

INPE-15236-TDI/1323

FUNDOS ESTOCÁSTICOS EM ONDAS GRAVITACIONAIS GERADOS POR SISTEMAS BINÁRIOS COMPACTOS

Edgard de Freitas Diniz Evangelista

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr.
José Carlos Neves de Araújo, aprovada em 29 de fevereiro de 2008.

O original deste documento está disponível em:
<<http://urlib.net/sid.inpe.br/mtc-m17@80/2008/02.12.12.07>>

INPE
São José dos Campos
2008

PUBLICADO POR:

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE

Gabinete do Diretor (GB)

Serviço de Informação e Documentação (SID)

Caixa Postal 515 - CEP 12.245-970

São José dos Campos - SP - Brasil

Tel.:(012) 3945-6911/6923

Fax: (012) 3945-6919

E-mail: pubtc@sid.inpe.br

CONSELHO DE EDITORAÇÃO:**Presidente:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação Observação da Terra (OBT)

Membros:

Dr. Maria do Carmo de Andrade Nono - Conselho de Pós-Graduação

Dr. Haroldo Fraga de Campos Velho - Centro de Tecnologias Especiais (CTE)

Dra. Inez Staciarini Batista - Coordenação Ciências Espaciais e Atmosféricas (CEA)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Dr. Ralf Gielow - Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPT)

Dr. Wilson Yamaguti - Coordenação Engenharia e Tecnologia Espacial (ETE)

BIBLIOTECA DIGITAL:

Dr. Gerald Jean Francis Banon - Coordenação de Observação da Terra (OBT)

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Jefferson Andrade Anselmo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Simone A. Del-Ducca Barbedo - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Vinicius da Silva Vitor - Serviço de Informação e Documentação (SID) - bolsista

REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:

Marciana Leite Ribeiro - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Marilúcia Santos Melo Cid - Serviço de Informação e Documentação (SID)

Yolanda Ribeiro da Silva e Souza - Serviço de Informação e Documentação (SID)

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:

Viveca Sant'Ana Lemos - Serviço de Informação e Documentação (SID)

INPE-13269-MAN/45 - versão 1

FUNDOS ESTOCÁSTICOS EM ONDAS GRAVITACIONAIS GERADOS POR SISTEMAS BINÁRIOS COMPACTOS

Edgard de Freitas Diniz Evangelista

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr.
José Carlos Neves de Araujo, aprovada em 29 de fevereiro de 2008.

O original deste documento está disponível em:
<<http://urlib.net/sid.inpe.br/iris@1916/2005/05.19.15.27>>

INPE
São José dos Campos
2008

INPE-13269-MAN/45 - versão 1

FUNDOS ESTOCÁSTICOS EM ONDAS GRAVITACIONAIS GERADOS POR SISTEMAS BINÁRIOS COMPACTOS

Edgard de Freitas Diniz Evangelista

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr.
José Carlos Neves de Araujo, aprovada em 29 de fevereiro de 2008.

O original deste documento está disponível em:
<<http://urlib.net/sid.inpe.br/iris@1916/2005/05.19.15.27>>

INPE
São José dos Campos
2008

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Cutter Evangelista, Edgard de Freitas Diniz.

Dissertação de Mestrado do Curso de Pós-Graduação em Astrofísica, orientada pelo Dr. José Carlos Neves de Araujo/ Edgard de Freitas Diniz Evangelista. – São José dos Campos: INPE, 2008.

70p.;p. ; (INPE-13269-MAN/45 - versão 1)

1. Gravitação. 2. Relatividade Geral. 3. Ondas Gravitacionais. 4. Sistemas Binários. 5. Cosmologia. 6. Gravitation. 7. General Relativity. 8. Gravitational Waves. 9. Binary Systems. 10. Cosmology.

CDU

Aprovado (a) pela Banca Examinadora
em cumprimento ao requisito exigido para
obtenção do Título de Mestre em
Astrofísica

Dr. Oswaldo Duarte Miranda

Oswaldo Duarte Miranda

Presidente / INPE / SJCampos - SP

Dr. José Carlos Neves de Araujo

José Carlos Neves de Araujo

Orientador(a) / INPE / SJCampos - SP

Dr. Jorge Ernesto Horvath

Jorge Ernesto Horvath

Convidado(a) / IAG/USP / São Paulo - SP

Aluno (a): Edgard de Freitas Diniz Evangelista

São José dos Campos, 29 de Fevereiro de 2008

*“fazer o bem o quanto possível,
amar primeiro a liberdade,
mesmo que seja por um trono,
não renegar, nunca, a verdade”*

LUDWIG VAN BEETHOVEN
em uma folha de álbum, 1792

*A todos aqueles que lutaram contra o obscurantismo e as
injustiças deste mundo*

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Eduardo pelos artigos que me indicou, além de solucionar muitas de minhas dúvidas; agradeço ao Cláudio Soriano e ao César pela preciosa ajuda nos *softwares* que utilizei neste trabalho; agradeço ao Dennis Bessada e ao Márcio pelas interessantes discussões.

Agradeço aos professores da DAS por tudo que me ensinaram, com atenção especial ao José Carlos, que me orientou e me ensinou muito.

Enfim, agradeço a todos que colaboraram para o sucesso deste trabalho.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

As equações de campo da Relatividade Geral, quando linearizadas fornecem soluções que descrevem perturbações ondulatórias do espaço-tempo, e têm a forma de radiação de quadrupolo quando se utiliza a aproximação de campo fraco e consideram-se pontos distantes da fonte. Teoricamente, qualquer massa ou arranjo de massas que sofra acelerações translacionais ou apresente rotação (neste caso, apenas para objetos sem simetria radial), emite ondas gravitacionais. Porém há quatro tipos de fontes de especial interesse em astrofísica: os sistemas periódicos por apresentarem perfis de emissão duradouros e aproximadamente constantes - como por exemplo sistemas binários e estrelas deformadas em rotação; os *bursts*, que são caracterizados por emissões altamente energéticas em curtos intervalos de tempo, como explosões de supernovas e colisão de buracos-negros; os fundos, que podem ser de natureza cosmológica, gerados por eventos como o *big bang* ou gerados por um grande número de sistemas periódicos ou *bursts*; e as fontes “*chirp*”, como sistemas binários em fase não-periódica. O presente trabalho trata da geração de fundos por sistemas binários compactos formados por estrelas de nêutrons e buracos-negros. É realizado, em particular, um estudo dos sistemas binários compactos cosmológicos e sua evolução. O objetivo é obter o espectro de energia do fundo quando se consideram as emissões simultâneas das binárias compactas situadas a distâncias cosmológicas, ou seja, será realizada a soma dos espectros de toda a população para se obter o espectro total.

STOCHASTIC BACKGROUND OF GRAVITATIONAL WAVES GENERATED BY COMPACT BINARY SYSTEMS

ABSTRACT

General Relativity's equations when linearized yield solutions which describe wavy perturbations in space-time and that have quadrupolar radiation form when one utilizes the weak field approximation and considers points far from the source. Theoretically, any masses or arrangement of masses that undergo translational accelerations or that have rotation (in the case of radially asymmetrical objects, only) are able to emit gravitational waves. Nevertheless, there are four kinds of sources of special interests in Astrophysics: the periodic systems, because they present lasting and approximately constant emission profile, e.g., binary systems and rotating deformed stars; the bursts, which are characterized by sharply energetic emissions in a short time interval, as supernovae's blasts and merging of black holes; the background, which may be of cosmological kind, generated by events as the big bang, or generated by a great number of periodic or burst sources; "*chirp*" sources, as non-periodic binary systems. This dissertation addresses, in particular, the background radiation generated by compact binary systems formed by neutron stars and black holes. It is studied the cosmological compact binary systems and their evolution. The aim is to calculate the background's energy spectrum when one considers the simultaneous emissions from all binaries situated at cosmological distances, that is, it will be carry out the sum of the spectra of all population of these stellar systems to obtain the total spectrum.

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
LISTA DE FIGURAS	
LISTA DE TABELAS	
1 INTRODUÇÃO	21
2 ONDAS GRAVITACIONAIS	23
2.1 Equação de Einstein e Solução Ondulatória	23
2.2 Aplicação a Sistemas Binários	26
2.3 Cálculo do Espectro de Energia	28
2.4 Detectabilidade	30
2.4.1 Características Básicas do Detector LIGO	31
2.4.2 Características Básicas do Detector LISA	33
2.4.3 Características Básicas do Detector DECIGO	33
2.4.4 Características Básicas do Detector BBO	34
3 CÁLCULO DO FUNDO	37
3.1 Funções Distribuição	37
3.1.1 Distribuição de Massas	37
3.1.2 Distribuição de Separações	38
3.2 Taxa de Formação Inicial de Estrelas e Dimensões Máxima e Mínima dos Sistemas	43
3.2.1 Separação Mínima	43
3.2.2 Separação Máxima	44
3.2.3 Taxa de Formação Inicial de Estrelas	46
3.2.4 Taxa de Formação de Sistemas Binários	47
3.3 Fundos de Ondas Gravitacionais das Binárias Compactas	48
4 RESULTADOS E ANÁLISE	53
4.1 Espectros Para a Faixa do LISA	53
4.2 Espectros Para a Faixa de BBO e DECIGO	56
4.3 Espectro Para a Faixa do LIGO	58
4.4 Relação Sinal-Ruido Para o LIGO	60
4.5 Análise dos Resultados	61
5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS	63

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65
7 APÊNDICE A - DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO PARA A EVOLUÇÃO DA FREQÜÊNCIA	69

LISTA DE FIGURAS

	<u>Pág.</u>
2.1 Um dos detectores LIGO	32
2.2 Concepção artística do LISA	33
2.3 Esquema básico do DECIGO	34
2.4 Esquema básico do BBO	35
3.1 Taxa de formação de estrelas em função de z	47
4.1 Curva de sensibilidade do LISA e espectros de sistemas NS-NS	54
4.2 Curva de sensibilidade do LISA e espectros de sistemas BH-NS	55
4.3 Curva de sensibilidade do LISA e espectros de sistemas BH-BH	55
4.4 Curva de sensibilidade do BBO e do DECIGO e espectros de sistemas NS-NS	56
4.5 Curva de sensibilidade do BBO e do DECIGO e espectros de sistemas BH-NS	57
4.6 Curva de sensibilidade do BBO e do DECIGO e espectros de sistemas BH-BH	57
4.7 Curva de sensibilidade do LIGO e espectros de sistemas NS-NS	58
4.8 Curva de sensibilidade do LIGO e espectros de sistemas BH-NS	59
4.9 Curva de sensibilidade do LIGO e espectros de sistemas BH-BH	59

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
4.1 Relação sinal-ruido para sistemas BH-BH	60
4.2 Relação sinal-ruido para sistemas BH-NS	60
4.3 Relação sinal-ruido para sistemas NS-NS	60

1 INTRODUÇÃO

A Teoria da Relatividade Especial postulou a velocidade da luz como um limite absoluto, sendo que nem corpos massivos nem perturbações de campo podem ultrapassá-la. Obviamente uma teoria de gravitação compatível com a Relatividade Especial deve obedecer a este postulado e prever a existência de perturbações gravitacionais que se propagam a velocidades finitas.

No caso da Relatividade Geral, estas perturbações surgem como soluções das equações de campo linearizadas, e têm a forma de radiação de quadrupolo quando se utiliza a aproximação de campos fracos e consideram-se pontos distantes da fonte.

Teoricamente, qualquer massa ou arranjo de massas que sofra acelerações translacionais ou apresente movimentos de rotação pode emitir ondas gravitacionais. Porém, há quatro tipos de fontes astrofísicas mais importantes: os sistemas periódicos, por apresentarem perfis de emissão duradouros e aproximadamente constantes, emitindo ondas muito aproximadamente harmônicas, como os sistemas binários, estrelas deformadas em rotação, anãs-brancas deformadas em rotação e pulsões de anãs-brancas seguindo explosões de novas; os chamados *bursts*, que são caracterizados por emissões altamente energéticas em curtos intervalos de tempo, sendo possíveis fontes de tais emissões nascimentos de buracos-negros, colisões entre buracos-negros e entre buracos-negros e estrelas de nêutrons em aglomerados globulares, núcleos galáticos e quasares e coalescência final e destruição de sistemas binários; os fundos estocásticos, gerados pelo *big bang*, inhomogeneidades e transições de fase no universo jovem e buracos-negros formados pelas estrelas de população III; os “*chirps*”, cuja origem pode ser os sistemas binários em fase de rápida evolução. Aqui se deve notar que um sistema binário pode representar tanto uma fonte periódica quanto uma fonte “*chirp*”: se esse sistema emite energia suficiente em forma de radiação gravitacional tal que sua órbita diminua por uma quantidade observável em um intervalo de tempo da ordem de, por exemplo, 1 ano, já não pode ser considerado uma fonte periódica e passa a ser um “*chirp*”. De fato, se uma binária é compacta o suficiente para irradiar em 10Hz ou mais, ela coalescerá em um curto intervalo de tempo.

Os sistemas binários são as mais bem conhecidas de todas as fontes de ondas gravitacionais. Através da medição das massas e dos parâmetros orbitais de um sistema binário e de sua distância, pode-se calcular com segurança as características das ondas emitidas. Sistemas formados por estrelas da seqüência principal ou anãs-brancas, por exemplo, possuem períodos orbitais de no mínimo uma hora, gerando ondas de freqüências não superiores a 1 mHz. Porém os sistemas formados por estrelas de nêutrons e buracos-negros por terem em geral distâncias orbitais pequenas, podem apresentar freqüências de emissão mais elevadas.

Na tentativa de se detectar a radiação gravitacional, foram projetados e construídos di-

versos modelos de detectores, os quais podem ser classificados em dois tipos: os de massa ressonante e os interferométricos. Os de massa ressonante têm como princípio de funcionamento uma peça de metal, que é em geral cilíndrica ou esférica, cujos modos de oscilação são excitados pela passagem de ondas gravitacionais de determinadas freqüências, sendo estas oscilações detectadas por transdutores. Os interferométricos funcionam de forma similar ao interferômetro de Michelson-Morley, onde as ondas gravitacionais são captadas através da interferência entre feixes de *laser*. Há projetos de detectores interferométricos a serem construídos no espaço, para a eliminação de ruidos mecânicos que possam dificultar a detecção. Exemplos de projetos de detectores interferométricos espaciais são o LISA, o BBO e o DECIGO; o LIGO é construído no solo.

O presente trabalho trata das emissões de radiação por sistemas binários compostos por estrelas de nêutrons e buracos-negros gerados em um cenário de formação de estruturas, em que a formação de estrelas ocorre em halos, ou ilhas de formação, cujas massas típicas consideradas estão entre 10^6 e 10^{10} massas solares. Para uma precisa descrição das massas dos halos, existe o formalismo de Press-Schechter, que fornece basicamente uma distribuição de massas para estes halos. Porém aqui será feita uma aproximação, que consiste em se considerar todos os halos com uma mesma massa. Serão considerados os sistemas que estão em fases iniciais de existência, ou seja, onde a radiação emitida pode ser considerada aproximadamente periódica e de amplitude constante. Sistemas nessas condições possuem freqüências de emissão de até aproximadamente 1 Hz, sendo que acima desse valor já se inicia a fase de rápida evolução, ou fase *chirp*. Na verdade, a passagem do regime periódico para o regime *chirp* não é descontínua, e sim gradual, porém o valor de 1Hz mostra-se um limite seguro. O objetivo é obter o espectro de energia resultante quando se consideram as emissões simultâneas de toda a população de binárias situadas a distâncias cosmológicas, ou seja, será realizada a soma dos espectros de toda a população para se obter o espectro total. Em outras palavras, será obtido o fundo estocástico gerado por sistemas binários compactos.

O trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 é feita uma breve revisão da teoria da relatividade geral (RG) e do formalismo de ondas gravitacionais, como aproximação linear das equações de campo da RG que geram soluções do tipo ondulatório, determinação da potência irradiada por sistemas binários e cálculo do espectro de energia para o sistema; o capítulo 3 tratará do cálculo do fundo propriamente dito; no capítulo 4 serão apresentados e analisados os resultados. Finalmente, o capítulo 5 apresenta a conclusão geral do trabalho, sua validade, seus resultados e algumas sugestões para futuros aperfeiçoamentos. Portanto, este trabalho se divide basicamente em três etapas: a teoria das ondas gravitacionais, o desenvolvimento do cálculo do fundo e a apresentação dos resultados.

2 ONDAS GRAVITACIONAIS

Este capítulo mostra como a equação de campo de Einstein gera soluções ondulatórias quando se utiliza aproximação de campo fraco e, fazendo-se uma escolha apropriada do *gauge* e tomando-se pontos distantes da fonte, chega-se a uma equação particularmente simples cujas soluções descrevem a radiação de quadrupolo. Logo após introduzir estes conceitos, são calculadas grandezas relativas à radiação gravitacional para sistemas binários, como potência total irradiada e espectro de energia. Esta parte traz também uma breve descrição do funcionamento básico dos detectores de ondas gravitacionais, em especial BBO, DECIGO,LISA e LIGO.

2.1 Equação de Einstein e Solução Ondulatória

As equações de Einstein em sua forma completa são escritas como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

ou em termos do tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Estas equações são não-lineares, porém podem ser linearizadas através da aproximação de campo fraco, e desta aproximação surgem as soluções ondulatórias. Será considerada a assinatura da métrica igual a -2 . Outra convenção adotada será a utilização de letras gregas para designar números variando de 0 a 3, e letras latinas para designar números variando de 1 a 3, além disso é utilizada a convenção de Einstein, na qual índices mudos representam somas.

As soluções ondulatórias surgem quando se faz a aproximação linear no tensor métrico. Isso é feito considerando-se o tensor $g_{\mu\nu}$ como sendo o tensor de Minkowski com uma pequena perturbação de primeira ordem:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

cuja versão contravariante é dada por $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon h^{\mu\nu}$. Este tensor métrico será utilizado no cálculo do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$.

O tensor $G_{\mu\nu}$ é formado pelo tensor de Ricci e sua contração e pelo tensor métrico. O tensor de Ricci, por sua vez, é função dos símbolos de Christoffel. Portanto, deve-se calcular primeiramente os símbolos de Christoffel, para posteriormente calcular-se o tensor de Ricci, sendo o tensor de Einstein calculado por último.

Os símbolos de Christoffel são representados como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}) \quad (2.4)$$

Substituindo o tensor $g_{\mu\nu}$ dado e calculando-se as derivadas, obtém-se:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon(\partial_\mu h_\nu^\lambda + \partial_\nu h_\mu^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\nu}) \quad (2.5)$$

O tensor de Ricci é uma contração do tensor de Riemann, que é representado por:

$$R_{\lambda\mu\nu}^\kappa = \partial_\mu \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa + \Gamma_{\lambda\nu}^\eta \Gamma_{\eta\mu}^\kappa - \Gamma_{\lambda\mu}^\eta \Gamma_{\eta\nu}^\kappa \quad (2.6)$$

Substituindo o tensor métrico e calculando, tem-se:

$$R_{\lambda\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2}\varepsilon(\partial_\mu \partial_\lambda h_\nu^\kappa + \partial_\mu \partial_\lambda h_\kappa^\nu - \partial_\nu \partial_\lambda h_\mu^\kappa - \partial_\nu \partial_\mu h_\lambda^\kappa + \partial_\nu^\kappa h_{\lambda\mu} - \partial_\mu^\kappa h_{\lambda\nu}) \quad (2.7)$$

Manipulando índices, tem-se:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = g_{\kappa\delta} R_{\lambda\mu\nu}^\delta = \eta_{\kappa\delta} R_{\lambda\mu\nu}^\delta + \varepsilon h_{\kappa\delta} = \eta_{\kappa\delta} R_{\lambda\mu\nu}^\delta + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

portanto,

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \eta_{\kappa\delta} R_{\lambda\mu\nu}^\delta \quad (2.8)$$

Aplicando o abaixamento de índices acima, chega-se a:

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon(\partial_\mu \partial_\lambda h_{\kappa\nu} + \partial_\nu \partial_\lambda h_{\kappa\mu} - \partial_\lambda \partial_\nu h_{\kappa\mu} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\lambda\kappa}) \quad (2.9)$$

Utilizando o mesmo raciocínio anterior para a manipulação de índices, pode-se contrair o tensor de Riemann para se obter o tensor de Ricci:

$$R_{\kappa\lambda} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\kappa\nu\lambda} \quad (2.10)$$

onde se obtém:

$$R_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\varepsilon(\partial_\mu \partial_\lambda h_\kappa^\mu + \partial_\mu \partial_\lambda h_\lambda^\mu - \partial_\lambda \partial_\mu h - \square h_{\kappa\lambda}) \quad (2.11)$$

Contraindo mais uma vez os índices, obtém-se o escalar de curvatura:

$$R = \eta^{\kappa\lambda} R_{\kappa\lambda}$$

ou seja,

$$R = \varepsilon(\partial_\nu\partial_\mu h^{\nu\mu} - \square h) \quad (2.12)$$

Substituindo-se as grandezas calculadas acima na expressão do tensor de Einstein, tem-se:

$$G_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\varepsilon(\partial_\mu\partial_\lambda h^\mu_\kappa + \partial_\mu\partial_\kappa h^\mu_\lambda - \square h_{\kappa\lambda} - \partial_\kappa\partial_\lambda h - \eta_{\kappa\lambda}\partial_\mu\partial_\nu h^{\mu\nu} + \eta_{\kappa\lambda}\square h) \quad (2.13)$$

A expressão acima pode ser simplificada através da escolha de um *gauge* apropriado, da mesma maneira que se faz no eletromagnetismo.

Neste caso, pode-se utilizar as coordenadas harmônicas, que obedecem à igualdade

$$g^{\kappa\lambda}\Gamma^\mu_{\kappa\lambda} = 0 \quad (2.14)$$

a relação acima fornece, em primeira aproximação, a expressão

$$\partial_\kappa h^\kappa_\lambda - \frac{1}{2}\partial_\lambda h = 0 \quad (2.15)$$

que é conhecida como *gauge* de Einstein, Fock, de Donder ou Hilbert.

Definindo-se uma nova variável $\psi_{\kappa\lambda}$ tal que

$$\psi_{\kappa\lambda} = h_{\kappa\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\kappa\lambda}h \quad (2.16)$$

o gauge acima pode ser escrito como

$$\partial_\kappa\psi^\kappa_\lambda = 0 \quad (2.17)$$

Considerando-se estas condições no tensor de Einstein, este se torna simplesmente:

$$G_{\kappa\lambda} = -\frac{1}{2}\varepsilon\square\psi_{\kappa\lambda} \quad (2.18)$$

Como a equação de Einstein pode ser escrita como

$$G_{\kappa\lambda} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\kappa\lambda} \quad (2.19)$$

e dado o tensor calculado anteriormente, fica-se com:

$$\frac{1}{2}\varepsilon\square\psi_{\kappa\lambda} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\kappa\lambda} \quad (2.20)$$

Para o vácuo, esta equação se torna simplesmente

$$\square\psi_{\kappa\lambda} = 0 \quad (2.21)$$

tomando-se o traço

$$\eta^{\kappa\lambda}\square\psi_{\kappa\lambda} = \square(h - 2h) = -\square h = 0 \quad (2.22)$$

e notando-se que a partir da definição de $\psi_{\kappa\lambda}$, conclui-se que $h_{\kappa\lambda}$ deve satisfazer

$$\square h_{\kappa\lambda} = 0 \quad (2.23)$$

Que representa a equação de ondas para a perturbação h da métrica. Dessa forma vê-se que a equação de Einstein linearizada conduz naturalmente a soluções do tipo ondulatório. Pode-se calcular, a partir das soluções da equação de onda acima, grandezas como a potência total irradiada pelos diversos tipos de fonte. No presente trabalho, as fontes consideradas serão os sistemas binários compactos formados por estrelas de nêutrons e buracos-negros, cujo cálculo do espetro e potência irradiada será feito a seguir.

2.2 Aplicação a Sistemas Binários

De acordo com [Weinberg \(1972\)](#), a potência total irradiada em forma de ondas gravitacionais por um objeto é dada por:

$$P = \frac{2G\omega^6[D_{ij*}D_{ij}^* - \frac{1}{3}|D_{ii}|^2]}{5c^5} \quad (2.24)$$

onde P é a potência total irradiada, ω é a freqüência da onda e D_{ij} é dada por:

$$D_{ij}(\omega) = \int x^i x^j \rho(x) d^3x \quad (2.25)$$

Mais especificamente, se o objeto estiver em rotação, a expressão para a potência fica:

$$P = \frac{32G\Omega^6 I^2 e^2}{5c^5} \quad (2.26)$$

onde

$$I = \sum_i^3 I_{ii} \quad (2.27)$$

e

$$e = \frac{I_{11} - I_{22}}{I}$$

e Ω é a freqüência de rotação do objeto. Esta expressão pode ser utilizada no cálculo da potência irradiada por um sistema binário, bastando para isso que se calcule o tensor D_{ij} para esse sistema.

Para isso, pode-se considerar o sistema como duas massas (m_1 e m_2) ligadas por uma barra de massa desprezível, considerar que esse sistema gira em torno de seu centro de

massa e escolher um sistema de coordenadas fixo ao sistema binário e cuja origem esteja no centro de massa. Dessa forma, pode-se considerar que as coordenadas das duas massas sejam:

$$\begin{aligned} m_1 &= (x_1 = r_1, x_2 = 0, x_3 = 0) \\ m_2 &= (x_1 = -r_2, x_2 = 0, x_3 = 0) \end{aligned} \quad (2.28)$$

O tensor D_{ij} para esse sistema fica:

$$D_{ij} = \int d^3x x_i x_j \left[\sum_k^n m_k \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_k) \right] \quad (2.29)$$

assim,

$$D_{11} = m_1 \int d^3x x_1^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_1) + m_2 \int d^3x x_1^2 \delta^3(\vec{x} + \vec{r}_2)$$

portanto,

$$D_{11} = m_1 |\vec{r}_1|^2 + m_2 |\vec{r}_2|^2$$

Apenas a componente D_{11} será diferente de zero, pois apenas as coordenadas no eixo x_1 são diferentes de zero. Deve-se agora escrever D_{11} em função de r_1 ou r_2 . Isso pode ser feito utilizando-se a definição de centro de massa:

$$r_{CM} = \frac{m_1 r_1 - m_2 r_2}{m_1 + m_2} \quad (2.30)$$

Como no sistema utilizado o centro de massa está na origem, tem-se:

$$r_2 = \left(\frac{m_1}{m_2} \right) r_1 \quad (2.31)$$

dessa forma:

$$D_{11} = m_1 r_1^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$$

Definindo-se a separação dos corpos como $r = r_1 + r_2$, pode-se escrever D_{11} em termos dessa separação, colocando-se r_1 em função de r

$$r_1 = r \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^{-1} \quad (2.32)$$

substituindo na expressão para o momento de inércia, tem-se

$$D_{11} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) r^2 \quad (2.33)$$

Agora, considerando as expressões 2.26, e o momento de inércia calculado acima, tem-se:

$$P = \frac{32G\Omega^6}{5c^5} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 r^4 \quad (2.34)$$

O cálculo da potência irradiada mostrado tem caráter apenas didático no presente trabalho, pois ajuda a ilustrar o mecanismo de emissão e fornecer uma estimativa da intensidade da radiação emitida. O que será de fato utilizado é o espectro de emissão, cujo cálculo é exibido a seguir.

2.3 Cálculo do Espectro de Energia

A energia emitida via ondas gravitacionais pode ser separada em contribuições para diferentes freqüências. Considerando-se a energia associada a um intervalo infinitesimal de freqüência $(\nu, \nu + d\nu)$, pode-se denotar esta quantidade por $E(\nu, \nu + d\nu)$. Se $d\nu$ é infinitesimal, então $E(\nu, \nu + d\nu)$ será proporcional a $d\nu$, já que as propriedades do fundo não variarão apreciavelmente entre ν e $\nu + d\nu$.

Pode-se então definir

$$E(\nu, \nu + d\nu) = E(\nu)d\nu \quad (2.35)$$

onde $E(\nu)$ tem dimensão de energia por unidade de freqüência. Uma consequência desta definição é que a energia no intervalo finito de freqüências é dada pela integral:

$$E(\nu_1, \nu_2) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} E(\nu)d\nu \quad (2.36)$$

Pode-se ainda utilizar outra definição para o espectro de energia, denotando-se a quantidade infinitesimal $E(\nu, \nu + d\nu)$ por dE , e a definição 2.35 pode ser reescrita como

$$dE = E(\nu)d\nu \quad (2.37)$$

ou de forma equivalente

$$E(\nu) = \frac{dE}{d\nu} \quad (2.38)$$

O lado direito é a derivada de

$$E = \int_{\nu_1}^{\nu_2} E(\nu)d\nu \quad (2.39)$$

Portanto, a expressão para o espectro de energia utilizada será 2.38, tratada aqui como a derivada da energia irradiada em relação à freqüência da radiação gravitacional, que a partir de agora será escrita como ν_{GW} :

$$\text{espectro de energia} = \frac{dE}{d\nu_{GW}} \quad (2.40)$$

Para o cálculo desse espectro, utilizam-se apenas as expressões para a terceira lei de Kepler aplicada ao sistema e a energia total do sistema:

$$\text{Terceira Lei de Kepler: } \omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \quad (2.41)$$

$$\text{energia total do sistema: } E = -\frac{Gm_1m_2}{2r} \quad (2.42)$$

Derivando-se ω e E em relação a r obtém-se:

$$\frac{dE}{dr} = \frac{Gm_1m_2}{2r^2} \quad (2.43)$$

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{3}{2} \left[\frac{G(m_1 + m_2)}{r^5} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.44)$$

Além disso, pode-se isolar r na terceira lei de Kepler e lembrar que $\omega = 2\pi\nu$, para se chegar a:

$$r = \left[\frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2\nu^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.45)$$

Uma característica importante da radiação de quadrupolo para sistemas binários é que a freqüência da onda emitida é o dobro da freqüência de rotação do sistema, de forma que a expressão anterior fica:

$$r = \left[\frac{G(m_1 + m_2)}{\pi^2\nu_{GW}^2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (2.46)$$

onde ν_{GW} é a freqüência da onda gravitacional. É necessário salientar que essa relação entre freqüência de rotação e freqüência emitida vale para órbitas circulares; para órbitas elípticas os harmônicos superiores são importantes. Além disso:

$$\frac{dE}{d\nu} = 2 \frac{dE}{d\nu_{GW}} \quad (2.47)$$

e

$$\frac{dr}{d\nu} = 2\pi \frac{dr}{d\omega} \quad (2.48)$$

Utilizando-se a regra da cadeia e as derivadas calculadas acima, pode-se calcular o espectro de energia:

$$\frac{dE}{d\nu} = \frac{dE}{dr} \frac{dr}{d\nu}$$

portanto,

$$\frac{dE}{d\nu_{GW}} = \pi \frac{dE}{dr} \frac{dr}{d\omega}$$

fica-se com

$$\frac{dE}{d\nu_{GW}} = -\frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{\pi^2 \nu_{GW}^2} \right)^{\frac{1}{6}} m_1 m_2 (m_1 + m_2)^{-\frac{1}{3}} G^{\frac{2}{3}} \quad (2.49)$$

Introduzindo a grandeza denominada “*chirp mass*” definida como $M_{CH} = \mu^{3/5} M^{3/5}$, onde μ é a massa reduzida do sistema e M é a massa total do sistema, a expressão para o espectro de energia torna-se:

$$\frac{dE}{d\nu_{GW}} = -\frac{\pi}{3} \left(\frac{G^2}{\pi \nu_{GW}} \right)^{1/3} (M_{CH})^{5/3} \quad (2.50)$$

o que concorda com a expressão utilizada em por exemplo Schneider et al. (2001), lembrando que aí foi utilizado $G = 1$, e o sinal negativo foi omitido.

2.4 Detectabilidade

Uma vez que se tenha calculado o espectro do fundo estocástico em ondas gravitacionais, deve-se verificar sua detectabilidade, ou seja, verificar se os detectores hoje operantes, ou já previstos em projeto, têm capacidade de detectar tais espectros.

Mas as dificuldades técnicas envolvidas na detecção de ondas gravitacionais são grandes, porque as amplitudes das perturbações na métrica previstas para fontes distantes são muito pequenas. Porém, apesar das dificuldades, tem-se realizado vários projetos de detectores, sendo o mais antigo deles o oscilador ressonante construído por J. Webber na década de 1960. Um oscilador ressonante, ou detector de massa ressonante, consiste basicamente em uma peça de metal, geralmente em forma de cilindro ou esfera, que pode ser feita de alumínio, silício ou nióbio e vários transdutores ligados a essa peça. Quando uma onda gravitacional atinge o detector, excita seus modos normais de vibração, e estas vibrações mecânicas são captadas e convertidas em sinais elétricos pelos transdutores. Por seu próprio princípio de funcionamento, este tipo de detector possui uma banda de detecção muito estreita, pois os valores das freqüências normais de vibração são bem definidos.

Para diminuir vibrações indesejáveis que possam prejudicar a detecção, resfria-se o detector a temperaturas de até 2K e colocam-se amortecedores mecânicos para filtrar vibrações do ambiente.

Voltando ao detector de Webber, é conveniente mencionar alguns detalhes do instrumento: foi utilizado um cilindro de alumínio de massa 1,4ton, comprimento de 1,5m e freqüência ressonante de 10kHz. Uma onda cuja amplitude adimensional fosse de $h = 10^{-20}$ excitaria um modo normal de vibração da barra, cuja energia de oscilação seria de 10^{-20} J, e a amplitude de oscilação da barra seria de 10^{-15} m. Além do detector pioneiro de Webber, há outros detectores que utilizam barras ressonantes, como por exemplo Allegro, Nautilus e Auriga. Dos detectores de massa ressonante que utilizam esferas, podem ser citados o detector Mario Schenberg no Brasil e o miniGRAIL na Holanda.

Existem outros tipos de detectores, como os interferométricos, cujo princípio de funcionamento é a interferometria a *laser*. Esses detectores, ao contrário dos de massa ressonante, possuem larga faixa de freqüência. O primeiro protótipo foi testado em 1972 com uma sensibilidade r.m.s. de $h \simeq 10^{-14}$ para uma faixa de $\nu \simeq 1 - 10$ kHz.

Esse tipo de detector consiste basicamente em um interferômetro semelhante ao de Michelson-Morley: uma fonte dispara um feixe de *laser* em direção a um espelho semi-refletor, do qual emergem dois raios perpendiculares, que viajam por dois braços e são refletidos por dois espelhos colocados nas extremidades desses braços. Esses raios são então captados por fotodiodos e somados. Uma onda gravitacional que altere o comprimento de um dos braços, ou ambos, causará uma variação no padrão de interferência dos raios. Para estes detectores, existe uma limitação: em baixas freqüências ($\nu \leq 1$ Hz), é praticamente impossível isolar o detector das vibrações parasitas, e a única solução é montá-los no espaço.

Uma característica importante dos detectores é a utilização de dois ou mais instrumentos colocados em locais diferentes e geralmente distantes entre si, porque além de aumentar a sensibilidade na detecção, fornecem meios de se deduzir se um dado sinal provém de uma fonte real, através da comparação entre os dados de cada detector.

Aqui serão considerados quatro detectores: LIGO, LISA, BBO e DECIGO. Todos são interferométricos e apenas o LIGO é terrestre; os outros são projetados para funcionarem no espaço.

Mais detalhes sobre detecção podem ser encontrados em [D'Inverno \(1992\)](#) e [Schutz \(1990\)](#).

2.4.1 Características Básicas do Detector LIGO

O detector LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) tem como finalidade detectar ondas gravitacionais de origem cosmológica e astrofísicas em geral, tais como sistemas binários compactos e colapso de estrelas com formação de buracos-negros. Este detector é formado por dois observatórios operando em sintonia: um situado em Livingston, Louisiana e outro localizado na reserva de Hanford, situada perto de Richland,

Washington, a 3.002 quilômetros de distância do primeiro observatório. A finalidade de se ter dois sistemas distantes operando em conjunto é que se pode determinar a posição da fonte de ondas no céu através de triangulação e medida do tempo de atraso entre as detecções realizadas pelos dois observatórios. A utilização de dois detectores operando em conjunto também é necessária pelo fato de as ondas terem amplitude muito pequena para que um detector apenas possa detectar. Além disso, um par de detectores correlacionados apresenta maior confiabilidade, já que se pode comparar as observações de ambos e analisar as coincidências. Assim, mesmo que a amplitude do sinal detectado seja muito baixa e o ruído seja alto, através da análise das coincidências pode-se distinguir um sinal proveniente de uma fonte real.

Cada observatório LIGO possui uma câmara de alto vácuo em forma de L , medindo 4 quilômetros em cada braço. Dentro dessa câmara está instalado o interferômetro, semelhante ao interferômetro de Michelson-Morley: há espelhos em cada extremidade da câmara, um feixe de *laser* com 10 Watts de potência viaja através de um colimador antes de passar por um espelho semi-refletor localizado no vértice da câmara. O feixe então se divide em dois, cada um viajando através de um braço do sistema. Cada braço contém cavidades do tipo Fabry-Perot que aprisionam os raios e aumentam sua distância percorrida.

Quando uma onda gravitacional passa através do interferômetro, o espaço-tempo local é deformado. Dependendo da fonte e da polarização, o resultado é uma mudança efetiva no comprimento de uma ou ambas cavidades. Esta mudança afasta ligeiramente a cavidade da ressonância, e a luz ali aprisionada fica levemente fora de fase em relação à luz incidente na cavidade. Esta diferença de fase é detectada por sistemas eletrônicos, que interpretam os sinais e fornecem dados sobre a radiação gravitacional incidente. Segue uma imagem exibindo um dos detectores:



Figura 2.1 - Um dos detectores LIGO

Para uma descrição do LIGO, pode-se consultar [Thorne \(2007\)](#).

2.4.2 Características Básicas do Detector LISA

O detector LISA é projetado para detectar ondas gravitacionais através de interferometria a LASER. O LISA será formado por três satélites, arranjados de tal maneira que formem os vértices de um triângulo equilátero, cujos lados medirão 5 milhões de quilômetros. Segue uma imagem com a concepção artística do LISA.

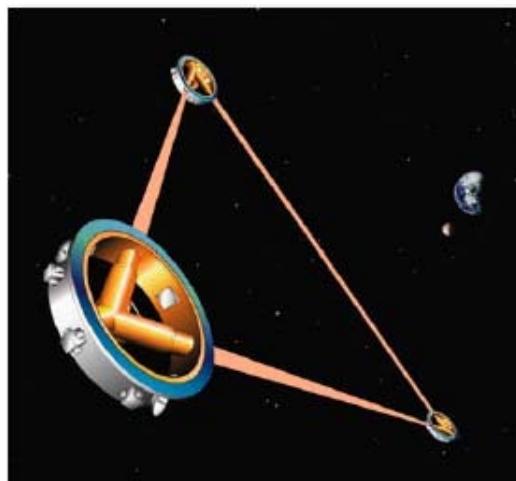


Figura 2.2 - Concepção artística do LISA

Cada satélite emitirá e receberá feixes de *laser*, de forma que todo o sistema se comportará como um interferômetro de Michelson-Morley. Quando uma onda gravitacional perturba o espaço-tempo entre dois dos satélites, pequenas diferenças nos comprimentos relativos entre os braços podem ser medidos.

O LISA será adequado para a detecção de radiação gravitacional em baixas freqüências, mais especificamente na faixa entre 0,1 e 100 mHz, faixa em que os sistemas binários compactos podem apresentar emissões. Para mais detalhes, indica-se [Cornish e Porter \(2007\)](#).

2.4.3 Características Básicas do Detector DECIGO

DECIGO é o futuro detector espacial japonês de ondas gravitacionais. O princípio de funcionamento, semelhante ao LISA, consistirá em três satélites configurados de modo que formem os vértices de um triângulo equilátero de 1000 quilômetros de lado, conforme a figura a seguir:

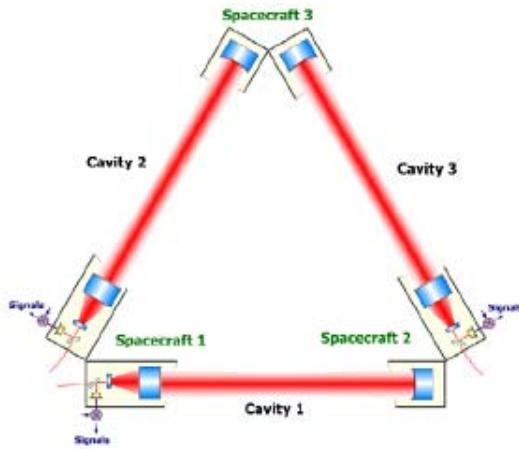


Figura 2.3 - Esquema básico do DECIGO

Os deslocamentos relativos entre os satélites serão medidos através de interferômetros de Fabry-Perrot Michelson. A sensibilidade maior do detector estará na faixa entre 0,1 e 10 Hz, porém este se destinará a detectar radiação na faixa entre 1 mHz e 100 Hz, o que faz com que seja especialmente apropriado para a detecção de sistemas binários coalescentes formados por buracos-negros de massas intermediárias. Este detector possui dimensões bem menores do que as do LISA, e isso é obtido fazendo os feixes de *laser* sofrerem várias reflexões nos interferômetros, tornando os comprimentos efetivos grandes. Porém isso exige *lasers* de potência bem mais elevada do que os utilizados no LISA. Para mais detalhes, indica-se [Kawamura \(2006\)](#).

2.4.4 Características Básicas do Detector BBO

O *Big Bang Observer* (BBO) será um sucessor do LISA. O principal objetivo do detector será a observação de ondas gravitacionais provenientes da época imdiatamente após o *big bang*, mas também poderá ser utilizado para detectar fontes mais jovens de radiação gravitacional, como sistemas binários. A alta sensibilidade do BBO será obtida a partir de *lasers* de alta intensidade, e da correlação entre vários interferômetros ao redor do Sol. A faixa de maior sensibilidade do BBO será de 0,1 a 10Hz. Basicamente, o design do detector BBO é uma união de quatro detectores como o LISA, isto é, cada detector é composto por três satélites arranjados na forma de um triângulo equilátero. Dois dos detectores ficarão sobrepostos, formando uma estrela de Davi, conforme figura a seguir. A principal diferença entre os interferômetros do BBO e do LISA é o fato de o primeiro

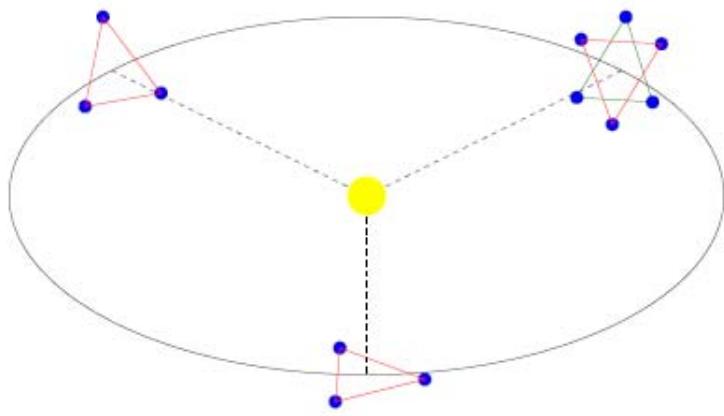


Figura 2.4 - Esquema básico do BBO

utilizar *lasers* com potência muito mais elevada. Além disso, cada triângulo formado pelos satélites será menor que os triângulos do LISA. Segue a ilustração mostrando o esquema básico do detector.

Para mais detalhes, vide [Crowder e Cornish\(2005\)](#).

3 CÁLCULO DO FUNDO

Para o desenvolvimento do cálculo do fundo, é necessário que se conheçam características populacionais dos sistemas, como distribuição de massas, distribuição de separações, freqüências máximas e mínimas e taxa de formação de sistemas. Portanto, este capítulo começa com uma descrição das funções distribuição a serem utilizadas.

Primeiramente a distribuição para as massas, onde é adotada a de Salpeter, seguida pela distribuição inicial de separações. A distribuição de separações é particularmente interessante para o trabalho, porque contém uma das idéias centrais do projeto: a evolução temporal dos sistemas. Na verdade, o que se faz é converter a distribuição inicial de separações em distribuição de freqüências de emissão de ondas a partir da terceira lei de Kepler, para então se aplicar a lei de evolução temporal para estas freqüências. Além disso, o elemento de volume comóvel necessário para o cálculo do fundo é descrito.

O próximo tópico abordado é a taxa de formação inicial de sistemas binários, a qual foi deduzida a partir da taxa de formação de estrelas individuais. Além disso, são deduzidas as separações máxima e mínima dos sistemas.

É mostrado como as distribuições, o elemento de volume e a taxa de formação inicial são utilizados no cálculo do fundo. Este tópico começa com a exposição do cálculo do fluxo em ondas gravitacionais para uma fonte, sendo então deduzida a expressão para o cálculo do fundo. Porém, do ponto de vista experimental, ou seja, para comparação com as curvas de sensibilidade dos detectores, as grandezas mais interessantes são a amplitude adimensional, o parâmetro de densidade de energia e a densidade espectral. Todas elas podem ser derivadas da expressão para o fluxo, e este capítulo mostra como isso é realizado, além de ser exibida uma tentativa de se calcular o fundo para sistemas em fases de evolução rápida, ou em fase “*chirp*”. Essa tentativa de uma nova abordagem para o cálculo do fundo torna-se necessária em regimes de alta freqüência porque, conforme explicado, os sistemas já se encontram em rápida evolução, e a análise anterior, que supõe perfis de emissão basicamente constantes, deixa de ser precisa.

3.1 Funções Distribuição

Esta seção apresenta as funções distribuição que serão necessárias para o cálculo do fundo e apresenta também o elemento de volume.

3.1.1 Distribuição de Massas

No capítulo 2 foi mostrado como calcular o espectro de energia para fontes isoladas, porém o objetivo do trabalho é a determinação de fundos estocásticos, que são a soma da radiação

emitida por toda uma população de fontes. O primeiro passo para a realização dessa soma será a determinação das diversas funções distribuição referentes às populações de binárias. A distribuição inicial das massas utilizada é a lei de potência de Salpeter, cuja definição pode ser encontrada em [Salpeter \(1955\)](#), cuja normalização é:

$$\int_{m_{MIN}}^{m_{MAX}} m\phi(m)dm = 1 \quad (3.1)$$

onde

$$\phi(m) = Am^{-(1+x)} \quad (3.2)$$

com

$$x = 1, 35 \quad (3.3)$$

Os limites de integração seguirão [Araujo et al. \(2000\)](#), onde:

$$m_{MAX} = 125M_{\odot} \text{ e } m_{MIN} = 0,1M_{\odot} \quad (3.4)$$

A constante deve ser escolhida de forma que se verifique a equação 3.1. Este valor, dado em unidade de massa solar (M_{\odot}), é:

$$A = 0,17(M_{\odot})^{0,35} \quad (3.5)$$

É importante ressaltar que ao se adotar uma função de massas como a de Salpeter, estamos considerando a formação das primeiras estrelas de população II.

Serão utilizadas simultaneamente duas distribuições idênticas, uma para cada massa do sistema, em que cada massa será descrita como m_1 e m_2 . Além disso, as massas m_1 e m_2 serão tratadas como variáveis independentes, já que duas estrelas de massas arbitrárias podem se ligar gravitacionalmente e formar um sistema binário, ou seja, a probabilidade de uma estrela do sistema possuir uma companheira de massa m_2 não dependerá de sua massa m_1 . Dessa forma, tem-se:

$$dn(m_1, m_2) = m_1 m_2 \phi(m_1) \phi(m_2) dm_1 dm_2 \quad (3.6)$$

onde $dn(m_1, m_2)$ é a fração de sistemas com massas entre dm_1 e dm_2 .

3.1.2 Distribuição de Separações

Neste trabalho as excentricidades das órbitas serão desprezadas, ou seja, todos as órbitas serão consideradas circulares, onde a distância entre os componentes do sistema é

constante. A distribuição inicial de separações utilizada seguirá Nakamura et al. (1997):

$$f(r)dr = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{3/4} - \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{3/2} \right] \frac{dr}{r} \quad (3.7)$$

A expressão acima foi deduzida considerando-se que as estrelas nasceram em halos, cujas dimensões típicas são representadas como \bar{r} . Mais detalhes sobre os halos serão fornecidos na seção 3.2.2. Dessa forma, \bar{r} na expressão acima representa a máxima separação que duas estrelas podem ter entre si. Entretanto, para o cálculo do fundo é conveniente substituir a variável de separação r pela freqüência da radiação gravitacional emitida ν_{GW} . Isso é facilmente obtido com auxílio da terceira lei de Kepler, que para um sistema binário pode ser escrita como:

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \quad (3.8)$$

onde ω é a freqüência angular de rotação do sistema e m_1 e m_2 são as massas dos objetos do sistema.

Considerando que

$$\omega = 2\pi\nu \quad (3.9)$$

e

$$\nu_{GW} = 2\nu \quad (3.10)$$

o que é uma característica básica da radiação de quadrupolo: freqüência das ondas emitidas é o dobro da freqüência de rotação do sistema.

Agora, obtém-se imediatamente

$$\nu_{GW}^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3\pi^2} \quad (3.11)$$

cuja derivada em relação a separação é:

$$\frac{d\nu_{GW}}{dr} = -\frac{3\nu_{GW}}{2r} \quad (3.12)$$

Além disso, pode-se deduzir uma relação diferencial entre $f(\nu_{GW})$ e $f(r)$ observando-se a expressão da terceira lei de Kepler e notando que variações positivas de r produzem variações negativas em ν_{GW} . Isso expresso através de diferenciais fica:

$$f(r)dr = -f(\nu_{GW})d\nu_{GW} \quad (3.13)$$

Relacionando-se 3.12 e 3.13, tem-se

$$f(\nu_{GW}) = \frac{2r}{3\nu_{GW}} f(r) \quad (3.14)$$

Substituindo $f(\nu)$ na expressão acima, tem-se:

$$f(\nu_{GW}) = \left[\left(\frac{r}{\bar{r}} \right)^{3/4} - \left(\frac{r}{\bar{r}} \right)^{3/2} \right] \frac{1}{\nu_{GW}} \quad (3.15)$$

Fazendo

$$r^3 = \frac{GM}{\pi^2 \nu_{GW}^2} \quad (3.16)$$

e

$$\bar{r}^3 = \frac{GM}{\pi^2 \bar{\nu}_{GW}^2} \quad (3.17)$$

e sustituindo na expressão para a distribuição fica-se com

$$f(\nu_{GW}) = \left[\left(\frac{\bar{\nu}_{GW}}{\nu_{GW}} \right)^{1/2} - \frac{\bar{\nu}_{GW}}{\nu_{GW}} \right] \frac{1}{\nu_{GW}} \quad (3.18)$$

A distribuição de separações varia em função do tempo, já que os sistemas binários emitem radiação gravitacional e os dois componentes do sistema se aproximam. Portanto, as grandezas que aparecem na distribuição variarão no tempo:

$$\nu_{GW}(t) = \frac{1}{\pi} \left[(\pi \nu_{GW}^0)^{-8/3} - \frac{8}{3} K(t - t_0) \right]^{-3/8} \quad (3.19)$$

e

$$\bar{\nu}_{GW} = \left[\frac{G(m_1 + m_2)}{\pi^2 \bar{r}^3} \right]^{1/2} \quad (3.20)$$

onde \bar{r} é a distância máxima característica do sistema, a qual será explicada em detalhes na seção 3.2.2 e K é uma constante dada por

$$K = \frac{96m_1m_2}{5c^5(m_1 + m_2)^{1/3}} G^{5/3} \quad (3.21)$$

Interpretando-se a freqüência da função inicial como a freqüência inicial, pode-se colocar em evidência ν_{GW}^0 e substituir em $f(\nu_{GW}^0)$:

$$\nu_{GW}^0 = \frac{1}{\pi} \left[(\pi \nu_{GW})^{-8/3} + \frac{8}{3} K(t - t_0) \right]^{-3/8} \quad (3.22)$$

Substituindo em $f(\nu_{GW}^0)$, tem-se uma nova distribuição, que por simplicidade pode-se simbolizar por $f(\nu_{GW}, t - t_0)$.

Mas há várias gerações de sistemas, cada uma nascendo em um dado instante inicial t_0 . Portanto, para obtermos a fração total de sistemas em dado instante t devemos somar (integrar) todas as funções $f(\nu_{GW}, t - t_0)$, tomando-se como variável de integração o instante de criação do sistema t_0 . Para isso, é adequado definir uma nova função tal que

$$dn = g(\nu_{GW}, t - t_0)dt_0 \quad (3.23)$$

represente a fração de sistemas que surgiram no intervalo dt_0 .

Isso pode ser obtido facilmente através de mudança de variáveis na função $f(\nu_{GW}, t - t_0)$:

$$\begin{aligned} f(\nu_{GW}, t - t_0)d\nu_{GW} &= f(\nu_{GW}, t - t_0) \frac{d\nu_{GW}}{dt_0} dt_0 \\ g(\nu_{GW}, t - t_0) &= f(\nu_{GW}, t - t_0) \frac{d\nu_{GW}}{dt_0} \end{aligned} \quad (3.24)$$

com

$$\frac{d\nu_{GW}}{dt_0} = \frac{-k}{\pi} \left[(\pi\nu_{GW}^0)^{-8/3} - \frac{8}{3}K(t - t_0) \right]^{-11/8}$$

ou

$$\frac{d\nu_{GW}}{dt_0} = -\pi^{8/3} K \nu_{GW}^{11/3} \quad (3.25)$$

portanto, a distribuição em termos da nova variável t_o fica:

$$g(t_o) = -\pi^{8/3} K (\overline{\nu_{GW}}^{1/2} (\nu_{GW}^0)^{13/6} - \overline{\nu_{GW}} (\nu_{GW}^0)^{5/3}) \quad (3.26)$$

onde

$$\nu_{GW}^0 = \frac{1}{\pi} \left[(\pi\nu_{GW})^{-8/3} + \frac{8}{3}K(t - t_o) \right]^{-3/8} \quad (3.27)$$

Mas deve-se levar em consideração a taxa de formação, que em geral é diferente para cada t_0 . Uma maneira direta de se acrescentar a taxa de formação é multiplicando-se a função $g(\nu_{GW}, t - t_0)$ por $N(t_0)$, que é o número de sistemas binários gerados por unidade de volume e unidade de tempo, para então integrar em t_0 .

Assim, tem-se a integral que representa o número total de sistemas com freqüência ν_{GW} no instante t :

$$I(\nu_{GW}, t) = \int_{t_{inicial}}^t N(t_0)g(\nu_{GW}, t - t_0)dt_0 \quad (3.28)$$

A integral acima deve ser calculada tomando-se como limites de integração $t_{inicial}$, que é o instante de surgimento da geração mais antiga e t , que é o instante de nascimento da última população que contribui para o cálculo do espectro. Por exemplo, se se quer calcular o número de sistemas que contribuem para o fundo no *redshift* igual a 8, deve-se

integrar do instante correspondente ao *redshift* igual a 20 até o instante correspondente ao *redshift* 8. Dessa maneira, o limite superior de integração é a própria variável t . A utilização do valor *redshift* igual a 20 como limite máximo ficará clara na seção 3.2.3.

Como a taxa de formação $N(t_0)$ é definida por unidade de tempo e volume, deve-se integrar a distribuição $I(\nu_{GW}, t)$ sobre o elemento de volume para que se tenha o número total de fontes na região considerada. Porém o elemento de volume, graças à expansão do Universo, é função do *redshift*. Assim, o elemento de volume dV pode ser colocado em função de z , de acordo com a regra da cadeia:

$$dV = \frac{dV}{dz} dz \quad (3.29)$$

A relação entre o elemento de volume e o *redshift* que será utilizada para o cálculo do fundo é fornecida a seguir:

$$\frac{dV}{dz} = 4\pi \left(\frac{c}{H_0} \right) r_z^2 F(\Omega_M, \Omega_\Lambda, z) \quad (3.30)$$

com

$$F(\Omega_M, \Omega_\Lambda, z) = \frac{1}{\sqrt{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - z(2+z)\Omega_\Lambda}} \quad (3.31)$$

e a distância comóvel dada por

$$r_z = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} S \left[\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz'}{F(\Omega_M, \Omega_\Lambda, z')} \right] \quad (3.32)$$

sendo estas expressões deduzidas em [Padmanabhan \(1993\)](#).

Os parâmetros de densidade presentes nas equações acima relacionam-se da seguinte maneira:

$$\Omega_M = \Omega_{DM} + \Omega_B \quad \text{e} \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (3.33)$$

estas relações envolvem os parâmetros de densidade para a matéria (M), ou seja, matéria escura (DM) mais matéria bariônica (B), curvatura (k) e constante cosmológica (Λ). A função S é definida por:

$$S(x) = \begin{cases} \sin x & \text{fechado} \\ x & \text{plano} \\ \sinh x & \text{aberto} \end{cases}$$

Estas relações são válidas em um cenário onde o universo é crítico ($\Omega_0 = 1$), sendo H_0 o valor atual da constante de Hubble e os termos “fechado”, “plano” e “aberto” referindo-se ao modelo de universo adotado.

Na verdade, uma característica fundamental dos cálculos de fundos é o fato de não serem fortemente dependentes da cosmologia adotada. Se se utilizar um elemento de volume

simplificado, considerando-se por exemplo $\Omega_\Lambda = 0$ e $\Omega_M = 1$, os resultados não se alterariam significativamente. Finalmente, acrescentando-se as distribuições de Salpeter e a derivada $\frac{dV}{dz}$ a $I(\nu_{GW}, t)$ fica-se com:

$$n(m_1, m_2, v) = I(v, t)m_1m_2\phi(m_1)\phi(m_2)\frac{dV}{dz} \quad (3.34)$$

que representa o número de sistemas com massa m_1 em dm_1 , massa m_2 em dm_2 e com *redshift* em dz .

3.2 Taxa de Formação Inicial de Estrelas e Dimensões Máxima e Mínima dos Sistemas

3.2.1 Separação Mínima

Neste trabalho, está-se considerando o estágio inicial dos sistemas binários, caracterizada pela emissão aproximadamente constante em amplitude e freqüência de radiação gravitacional. Para este caso, a abordagem pós-newtoniana fornece descrição satisfatória. De acordo com [Mikoczi \(2006\)](#), esta descrição é válida até que o sistema atinja a separação igual à ISCO (órbita circular estável mais interna), ou seja, a máxima aproximação entre os dois componentes do sistema tal que ainda se tenha órbitas estáveis. O limiar ISCO não é definido com precisão, e [Mikoczi \(2006\)](#) considera que sistemas NS-NS emitam radiação gravitacional de freqüência na faixa de 800 a 1230Hz quando as duas estrelas se encontram justamente no limiar ISCO. Porém, [Oechslin et al. \(2004\)](#) considera tal freqüência no valor de 900Hz. Utilizando a terceira lei de Kepler e lembrando que neste trabalho as estrelas de nêutrons são consideradas como tendo massas de $1,4M_\odot$, pode-se calcular o valor de ISCO:

$$r = \left[\frac{G(m_1 + m_2)}{\pi^2 \nu_{GW}^2} \right]^{1/3} \quad (3.35)$$

utilizando-se G em unidades de $M_\odot^{-1} Mpc^3 t_9^{-2}$, m_1 e m_2 iguais a $1,4M_\odot$ e a freqüência em unidade de t_9^{-1} , onde t_9 é a unidade de tempo utilizada e que vale 10^9 anos, obtém-se para o valor da ISCO:

$$r = 35,95 \text{ km} \quad (3.36)$$

Para sistemas tipo BH-BH, considera-se como separação mínima a última órbita estável para um buraco-negro de Schwarzschild, sendo que no caso de um sistema binário é considerada a ISCO do objeto de maior massa. A expressão que fornece o raio da ISCO é

mostrada a seguir:

$$r_{ISCO} = 3r_{sch} \quad , \text{ ou} \quad r_{ISCO} = \frac{6GM}{c^2} \quad (3.37)$$

onde M representa a massa do buraco-negro e r_{sch} o raio de Schwarzschild.

É necessário mencionar que a massa dos buracos-negros é obtida a partir da massa das estrelas originais através da expressão:

$$M_{BH} = \frac{13}{24}(M_\star - 20M_\odot) \quad (3.38)$$

sendo M_\star a massa da estrela que origina o buraco-negro. Esta expressão pode ser encontrada em [Heger e Woosley \(2002\)](#).

Para sistemas NS-BH, a separação mínima do sistema será definida como o raio de ISCO do buraco-negro. Neste caso imagina-se a estrela de nêutrons como um objeto orbitando o buraco-negro.

As freqüências máximas podem ser obtidas de forma direta através da terceira lei de Kepler se se conhecem as separações mínimas.

3.2.2 Separação Máxima

De acordo com o cenário de matéria escura fria para a formação de galáxias, as estruturas observadas no universo, incluindo as próprias galáxias, são formadas seguindo o modelo hierárquico, que descreve como estruturas menores unem-se umas às outras para formarem estruturas maiores. Assim, inicialmente são formados halos de matéria escura, que então formam galáxias, aglomerados, e assim por diante. Como a formação de galáxias ocorreu muito tempo após o surgimento das primeiras estrelas, durante uma grande parte do período considerado entre a reionização (que aqui foi considerada ocorrendo no *redshift* $z = 20$) e a época atual, o universo foi povoado basicamente pelos halos de matéria escura. Acredita-se que as primeiras estrelas se formaram nesses halos, os quais por sua vez se formaram da fusão de estruturas menores. Tais halos consistem, de acordo com [Spolyar et al. \(2008\)](#), em 85% de matéria escura e 15% de matéria bariônica na forma de hidrogênio e hélio, formados na nucleossíntese do *big bang*.

Para uma descrição analítica do processo de formação de estruturas, existe o formalismo desenvolvido por Press e Schechter em 1974. Esse formalismo descreve, por exemplo, a distribuição de massas dos halos. No entanto, no presente trabalho, eles serão tratados como tendo todos a mesma massa, que será considerada como sendo de 10^6 , 10^8 e 10^{10} massas solares. Além disso, como se está considerando que todas as estrelas em uma dada população sejam integrantes de sistemas binários, é razoável supor que a máxima separação possível, ainda que pouco provável, seja dada pela dimensão desses halos.

O cálculo das dimensões desses halos pode ser realizado considerando-se que eles se formam

com as massas típicas dadas acima, e possuam densidade aproximadamente igual à do Universo. Como o Universo está em expansão, a densidade de uma dada região tende a decrescer com o tempo, desde que se considere constante a massa contida nessa região. Portanto, para se determinar o raio típico das ilhas e sua variação em função do tempo (ou *redshift*) deve-se determinar a expressão para a densidade, e como esta varia. Será considerado o Universo como tendo densidade crítica ($\Omega_0 = 1$). De acordo com Souza (2004), a densidade de uma região do Universo neste caso fica:

$$\rho_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (3.39)$$

onde $H(t)$ é a constante de Hubble.

Além disso, a constante de Hubble está relacionada ao fator de escala R e ao *redshift* z através das expressões:

$$H(t) = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} \quad (3.40)$$

e

$$\frac{1}{R} = 1 + z \quad (3.41)$$

No caso presente, é mais conveniente definir uma nova variável no lugar de z , variável que será utilizada daqui por diante nos cálculos do espectro:

$$t_9 = 13(1+z)^{-\frac{3}{2}} \quad (3.42)$$

Esta variável corresponde à idade do Universo em giga-anos.

Combinando-se as três últimas expressões acima, tem-se a expressão do parâmetro de Hubble:

$$H(t) = \frac{2}{3t} \quad (3.43)$$

substituindo-se na expressão para a densidade do Universo, fica-se com:

$$\rho_c(t) = \frac{1}{6\pi G t^2} \quad (3.44)$$

Conhecida a densidade e a massa da região considerada, pode-se considerar a ilha como esférica e obter seu raio de maneira direta, através da definição de densidade:

$$\rho = \frac{M}{\Delta V} \quad (3.45)$$

sendo

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (3.46)$$

Substituindo-se a expressão para a densidade e resolvendo para r , chega-se a:

$$r = \left(\frac{9MG}{2} \right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \quad (3.47)$$

Este é o \bar{r} da equação 3.7.

3.2.3 Taxa de Formação Inicial de Estrelas

A taxa de formação inicial a ser utilizada seguirá Springel e Hernquist (2003) , sendo dada por:

$$\rho_* = \rho_m \frac{\beta e^{\alpha(z-z_m)}}{\beta - \alpha + \alpha e^{\beta(z-z_m)}} \quad (3.48)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{5} \\ \beta &= \frac{14}{15} \\ z_m &= 5,4 \\ \rho_m &= 0,15 M_{\odot} \text{ano}^{-1} \text{Mpc}^{-3} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Esta função, quando traçada em função do *redshift*, possui a forma dada pela figura 3.1. Os autores do artigo citado derivaram esta expressão através de simulações hidrodinâmicas de formação de estruturas em uma cosmologia de matéria escura fria e com constante cosmológica. A expressão derivada descreve a história da formação estelar desde a era escura, ou *dark age*, no *redshift* $z \sim 20$ até o presente. O modelo utilizado considera o aquecimento e o resfriamento radiativo de gás, formação estelar e ventos galácticos, ao invés de se considerar somente a gravitação e a hidrodinâmica. Além disso, foram considerados os $\Omega_M = 0,3$ e $\Omega_\Lambda = 0,7$ como valores para os parâmetros de densidade bariônica e de constante cosmológica, respectivamente.

A expressão deduzida apresenta-se em função apenas do *redshift* e, a partir do valor inicial, cresce até seu valor máximo em $z \sim 5 - 6$, onde o valor da taxa de formação é cerca de dez vezes maior do que o valor atual (em $z = 0$). A partir daí a taxa decresce até o *redshift* $z \sim 20$. O modelo é válido para uma larga faixa de massas de halo, abrangendo de 10^8 a $10^{10} h^{-1} M_{\odot}$.

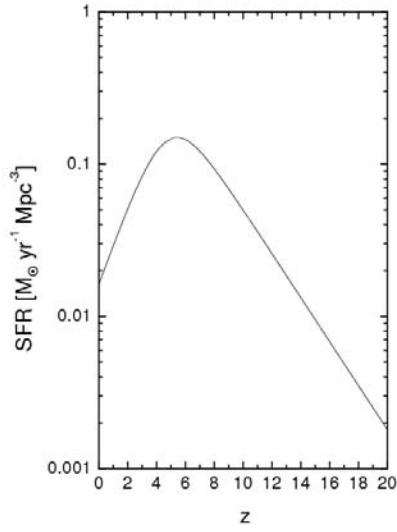


Figura 3.1 - Taxa de formação de estrelas em função de z

Nesse modelo, cerca de 50 por cento das estrelas se formaram até o *redshift* $z \sim 2,14$, sendo portanto mais velhas do que 10,4 Gano, enquanto apenas cerca de 25 por cento se formaram em *redshifts* menores do que $z \sim 1$. Em $z = 0$, o parâmetro em densidade em estrelas estimado é de $\Omega_* = 0,004$, o que corresponde a 10 por cento de todos os bárions presentes em estrelas de vida longa, o que concorda com determinações da densidade de luminosidade do Universo.

Entretanto, a expressão acima fornece a taxa de formação em massas solares por volume e por tempo, e é conveniente obter-se a taxa de formação dada em número de estrelas por volume e por tempo.

Isto pode ser feito com auxílio da função de massa inicial de Salpeter:

$$n(z) = \rho_*(z) \left[\frac{\int_{0,1}^{125} \phi(m) dm}{\int_{0,1}^{125} m \phi(m) dm} \right] \quad (3.50)$$

Essa expressão pode ser encontrada em [Madau et al. \(1998\)](#).

3.2.4 Taxa de Formação de Sistemas Binários

Dada a taxa de formação de estrelas dada pela equação 3.50, pode-se determinar a taxa de formação de sistemas binários supondo-se que todas as estrelas formadas a cada momento

sejam componentes de sistemas binários. Dessa maneira, tem-se:

$$n_{BIN}(z) = \frac{1}{2}n(z) \quad (3.51)$$

Porém esta taxa se refere ao número total de sistemas binários formados, não os classificando por valores de massa inicial, e neste trabalho apenas sistemas formados por estrelas de nêutrons e buracos negros serão considerados.

Assim, é necessário extrair da taxa de formação total apenas as frações de sistemas que originem duplas do tipo: estrela de nêutron-estrela de nêutron, buraco negro-buraco negro ou estrela de nêutron-buraco negro, que por simplicidade serão citados daqui por diante como NS-NS, BH-BH e NS-BH, respectivamente. Estrelas com massas iniciais entre 8 massas solares e 25 massas solares (detalhes no tópico seguinte) gerarão estrelas de nêutrons no estágio final da evolução. Pode-se então utilizar a função de massa inicial de Salpeter para estimar a fração de sistemas do tipo NS-NS:

$$n_{NS-NS}(z) = n_{BIN}(z) \int_8^{25} m_1 \phi(m_1) dm_1 \int_8^{25} m_2 \phi(m_2) dm_2 \quad (3.52)$$

Há controvérsias a respeito do valor limite de massa inicial que uma estrela deve ter para dar origem a um buraco-negro. Os valores podem variar entre 25 e 45 massas solares, geralmente. Entretanto neste trabalho será utilizado o valor de 25 massas solares, o que concorda com o valor do limite superior de massa inicial para geração de estrelas de nêutrons utilizado no tópico acima.

Como se está considerando 125 massas solares como limite máximo para o valor da massa inicial de uma estrela, a expressão para a taxa de formação de sistemas BH-BH fica:

$$n_{BH-BH}(z) = n_{BIN}(z) \int_{25}^{125} m_1 \phi(m_1) dm_1 \int_{25}^{125} m_2 \phi(m_2) dm_2 \quad (3.53)$$

Para sistemas BH-NS, segue-se o mesmo raciocínio anterior, porém agora a fração resultante deverá ser multiplicada por dois, já que se está considerando sistemas NS-BH e BH-NS:

$$n_{BH-NS}(z) = 2n_{BIN}(z) \int_8^{25} m_1 \phi(m_1) dm_1 \int_{25}^{125} m_2 \phi(m_2) dm_2 \quad (3.54)$$

3.3 Fundos de Ondas Gravitacionais das Binárias Compactas

Qualitativamente, o fundo é formado pela soma da radiação emitida por todos os sistemas binários, e dependerá das características intrínsecas de cada sistema (separação, massas e elipticidade da órbita) e das características populacionais dos mesmos (taxas de formação,

distribuição de separações, distribuição de massas e *redshift*).

Graças à Relatividade Geral as características intrínsecas são conhecidas precisamente para cada sistema, pelo menos na aproximação de quadrupolo. Já as características populacionais são abordadas apenas estatisticamente através de funções distribuição, o que confere ao fundo o caráter estocástico.

Quantitativamente, o fundo é calculado como a soma do fluxo de energia de todas as fontes da população considerada, levando-se em consideração as características populacionais e intrínsecas. O fluxo de energia emitido por uma fonte que se situa a uma distância cosmológica (*redshift* não pode ser desprezado), é dado, de acordo com [Schneider et al. \(2001\)](#):

$$f(\nu_{GW}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dE}{d\Sigma d\nu_{GW}}(\nu_{GW}) d\Omega \quad (3.55)$$

ou

$$f(\nu_{GW}) = \frac{(1+z)^2}{4\pi d_L(z)^2} \frac{dE_e}{d\nu_{GW}}[\nu_{obs}(1+z)] \quad (3.56)$$

Onde $d_L(z)$ é a distância de luminosidade da fonte, $\nu_{obs} = \nu_{GW}(1+z)^{-1}$ é a freqüência observada. Nota-se que o fluxo foi calculado como uma média sobre o ângulo sólido, já que em geral o fluxo proveniente de uma fonte possui valores diferentes para cada direção observada. Para se obter o fundo multiplica-se a expressão 3.55 por 3.34 e integra-se no *redshift*, em m_1 e m_2 .

$$F(\nu_{GW}) = \int \int \int f(\nu_{GW}) n(m_1, m_2, \nu) dm_1 dm_2 dz \quad (3.57)$$

onde $F(\nu_{GW})$ representa o fluxo de energia por freqüência.

No entanto, toda a análise exposta até aqui é adequada apenas para regimes de baixa freqüência. A razão disso é evidenciada através da expressão 3.19: um sistema composto, por exemplo, por duas estrelas de nêutrons evolui de 1 a 100 Hz em cerca de 2 dias apenas. Assim, para freqüências acima de cerca de 1 Hz, os sistemas já começam a deixar a fase inicial de vida e a entrar na fase de coalescência caracterizada pela não-periodicidade e evolução rápida. Portanto, os resultados deduzidos a partir do formalismo desenvolvido até aqui serão aplicados somente para a faixa de maior sensibilidade do detector LISA, que está entre 0,1 mHz e 100 mHz. Para freqüências maiores, especialmente nas regiões de maior sensibilidade do DECIGO, BBO e LIGO, é necessária uma nova maneira de se calcular a amplitude do fundo estocástico. Na próxima seção será apresentada uma tentativa de se calcular esse fundo.

Embora o objetivo do trabalho até aqui tenha sido o cálculo do espectro como densidade espectral de energia, ou fluxo de ondas gravitacionais, e a determinação desta quantidade traga muitas informações sobre as propriedades físicas da radiação, é importante obterem-se outras quantidades referentes ao fenômeno, tais como a amplitude adimensional das

ondas (h_{BG}), a densidade de energia (Ω_{GW}) e a amplitude espectral (S_h). A razão disso é a posterior utilização deste espectro na análise dos sinais captados pelos detectores, tais como LIGO, VIRGO, etc., já que em geral seus dados de saída e limites de sensibilidade são dados em termos das grandezas citadas acima. De acordo com, por exemplo, Araujo et al. (2000) o fluxo em ondas gravitacionais pode ser dado por:

$$F_\nu = \frac{c^3 S_h \omega_o^2}{16\pi G} \quad (3.58)$$

onde a densidade espectral S_h é definida como

$$S_h = \frac{h_{BG}^2}{\nu_o} \quad (3.59)$$

e ω_o é a freqüência angular da onda observada, sendo dada por $\omega_o = 2\pi\nu_o$.

Substituindo S_h e ω_o na expressão para o fluxo, tem-se:

$$F_\nu = \frac{c^3}{16\pi G} \left(\frac{h_{BG}^2}{\nu_o} \right) (2\pi\nu_o)^2 \quad \therefore \quad (3.60)$$

$$h_{BG}^2 = \left(\frac{4G}{\pi c^3} \right) \frac{F_\nu}{\nu_o} \quad (3.61)$$

A densidade espectral também pode ser calculada através do fluxo, utilizando-se a expressão anterior:

$$S_h = \frac{4G}{\pi c^3} \frac{F_\nu}{\nu^2} \quad (3.62)$$

Ainda tomando como exemplo Araujo et al. (2000), o parâmetro de densidade de energia aparece como

$$\Omega_{GW} = \frac{\nu_o F_\nu}{c^3 \rho_c} \quad (3.63)$$

sendo ρ_c a densidade crítica do Universo. Substituindo a expressão para o fluxo dada anteriormente, fica-se com:

$$\Omega_{GW} = \frac{4\pi^2}{3H_0^2} \nu_o^2 h_{BG}^2 \quad (3.64)$$

onde H_0 é o valor atual da constante de Hubble. No caso de altas freqüências, como os sistemas evoluem rapidamente, podem ser interpretados como *bursts*, pois dado um intervalo de freqüência $\Delta\nu$, os sistemas o cruzarão rapidamente, e seu comportamento naquela faixa será o de uma fonte que surge como uma emissão impulsiva de radiação e desaparece, ou seja, uma fonte tipo *burst*. Conseqüentemente, para altas freqüências,

deve-se somar a radiação proveniente de cada sistema utilizando-se o formalismo para o cálculo do fundo gerado por fontes tipo *burst*.

Será utilizada a expressão

$$h_{BG}^2 = \frac{1}{\nu_o} \int h_{fonte}^2 dR \quad (3.65)$$

que pode ser encontrada em, por exemplo, [Araujo e Miranda \(2005\)](#), onde h_{fonte} é a amplitude adimensional produzida por um evento que gera um sinal com freqüência ν_o e dR é a razão diferencial de produção de radiação gravitacional.

No artigo citado, esta expressão é utilizada para se calcular o fundo gerado por um conjunto de fontes tipo *burst*, mais especificamente formação de buracos-negros, cada uma gerando um sinal impulsivo com freqüência ν_o e de amplitude h_{fonte} . E dR corresponde à razão diferencial de produção dos eventos que geram os sinais.

Uma característica importante dessa expressão é que não é necessário que se conheça detalhadamente o fluxo de energia em ondas gravitacionais produzido em cada freqüência. Se os valores característicos de amplitude adimensional e freqüência forem conhecidos, além da razão de ocorrência dos eventos, é possível se calcular o fundo.

No presente trabalho, a amplitude adimensional característica utilizada será, de acordo com [Thorne \(1987\)](#):

$$h_{fonte} = 4,1 \times 10^{-22} \left(\frac{\mu}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/3} \left(\frac{100 Mpc}{d_L} \right) \left(\frac{100 Hz}{\nu_{GW}} \right)^{1/6} \quad (3.66)$$

que é válida para sistemas binários em fases de rápida evolução. Na expressão acima, μ representa a massa reduzida do sistema, M representa a massa total, d_L a distância de luminosidade e ν_{GW} a freqüência de emissão das ondas gravitacionais. A taxa diferencial dR utilizada será a expressão [3.34](#) integrada sobre as massas m_1 e m_2 :

$$dR = \int \int n(m_1, m_2, v) dm_1 dm_2 = \int \int I(v, t) m_1 m_2 \phi(m_1) \phi(m_2) \frac{dV}{dz} dm_1 dm_2 \quad (3.67)$$

que representa o número total de sistemas gerados por unidade de tempo.

Deve-se admitir que a dedução acima é somente uma tentativa de se calcular o fundo gerado por sistemas em rápida coalescência, pois apesar da expressão para a amplitude ser apropriada, não há garantia de que o método de contagem de sistemas desenvolvido até aqui e que permitiu a determinação de dR continue válido em regimes de alta freqüência.

No próximo capítulo serão apresentados os resultados para os três tipos de sistemas e para os quatro detectores considerados.

4 RESULTADOS E ANÁLISE

O cálculo do fundo foi realizado para três faixas do espectro. A faixa compreendida entre 0,1 mHz e 100 mHz corresponde à região de maior sensibilidade do LISA; a faixa entre 100 mHz a 10 Hz corresponde à região de maior sensibilidade do BBO, e para o DECIGO, essa faixa está compreendida entre 1 mHz e 100 Hz.

Para o detector LIGO, além da comparação de curvas foi feito o cálculo da relação sinal-ruido. Esta relação existe para que se possa avaliar a capacidade de um detector em captar a radiação gravitacional, que depende tanto das características do detector quanto das características da radiação que se deseja detectar.

Para sistemas como LIGO, utiliza-se a expressão da relação sinal-ruido para um par de detectores interferométricos. De acordo com [Flanagan \(1993\)](#), esta expressão é dada por:

$$(S/N)^2 = \left[\left(\frac{9H_0^2}{50\pi^4} \right) T \int_0^\infty \frac{\gamma^2(\nu)\Omega_{GW}^2}{\nu^6 S_h^{(1)} S_h^{(2)}} d\nu \right] \quad (4.1)$$

onde $S_h^{(i)}$ é a densidade espectral de ruido dos detectores, T é o tempo de integração, Ω_{GW} é o parâmetro de densidade em ondas gravitacionais e $\gamma(\nu)$ é chamada de *overlap reduction function*, que depende da posição relativa e das orientações dos dois interferômetros. É interessante notar que esta equação é válida para o par de detectores. Isso deve ficar bem claro, pois as curvas de sensibilidade que serão exibidas para o LIGO são os limites de detecção para um único detector. Se a relação sinal-ruido for maior do que um para determinado espectro, significa que este pode ser detectado pelo equipamento em questão. Além disso, como se está considerando que as estrelas se formam em halos, é interessante exibir os resultados para diferentes valores das massas do halo. Foram considerados, então, três valores de massa para os halos de formação estelar: 10^6 , 10^8 e 10^{10} massas solares. Os resultados são mostrados a seguir.

4.1 Espectros Para a Faixa do LISA

A seguir são exibidos os gráficos da amplitude espectral para os sistemas NS-NS, BH-BH e BH-NS para os três valores de massa das ilhas de formação. Os gráficos serão exibidos separadamente para cada sistema. A curva de sensibilidade do LISA também é exibida para comparação. É mostrado também o fundo de ruido gerado por binárias formadas por anãs brancas galácticas, também chamado de *confusion noise*. Este ruido representa uma limitação para a detecção dos outros sinais, pois podem se superpor a estes e os mascarar completamente. Apenas se for utilizado um tempo de integração longo é que se pode captar o sinal encoberto pelo ruido. Porém o tempo de integração requerido pode ser longo a ponto de ser impraticável.

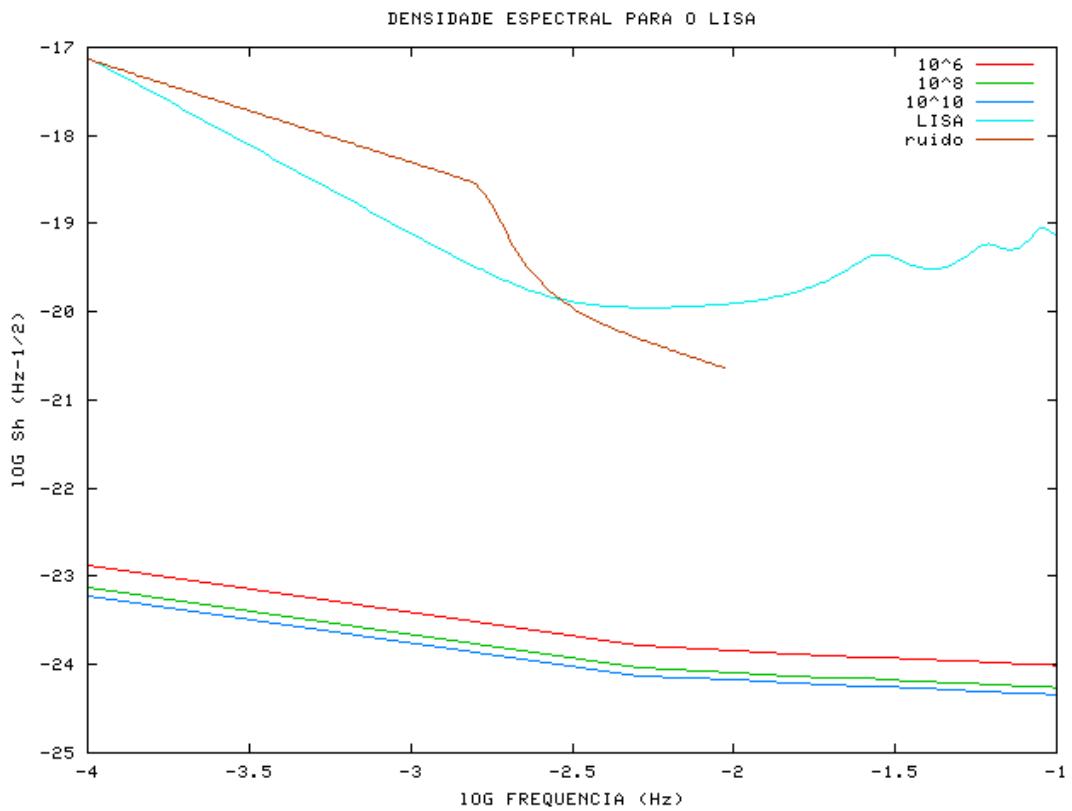


Figura 4.1 - Curva de sensibilidade do LISA e espectros de sistemas NS-NS

As curvas de sensibilidade do LISA foram extraídas de www.srl.caltech.edu/~shane/sensitivity/MakeCurve.html

Estes gráficos podem ser comparados a Schneider et al. (2001), onde há concordância entre os valores da densidade espectral para as freqüências representadas. No entanto, no artigo citado, o método de obtenção dos fundos apresenta diferenças em relação a essa dissertação: a taxa de formação de estrelas é diferente, além disso a taxa de formação de sistemas binários foi estimada através de contagem de supernovas. Também o método de contagem de sistemas foi diferente.

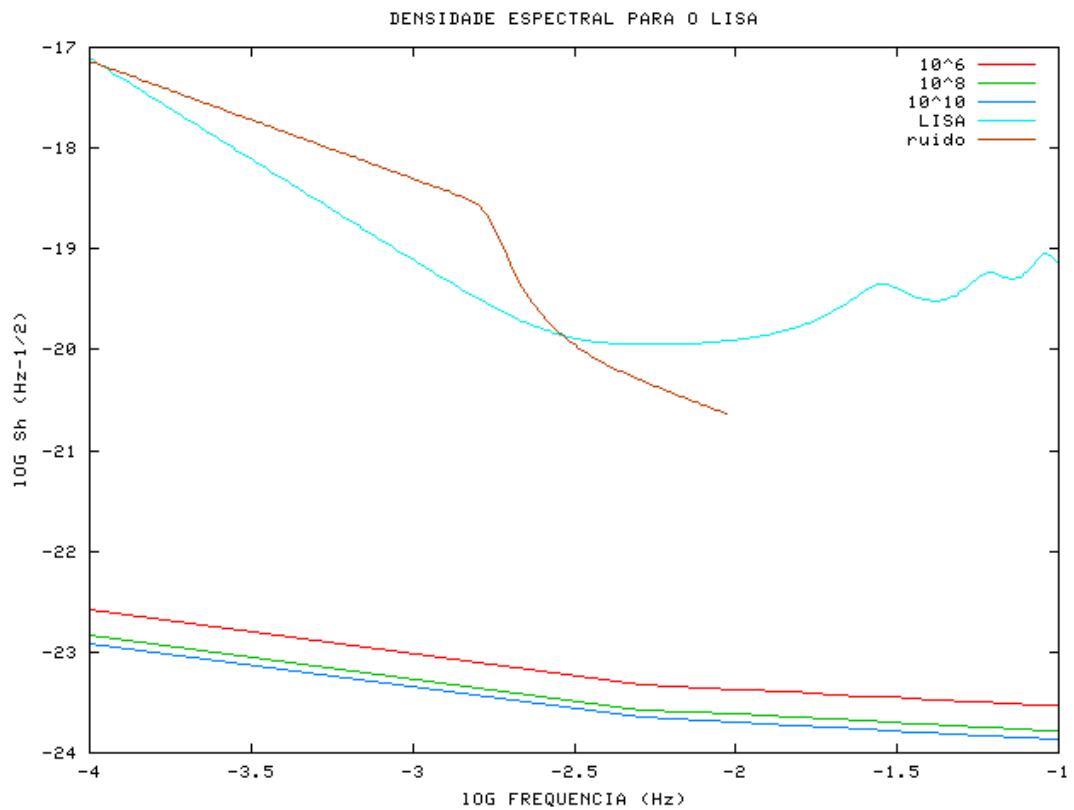


Figura 4.2 - Curva de sensibilidade do LISA e espectros de sistemas BH-NS

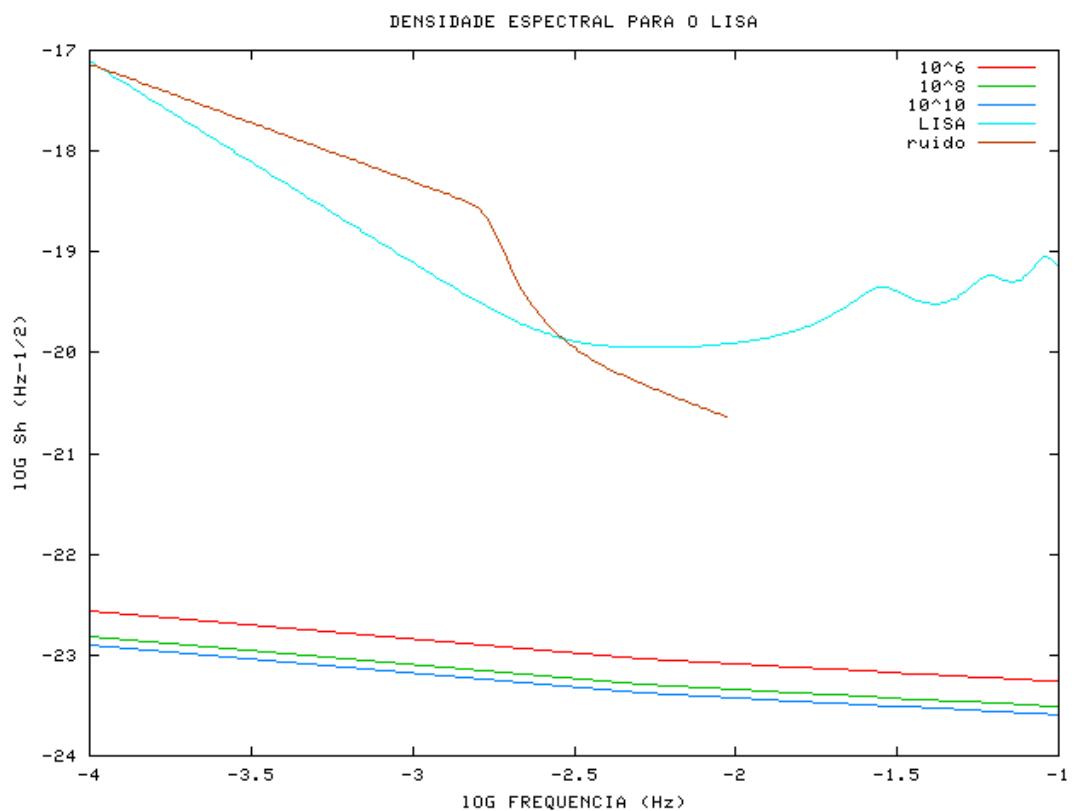


Figura 4.3 - Curva de sensibilidade do LISA e espectros de sistemas BH-BH

4.2 Espectros Para a Faixa de BBO e DECIGO

A amplitude espectral para os três tipos de sistemas é exibida a seguir para a faixa do DECIGO. Como a faixa do BBO está contida na faixa do DECIGO, as curvas para os ambos detectores são mostradas juntas. As curvas de sensibilidade para o BBO e o DECIGO podem ser encontradas em [Crowder e Cornish \(2005\)](#) e [Kawamura \(2006\)](#), respectivamente.

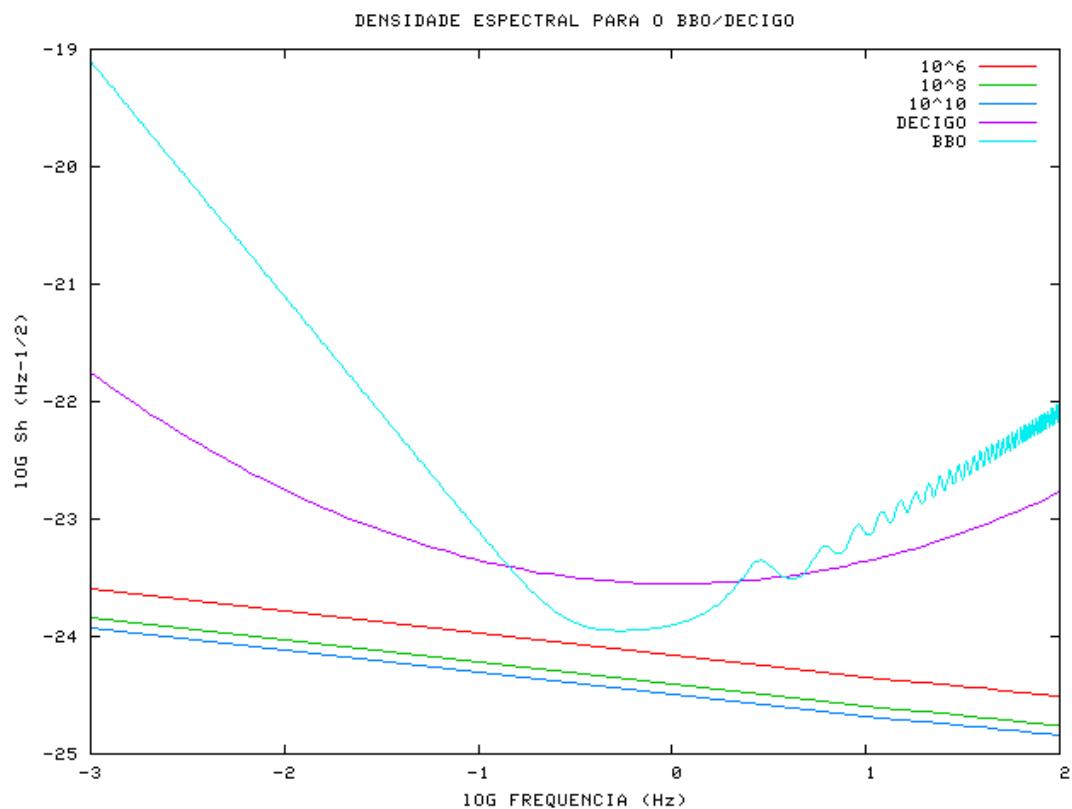


Figura 4.4 - Curva de sensibilidade do BBO e do DECIGO e espectros de sistemas NS-NS

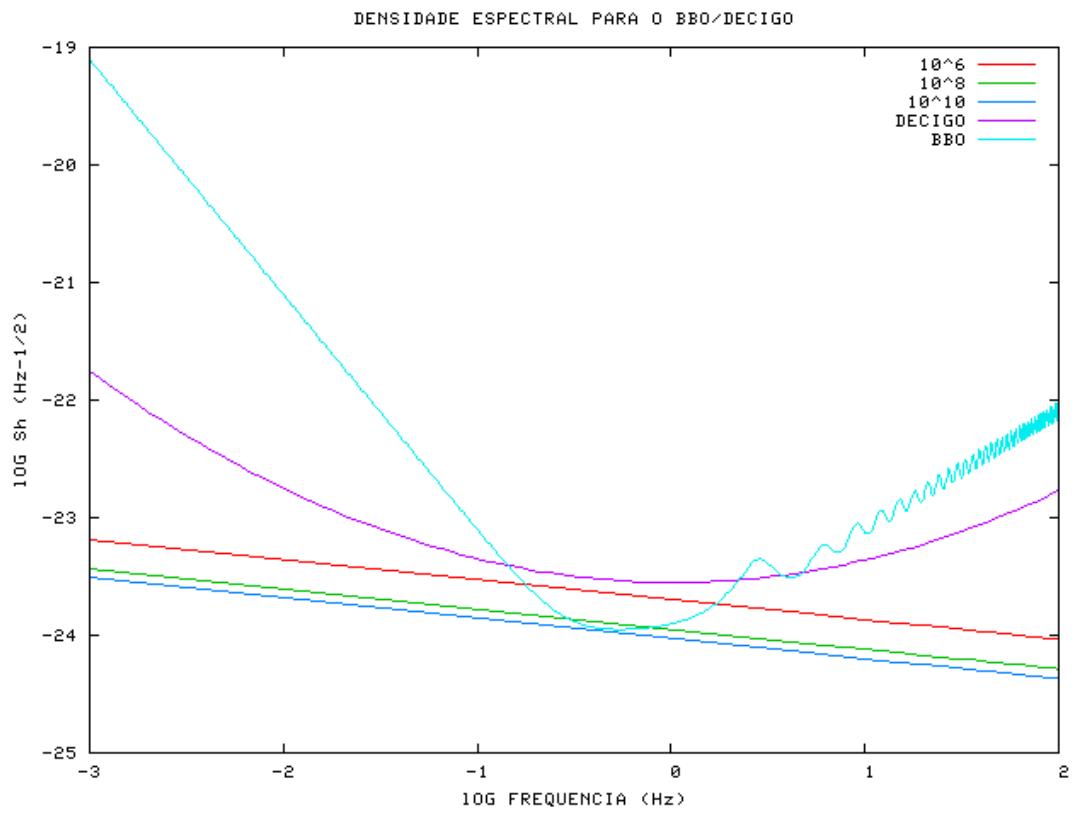


Figura 4.5 - Curva de sensibilidade do BBO e do DECIGO e espectros de sistemas BH-NS

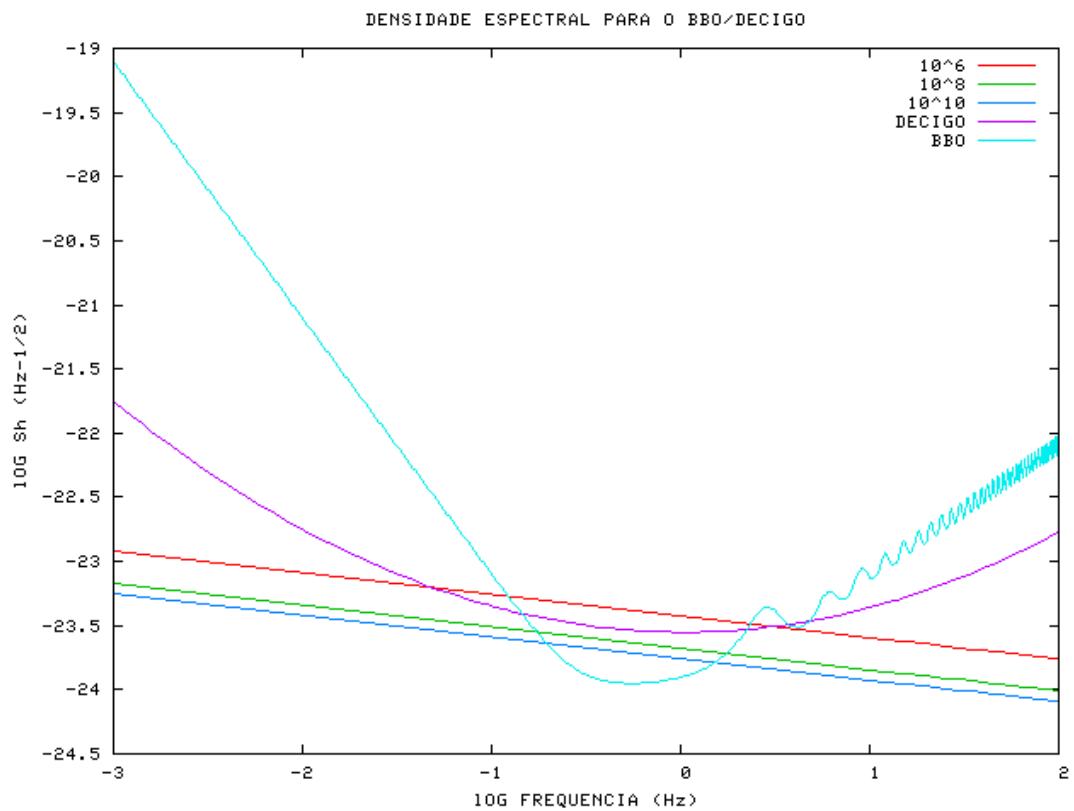


Figura 4.6 - Curva de sensibilidade do BBO e do DECIGO e espectros de sistemas BH-BH

4.3 Espectro Para a Faixa do LIGO

Os gráficos a seguir correspondem à faixa do LIGO. Ao contrário dos anteriores, aqui não foi utilizada uma faixa fixa de freqüência para os três tipos de sistemas. Apenas o limite inferior foi estabelecido como sendo de 1 Hz. Os limites superiores foram baseados nas freqüências máximas características de cada sistema: 900 Hz para sistemas NS-NS; 150 Hz para sistemas BH-NS e 2 kHz para sistemas BH-BH, conforme mencionado na seção 3.2.1. As curvas de sensibilidade para o LIGO podem ser encontradas em Dietz (2008).

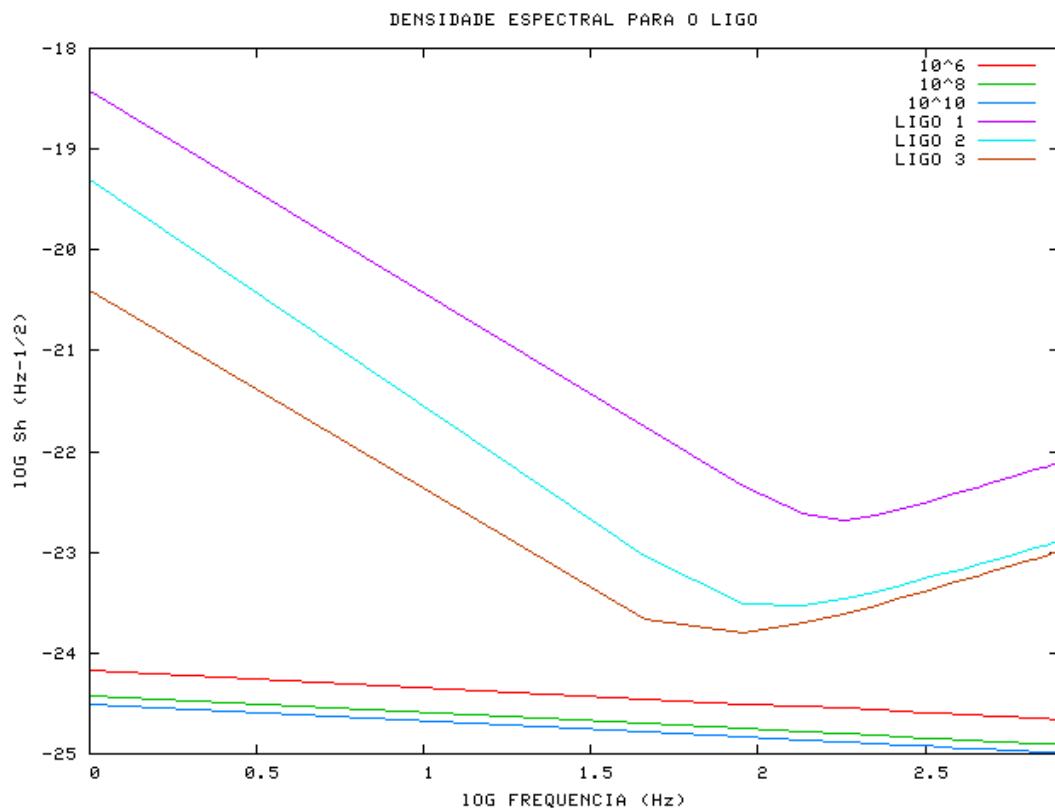


Figura 4.7 - Curva de sensibilidade do LIGO e espectros de sistemas NS-NS

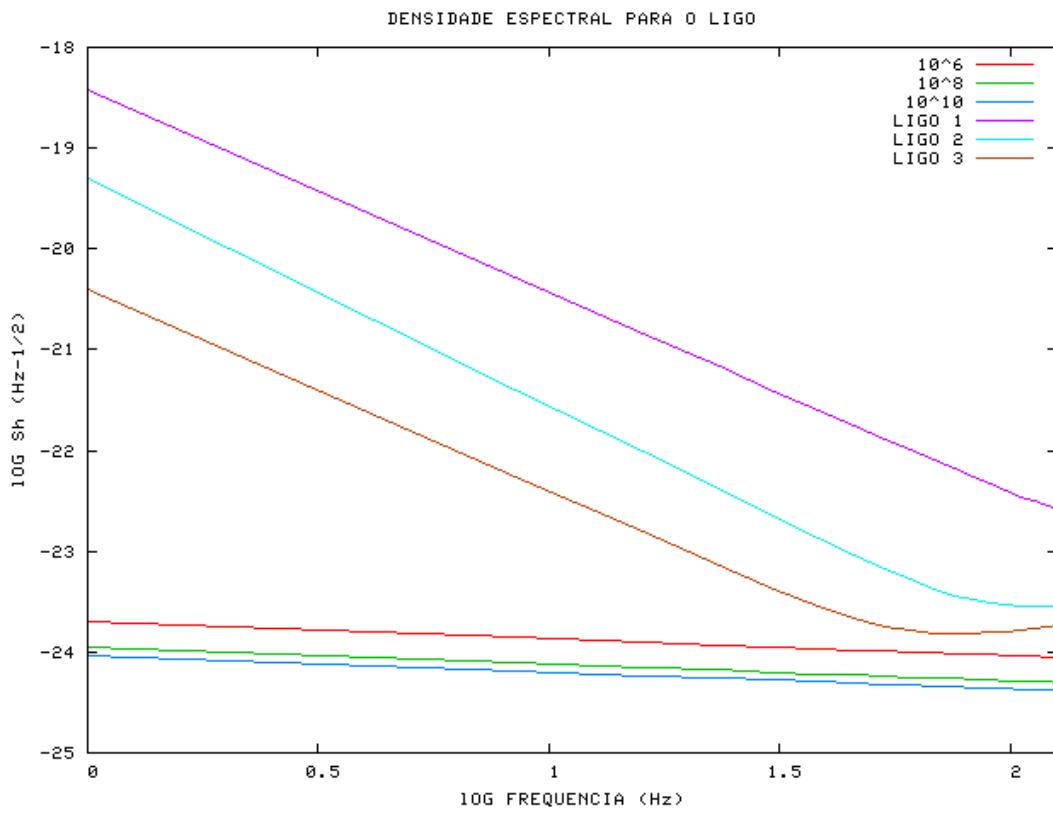


Figura 4.8 - Curva de sensibilidade do LIGO e espectros de sistemas BH-NS

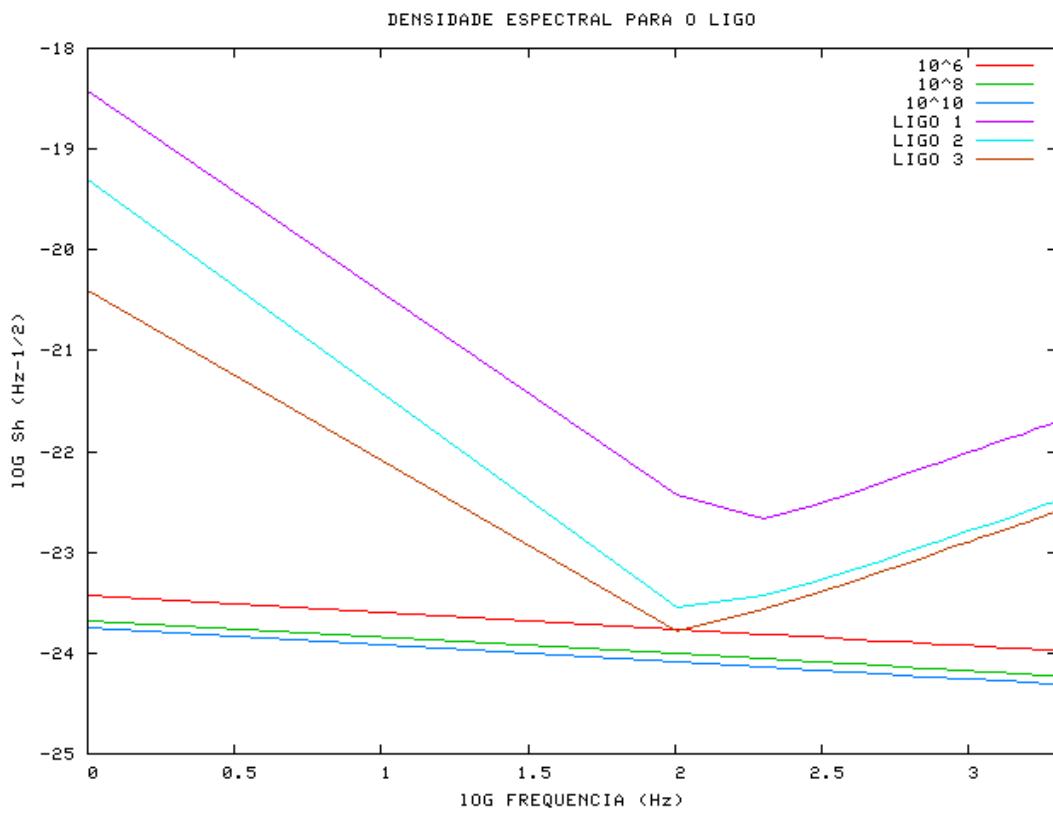


Figura 4.9 - Curva de sensibilidade do LIGO e espectros de sistemas BH-BH

4.4 Relação Sinal-Ruido Para o LIGO

Observando-se os gráficos para o detector LIGO, nota-se que apenas sistemas BH-BH se aproximam da curva de sensibilidade para o detector. No entanto, como estas curvas são os limiares de sensibilidade para um detector isolado e a expressão para a relação sinal-ruido apresentada vale para um par de detectores, torna-se conveniente calcular esta relação para todos casos, já que a capacidade de detecção de dois detectores operando em sincronia é superior à de um detector isolado. O período de integração considerado é de 1 ano.

As tabelas a seguir mostram os valores da relação sinal-ruido para as situações consideradas.

Tabela 4.1 - Relação sinal-ruido para sistemas BH-BH

	LIGO I	LIGO II	LIGO III
$10^6 M_\odot$	5, 1	$7,5 \times 10^2$	$2,3 \times 10^3$
$10^8 M_\odot$	1, 6	$2,4 \times 10^2$	$7,2 \times 10^2$
$10^{10} M_\odot$	1, 1	$1,6 \times 10^2$	$5,0 \times 10^2$

Tabela 4.2 - Relação sinal-ruido para sistemas BH-NS

	LIGO I	LIGO II	LIGO III
$10^6 M_\odot$	$6,4 \times 10^{-4}$	$1,1 \times 10^{-1}$	$7,5 \times 10^1$
$10^8 M_\odot$	$2,0 \times 10^{-4}$	$3,4 \times 10^{-2}$	$2,4 \times 10^1$
$10^{10} M_\odot$	$1,4 \times 10^{-4}$	$2,3 \times 10^{-2}$	$1,6 \times 10^1$

Tabela 4.3 - Relação sinal-ruido para sistemas NS-NS

	LIGO I	LIGO II	LIGO III
$10^6 M_\odot$	$1,8 \times 10^{-1}$	$2,4 \times 10^1$	$1,7 \times 10^2$
$10^8 M_\odot$	$5,7 \times 10^{-2}$	7, 6	$5,5 \times 10^1$
$10^{10} M_\odot$	$3,9 \times 10^{-2}$	5, 2	$3,8 \times 10^1$

4.5 Análise dos Resultados

Através dos gráficos mostrados, nota-se que os espectros calculados estão abaixo da sensibilidade do LISA, porém para os detectores BBO e DECIGO, as curvas se aproximam do limite de sensibilidade dos detectores, e em alguns casos até são superiores. Por exemplo, para sistemas NS-NS, o espectro correspondente a um halo de 10^6 massas solares se aproxima da curva de sensibilidade do BBO na região em torno de 1 Hz; para sistemas BH-NS, as três curvas atingem o limite de sensibilidade do BBO, porém ainda permanecem ligeiramente abaixo da faixa do DECIGO; para sistemas BH-BH, as três curvas estão acima da faixa do BBO, em especial o espectro para 10^6 massas solares ultrapassa o limite para o DECIGO. Esse comportamento se deve ao fato de o BBO e o DECIGO serem projetos mais avançados, que apresentarão melhorias em relação ao LISA, as quais serão obtidas através do aperfeiçoamento das técnicas de análise e processamento de sinais e ruidos, além de incremento na sensibilidade do detector. Nota-se ainda que o BBO possui maior sensibilidade do que o DECIGO para a faixa entre 0,1 Hz a 1 Hz. Para o LIGO, nota-se que apenas espectros para sistemas BH-BH atingem o limite de sensibilidade, com a curva para 10^6 massas solares tocando o limite para o LIGO III na região de 100 Hz.

Observando-se as tabelas, nota-se que sistemas BH-BH apresentam maior relação sinal-ruido para as três gerações do LIGO. Sistemas NS-NS apresentam maior relação do que sistemas BH-NS, mas estas são menores do que para sistemas BH-BH. Isso ocorre pois sistemas BH-NS situam-se ligeiramente fora da faixa de maior sensibilidade do LIGO. Para o LIGO I, apenas sistemas BH-BH têm possibilidade de serem detectados; para o LIGO II, os sistemas NS-NS também passam a ser detectáveis; para o LIGO III, os três tipos de sistemas podem ser detectados.

Deve-se admitir aqui que os resultados gerados para freqüências acima de 1Hz podem ser revistos, em vista do que já foi discutido sobre o método de cálculo do fundo para freqüências altas.

5 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

A determinação de fundos estocásticos é um dos principais assuntos quando se estudam o espectro e a detecção de ondas gravitacionais. Tais fundos podem ser calculados para fontes tipo *burst*, como formação de buracos-negros, ou para fontes de emissão contínua, como os sistemas binários tratados nesta dissertação. Há ainda os fundos de natureza cosmológica, gerados por eventos logo após o *Big Bang*.

Há uma vasta literatura sobre a determinação de fundos para binárias, algumas citadas aqui, como [Schneider et al. \(2001\)](#). Porém este trabalho apresenta diferenças em relação aos métodos já utilizados: leva em consideração a evolução dos sistemas binários, além de empregar uma técnica diferente de contagem de sistemas, que se mostra especialmente eficaz em baixas freqüências. Apesar das diferenças, os resultados obtidos estão em concordância com outros trabalhos, especialmente em termos das magnitudes da densidade espectral e da detectabilidade, embora as formas das curvas sejam em geral diferentes. Ou seja, há concordância quanto aos fundos de binárias estarem abaixo da curva de sensibilidade do LISA, mas estarem acima do limiar de detecção para BBO e LIGO II e III, por exemplo.

Do ponto de vista cosmológico, nota-se que o fundo não é fortemente dependente de parâmetros como densidade bariônica (Ω_B), densidade de energia escura (Ω_Λ), elemento de volume e distância comóveis, e isso pode ser percebido ao se utilizar o elemento de volume, cujos parâmetros podem variar sem afetar significativamente os resultados. Além disso, a massa dos halos também apresentam fraca influência na determinação dos fundos, já que mesmo os considerando cem vezes mais ou menos massivos, as ordens de grandeza dos espectros finais não chegaram a se alterar em uma ordem de grandeza.

O cálculo do fundo para sistemas binários foi realizado satisfatoriamente para as fases iniciais de coalescência, caracterizadas por freqüências de emissão de até aproximadamente 1 Hz. Para além desse limite foi utilizado um novo formalismo, baseado na interpretação das fontes como *bursts* e não como periódicas, porém os resultados gerados parecem superestimar levemente o que se conhece na literatura. Sugere-se portanto que o método de contagem de sistemas também deve ser modificado para regimes não-periódicos, de forma que se torna obrigatório mencionar que os resultados para altas freqüências estão sujeitos a revisão, já que não há garantia de que o método de contagem de sistemas continue válido para esse caso. No entanto, pode-se tirar uma conclusão útil a esse respeito: os resultados apresentados para essas freqüências podem ser tratados como um limite superior.

Com a realização desse trabalho, obteve-se o roteiro básico e a experiência para o cálculo de fundos e deixa espaço para futuros aperfeiçoamentos. Por exemplo, pode-se buscar um novo método de contagem de sistemas para altas freqüências, pode-se também, ao invés de se utilizar halos com massas constantes, utilizar o formalismo de Press-Schechter, experi-

mentar um novo modelo de taxa de formação inicial, testar novas distribuições iniciais de separação e levar em consideração as excentricidades das órbitas. Em particular, a inclusão das excentricidades no cálculo deve gerar resultados interessantes, já que nesse caso os harmônicos superiores da freqüência de emissão são levados em consideração. Resumidamente, o grande mérito do presente trabalho é a proposta de um novo método, a obtenção de resultados coerentes com a literatura e a possibilidade de refinamentos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAUJO, J. C. N.; MIRANDA, O. D.; AGUIAR, O. D. Stochastic background of gravitational waves. **Physical Review D**, vol. 61, 124015, 24 may. 2000. Disponível em: <<http://prola.aps.org/pdf/prd/v61/i12/e124015>>. Acesso em: 14 de abril de 2007. 38, 50

ARAUJO, J. C. N. de; MIRANDA, O. D. Star formation rate density and the stochastic background of gravitational waves. **Physical Review D**, vol. 71, 127503, 23 jun. 2005. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0612091>>. Acesso em: 15 de janeiro de 2008. 51

CORNISH, N. J.; PORTER, E. K. The search for massive black holes binaries with lisa. **General Relativity and Quantum Cosmology**, vol.3, 15 nov. 2007. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0612091>>. Acesso em: 8 de janeiro de 2008. 33

CROWDER, J.; CURNISH, N. J. Beyond lisa: Exploring future gravitational wave misson. **Physical Review D**, vol. 71, 127503, 17 out. 2005. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0506015>>. Acesso em: 16 de janeiro de 2008. 35, 56

DIETZ, A. Grb-triggered searches for gravitational waves in *ligo* data. **General Relativity and Quantum Cosmology**, vol.1, 4 feb. 2008. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/0802.0393v1>>. Acesso em: 13 de fevereiro de 2008. 58

D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's relativity**. Oxford, England: Clarendon press - Oxford, 1992. 383 p. ISBN 0-19-859686-3. 31

FLANAGAN, E. E. Sensitivity of the laser interferometer gravitational wave observatory to a stochastic background, and its dependence on the detector orientations. **Physical Review D**, vol.48, n.6, p.2389, 15 sep. 1993. Disponível em: <http://prola.aps.org/pdf/PRD/v48/i6/p2389_1>. Acesso em: 7 de fevereiro de 2008. 53

HEGER, A.; WOOSLEY, S. The nucleosynthetic signation of population iii. **Astrophysical Journal**, vol.567, p.532, 1 march. 2002. Disponível em: <<http://www.journals.uchicago.edu/doi/pdf/10.1086/338487>>. Acesso em: 22 agosto de 2007. 44

KAWAMURA, S. The japanese space gravitational wave antenna-decigo. **Classical and Quantum Gravity**, vol.23, p.125, 28 mar. 2006. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/CQG/23/S125>>. Acesso em: 6 de janeiro de 2008. 34, 56

MADAU, P.; VALLE, D.; PANAGIA, N. On the evolution of the cosmic supernova rates. **MNRAS**, vol. **297**, L17-L22, 17 out. 1998. Disponível em: <<http://www.blackwell-synergy.com/doi/abs/10.1046/j.1365-8711.1998.01697.x>>. Acesso em: 16 de janeiro de 2008. [47](#)

MIKOCZI, B. Frequency evolution of the gravitational waves for compact objects. **ASP Conference Series**, vol.**999**, 10 oct. 2006. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0610290v1>>. Acesso em: 3 maio de 2007. [43](#)

NAKAMURA, T.; SASAKI, M.; TANAKA, T.; THORNE, K. Gravitational waves from coalescing black holes macho binaries. **MNRAS**, vol.**487**, p.**139**, 7 aug. 1997. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9708060v1>>. Acesso em: 3 maio de 2007. [39](#)

OECHSLIN, R.; URYU, K.; POGHOSYAN, G.; THIELEMANN, F. K. The influence of quark matter at high densities on binary neutron star mergers. **MNRAS**, vol. **349**, p.**1469**, 12 jan. 2004. Disponível em: <<http://www.blackwell-synergy.com/doi/abs/10.1111/j.1365-2966.2004.07621.x>>. Acesso em: 3 maio de 2007. [43](#)

PADMANABHAN, T. **Structure formation in the universe**. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1993. 483 p. ISBN 0-521-42486-0. [42](#)

SALPETER, E. E. The luminosity function and stellar function. **Astrophysical Journal**, vol.**121**, p.**161**, 7 aug. 1955. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1955ApJ...121..161S>>. Acesso em: 16 de dezembro de 2007. [38](#)

SCHNEIDER, R.; FERRARI, V.; MATARRESE, S.; ZWART, P. Low-frequency gravitational waves from cosmological compact binaries. **MNRAS**, vol.**324**, p.**797**, 11 jul. 2001. Disponível em: <<http://www.blackwell-synergy.com/doi/abs/10.1046/j.1365-8711.2001.04217.x>>. Acesso em: 22 agosto de 2007. [30](#), [49](#), [54](#), [63](#)

SCHUTZ, B. E. **A first course in general relativity**. Cambridge, England: cambridge university press, 1990. 376 p. ISBN 0-521-27703-5. [31](#)

SOUZA, R. E. de. **Introdução à cosmologia**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004. 328 p. ISBN 85-314-0843-1. [45](#)

SPOLYAR, D.; FREESE, K.; GONDOLO, P. Dark matter and the first stars: a new phase of stelar evolution. **PRL**, vol. **100**, 051101-1, 8 feb. 2008. Disponível em:

<<http://link.aps.org/abstract/PRL/v100/e051101>>. Acesso em: 19 de março de 2008. [44](#)

SPRINGEL, V.; HERNQUIST, L. The history of star formation in a λ cold dark matter universe. **MNAS**, vol.339, p.312, 11 feb. 2003. Disponível em:
<<http://adsabs.harvard.edu/abs/2003MNRAS-339..312S>>. Acesso em: 22 agosto de 2007. [46](#)

THORNE, K. **300 years of gravitation**: edited by Stephen Hawking and Werner Israel. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1987. 690 p. ISBN 0-521-37976-8. [51](#)

THORNE, K. A. Searching for gravitational-wave bursts with *ligo*. **General Relativity and Quantum Cosmology**, vol. 1, 28 jun. 2007. Disponível em:
<<http://arxiv.org/pdf/0706.4301v1>>. Acesso em: 7 de fevereiro de 2008. [33](#)

WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology**: Applications to the general theory of relativity. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons, 1972. 291 p. ISBN 0-471-93471-2. [26](#)

7 APÊNDICE A - DEDUÇÃO DA EXPRESSÃO PARA A EVOLUÇÃO DA FREQÜÊNCIA

Aqui será feita a dedução da expressão 3.19, que descreve a evolução temporal da freqüência das ondas gravitacionais emitidas.

Inicialmente, toma-se a expressão para a potência total emitida por um sistema binário, conforme deduzida na seção 2.2:

$$P = \frac{32G\Omega^6}{5c^5} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 r^4 \quad (7.1)$$

pode-se escrever a expressão acima em termos somente de r , através da terceira lei de Kepler:

$$\Omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \quad (7.2)$$

uma substituição direta na expressão para a potência leva a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{32G^4}{5c^5 r^5} (m_1 m_2)^2 (m_1 + m_2) \quad (7.3)$$

Seja agora a energia total do sistema dada por

$$E = -\frac{Gm_1 m_2}{2r} \quad (7.4)$$

cuja derivada em relação a r é dada por

$$\frac{dE}{dr} = \frac{Gm_1 m_2}{2r^2} \quad (7.5)$$

Conhecendo-se estas expressões, pode-se escrever a taxa de variação da freqüência angular das ondas emitidas como

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dr} \frac{dr}{dE} \frac{dE}{dt} \quad (7.6)$$

onde $\frac{d\omega}{dr}$ pode ser obtida facilmente a partir da terceira lei de Kepler:

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{3}{2} \left[\frac{G(m_1 + m_2)}{r^5} \right]^{1/2} \quad (7.7)$$

substituindo-se as derivadas calculadas na expressão para $\frac{d\omega}{dt}$, fica-se com

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{96m_1 m_2}{5c^5} \left[\frac{G^7 (m_1 + m_2)^3}{r^{11}} \right]^{1/2} \quad (7.8)$$

essa expressão pode ser colocada somente em função de Ω , já que r pode ser colocado em função de Ω , através da expressão 7.2:

$$r = \left[\frac{G(m_1 + m_2)}{\Omega^2} \right]^{1/3} \quad (7.9)$$

substituindo, fica-se com

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{96m_1m_2}{5c^5} G^{5/3} (m_1 + m_2)^{-1/3} \Omega^{11/3} \quad (7.10)$$

agora, isolam-se as variáveis e integra-se

$$\int_{\Omega'_0}^{\Omega'} \Omega^{-11/3} d\Omega = K \int_{t'_0}^{t'} dt \quad (7.11)$$

onde K é dado por

$$K = \frac{96m_1m_2}{5c^5} G^{5/3} (m_1 + m_2)^{-1/3} \quad (7.12)$$

integrando e tirando linhas dos limites de integração, obtém-se

$$\Omega^{-8/3} = \Omega_0^{-8/3} - \frac{8}{3} K(t - t_0) \quad (7.13)$$

Pode-se escrever Ω em termos da freqüência da onda emitida, lembrando que esta é o dobro da freqüência de rotação do sistema:

$$\Omega = \pi\nu_{GW} \quad (7.14)$$

substituindo na equação 7.13, obtém-se finalmente

$$\nu_{GW} = \frac{1}{\pi} \left[(\pi\nu_{GW}^0)^{-8/3} - \frac{8}{3} K(t - t_0) \right]^{-3/8} \quad (7.15)$$

PUBLICAÇÕES TÉCNICO-CIENTÍFICAS EDITADAS PELO INPE

Teses e Dissertações (TDI)

Teses e Dissertações apresentadas nos Cursos de Pós-Graduação do INPE.

Manuais Técnicos (MAN)

São publicações de caráter técnico que incluem normas, procedimentos, instruções e orientações.

Notas Técnico-Científicas (NTC)

Incluem resultados preliminares de pesquisa, descrição de equipamentos, descrição e ou documentação de programa de computador, descrição de sistemas e experimentos, apresentação de testes, dados, atlas, e documentação de projetos de engenharia.

Relatórios de Pesquisa (RPQ)

Reportam resultados ou progressos de pesquisas tanto de natureza técnica quanto científica, cujo nível seja compatível com o de uma publicação em periódico nacional ou internacional.

Propostas e Relatórios de Projetos (PRP)

São propostas de projetos técnico-científicos e relatórios de acompanhamento de projetos, atividades e convênios.

Publicações Didáticas (PUD)

Incluem apostilas, notas de aula e manuais didáticos.

Publicações Seriadas

São os seriados técnico-científicos: boletins, periódicos, anuários e anais de eventos (simpósios e congressos). Constam destas publicações o International Standard Serial Number (ISSN), que é um código único e definitivo para identificação de títulos de seriados.

Programas de Computador (PDC)

São a seqüência de instruções ou códigos, expressos em uma linguagem de programação compilada ou interpretada, a ser executada por um computador para alcançar um determinado objetivo. São aceitos tanto programas fonte quanto executáveis.

Pré-publicações (PRE)

Todos os artigos publicados em periódicos, anais e como capítulos de livros.