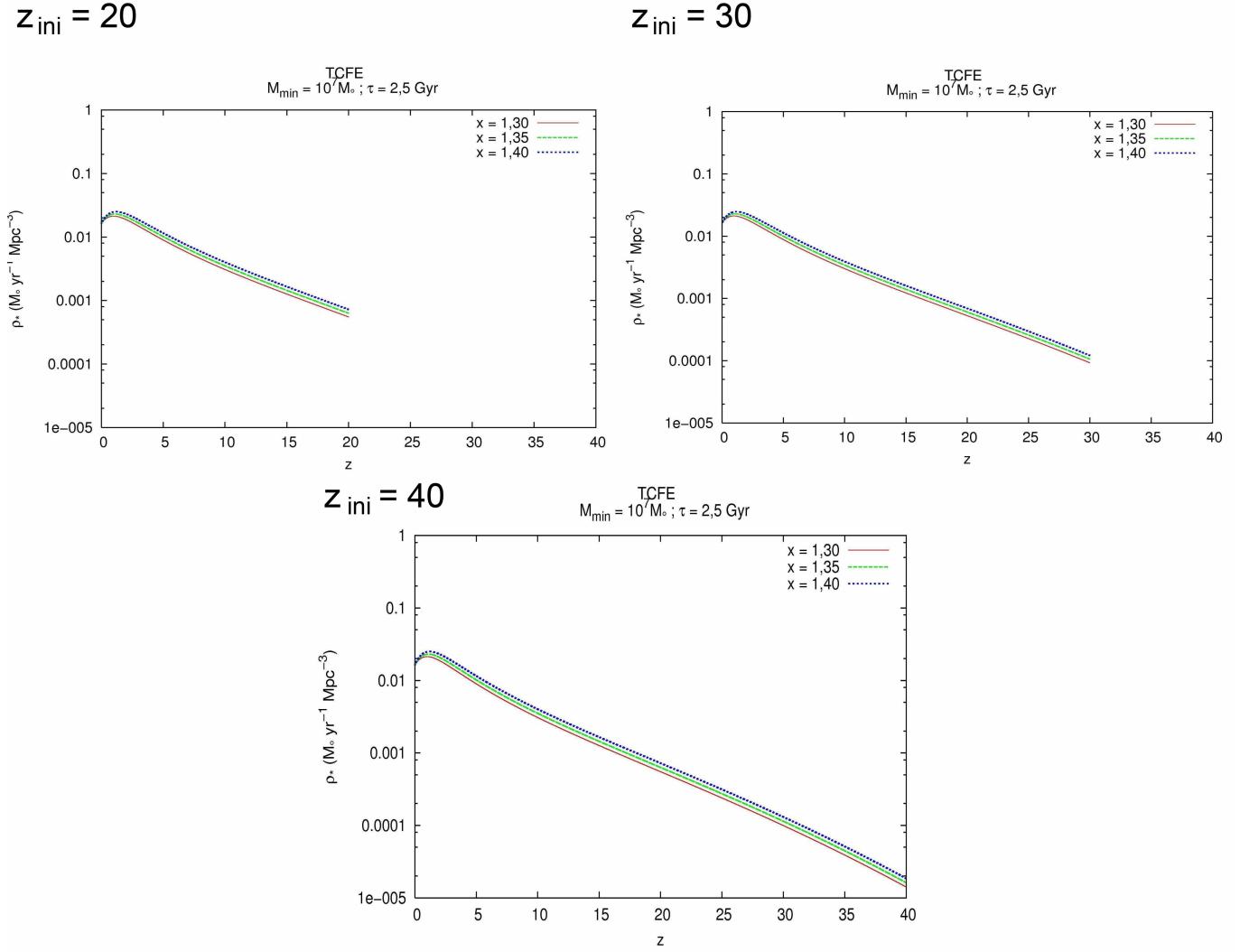


Figura 4.7 - Modo como o expoente da função de massa inicial afeta a taxa cósmica de formação estelar.

Veja que o pico da TCFE é dependente do valor de x (expoente da função de massa). O valor $x = 1,30$ produz mais estrelas de alta massa do que $x = 1,40$. Veja que $\phi(m)dm$ representa o número de estrelas formadas no intervalo $[m, m + dm]$. Assim, para $x = 1,30$ teremos maior fração de bárions retornados ao sistema pelas estrelas de alta massa. Esse

fator aumenta o parâmetro y (vide Equação (4.39)), o que provoca uma diminuição no peso do fator de atenuação exponencial. Desta forma, se esperaria que os maiores valores dos picos de $\dot{\rho}_*$ fossem para $x = 1,30$. Mas é preciso levar em conta que os três casos foram normalizados pelo fator α descrito anteriormente. Este parâmetro foi $\alpha \sim 0,58$ para $x = 1,30$ e $\alpha \sim 0,76$ para $x = 1,40$ respectivamente. Assim, a condição de normalização que adotamos “força” o pico de $\dot{\rho}_*(z)$ ser ligeiramente maior para $x = 1,40$ do que para $x = 1,30$.

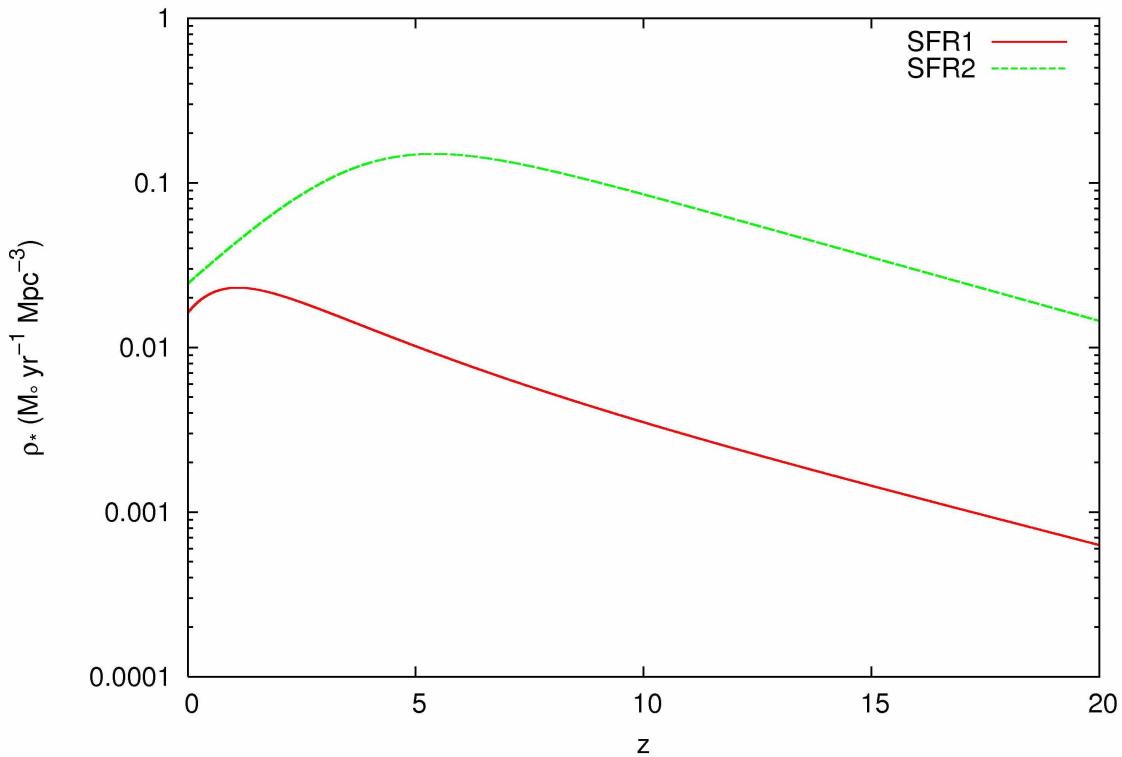


Figura 4.8 - Combração entre a TCFE derivada por [Springel e Hernquist \(2003\)](#) e a do presente trabalho.

É importante destacar que a forma de $\dot{\rho}_*$ obtida via (4.48) é bastante parecida com a TCFE derivada por [Springel e Hernquist \(2003\)](#) (S-H) em outro contexto. A diferença básica é que o pico da TCFE desses autores é da ordem de $0,2\text{M}_{\odot}\text{yr}^{-1}\text{Mpc}^{-3}$, cerca de um fator 10 maior que a TCFE fornecida pela Equação (4.48). Contudo, a evolução de $\dot{\rho}_*$ é muito parecida em ambos os trabalhos, como pode ser visto na Figura 4.8, em que a curva SFR2 é a TCFE de S-H enquanto a curva SFR1 é a do presente trabalho tendo $\tau = 2.5\text{Gy}$, $x = 1,35$ e $M_{min} = 10^7$.

Assim, a partir das Equações (4.31), (4.32), (4.39) e (4.48) podemos obter a razão

diferencial de formação de buracos negros,

$$dR_{BN} = \dot{\rho}_*(z)\phi(m) \frac{dV}{dz} dm dz \quad (4.49)$$

que foi discutida no capítulo 3.

No próximo capítulo apresentamos os resultados desse modelo tomando como parâmetros cosmológicos $\Omega_\Lambda = 0,76$; $\Omega_m = 0,24$; $\Omega_b = 0,04$ e $h = 0,73$ e $\sigma_8 = 0,84$.

5 RESULTADOS

Nos capítulos anteriores apresentamos o equacionamento que permite caracterizar um fundo estocástico de ondas gravitacionais (capítulo 3) e fizemos a conexão com um cenário de formação de estruturas através da TCFE (capítulo 4). Neste capítulo apresentaremos os principais resultados desse cenário.

5.1 Amplitude do Fundo

Como visto no capítulo 3, a amplitude h_{BG} do fundo estocástico de ondas gravitacionais em função da freqüência observada ν_{obs} é dada por:

$$h_{BG}^2 = \frac{(7, 4 \cdot 10^{-20} \epsilon_{gw}^{1/2})^2}{\nu_{obs}} 4\pi \frac{c}{H_0} \int_{z_{cf}}^{z_{ci}} \int_{M_{min}}^{M_{max}} \left(\frac{M_r}{M_\odot} \right)^2 (1+z)^{-2} \dot{\rho}_*(z) G(\Omega_m, \Omega_\Lambda, z') \phi(m) dm dz. \quad (5.1)$$

A largura de banda do fundo é obtida da seguinte consideração. Estrelas com massa entre $25M_\odot - 140M_\odot$ deixam buracos negros como remanescentes ao final de suas vidas. Considerando, como no capítulo 3, que as massas dos buracos negros (remanescentes) são iguais às massas dos caroços de hélio dessas progenitoras, podemos usar a Equação (3.49) para obter M_r . Isto é:

$$M_{r; min} = \frac{13}{24}(25 - 20) = 2,71 M_\odot \quad (5.2)$$

e

$$M_{r; max} = \frac{13}{24}(140 - 20) = 65 M_\odot. \quad (5.3)$$

Substituindo esses resultados em (3.50) temos:

$$\nu_{obs; min} = 1,3 \times 10^4 \left(\frac{M_\odot}{M_{r; max}} \right) (1 + z_{ini})^{-1} \text{Hz}, \quad (5.4)$$

e

$$\nu_{obs; max} = 1,3 \times 10^4 \left(\frac{M_\odot}{M_{r; min}} \right) \text{Hz}, \quad (5.5)$$

Assim, substituindo $z_{ini} = 20$, 30 e 40 nas (5.4) e (5.5) obtemos as bandas em freqüência dos fundos. Esse resultado é apresentado na Tabela 5.1

Tabela 5.1 - Banda de Freqüência dos fundos estudados

| z_{ini} | $\nu_{obs; min}$ (Hz) | $\nu_{obs; max}$ (Hz) |
|-----------|-----------------------|-----------------------|
| 20 | 9,52 | $4,80 \times 10^3$ |
| 30 | 6,45 | $4,80 \times 10^3$ |
| 40 | 4,80 | $4,80 \times 10^3$ |

A solução da Equação (5.1) é então obtida numericamente fixando valores de ν_{obs} entre $\nu_{obs; min}$ e $\nu_{obs; max}$, nas Equações (5.4) e (5.5) (ou na (3.50)) e obtendo os “redshifts” mínimo e máximo para a integral em z .

Veja contudo que os limites da integral em massa também estão vinculados aos limites da integral em z . Para ilustrar esse ponto, considere os modelos com $z_{ini} = 20$ e que possuem largura de banda $9,52 - 4,80 \times 10^3$ Hz. Vamos calcular os limites da integração de (5.1) para $\nu_{obs} = 10$ Hz. Os passos a serem seguidos são:

- Determinar z_{cf} via,

$$z_{cf} = \frac{1,3 \times 10^4}{\nu_{obs} M_{max}} - 1 = \frac{1,3 \times 10^4}{10 \cdot 65} - 1 = 19 \quad (5.6)$$

- Determine z_{ci} via

$$z_{ci} = \frac{1,3 \times 10^4}{\nu_{obs} \cdot M_{min}} - 1 = \frac{1,3 \times 10^4}{10 \cdot 2,71} = 478,7 \quad (5.7)$$

- Veja que $z_{ci} > z_{ini}$. Assim, nós fixamos $z_{ci} = z_{ini}$ e determinamos M_{min} via

$$M_{min} = \frac{1,3 \times 10^4}{10} (1 + 20)^{-1} = 61,9 M_{\odot}. \quad (5.8)$$

- Os limites da integral em “redshift” são então $z_{cf} = 19$ e $z_{ci} = 20$, enquanto os limites da integral em massa são $M_{min} = 61,9 M_{\odot}$ e $M_{max} = 65 M_{\odot}$.

Grosso modo, esse procedimento é repetido para cada ν_{obs} de forma a podermos construir a curva de h_{BG} versus ν_{obs} por integração. A Figura 5.1 apresenta essas curvas para $\tau = 2,5$ Gyr; $x = 1,35$ e variando a massa mínima de formação dos halos de 10^6 à $10^{10} M_{\odot}$.

Aqui é importante chamar a atenção do leitor para que não confunda a massa mínima de formação dos halos, que é um parâmetro de entrada do formalismo tipo Press-Schechter descrito no capítulo 3 com o limite inferior de integral em massa de (5.1).

Veja que a amplitude máxima de h_{BG} é dependente de z_{ini} . Isto é, maior z_{ini} , maior h_{BG} . Contudo ao tomarmos $z_{ini} = 30$ ou $z_{ini} = 40$ não existe grande variação da amplitude máxima de h_{BG} . Isso em razão de que entre esses “*redshifts*” o fluxo de bárions, para as estruturas é muito pequeno. Isto é, a massa bariônica total (integrada) nas estruturas é praticamente a mesma se $z_{ini} = 30$ ou $z_{ini} = 40$.

Na Figura 5.2 nós fixamos a massa mínima de formação dos halos em $10^7 M_\odot$ e variamos τ entre $2,5 - 3,5$ Gyr para $z_{ini} = 20, 30$, e 40 . Como τ controla a escala característica de formação estelar, ou seja, “rapidez” com que os bárions são convertidos em estrelas, as variações produzidas em h_{BG} são mais acentuadas do que as produzidas fixando τ e variando M_{min} de formação de halos (conforme Figura 5.1).

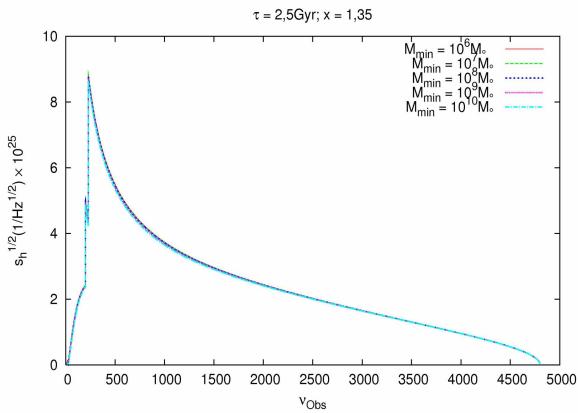
Na Figura 5.3 nós fixamos M_{min} em $10^7 M_\odot$ e $\tau = 2,5$ Gyr. O parâmetro analisado foi x , isto é, o expoente da função de massa inicial. É possível ver que a amplitude do fundo é ligeiramente maior para $x = 1,30$ do que para $x = 1,40$. Isso em razão da maior produção de estrelas de alta massa, e portanto, maior produção de buracos negros a baixos “*redshifts*”

Na Figura 5.4 mostramos a dependência de h_{BG} com a eficiência de geração de ondas gravitacionais ϵ_{GW} . Consideramos dois valores, $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ (máximo teórico) e um valor dez vezes menor. Como $h_{BG} \propto \epsilon^{1/2}$ a amplitude é um fator de ~ 3 vezes menor para $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-5}$ quando comparado com o máximo teórico $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$.

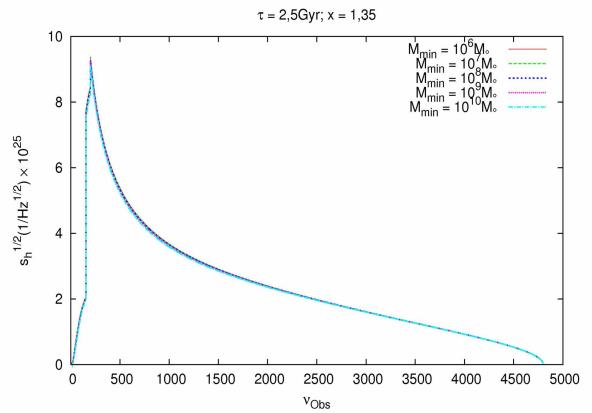
Na Figura 5.5 estão representados os fundos estudados por [de ARAUJO et al. \(2004\)](#) (curva F1) e os do presente trabalho (curva F2). Em [de ARAUJO et al.](#) foi utilizada a TCFE de [Springel e Hernquist \(2003\)](#) (vide Figura 4.8), e considerou-se que as massas dos buracos negros remanescentes são uma fração α das massas progenitoras ($m_r = \alpha m M_\odot$). A curva F1 é para o caso de $\alpha = 0,1$, $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$. Já para o cálculo da fundo F2 os parâmetros utilizados foram $\tau = 2,5$ Gy, $M_{min} = 10^7 M_\odot$, $x = 1,35$ e $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$. Note que nesta circunstância o máximo da curva F2 é um fator 10 maior que a F1.

As Tabelas 5.2, 5.3, 5.4 apresentam o valor máximo de h_{BG} , respectivamente, para $z_{ini} = 20, 30$ e 40 para todos os modelos executados. Essas tabelas servem como uma espécie de resumo dos gráficos apresentados nesta seção, e permitem uma comparação mais direta entre os diferentes modelos. Concentramos no valor de h_{BG} máximo (h_{max} , pois este é representativo das diferenças entre os vários espectros de $h_{BG} \times \nu_{obs}$ apresentados.

$Z_{\text{ini}} = 20$



$Z_{\text{ini}} = 30$



$Z_{\text{ini}} = 40$

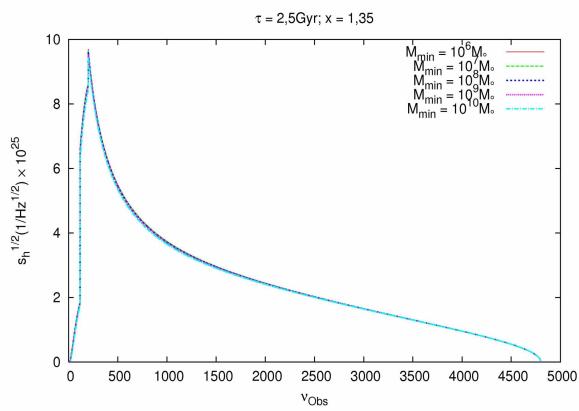
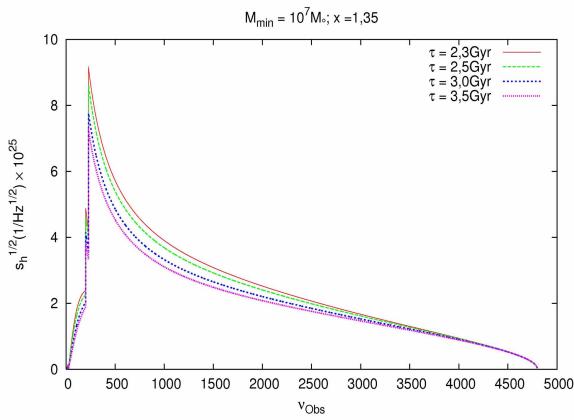
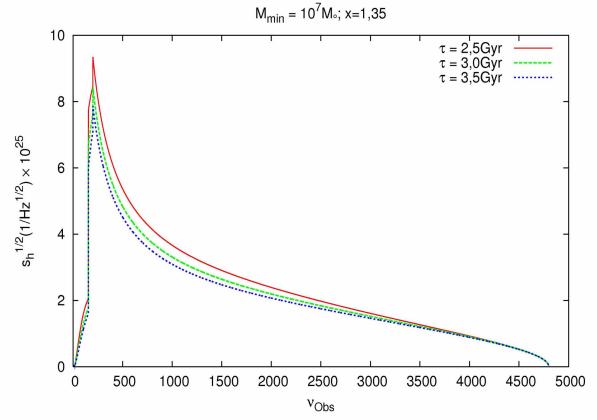


Figura 5.1 - Amplitude de h_{BG} variando o parâmetro M_{min}

$Z_{\text{ini}} = 20$



$Z_{\text{ini}} = 30$



$Z_{\text{ini}} = 40$

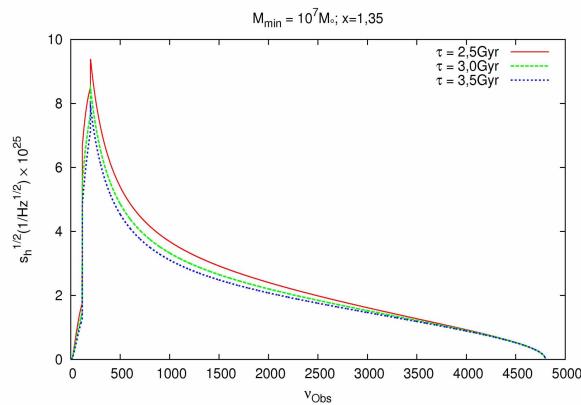
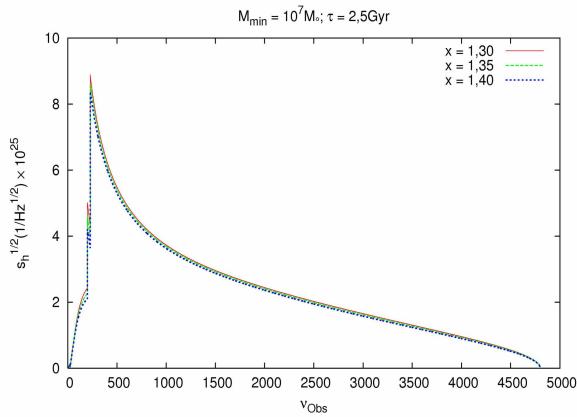
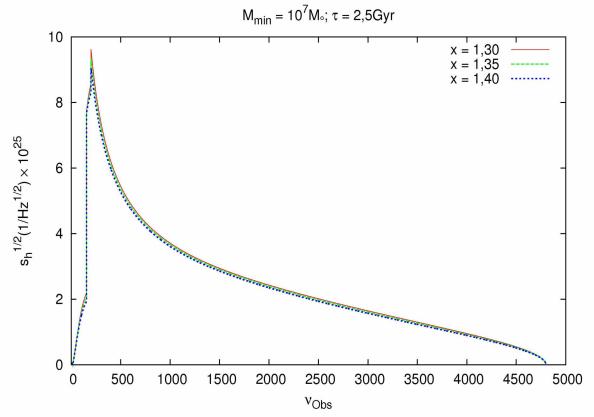


Figura 5.2 - Amplitude de h_{BG} variando o parâmetro τ

$Z_{\text{ini}} = 20$



$Z_{\text{ini}} = 30$



$Z_{\text{ini}} = 40$

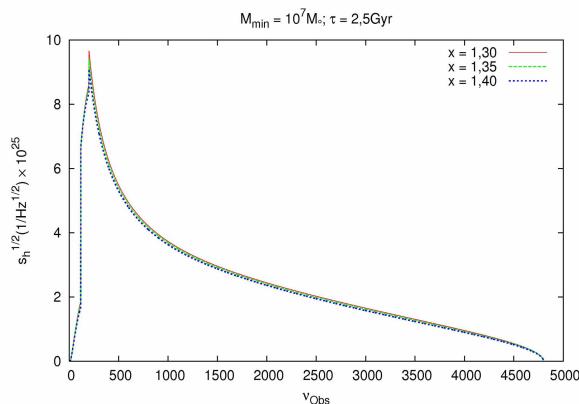
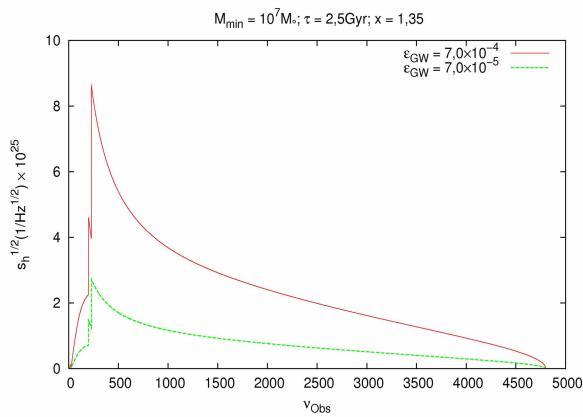
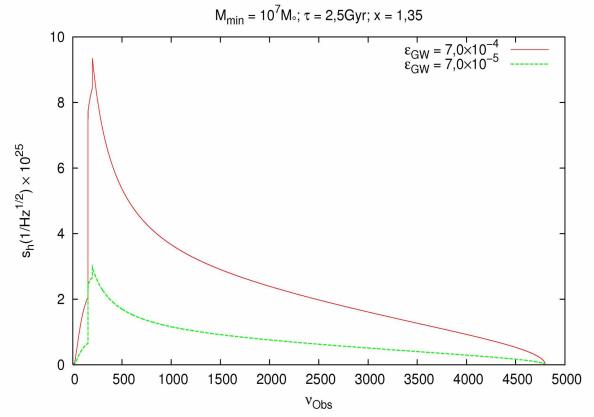


Figura 5.3 - Amplitude de h_{BG} variando o parâmetro x

$Z_{\text{ini}} = 20$



$Z_{\text{ini}} = 30$



$Z_{\text{ini}} = 40$

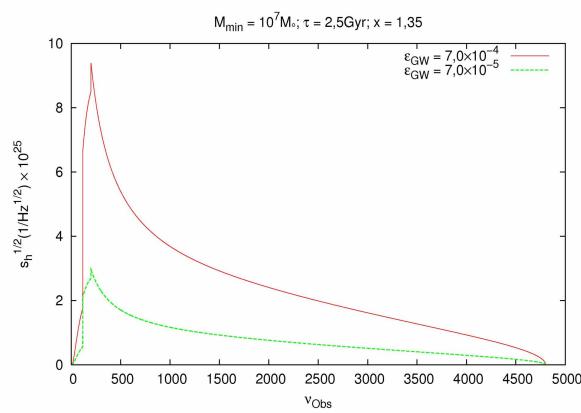


Figura 5.4 - Amplitude de h_{BG} variando o parâmetro ϵ_{GW}

**de Araujo, Miranda e Aguiar;
2004**

Presente Trabalho

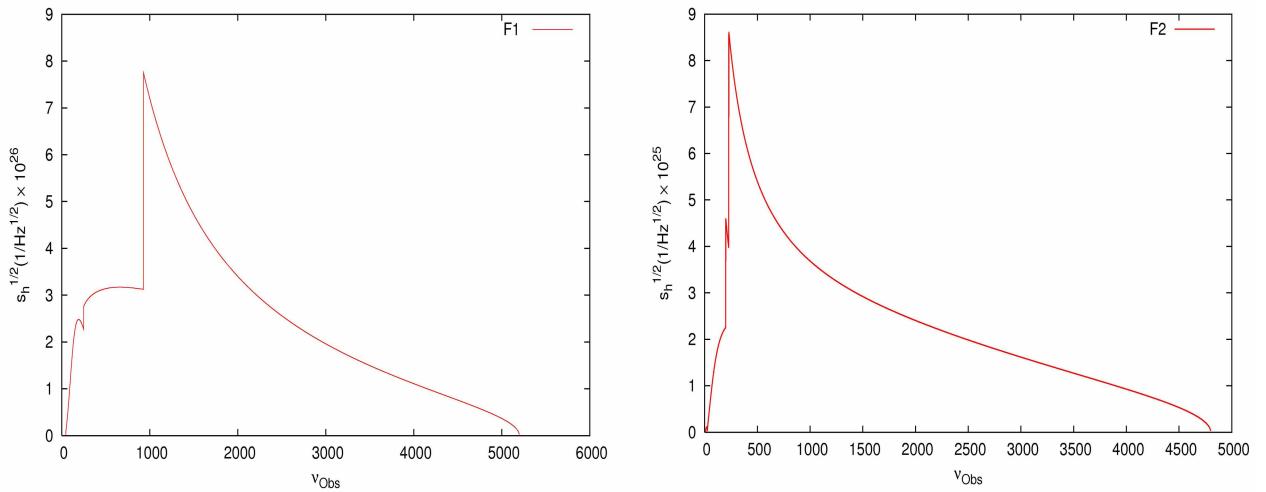


Figura 5.5 - Amplitude de h_{BG}

Tabela 5.2 - Valor máximo de h_{BG} para $z_{ini} = 20$ A ν_{obs} em h_{max} é igual a 228,93 Hz.

| τ (Gyr) | $M_{ini}(M_\odot)$ | $h_{max} (\times 10^{-25})$ | | | |
|--------------|--------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| | | $x = 1,30$ | $x = 1,35$ | $x = 1,40$ | $x = 1,35$ |
| | | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-5}$ |
| 2,5 | 10^6 | 8,88 | 8,65 | 8,41 | 2,74 |
| 2,5 | 10^7 | 8,85 | 8,62 | 8,38 | 2,73 |
| 2,5 | 10^8 | 8,80 | 8,57 | 8,33 | 2,71 |
| 2,5 | 10^9 | 8,74 | 8,50 | 8,28 | 2,69 |
| 2,5 | 10^{10} | 8,64 | 8,41 | 8,17 | 2,66 |
| 3,0 | 10^6 | 8,04 | 7,79 | 7,53 | 2,46 |
| 3,0 | 10^7 | 8,02 | 7,76 | 7,50 | 2,45 |
| 3,0 | 10^8 | 7,98 | 7,73 | 7,47 | 2,44 |
| 3,0 | 10^9 | 7,93 | 7,68 | 7,42 | 2,43 |
| 3,0 | 10^{10} | 7,86 | 7,60 | 7,34 | 2,40 |
| 3,5 | 10^6 | 7,53 | 7,26 | 6,99 | 2,30 |
| 3,5 | 10^7 | 7,51 | 7,24 | 6,97 | 2,29 |
| 3,5 | 10^8 | 7,48 | 7,21 | 6,94 | 2,28 |
| 3,5 | 10^9 | 7,44 | 7,17 | 6,90 | 2,27 |
| 3,5 | 10^{10} | 7,38 | 7,11 | 6,84 | 2,25 |

5.2 Densidade de Energia do Fundo

Com h_{BG} em mãos, a contribuição para a densidade de energia do Universo devido a propagação das perturbações da métrica, oriundas de emissões estocásticas de objetos, que colapsam para buracos negros é dada por (vide capítulo 3),

$$\Omega_{GW} = \frac{4\pi^2}{3H_0^2} \nu_{obs}^2 h_{BG}^2. \quad (5.9)$$

O conhecimento de Ω_{GW} será fundamental para determinar se é possível, ou não, a detecção de um dado fundo de OG's.

Nas Figuras 5.6, 5.7, 5.8 e 5.9, é possível analisar o comportamento de Ω_{GW} . Pode-se notar claramente que os valores calculados foram sempre $<< 1$. Isso significa que a dinâmica do Universo não é alterada pela radiação gravitacional das fontes aqui estudadas.

Na Figura 5.6, varia-se M_{min} , para $\tau = 2, 5\text{Gyr}$ e $x = 1, 35$ fixos. Nesse caso, independente de z_{ini} , as curvas são muito próximas, tendo seus picos diminuídos ao se aumentar o valor de M_{min} .

O comportamento de Ω_{GW} , com relação a τ é ilustrado pela Figura 5.7, em que assumimos $\tau = 2, 5; 3, 0$ e $3, 5\text{Gyr}$. Para este caso, a medida em que o valor de τ cresce, o pico de Ω_{GW} se desloca para altas freqüências, enquanto diminui em módulo. Isso ocorre em função do incremento de τ aumentar o peso de $\dot{\rho}_*(z)$ a baixos “redshifts” e portanto, para maiores valores de ν_{obs} . Mas ao mesmo tempo, o aumento de τ “atrasa” a formação estelar para $t \leq \tau$, o que justifica a amplitude de Ω_{GW} diminuir com o incremento de τ .

Ao se variar o expoente da Função de Massa Inicial, entre $x = 1, 30; 1, 35$ e $1, 40$, Ω_{GW} possui um comportamento parecido para todos os valores de z_{ini} estudados, sendo os picos maiores para menores valores de x (Figura 5.8), como discutido na seção precedente.

Veja também, na Figura 5.9, que para $\epsilon_{GW} = 7, 0 \times 10^{-5}$, Ω_{GW} será dez vezes menor, em relação aquele calculado para $\epsilon_{GW} = 7, 0 \times 10^{-4}$, como é de se esperar.

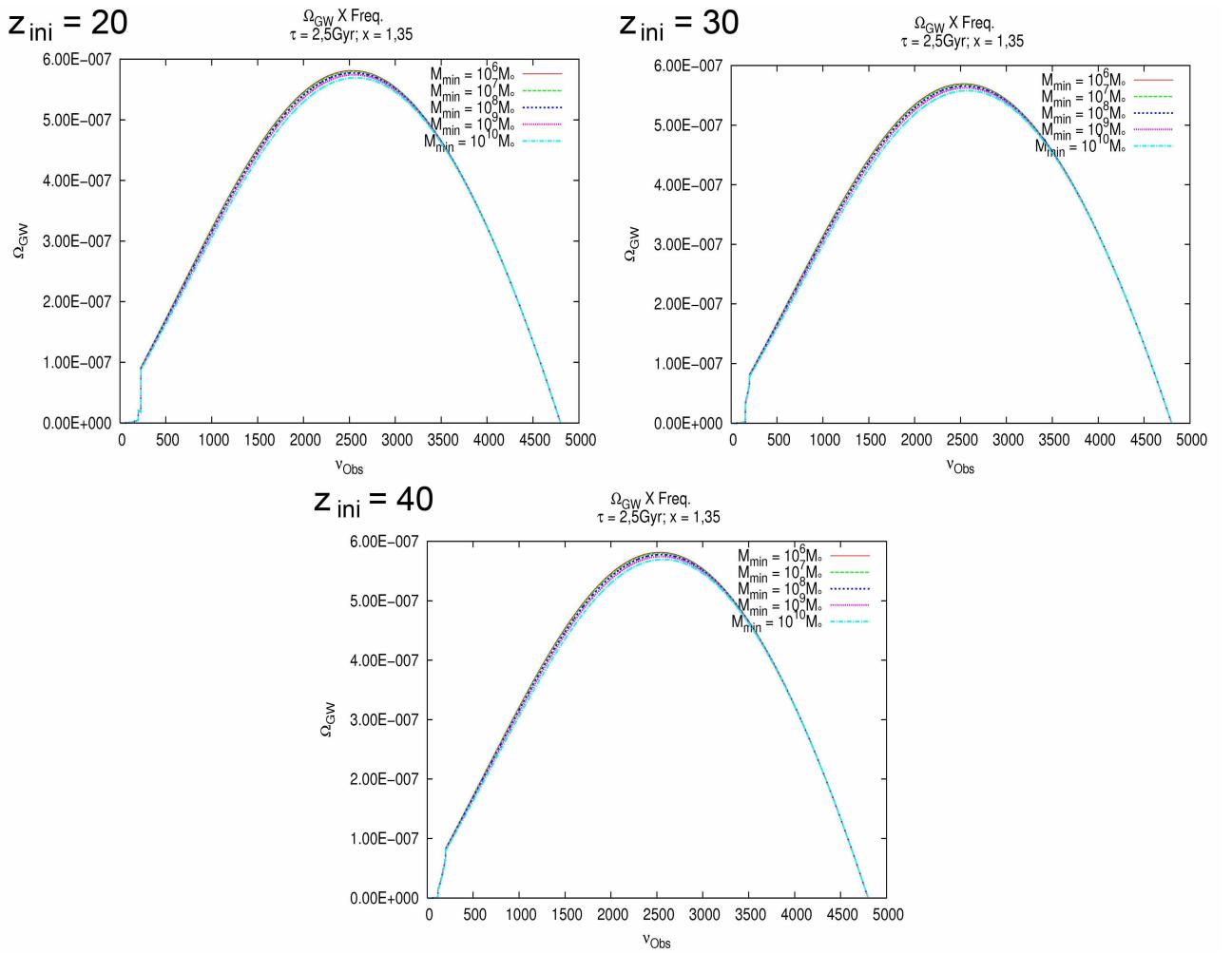


Figura 5.6 - Densidade de Energia do Fundo variando o parâmetro M_{min}

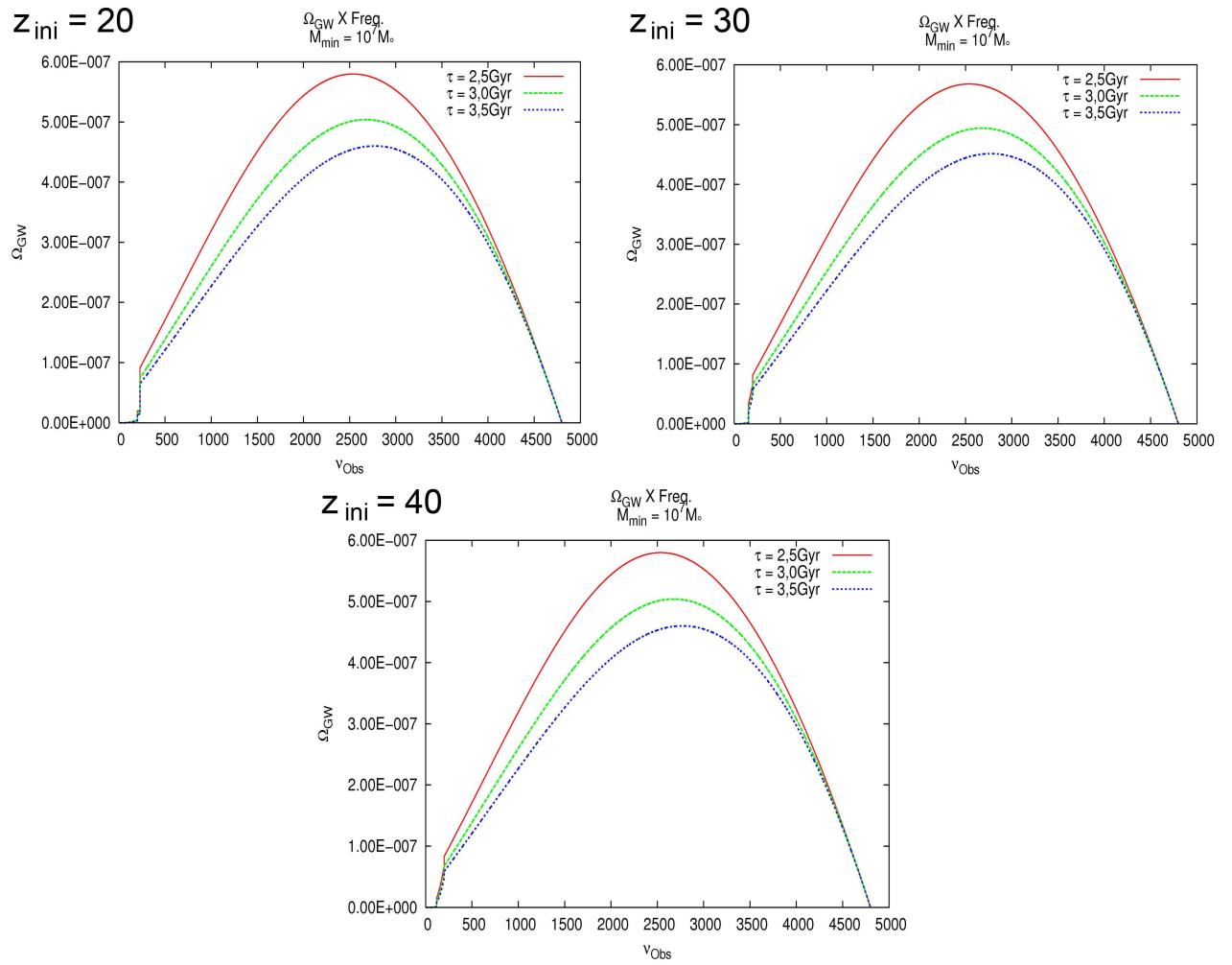


Figura 5.7 - Densidade de Energia do Fundo variando o parâmetro τ

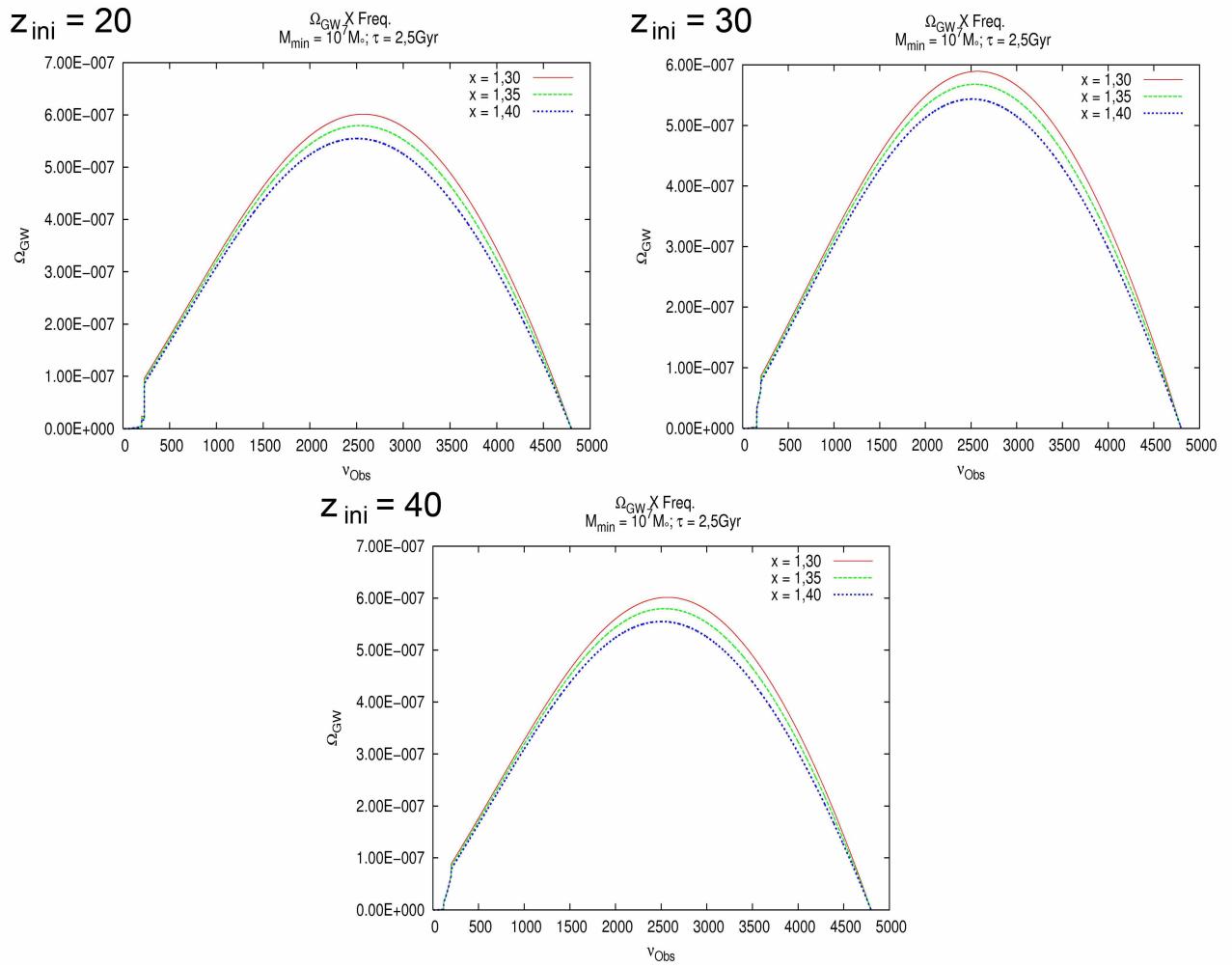


Figura 5.8 - Densidade de Energia do Fundo variando o parâmetro x

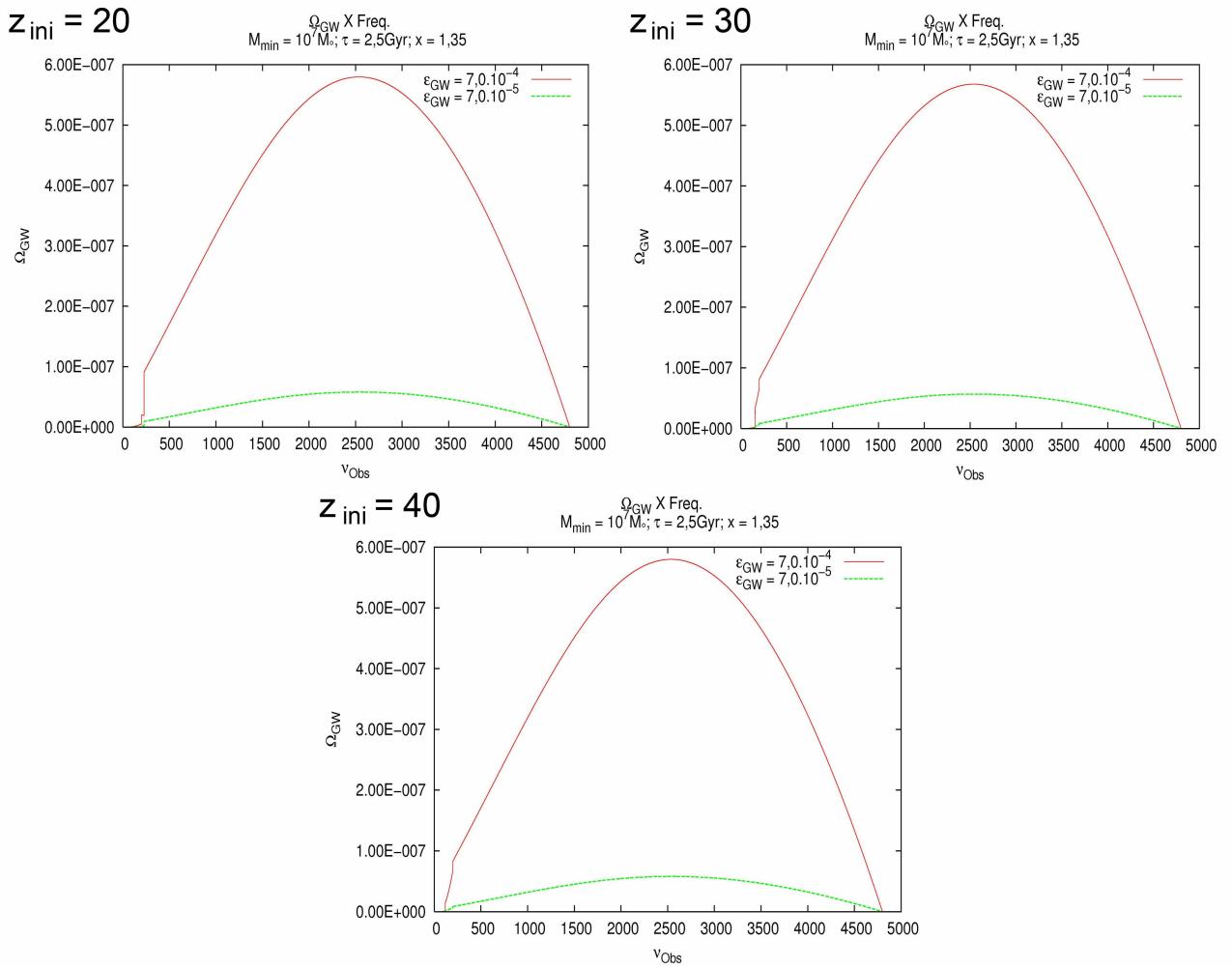


Figura 5.9 - Variação $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-5}$ e $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ para $x = 1,35$

5.3 Razão Sinal/Ruído (S/N)

No Capítulo 3 obtivemos a equação que permite, para um dado fundo estocástico de OG's, determinar a razão S/N a partir da correlação dos sinais de saída de dois interferômetros laser. Tomando então a Equação (3.33) e representando a freqüência observada como ν_{obs} , enquanto as densidades espectrais de ruído dos detectores serão representadas como $S_n^{(1)}$ e $S_n^{(2)}$, nós podemos reescrever (3.33) como,

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{9H_0^4}{50\pi^4} T \int_0^\infty \frac{\gamma^2 \Omega_{gw}^2}{\nu_{obs}^6 S_n^{(1)} S_n^{(2)}} d\nu_{obs}, \quad (5.10)$$

Na equação anterior, T é o tempo de integração dos sinais e γ é a “Overlap-Reduction Function”. Essa função depende das posições e orientações relativas dos braços dos interferômetros. Flanagan (1993) foi o primeiro a obter a função γ para os observatórios LIGO. Em particular, a melhor janela para detecção de um sinal está na faixa de $0 < \nu_{obs} < 64$ Hz, onde a função γ possui a maior magnitude.

A expressão para γ é (FLANAGAN, 1993; ALLEN, 1997):

$$\gamma_{ab} = A j_0(\alpha) + B \frac{j_1(\alpha)}{\alpha} + C \frac{j_2(\alpha)}{\alpha^2}, \quad (5.11)$$

onde $j_0(\alpha)$, $j_1(\alpha)$ e $j_2(\alpha)$ são funções esféricas de Bessel, dadas por,

$$j_0(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha}; \quad (5.12)$$

$$j_1(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{\cos(\alpha)}{\alpha}; \quad (5.13)$$

$$j_2(\alpha) = \frac{3}{\alpha} j_1(\alpha) - j_0(\alpha). \quad (5.14)$$

O parâmetro α depende da freqüência (ν_{obs}) e da separação dos detectores. Isto é, $\alpha = 2\pi\nu_{obs}|\Delta\vec{x}|/c$. Como discutido no Capítulo 3, $|\Delta\vec{x}| \simeq 2.998$ km para os LIGO's em Hanford e na Louisiana. Isso permite re-escrever α como $\alpha = \pi\nu_{obs}/50$.

As constantes de normalização A , B e C em (5.11) estão relacionadas com as posições e orientações dos braços dos interferômetros. Seus valores são: $A = -0,12482$; $B =$

$-2,90014$ e $C = 3,0087$ ([FLANAGAN, 1993](#)).

As densidades espectrais para os ruídos intrínsecos dos detectores são obtidas do trabalho de [Owen e Sathyaprakash \(1999\)](#). As expressões são:

a) LIGO I:

$$S = \frac{s_0}{3} \left[\left(\frac{\nu_0}{\nu_{obs}} \right) + 2 \left(\frac{\nu_{obs}}{\nu_0} \right) \right], \quad (5.15)$$

onde $s_0 = 4,4 \cdot 10^{-46} \text{Hz}^{-1}$ e $\nu_0 = 175 \text{Hz}$.

b) LIGO II:

$$S = \frac{s_0}{11} \left\{ 2 \left(\frac{\nu_0}{\nu_{obs}} \right)^{9/2} + \frac{9}{2} \left[1 + \left(\frac{\nu_{obs}}{\nu_0} \right)^2 \right] \right\}, \quad (5.16)$$

onde $S_0 = 7,9 \cdot 10^{-48} \text{Hz}^{-1}$ e $\nu_0 = 110 \text{Hz}$.

c) LIGO III,

$$S = \frac{s_0}{5} \left\{ \left(\frac{\nu_0}{\nu_{obs}} \right) + 2 \left[1 + \left(\frac{\nu_{obs}}{\nu_0} \right)^2 \right] \right\} \quad (5.17)$$

com $S_0 = 2,3 \cdot 10^{-48} \text{Hz}^{-1}$ e $\nu_0 = 75 \text{ Hz}$.

Acima, LIGO I é a configuração inicial dos detectores. LIGO II representa a configuração intermediária, prevista para ser atingida em 2008. LIGO III é a configuração avançada prevista para ser atingida em 2012 (vide, em particular, os avanços quanto a sensibilidade dos observatórios LIGO em [Shoemaker \(2007\)](#)).

Agora nós estamos em condições de obter as razões (S/N) dadas por (5.10) integrando numericamente as densidades de energia obtidas na seção anterior. Os resultados são fornecidos nas Tabelas 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 para alguns modelos selecionados, Em todos eles o tempo de integração é de 1 ano.

Em particular, todos os modelos apresentam $S/N < 1$, o que torna difícil sua detecção dentro do cenário aqui proposto para $\dot{\rho}_*$. Contudo, veja que a escala característica de formação estelar é próxima a 2,5 Gyr, se a eficiência de geração de ondas gravitacionais é próxima do máximo teórico ($\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$) e se as primeiras estrelas são formadas em $z \gtrsim 30$, as razões sinal/ruído são $(S/N) \sim 0,7$.

Isso mostra que em princípio existiria a possibilidade de termos sinais com $(S/N) > 1$ se introduzirmos um terceiro interferômetro na análise. Isto é, fazendo correlação dos sinais

de três interferômetros. É importante destacar que a nossa TCFE é bem mais conservadora do que a TCFE derivada por [Springel e Hernquist \(2003\)](#). Em particular, [de ARAUJO et al. \(2004\)](#) obtiveram (S/N) $\gtrsim 10$ usando a TCFE desses autores.

É portanto nosso objetivo, numa extensão deste trabalho, derivar outras expressões para $\dot{\rho}_*$ além de introduzir, como colocado acima, mais um interferômetro no cálculo da razão (S/N).

Em todos os casos, vemos que a razão sinal/ruído aumenta quando se passa de $z_{ini} = 20$ para $z_{ini} = 40$. Por outro lado a medida que cresce o valor de M_{min} de $10^6 - 10^{10} M_\odot$ essa razão torna-se menor. O mesmo comportamento de diminuição do valor da razão, é observado ao seguir de $x = 1,30$ para $x = 1,40$ e ao se aumentar τ , assumindo valores entre de 2,5Gyr e 3,5Gyr.

Tabela 5.3 - Valor máximos de h_{BG} para $z_{ini} = 30$. A ν_{obs} em h_{max} é igual a 200,11 Hz.

| | | $h_{max} (\times 10^{-25})$ | | | |
|--------------|---------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| | | $x = 1,30$ | $x = 1,35$ | $x = 1,40$ | $x = 1,35$ |
| τ (Gyr) | $M_{ini}(\text{M}_\odot)$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-5}$ |
| 2,5 | 10^6 | 9,66 | 9,38 | 9,10 | 2,97 |
| 2,5 | 10^7 | 9,62 | 9,34 | 9,06 | 2,95 |
| 2,5 | 10^8 | 9,58 | 9,29 | 9,01 | 2,94 |
| 2,5 | 10^9 | 9,50 | 9,22 | 8,94 | 2,91 |
| 2,5 | 10^{10} | 9,40 | 9,11 | 8,83 | 2,88 |
| 3,0 | 10^6 | 8,75 | 8,45 | 8,14 | 2,67 |
| 3,0 | 10^7 | 8,72 | 8,42 | 8,12 | 2,66 |
| 3,0 | 10^8 | 8,69 | 8,38 | 8,08 | 2,65 |
| 3,0 | 10^9 | 8,63 | 8,33 | 8,02 | 2,63 |
| 3,0 | 10^{10} | 8,55 | 8,24 | 7,94 | 2,61 |
| 3,5 | 10^6 | 8,20 | 7,89 | 7,87 | 2,50 |
| 3,5 | 10^7 | 8,18 | 7,86 | 7,86 | 2,49 |
| 3,5 | 10^8 | 8,15 | 7,83 | 7,83 | 2,48 |
| 3,5 | 10^9 | 8,10 | 7,79 | 7,47 | 2,46 |
| 3,5 | 10^{10} | 8,03 | 7,72 | 7,41 | 2,44 |

Tabela 5.4 - Valor máximos de h_{BG} para $z_{ini} = 40$. A ν_{obs} em h_{max} é igual a 200,52 Hz.

| | | $h_{max} (\times 10^{-25})$ | | | |
|--------------|---------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| | | $x = 1,30$ | $x = 1,35$ | $x = 1,40$ | $x = 1,35$ |
| τ (Gyr) | $M_{ini}(\text{M}_\odot)$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | $\epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-5}$ |
| 2,5 | 10^6 | 9,70 | 9,42 | 9,14 | 2,98 |
| 2,5 | 10^7 | 9,67 | 9,39 | 9,10 | 2,97 |
| 2,5 | 10^8 | 9,62 | 9,34 | 9,05 | 2,95 |
| 2,5 | 10^9 | 9,55 | 9,27 | 8,98 | 2,93 |
| 2,5 | 10^{10} | 9,44 | 9,16 | 8,87 | 2,90 |
| 3,0 | 10^6 | 8,79 | 8,48 | 8,18 | 2,68 |
| 3,0 | 10^7 | 8,76 | 8,45 | 8,15 | 2,67 |
| 3,0 | 10^8 | 8,72 | 8,42 | 8,11 | 2,66 |
| 3,0 | 10^9 | 8,66 | 8,36 | 8,06 | 2,64 |
| 3,0 | 10^{10} | 8,58 | 8,28 | 7,98 | 2,62 |
| 3,5 | 10^6 | 8,23 | 7,91 | 7,60 | 2,50 |
| 3,5 | 10^7 | 8,20 | 7,89 | 7,58 | 2,49 |
| 3,5 | 10^8 | 8,17 | 7,86 | 7,55 | 2,48 |
| 3,5 | 10^9 | 8,13 | 7,81 | 7,50 | 2,47 |
| 3,5 | 10^{10} | 8,06 | 7,75 | 7,43 | 2,45 |

Tabela 5.5 - Razão sinal/ruído para $z = 20$ e $\tau = 2,5\text{Gyr}$.

| $x = 1,30 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $1,47 \cdot 10^{-3}$ | $1,46 \cdot 10^{-3}$ | $1,44 \cdot 10^{-3}$ | $1,42 \times 10^{-3}$ | $1,39 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO II | $6,45 \times 10^{-2}$ | $6,36 \times 10^{-2}$ | $6,23 \times 10^{-2}$ | $6,06 \times 10^{-2}$ | $5,80 \times 10^{-2}$ |
| S/N LIGO III | $1,88 \times 10^{-1}$ | $1,4 \times 10^{-1}$ | $1,78 \times 10^{-1}$ | $1,69 \times 10^{-1}$ | $1,57 \times 10^{-1}$ |
| $x = 1,35 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $1,38 \times 10^{-3}$ | $1,37 \times 10^{-3}$ | $1,36 \times 10^{-3}$ | $1,33 \times 10^{-3}$ | $1,30 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO II | $5,96 \times 10^{-2}$ | $5,87 \times 10^{-2}$ | $5,76 \times 10^{-2}$ | $5,59 \times 10^{-2}$ | $5,35 \times 10^{-2}$ |
| S/N LIGO III | $1,77 \times 10^{-1}$ | $1,69 \times 10^{-1}$ | $1,63 \times 10^{-1}$ | $1,55 \times 10^{-1}$ | $1,44 \times 10^{-1}$ |
| $x = 1,40 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $1,29 \times 10^{-3}$ | $1,28 \times 10^{-3}$ | $1,27 \times 10^{-3}$ | $1,25 \times 10^{-3}$ | $1,22 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO II | $5,48 \times 10^{-2}$ | $5,40 \times 10^{-2}$ | $5,29 \times 10^{-2}$ | $5,14 \times 10^{-2}$ | $4,92 \times 10^{-2}$ |
| S/N LIGO III | $1,58 \times 10^{-1}$ | $1,54 \times 10^{-1}$ | $1,48 \times 10^{-1}$ | $1,41 \times 10^{-1}$ | $1,31 \times 10^{-1}$ |
| $x = 1,35 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-5}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $1,38 \times 10^{-4}$ | $1,37 \times 10^{-4}$ | $1,36 \times 10^{-4}$ | $1,33 \times 10^{-4}$ | $1,30 \times 10^{-4}$ |
| S/N LIGO II | $5,96 \times 10^{-3}$ | $5,87 \times 10^{-3}$ | $5,76 \times 10^{-3}$ | $5,59 \times 10^{-3}$ | $5,35 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO III | $1,73 \times 10^{-2}$ | $1,69 \times 10^{-2}$ | $1,63 \times 10^{-2}$ | $1,55 \times 10^{-2}$ | $1,44 \times 10^{-2}$ |

Tabela 5.6 - Razão sinal/ruído para $z = 20$ e $\tau = 3,5\text{Gyr}$.

| $x = 1,30 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $1,04 \times 10^{-3}$ | $1,04 \times 10^{-3}$ | $1,03 \times 10^{-3}$ | $1,02 \times 10^{-3}$ | $9,98 \times 10^{-4}$ |
| S/N LIGO II | $4,05 \times 10^{-2}$ | $4,01 \times 10^{-2}$ | $3,96 \times 10^{-2}$ | $3,88 \times 10^{-2}$ | $3,76 \times 10^{-2}$ |
| S/N LIGO III | $1,02 \times 10^{-1}$ | $1,00 \times 10^{-1}$ | $9,77 \times 10^{-2}$ | $9,41 \times 10^{-2}$ | $6,47 \times 10^{-2}$ |
| $x = 1,35 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $9,60 \times 10^{-4}$ | $9,55 \times 10^{-4}$ | $9,47 \times 10^{-4}$ | $9,35 \times 10^{-4}$ | $9,18 \times 10^{-4}$ |
| S/N LIGO II | $3,68 \times 10^{-2}$ | $3,65 \times 10^{-2}$ | $3,59 \times 10^{-2}$ | $3,52 \times 10^{-2}$ | $3,42 \times 10^{-2}$ |
| S/N LIGO III | $9,16 \times 10^{-2}$ | $8,99 \times 10^{-2}$ | $8,77 \times 10^{-2}$ | $8,45 \times 10^{-2}$ | $7,99 \times 10^{-2}$ |
| $x = 1,40 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $8,82 \times 10^{-4}$ | $8,77 \times 10^{-4}$ | $8,70 \times 10^{-4}$ | $8,59 \times 10^{-4}$ | $8,43 \times 10^{-4}$ |
| S/N LIGO II | $3,33 \times 10^{-2}$ | $3,30 \times 10^{-2}$ | $3,26 \times 10^{-2}$ | $3,19 \times 10^{-2}$ | $3,10 \times 10^{-2}$ |
| S/N LIGO III | $8,18 \times 10^{-2}$ | $8,03 \times 10^{-2}$ | $7,83 \times 10^{-2}$ | $7,55 \times 10^{-2}$ | $7,14 \times 10^{-2}$ |
| $x = 1,35 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-5}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $9,60 \times 10^{-5}$ | $9,54 \times 10^{-5}$ | $9,46 \times 10^{-5}$ | $9,35 \times 10^{-5}$ | $9,18 \times 10^{-5}$ |
| S/N LIGO II | $3,68 \times 10^{-3}$ | $3,64 \times 10^{-3}$ | $3,59 \times 10^{-3}$ | $3,52 \times 10^{-3}$ | $3,42 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO III | $9,16 \times 10^{-3}$ | $8,99 \times 10^{-3}$ | $8,77 \times 10^{-3}$ | $8,45 \times 10^{-3}$ | $7,99 \times 10^{-3}$ |

Tabela 5.7 - Razão sinal/ruído para $z = 40$ e $\tau = 2,5\text{Gyr}$.

| $x = 1,30 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $6,07 \times 10^{-3}$ | $6,00 \times 10^{-3}$ | $5,91 \times 10^{-3}$ | $5,78 \times 10^{-3}$ | $5,59 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO II | $3,32 \times 10^{-1}$ | $3,28 \times 10^{-1}$ | $3,22 \times 10^{-1}$ | $3,14 \times 10^{-1}$ | $3,02 \times 10^{-1}$ |
| S/N LIGO III | $7,39 \times 10^{-1}$ | $7,29 \times 10^{-1}$ | $7,15 \times 10^{-1}$ | $6,95 \times 10^{-1}$ | $6,66 \times 10^{-1}$ |
| $x = 1,35 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $5,98 \times 10^{-3}$ | $5,92 \times 10^{-3}$ | $5,82 \times 10^{-3}$ | $5,69 \times 10^{-3}$ | $5,50 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO II | $3,29 \times 10^{-1}$ | $3,25 \times 10^{-1}$ | $3,19 \times 10^{-1}$ | $3,11 \times 10^{-1}$ | $2,99 \times 10^{-1}$ |
| S/N LIGO III | $7,31 \times 10^{-1}$ | $7,21 \times 10^{-1}$ | $7,07 \times 10^{-1}$ | $6,88 \times 10^{-1}$ | $6,59 \times 10^{-1}$ |
| $x = 1,40 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $5,87 \times 10^{-3}$ | $5,80 \times 10^{-3}$ | $5,70 \times 10^{-3}$ | $5,57 \times 10^{-3}$ | $5,38 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO II | $3,25 \times 10^{-1}$ | $3,21 \times 10^{-1}$ | $3,15 \times 10^{-1}$ | $3,07 \times 10^{-1}$ | $2,94 \times 10^{-1}$ |
| S/N LIGO III | $7,20 \times 10^{-1}$ | $7,10 \times 10^{-1}$ | $6,96 \times 10^{-1}$ | $6,77 \times 10^{-1}$ | $6,48 \times 10^{-1}$ |
| $x = 1,35 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-5}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $5,98 \times 10^{-4}$ | $5,92 \times 10^{-4}$ | $5,82 \times 10^{-4}$ | $5,69 \times 10^{-4}$ | $5,50 \times 10^{-4}$ |
| S/N LIGO II | $3,29 \times 10^{-2}$ | $3,25 \times 10^{-2}$ | $3,19 \times 10^{-2}$ | $3,11 \times 10^{-2}$ | $2,99 \times 10^{-2}$ |
| S/N LIGO III | $7,31 \times 10^{-2}$ | $7,22 \times 10^{-2}$ | $7,07 \times 10^{-2}$ | $6,88 \times 10^{-2}$ | $6,59 \times 10^{-2}$ |

Tabela 5.8 - Razão sinal/ruído para $z = 40$ e $\tau = 3,5\text{Gyr}$.

| $x = 1,30 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $3,84 \times 10^{-3}$ | $3,81 \times 10^{-3}$ | $3,76 \times 10^{-3}$ | $3,69 \times 10^{-3}$ | $3,59 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO II | $2,00 \times 10^{-1}$ | $1,98 \times 10^{-1}$ | $1,95 \times 10^{-1}$ | $1,91 \times 10^{-1}$ | $1,85 \times 10^{-1}$ |
| S/N LIGO III | $4,37 \times 10^{-1}$ | $4,32 \times 10^{-1}$ | $4,25 \times 10^{-1}$ | $4,15 \times 10^{-1}$ | $4,01 \times 10^{-1}$ |
| $x = 1,35 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $3,69 \times 10^{-3}$ | $3,66 \times 10^{-3}$ | $3,61 \times 10^{-3}$ | $3,55 \times 10^{-3}$ | $3,45 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO II | $1,94 \times 10^{-1}$ | $1,91 \times 10^{-1}$ | $1,89 \times 10^{-1}$ | $1,84 \times 10^{-1}$ | $1,78 \times 10^{-1}$ |
| S/N LIGO III | $4,23 \times 10^{-1}$ | $4,18 \times 10^{-1}$ | $4,11 \times 10^{-1}$ | $4,01 \times 10^{-1}$ | $3,87 \times 10^{-1}$ |
| $x = 1,40 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-4}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $3,53 \times 10^{-3}$ | $3,50 \times 10^{-3}$ | $3,45 \times 10^{-3}$ | $3,39 \times 10^{-3}$ | $3,29 \times 10^{-3}$ |
| S/N LIGO II | $1,86 \times 10^{-1}$ | $1,84 \times 10^{-1}$ | $1,81 \times 10^{-1}$ | $1,77 \times 10^{-1}$ | $1,71 \times 10^{-1}$ |
| S/N LIGO III | $4,06 \times 10^{-1}$ | $4,01 \times 10^{-1}$ | $3,95 \times 10^{-1}$ | $3,86 \times 10^{-1}$ | $3,72 \times 10^{-1}$ |
| $x = 1,35 \epsilon_{GW} = 7,0 \times 10^{-5}$ | | | | | |
| $M_{mim} (M_\odot)$ | 10^6 | 10^7 | 10^8 | 10^9 | 10^{10} |
| S/N LIGO I | $3,69 \times 10^{-4}$ | $3,66 \times 10^{-4}$ | $3,61 \times 10^{-4}$ | $3,55 \times 10^{-4}$ | $3,45 \times 10^{-4}$ |
| S/N LIGO II | $1,94 \times 10^{-2}$ | $1,91 \times 10^{-2}$ | $1,89 \times 10^{-2}$ | $1,84 \times 10^{-2}$ | $1,78 \times 10^{-2}$ |
| S/N LIGO III | $4,23 \times 10^{-2}$ | $4,18 \times 10^{-2}$ | $4,11 \times 10^{-2}$ | $4,01 \times 10^{-2}$ | $3,87 \times 10^{-2}$ |

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho foi apresentado um modelo “hierárquico” de formação de estruturas, dentro do cenário de matéria escura fria mais constante cosmológica. Neste utilizou-se como ferramenta para o cálculo da evolução dos halos de matéria escura, o formalismo tipo Press-Schechter, adotando uma função de massa desses halos que leva em consideração colapsos assimétricos. Assim, foi possível obter a fração de massa bariônica presente em estruturas em um dado instante. A partir disso calculamos a razão diferencial com que essa matéria é acretada.

Partindo então do conhecimento da taxa de acresção de matéria bariônica, chegou-se à taxa cósmica de formação estelar (TCFE). Foi então visto que, independentemente do ponto em “*redshift*” que se considera iniciar a formação estelar, os máximos da TCFE decrescem com o aumento de massa mínima inicial dos halos de matéria escura, e que ao se aumentar a escala característica de formação estelar ocorre uma diminuição no número de estrelas formadas, ao mesmo tempo que seus máximos se aproximam do presente.

Tendo este modelo, fisicamente adequado para a descrição da TCFE, calculou-se o fundo estocástico de OG’s gerado pelo colapso de estrelas para buracos negros. Para os três casos de z_{ini} (20, 30 e 40), ao se aumentar o valor da massa mínima inicial dos halos de matéria escura, do tempo característico de formação estelar e do expoente da função de massa inicial, o fundo sofreu uma diminuição da sua amplitude. Também viu-se que ao se diminuir a eficiência de geração de OG’s, as amplitudes do fundo diminuíram consideravelmente. Do mesmo modo, foi observado que a contribuição para a densidade de energia do Universo das fontes aqui estudadas são muito menores que um, não alterando a dinâmica do Universo.

Obtivemos também a razão sinal/ruído para dois detectores interferométricos LIGO nas configurações: inicial, intermediária e avançada. Em todos os casos esta razão foi menor que um (valor máximo (S/N) $\sim 0,7$), mas foi possível notar que os maiores valores obtidos correspondem a $z_{ini} = 40$, massa mínima inicial dos halos de matéria escura de $10^6 M_\odot$, tempo característico de formação estelar $\sim 2,5$ Gyr, expoente da função de massa inicial de 1,30 e eficiência de geração de ondas gravitacionais de $7,0 \times 10^{-4}$.

O modelo estudado no presente trabalho pode ser melhorado através da inclusão de novos parâmetros, tais como retorno de matéria do meio interestelar para o meio intergaláctico. Poderia também ser considerado que a formação estelar não depende somente da acresção de matéria bariônica em estruturas, mas que a fusão de halos tem um papel importante no processo de resfriamento dos bárions e formação estelar. Mesmo assim, o modelo é robusto, pois permitiu um estudo abrangente que envolve: a evolução do Universo em

grande escala, os processos que conduzem a formação de galáxias e estrelas, assim como os mecanismos de geração e detecção de ondas gravitacionais. Podendo assim contribuir para a reconstrução da história cósmica a partir da detecção de ondas gravitacionais.

Outras extensões possíveis para este trabalho são a inclusão de um terceiro (ou quarto) interferômetro, melhorando a correlação dos sinais e, portanto, aumentando as razões S/N dos modelos aqui estudados. Além disso, pretendemos substituir o papel da constante cosmológica, neste cenário, por um campo escalar de forma a verificar se existe uma assinatura interessante, em ondas gravitacionais, advinda da introdução desse novo componente.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOVICI, A.; ALTHOUSE, W. E.; DREVER, R. W. P.; GURSEL, Y.; KAWAMURA, S.; RAAB, F. J.; SHOEMAKER, D.; SIEVERS, L.; SPERO, R. E.; THORNE, K. S. LIGO - the laser interferometer gravitational-wave observatory. **Science**, v. 256, p. 325–333, abr. 1992. [42](#), [45](#)
- ALLEN, B. The stochastic gravity-wave background: sources and detection. In: MARC, J.-A.; LASOTA, J.-P. (Ed.). **Relativistic gravitation and gravitational radiation**. England: Cambridge University Press, 1997. p. 373. [45](#), [51](#), [54](#), [92](#)
- BARISH, B. C. The detection of gravitational waves with LIGO. **preprint gr-qc/9905026**, v. 1, n. 26, p. 1–8, maio. 1999. [41](#)
- BARKANA, R. The star formation rate intensity distribution function- comparison of observations with hierarchical galaxy formation. **New Astronomy**, n. 7, p. 337–347, maio. 2002. [72](#)
- BOGOLIUBOV, N. N.; SHIRKOV, D. V. **Introduction to the theory of quantized fields**. 1. ed. New York, NY: Interscience, 1959. 720 p. (Interscience Monographs in Physics and Astronomy, v. 3). [33](#)
- BOND, J. R.; CARR, B. J.; HOGAN, C. J. Spectrum and anisotropy of the cosmic infrared background. **Apj**, v. 306, p. 428–450, jul. 1986. [63](#)
- CARROLL, S. M.; PRESS, W. H. The cosmological constant. **ARA&A**, v. 30, p. 499–542, 1992. [62](#)
- CASTRO, C. S. **Estudo das fontes astrofísicas candidatas à observação pelo detector de ondas gravitacionais “Mario Schenberg”**. 117 p. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Astrofísica)) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais-Br, São José dos Campos. 2002, Dezembro 2002. [41](#), [42](#), [43](#)
- DAIGNE, F.; OLIVE, K. A.; SILK, J.; STOEHR, F.; VANGIONI, E. Hierarchical growth and star formation: Enrichment, outflows and supernova rates. **Apj**, v. 647, p. 773–786, ago. 2006. [59](#), [65](#), [72](#)
- de ARAUJO, J. C. N.; MIRANDA, O. D. Star formation rate density and the background of gravitational waves. **Phys. Rev. D**, v. 71, n. 12, p. 127503, jun. 2005. [51](#), [52](#)
- de ARAUJO, J. C. N.; MIRANDA, O. D.; AGUIAR, O. D. Stochastic background of gravitational waves. **Phys. Rev. D**, v. 61, n. 12, p. 124015, maio. 2000. [54](#)

_____. Graitational wave background from population III black hole formation. **Real Astron. Soc.**, v. 330, p. 651–659, jul. 2001. [53](#)

de ARAUJO, J. C. N.; MIRANDA, O. D.; AGUIAR, O. D. Gravitational wave background from black holes of the springel & hernquist star formation epoch. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 348, p. 1373–1378, mar. 2004. [81](#), [94](#)

D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's relativity**. 1. ed. New York: Oxford University, 1992. 383 p. [25](#)

EFSTATHIOU, G.; BOND, J. R.; WHITE, S. D. M. Cobe background radiation anisotropies and learge-scale structure in the universe. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 258, p. 1p–6p, jun. 1992. [64](#)

EINSTEIN, A.; GROSSMANN, M. Entwurf einer verallgemeinerten relativitatstheorie und einer theorie der gravitation. **Z. Math. Physik**, v. 62, p. 225–261, 1913. Translated into English: in The Collected Papers of Albert Einstein v. 4 (Eds M J Klein et al.) (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1995). [21](#)

FERRARI, V.; MATARRESE, S.; SCHNEIDER, R. Gravitational wave background from a cosmological population of core-collapse supernovae. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 303, p. 247–257, fev. 1999. [54](#)

FLANAGAN, E. E. Sensitivity of the laser interferometer gravitational wave observatory to a stochastic background, and its dependence on the detector orientations. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 48, n. 6, p. 2389–2407, set. 1993. [46](#), [47](#), [92](#), [93](#)

FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J. D. **A short course in general relativity**. 3. ed. New york: Springer, 2006. 230 p. [32](#)

FRYER, C. L.; WOOSLE, S. E.; HEGER, A. Pair-instability supernovae, gravity waves, and gamma-ray transients. **Apj**, v. 550, p. 372–382, mar. 2001. [53](#)

FUKUGITA, M.; PEEBLES, P. J. E. The cosmic energy inventory. **Apj**, v. 616, p. 643–668, dez. 2004. [72](#)

FULLER, T. M.; COUCHMAN, H. M. P. Simulation of primordial object formation. **Apj**, n. 544, p. 6–20, nov. 2000. [58](#)

HAKIM, R. **An introduction to relativistic gravitation**. 1. ed. New York: Cambridge University, 1999. 286 p. [45](#)

HEGER, A.; WOOSLEY, S. E. The nucleosynthetic signature of population iii. **Apj**, v. 567, p. 532–543, mar. 2002. [54](#)

HIRATA, M. C.; PADMANABHAN, N. Cosmological production of h_2 before the formation of the first galaxies. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 372, n. 372, p. 372–1175, nov. 2006. [58](#)

HUGHES, S. A.; MÁRKA, S.; BENDER, P. L.; HOGAN, C. J. New physics and astronomu with the new gravitational-wave observatoies. **ArXiv Astrophysics e-prints**, p. 29, out. 2001. [40](#), [44](#)

JENKINS, A.; FRENK, C. S.; WHITE, S. D. M.; COLBERG, J. M. The mass function of dark matter haloes. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 321, p. 372–384, 2001. [22](#), [62](#), [64](#)

KEPLER, J. Carta de Johannes Kepler a Michael Mästlin em Tübingen. traduzido do original em latim por Claudemir Roque Tossato. **Scientlæ studia**, v. 1, n. 2, p. 207–2015, abr.-jun. 2003. [21](#)

LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H.; WEYL, H. **The principles of relativity**. 1. ed. New York: Dover Publications, 1923. 216 p. [21](#)

MATTEUCCI, F. **The chemical evolution of the galaxy**. 1. ed. Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2001. 293 p. [59](#)

NETO, G. B. L. Astronomia extragaláctica: notas de aula. ago. 2004. Disponível em: <<http://www.astro.iag.usp.br/~gastao/extragal/ExtraGal2007.pdf>>. Acesso em: 13 junho 2007. [57](#), [62](#), [63](#)

NEWTON, I. **Philosophia naturalis principia mathematica**. 3. ed. Londres: Univercit of Glasgow, 1871. [21](#)

OHANIAN, H. C. **Gravitation and spacetime**. 1. ed. New York, NY: W.W. Norton, 1976. 461 p. [33](#)

OLIVEIRA, S. R.; MIRANDA, O. D.; de ARAUJO, J. C. N.; OPHER, R. Collapse of primordial clouds - I. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 301, p. 101–114, nov. 1998. [58](#)

_____. Collapse of primordial clouds - II. the role of dark matter. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 301, p. 115–130, nov. 1998. [58](#)

OWEN, B. J.; SATHYAPRAKASH, B. S. Matched filtering of gravitational waves from inspiraling compact binaries: Computational cost and template placement. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 60, n. 2, p. 022002, jun. 1999. [51](#), [93](#)

PAIS, A. **Sutil é o senhor**: a ciência e a vida de Albert Einstein. 5. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1982. 637 p. [21](#), [25](#)

PEACOCK, J. A. **Cosmological physics**. Inglaterra: Cambridge University Press, 1999. 682 p. [22](#), [61](#)

PIERPAOLI, E.; SCOTT, D.; WHITE, M. Power-spectrum normalization from the local abundance of rich clusters of galaxies. **Mon. Not. R. Astron.**, v. 325, p. 77–88, jul. 2001. [64](#)

PIRAN, T.; STARK, R. F. Gravitational radiation, gravitational collapse, and numerical relativity. **New York Academy Sciences Annals**, v. 470, p. 247–266, 1986. [53](#)

PRESS, W. H.; SCHECHTER, P. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. **Apj**, p. 425–438, fev. 1974. [61](#)

SALPETER, E. E. The luminosity function and stellar evolution. **Apj**, v. 121, p. 161–167, 1955. [68](#)

SCHMIDT, M. The rate of star formation. **Apj**, v. 129, p. 243–258, mar. 1959. [68](#)

SHETH, R. K.; MO, H. J.; TORMEN, G. Ellipsoidal collapse and an improved model for the number and spatial distribution of dark matter haloes. **Mon. Not. R. Astron.**, v. 323, p. 1–12, set. 2001. [64](#)

SHOEMAKER, D. LIGO hanford observatory. National Science Foundation, ago. 2007. Disponível em: <<http://www.ligo.caltech.edu/advLIGO/scripts/summary.shtml>>. Acesso em: 06 junho 2007. [44](#), [93](#)

SPRINGEL, V.; HERNQUIST, L. The history of star formation in a Λ cold dark matter universe. **Mon. Not. R. Astron.**, v. 339, p. 312–334, fev. 2003. [76](#), [81](#), [94](#)

THORNE, K. S. **300 years of gravitation**: Gravitational radiation. Inglaterra: Cambridge University Press, 1987. 330-458 p. [52](#), [54](#)

WEBER, J. Detection and generation of gravitational waves. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 117, n. 1, p. 306–313, jan. 1960. [42](#)

WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology**: principles and application of the general theory of relativity. 1. ed. New York: John Wiley and sons, 1972. 656 p. [22](#)