



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m12e/2025/03.27.20.51-TDI

## **ONDAS GRAVITACIONAIS DE SISTEMAS BINÁRIOS DE OBJETOS COMPACTOS NA TEORIA DE BRANS-DICKE**

Djalma Humberto Silva Guterres

Dissertação de Mestrado do Curso  
de Pós-Graduação em Astrofísica,  
orientada pelos Drs. José Carlos  
Neves de Araújo, e Márcio Eduardo  
da Silva Alves, aprovada em 19 de  
março de 2025.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/8JMKD2USNRW34T/4D82A32>](http://urlib.net/8JMKD2USNRW34T/4D82A32)

INPE  
São José dos Campos  
2025

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE  
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)  
Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
CEP 12.227-010  
São José dos Campos - SP - Brasil  
Tel.:(012) 3208-6923/7348  
E-mail: pubtc@inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):****Presidente:**

Dr. Thales Sehn Korting - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

**Membros:**

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)

Dr. Heyder Hey - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m12e/2025/03.27.20.51-TDI

## **ONDAS GRAVITACIONAIS DE SISTEMAS BINÁRIOS DE OBJETOS COMPACTOS NA TEORIA DE BRANS-DICKE**

Djalma Humberto Silva Guterres

Dissertação de Mestrado do Curso  
de Pós-Graduação em Astrofísica,  
orientada pelos Drs. José Carlos  
Neves de Araújo, e Márcio Eduardo  
da Silva Alves, aprovada em 19 de  
março de 2025.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/8JMKD2USNRW34T/4D82A32>](http://urlib.net/8JMKD2USNRW34T/4D82A32)

INPE  
São José dos Campos  
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Guterres, Djalma Humberto Silva.

G982o Ondas gravitacionais de sistemas binários de objetos compactos na teoria de Brans-Dicke / Djalma Humberto Silva Guterres. – São José dos Campos : INPE, 2025.

xvi + 101 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m12e/2025/03.27.20.51-TDI)

Dissertação (Mestrado em Astrofísica) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2025.

Orientadores : Drs. José Carlos Neves de Araújo, e Márcio Eduardo da Silva Alves.

1. Ondas gravitacionais. 2. Teorias escalares-tensoriais. 3. Sistema binário de estrelas de nêutrons. 4. Teoria de Brans-Dicke. I.Título.

CDU 551.511.31:52

---



Esta obra foi licenciada sob uma [Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](#).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](#).



MINISTÉRIO DA  
CIÊNCIA, TECNOLOGIA  
E INOVAÇÃO



**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**  
Serviço de Pós-Graduação - SEPGR

**Aluno(a):** Djalma Humberto Silva Guterres

**Título: “Ondas gravitacionais de sistemas binários de objetos compactos na teoria de Brans-Dicke.”**

Aprovado(a) pela Banca Examinadora em cumprimento ao requisito exigido para obtenção do Título Mestre (a) em Astrofísica.

**(assinado eletronicamente)**

Dr. Rafael da Costa Nunes - Presidente - Membro Interno (UFRGS & Docente PGAST/INPE)

( X ) Aprovado ( ) Reprovado

**(assinado eletronicamente)**

Dr. Odylio Denys de Aguiar - Membro Interno (DIAST/INPE & Docente PGAST/INPE)

( X ) Aprovado ( ) Reprovado

**(assinado eletronicamente)**

Dr. José Carlos Neves de Araújo – Orientador - Membro Interno (DIAST/INPE & Docente PGAST/INPE)

( X ) Aprovado ( ) Reprovado

**(assinado eletronicamente)**

Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves - Orientador - Membro Externo (UNESP)

( X ) Aprovado ( ) Reprovado

**(assinado eletronicamente)**

Dr. Rodrigo Rocha Cuzinatto - Membro Externo (UNIFAL-MG)

( X ) Aprovado ( ) Reprovado

Este trabalho foi aprovado por:

( ) maioria simples

( X ) unanimidade

São José dos Campos, 19 de março de 2025



Documento assinado eletronicamente por **Rafael da Costa nunes (E), Usuário Externo**, em 24/03/2025, às 13:07 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **José Carlos Neves de Araújo, Pesquisador**, em 24/03/2025, às 16:19 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Márcio Eduardo da silva alves (E), Usuário Externo**, em 25/03/2025, às 16:28 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Rocha Cuzinatto, Usuário Externo**, em 03/04/2025, às 10:22 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Odylio Denys de Aguiar, Pesquisador**, em 04/04/2025, às 21:44 (horário oficial de Brasília), com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site <https://sei.mcti.gov.br/verifica.html>, informando o código verificador **12703030** e o código CRC **7010EBD8**.

**PUBLICADO POR:**

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE  
Coordenação de Ensino, Pesquisa e Extensão (COEPE)  
Divisão de Biblioteca (DIBIB)  
CEP 12.227-010  
São José dos Campos - SP - Brasil  
Tel.:(012) 3208-6923/7348  
E-mail: pubtc@inpe.br

**CONSELHO DE EDITORAÇÃO E PRESERVAÇÃO DA PRODUÇÃO INTELLECTUAL DO INPE - CEPPII (PORTARIA Nº 176/2018/SEI-INPE):****Presidente:**

Dr. Thales Sehn Korting - Coordenação-Geral de Ciências da Terra (CGCT)

**Membros:**

Dr. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado - Conselho de Pós-Graduação (CPG)

Dr. Evandro Marconi Rocco - Coordenação-Geral de Engenharia, Tecnologia e Ciência Espaciais (CGCE)

Dr. Heyder Hey - Coordenação-Geral de Infraestrutura e Pesquisas Aplicadas (CGIP)

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**BIBLIOTECA DIGITAL:**

Dr. Gerald Jean Francis Banon

Clayton Martins Pereira - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**REVISÃO E NORMALIZAÇÃO DOCUMENTÁRIA:**

Simone Angélica Del Ducca Barbedo - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

**EDITORAÇÃO ELETRÔNICA:**

Ivone Martins - Divisão de Biblioteca (DIBIB)

André Luis Dias Fernandes - Divisão de Biblioteca (DIBIB)



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÕES  
**INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS**

sid.inpe.br/mtc-m12e/2025/03.27.20.51-TDI

## **ONDAS GRAVITACIONAIS DE SISTEMAS BINÁRIOS DE OBJETOS COMPACTOS NA TEORIA DE BRANS-DICKE**

Djalma Humberto Silva Guterres

Dissertação de Mestrado do Curso  
de Pós-Graduação em Astrofísica,  
orientada pelos Drs. José Carlos  
Neves de Araújo, e Márcio Eduardo  
da Silva Alves, aprovada em 19 de  
março de 2025.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/8JMKD2USNRW34T/4D82A32>](http://urlib.net/8JMKD2USNRW34T/4D82A32)

INPE  
São José dos Campos  
2025



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

Guterres, Djalma Humberto Silva.

G982o Ondas gravitacionais de sistemas binários de objetos compactos na teoria de Brans-Dicke / Djalma Humberto Silva Guterres. – São José dos Campos : INPE, 2025.

xvi + 101 p. ; (sid.inpe.br/mtc-m12e/2025/03.27.20.51-TDI)

Dissertação (Mestrado em Astrofísica) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2025.

Orientadores : Drs. José Carlos Neves de Araújo, e Márcio Eduardo da Silva Alves.

1. Ondas gravitacionais. 2. Teorias escalares-tensoriais. 3. Sistema binário de estrelas de nêutrons. 4. Teoria de Brans-Dicke. I.Título.

CDU 551.511.31:52

---



Esta obra foi licenciada sob uma [Licença Creative Commons Atribuição-NãoComercial 3.0 Não Adaptada](#).

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial 3.0 Unported License](#).



## AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha mãe, pelo amor incondicional, apoio e força em todos os momentos. Sua presença em minha vida foi e continua sendo a maior fonte de inspiração e motivação. Sou eternamente grato por tudo o que fez por mim.

Aos meus orientadores e membros da banca, minha sincera gratidão pela orientação, pelas valiosas contribuições e pela disponibilidade em ajudar no desenvolvimento desta dissertação. Suas críticas construtivas e sugestões aprimoraram consideravelmente o trabalho.

Agradeço também à CAPES pelo financiamento da bolsa de estudos.

Aos meus amigos, colegas e a toda minha família, agradeço por estarem sempre ao meu lado, oferecendo suporte, palavras de incentivo e por tornarem essa caminhada mais leve e significativa.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desta dissertação, meu mais sincero agradecimento.



## RESUMO

Ondas gravitacionais, previstas inicialmente por Albert Einstein, são perturbações no espaço-tempo geradas pelo movimento acelerado de massas. No entanto, para sua emissão ser detectável, é necessária uma grande quantidade de massa e energia, sendo as principais fontes detectáveis sistemas astrofísicos compostos por objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros. Em 2016, a colaboração LIGO-Virgo anunciou a primeira detecção direta de ondas gravitacionais, conhecida como evento GW150914, que foi a coalescência de um sistema binário de buracos negros. A primeira detecção de ondas gravitacionais geradas por um sistema binário de estrelas de nêutrons foi o evento GW170817, marcando o primeiro evento multimessageiro envolvendo ondas gravitacionais. Podemos descrever as ondas gravitacionais como pequenas perturbações em um fundo plano, representado pela métrica de Minkowski. Esse formalismo é conhecido como teoria linearizada da gravidade. Por meio da decomposição por helicidade da perturbação métrica, podemos obter três tipos de quantidades invariantes de calibre: escalares, vetoriais e tensoriais, destacando os seis graus de liberdade físicos da perturbação, dois em cada setor. Na Relatividade Geral, apenas a componente tensorial apresenta solução do tipo onda, apresentando desta forma dois estados de polarização. Na teoria de Brans-Dicke, as componentes escalares também apresentam soluções do tipo onda, gerando dois estados de polarização adicionais às tensoriais, resultando em um total de quatro estados de polarização. Verificamos que para um sistema binário, as polarizações escalares, dada uma expansão multipolar, apresentam um termo de dipolo e um termo de quadrupolo, proporcionais aos parâmetros  $\mathcal{S}$  e  $\Gamma$ , respectivamente, que dependem da massa e do tipo de objeto que compõem a binária. No caso de um sistema binário de buracos negros, não há emissão de radiação escalar, uma vez que os parâmetros  $\mathcal{S}$  e  $\Gamma$  se anulam. Desta forma, para o estudo das polarizações escalares na teoria de Brans-Dicke, é necessário que, pelo menos, uma das componentes do sistema binário seja uma estrela de nêutrons. Portanto, o evento GW170817 representa um caso de interesse para a estimativa de ondas gravitacionais escalares, pois trata-se de um sistema comprovadamente composto por duas estrelas de nêutrons. Analisando e comparando os sinais gerados por uma onda gravitacional emitida por um sistema binário de estrelas de nêutrons, podemos verificar a possibilidade de detecção dos dois modos de polarização escalar com as curvas de sensibilidade dos detectores de ondas gravitacionais. A detecção ou ausência dos modos de polarização escalar no sinal de uma onda gravitacional pode ser utilizada como um método para testar a teoria da relatividade geral.

Palavras-chave: Ondas gravitacionais. Teorias Escalares-Tensoriais. Sistema Binário de Estrelas de Nêutrons. Teoria de Brans-Dicke.



# GRAVITATIONAL WAVES FROM BINARY SYSTEMS OF COMPACT OBJECTS IN BRANS-DICKE THEORY

## ABSTRACT

Gravitational waves, initially predicted by Albert Einstein, are disturbances in space-time generated by the accelerated motion of masses. However, for their emission to be detectable, a large amount of mass and energy is required, with the primary detectable sources being astrophysical systems composed of compact objects, such as neutron stars and black holes. In 2016, the LIGO-Virgo collaboration announced the first direct detection of gravitational waves, known as event GW150914, which was the coalescence of a binary black hole system. The first detection of gravitational waves generated by a binary neutron star system was event GW170817, marking the first multi-messenger event involving gravitational waves. We can describe gravitational waves as small perturbations in a flat background, represented by the Minkowski metric. This formalism is known as the linearized theory of gravity. Through the helicity decomposition of the metric perturbation, we can obtain three types of gauge-invariant quantities: scalar, vector, and tensor components, highlighting the six physical degrees of freedom of the perturbation, two in each sector. In General Relativity, only the tensor component has wave-like solutions, exhibiting two polarization states. In Brans-Dicke theory, the scalar components also present wave-like solutions, generating two additional polarization states alongside the tensor ones, resulting in a total of four polarization states. For a binary system, the scalar polarizations, given a multipolar expansion, present a dipole term and a quadrupole term, proportional to the parameters  $\mathcal{S}$  and  $\Gamma$ , respectively, which depend on the mass and type of objects composing the binary system. In the case of a binary black hole system, there is no emission of scalar radiation, as the parameters  $\mathcal{S}$  and  $\Gamma$  cancel out. Therefore, to study scalar polarizations in Brans-Dicke theory, at least one component of the binary system must be a neutron star. Consequently, event GW170817 represents a case of interest for estimating scalar gravitational waves, as it is a system conclusively composed of two neutron stars. By analyzing and comparing the signals generated by a gravitational wave emitted by a binary neutron star system, we can assess the possibility of detecting the two scalar polarization modes with the sensitivity curves of gravitational wave detectors. The detection or absence of scalar polarization modes in the signal of a gravitational wave can be used as a method to test the theory of General Relativity.

Keywords: Gravitational Waves. Scalar-Tensor Theories. Binary Neutron Star System. Brans-Dicke Theory.





## LISTA DE FIGURAS

|  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| 1.1 Decaimento orbital do PSR B1913+16. A curva representa o deslocamento da fase orbital cumulativo esperado devido a emissão de ondas gravitacionais de acordo com a relatividade geral. . . . . | 2           |
| 2.1 Efeitos dos seis possíveis estados polarização de uma onda gravitacional .   | 16          |
| 3.1 Representação de um sistema binário em relação a um observador. . . . .  | 22          |
| 3.2 Evolução temporal dos modos de polarização tensoriais $h_+$ e $h_\times$ na Relatividade Geral. . . . .  | 24          |
| 3.3 Fases de coalescência para um sistema binário de objetos compactos. . .  | 25          |
| 3.4 Diagrama das detecções da colaboração LIGO-Virgo-KAGRA. . . . .  | 26          |
| 3.5 Diagrama simplificado de um detector Advanced LIGO. . . . .  | 28          |
| 5.1 Diagrama - Sistemas binários na teoria de Brans-Dicke. . . . .   | 61          |
| 5.2 Evolução da frequência gravitacional com a distância orbital. . . . .  | 66          |
| 5.3 Frequência de corte para radiação escalar. . . . .   | 67          |
| 5.4 Distribuição angular da radiação gravitacional. . . . .  | 72          |
| 5.5 Distribuição angular da radiação gravitacional. . . . .  | 76          |
| 5.6 Decaimento da distância orbital $R(t)$ . . . . .   | 79          |
| 5.7 Evolução frequência da onda gravitacional - Sistema binário BHBH. . . .  | 82          |
| 5.8 Forma de onda para os estados de polarização: $h_\times$ , $h_+$ e $\Phi$ - Sistema binário NSNS. . . . .  | 83          |
| 5.9 Forma de onda para os estados de polarização: $h_\times$ e $h_+$ - Sistema binário BHBH. . . . .   | 84          |
| 5.10 Evolução frequência da onda gravitacional - Sistema binário GW170817. .   | 86          |
| 5.11 Forma de onda para os estados de polarização: $h_\times$ , $h_+$ e $\Phi$ - Sistema binário GW170817. . . . .   | 87          |
| A.1 Relação dos eixos do referencial $(x, y, z)$ e do referencial definido pelos vetores unitários $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{n})$ . . . . .   | 100         |



## LISTA DE TABELAS

|  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| 5.1 Massa do campo escalar $m_s$ . . . . .                               | 60          |
| 5.2 Parâmetro de acoplamento $\omega_0$ . . . . .                        | 60          |
| 5.3 Parâmetros típicos para alguns sistemas binários. . . . .            | 63          |
| 5.4 Amplitude dos estados de polarização - sistema binário NSNS. . . . . | 64          |
| 5.5 Amplitude dos estados de polarização - sistema binário BHBH. . . . . | 64          |
| 5.6 Amplitude dos estados de polarização - sistema binário BHNS. . . . . | 65          |
| 5.7 Propriedades do evento GW170817. . . . .                             | 85          |
| 5.8 Parâmetros para o sistemas binários GW170817. . . . .                | 86          |



## SUMÁRIO

|  | <u>Pág.</u> |
|--|-------------|
| <b>1 INTRODUÇÃO . . . . .</b>  | <b>1</b>    |
| <b>2 INVARIANTES DE CALIBRE E MODOS DE POLARIZAÇÃO<br/>DE ONDAS GRAVITACIONAIS . . . . .</b> | <b>5</b>    |
| 2.1 Decomposição por helicidade . . . . .  | 7           |
| 2.2 Invariantes de calibre . . . . .   | 10          |
| 2.3 Decomposição do tensor momento-energia . . . . .   | 12          |
| 2.4 Tensor de Einstein linearizado . . . . .   | 13          |
| 2.5 Estados de polarização de ondas gravitacionais . . . . .                                 | 14          |
| <b>3 ONDAS GRAVITACIONAIS . . . . .</b>  | <b>17</b>   |
| 3.1 Ondas gravitacionais na Relatividade Geral . . . . .                                     | 17          |
| 3.2 Fontes astrofísicas de ondas gravitacionais . . . . .                                    | 23          |
| 3.2.1 Coalescência de sistemas binários de objetos compactos . . . . .                       | 24          |
| 3.2.2 Outras possíveis fontes . . . . .  | 27          |
| 3.3 Detectores de ondas gravitacionais . . . . .   | 27          |
| <b>4 TEORIAS ESCALARES-TENSORIAIS: TEORIA DE BRANS-<br/>DICKE . . . . .</b>                  | <b>31</b>   |
| 4.1 Ação na teoria de Brans-Dicke . . . . .  | 31          |
| 4.2 Equações de campo no limite de campo fraco . . . . .                                     | 33          |
| 4.2.1 Movimento de partículas pontuais na ordem Newtoniana . . . . .                         | 38          |
| 4.2.2 Sistema binário descrevendo uma órbita quase-circular . . . . .                        | 41          |
| 4.3 Solução para os estados de polarização escalar . . . . .                                 | 43          |
| 4.3.1 Evolução dinâmica da perturbação escalar . . . . .                                     | 43          |
| 4.3.2 Modo de polarização escalar-transversal $\Phi$ . . . . .                               | 48          |
| 4.3.3 Modo de polarização escalar-longitudinal $\Theta$ . . . . .                            | 50          |
| 4.4 Solução para os estados de polarização tensorial . . . . .                               | 51          |
| <b>5 FORMA DE ONDA GRAVITACIONAL EMITIDA POR UM<br/>SISTEMA BINÁRIO . . . . .</b>            | <b>57</b>   |
| 5.1 Energia orbital de um sistema binário . . . . .  | 68          |
| 5.2 Energia emitida por onda gravitacional . . . . .   | 70          |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 5.2.1    | Radiação tensorial . . . . .  | 71        |
| 5.2.2    | Radiação escalar . . . . .  | 73        |
| 5.3      | Evolução da frequência . . . . .  | 77        |
| 5.4      | Forma de onda . . . . .   | 80        |
| 5.4.1    | Sistema GW170817 . . . . .  | 84        |
| <b>6</b> | <b>CONCLUSÕES . . . . .</b>   | <b>89</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS . . . . .</b>   | <b>93</b> |
|          | <b>APÊNDICE A - AMPLITUDE DA ONDA GRAVITACIONAL EM<br/>UMA DIREÇÃO ARBITRÁRIA . . . . .</b> | <b>99</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

Um dos principais aspectos da relatividade de Einstein é que nenhuma informação viaja com velocidade maior do que a da luz no vácuo, desta forma qualquer alteração em um campo gravitacional não é transmitida de forma instantânea, mas deve-se propagar com a velocidade igual a  $c$ , esta alteração é chamada de onda gravitacional (CIUFOLINI V. GORINI, 2001).

A ideia de ondas gravitacionais foi proposta por Albert Einstein logo após a elaboração da sua teoria, que obteve o resultado que é conhecido como fórmula de quadrupolo para emissão de radiação gravitacional, sendo análogo à fórmula de dipolo para a radiação eletromagnética, que mostra que ondas gravitacionais são emitidas por objetos massivos acelerados (FLANAGAN; HUGHES, 2005).

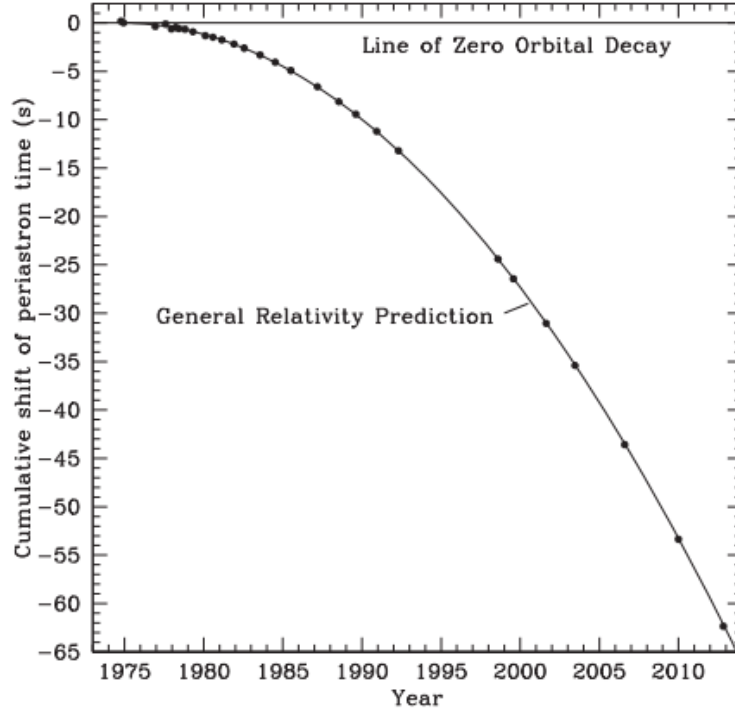
De forma geral, as principais fontes de ondas gravitacionais são sistemas astrofísicos dinâmicos como sistemas binários de objetos compactos em coalescência, geralmente compostos por buracos negros ou estrelas de nêutrons, que são capazes de gerar um sinal forte o suficiente para ser detectado pelos interferômetros terrestres.

A primeira evidência da emissão de ondas gravitacionais foi obtida através do decaimento do período orbital do sistema binário PSR 1913+16, composto por duas estrelas de nêutrons, sendo uma delas um pulsar (HULSE; TAYLOR, 1975). Foi mostrado que o decaimento do período observado está perfeitamente de acordo com a previsão teórica devido à emissão de ondas gravitacionais do sistema (WEISBERG; HUANG, 2016) , conforme mostrado na Figura 1.1.

A primeira detecção direta de ondas gravitacionais foi realizada em 2015 pela colaboração LIGO-Virgo. O evento, conhecido como GW150914, correspondeu à coalescência de dois buracos negros com massas de aproximadamente  $36 M_{\odot}$  e  $29 M_{\odot}$ , formando um buraco negro final de  $62 M_{\odot}$  e liberando cerca de  $3 M_{\odot}$  em radiação gravitacional (ABBOTT et al., 2016). Em 2017, foi detectado o evento GW170817, marcando a primeira observação de ondas gravitacionais acompanhadas de uma contrapartida eletromagnética (*gamma-ray burst*) proveniente da colisão de estrelas de nêutrons. Esse evento se tornou o primeiro exemplo de astronomia multi-mensageiro envolvendo ondas gravitacionais (ABBOTT et al., 2017a; ABBOTT et al., 2017b). Desde então, diversas detecções foram realizadas, inaugurando uma nova era de observação astronômica.

A contrapartida eletromagnética do evento GW170817 revelou assinaturas de ele-

Figura 1.1 - Decaimento orbital do PSR B1913+16. A curva representa o deslocamento da fase orbital cumulativo esperado devido a emissão de ondas gravitacionais de acordo com a relatividade geral.



Fonte: [Weisberg e Huang \(2016\)](#).

mentos pesados, como ouro e platina. Dessa forma, a coalescência de sistemas binários de estrelas de nêutrons pode fornecer informações importantes sobre a produção de elementos mais pesados que o ferro.

Por meio da detecção de ondas gravitacionais, é possível identificar sistemas binários de estrelas de nêutrons ainda na fase de espiralação, momentos antes da coalescência, restringindo uma região do céu onde pode ocorrer a emissão de raios gama. Posteriormente, os demais componentes do espectro eletromagnético podem ser detectados devido à fusão das duas estrelas de nêutrons, revelando propriedades fundamentais da matéria em alta densidade e informações sobre a síntese de elementos pesados ([ABBOTT et al., 2017b](#)).

Na teoria linearizada da gravidade na relatividade geral, as soluções das equações de campo apresentam a forma de ondas planas transversais e possuem dois estados de polarização, que representam os dois graus de liberdade radiativos ([D'INVERNO,](#)



2021). Para identificar os graus de liberdade das perturbações métricas, podemos utilizar uma decomposição por helicidade. Através dessa análise, constatamos um total de seis graus de liberdade físicos. Na relatividade geral, apenas dois desses graus são radiativos (MAGGIORE, 2018).

Até o momento, a Relatividade Geral tem sido bem-sucedida em todos os testes observacionais aos quais foi submetida. No entanto, ainda enfrenta desafios teóricos importantes, o que motiva a investigação de teorias alternativas de gravidade. Tais teorias constituem um campo de pesquisa ativo e amplamente estudado, com o objetivo de estender ou modificar a Relatividade Geral, especialmente em regimes onde seus limites se tornam evidentes. No cenário nacional, destacam-se diversos trabalhos relevantes que abordam essas temáticas, como (VILHENA et al., 2021), (ALVES et al., 2025), (ALVES et al., 2023), (FORTES; ARAUJO, 2022), (NUNES et al., 2019) e (BARROS; ROMERO, 1998a), evidenciando o engajamento da comunidade científica brasileira nesse importante campo da física teórica.

Teorias escalares-tensoriais são generalizações da teoria de Brans-Dicke, que têm como principal característica o acoplamento não mínimo de um campo escalar com a gravidade. Em uma teoria alternativa, como as teorias escalares-tensoriais, é possível identificar um ou dois graus de polarização adicionais, em comparação à relatividade geral, associados a campos escalares.

Com o desenvolvimento de detectores de ondas gravitacionais cada vez mais sensíveis, será possível realizar mais testes da relatividade geral e possivelmente de teorias alternativas. Desta forma, é fundamental estudar as características associadas à emissão de ondas gravitacionais em cada teoria, como a forma da onda, a propagação e o número de polarizações, para verificar se os sinais detectados correspondem às previsões teóricas ou exibem desvios.

Os capítulos restantes desta dissertação estão organizados da seguinte maneira:

- Capítulo 2: Este capítulo aborda a formulação da teoria linearizada da gravitação, definindo a perturbação métrica e introduzindo sua decomposição por helicidade, dividindo-se em três tipos de componentes: escalares, vetoriais e tensoriais. Em seguida, definimos os invariantes de calibre que caracterizam os graus de liberdade físicos de uma onda gravitacional. Após isso, formulamos o tensor de Einstein linearizado em termos dos invariantes de calibre. A mesma decomposição é realizada para o tensor energia-momento. Por fim, analisamos os modos de polarização de uma

onda gravitacional.

- Capítulo 3: Aqui são apresentados os resultados para as ondas gravitacionais emitidas na Relatividade Geral, descrevendo suas propriedades e sua relação com o tensor de quadrupolo da fonte emissora. Também discutimos diferentes fontes astrofísicas de ondas gravitacionais e os métodos de sua detecção.
- Capítulo 4: Este capítulo explora as teorias alternativas à Relatividade Geral, com foco na teoria de Brans-Dicke. Discutimos como essa teoria modifica as equações das ondas gravitacionais, introduzindo duas polarizações escalares adicionais aos estados de polarização tensorial previstos pela Relatividade Geral. Em seguida, apresentamos as soluções para os quatro modos de polarização de uma onda gravitacional emitida na teoria de Brans-Dicke.
- Capítulo 5: Neste capítulo, modelamos a emissão de ondas gravitacionais por sistemas binários de objetos compactos. Discutimos a evolução da frequência e da amplitude dos modos de polarização durante a fase de órbita quase circular do sistema binário. Além disso, derivamos a expressão para a potência irradiada na forma de ondas gravitacionais para os modos escalares e tensoriais.
- Capítulo 6: Apresentamos as considerações finais dos tópicos apresentados ao longo da dissertação de mestrado, destacamos as contribuições e limitações identificadas. Além disso, são discutidas as implicações dos resultados obtidos e apresentadas direções para futuras investigações, tanto no âmbito teórico quanto experimental.

Ao longo da dissertação, os índices gregos, como  $\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots$  assumem os valores  $0, 1, 2, 3$ , enquanto os índices espaciais são denotados por letras latinas,  $i, j, k, l, \dots$ , assumem  $1, 2, 3$ . A assinatura métrica utilizada será  $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$ . Também definimos,

$$\begin{aligned} x^\mu &= (x^0, \mathbf{x}), & x^0 &= ct, \\ \partial_\mu &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \partial_t, \partial_i \right), \\ d^4x &= dx^0 d^3x = c dt d^3x \end{aligned} \tag{1.1}$$

As derivadas no tempo são indicadas com  $\dot{\phantom{x}}$ , como por exemplo,  $\dot{f}(t) = \partial_t f = c \partial_0 f$ . Além disso, vamos definir  $c = 1$ .

## 2 INVARIANTES DE CALIBRE E MODOS DE POLARIZAÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS

A teoria linearizada da gravidade é uma aproximação de campo fraco, na qual o espaço-tempo é considerado plano, sendo descrito pela métrica de Minkowski,  $\eta_{\mu\nu}$ , com uma pequena perturbação  $h_{\mu\nu}$  (MISNER KIP S. THORNE, 1973). Dessa forma, a métrica  $g_{\mu\nu}$  pode ser expressa como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

devemos impor que  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ , o que permite negligenciar os termos de segunda ordem (BAMBI, 2018), também devemos impor que o espaço-tempo é assintoticamente plano, em que no infinito  $h_{\mu\nu} \rightarrow 0$  e  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$  (D'INVERNO, 2021).

Podemos também definir a métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  associada a uma perturbação  $H^{\mu\nu}$ , sob a condição de que  $|H^{\mu\nu}| \ll 1$ .

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + H^{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Dada a relação entre a métrica e a métrica inversa,  $g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho$ , podemos utilizar as Equações (2.1) e (2.2) para obter:

$$(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(\eta^{\nu\rho} + H^{\nu\rho}) = \delta_\mu^\rho + h_\mu^\rho + H_\mu^\rho + O(h^2) = \delta_\mu^\rho. \quad (2.3)$$

Desprezando os termos de segunda ordem, temos que  $H^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}$ . Então, podemos reescrever a métrica inversa como,

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

A partir das Equações (2.1) e (2.4), podemos construir o tensor de Riemann linearizado e, a partir dele, obter o tensor de Ricci, o escalar de Ricci e o tensor de Einstein na teoria linearizada. Para isso, primeiramente, precisamos determinar a expressão para os símbolos de Christoffel, que são dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.5)$$

Considerando que  $\eta_{\mu\nu}$  é constante e desprezando os termos de segunda ordem do

tipo<sup>1</sup>  $h^{\rho\sigma}\partial_\mu h_{\sigma\nu}$ ,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma}(\partial_\mu h_{\sigma\nu} + \partial_\nu h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\mu\nu}). \quad (2.6)$$

A expressão para o tensor de Riemann é dada por:

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho\Gamma_{\nu\sigma}^\mu - \partial_\sigma\Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\alpha - \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu\Gamma_{\nu\rho}^\alpha. \quad (2.7)$$

Analisando a Equação (2.6), observamos que os produtos do tipo  $\Gamma\Gamma$  resultam em termos de segunda ordem, ou seja,  $\partial h\partial h \sim \mathcal{O}(h^2)$ . Desprezando estes termos, obtemos:

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}[\partial_\nu\partial_\rho h_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\lambda\rho} - \partial_\lambda\partial_\rho h_{\nu\sigma}]. \quad (2.8)$$

Multiplicando por  $\eta_{\beta\mu}$  e considerando que,  $\eta_{\beta\mu}R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = R_{\beta\nu\rho\sigma}$  e  $\eta_{\beta\mu}\eta^{\mu\lambda} = \delta_\beta^\lambda$ . Por fim, fazendo a seguinte troca de índices  $\beta \rightarrow \mu$ , resulta:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma}). \quad (2.9)$$

O tensor de Ricci é obtido pela contração do tensor de Riemann,  $R_{\nu\sigma} = g^{\mu\rho}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Desta forma, utilizando a Equação (2.9),

$$R_{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial^\mu h_{\mu\sigma} + \partial^\rho\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\sigma h - \square h_{\nu\sigma}), \quad (2.10)$$

onde  $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$  é traço da perturbação métrica e  $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$  o D'Alembertiano do espaço plano.

Para obter o escalar de Ricci, contraímos o tensor de Ricci, portanto:

$$R = g^{\nu\sigma}R_{\nu\sigma} = (\eta^{\nu\sigma} - h^{\nu\sigma})\frac{1}{2}(\partial_\nu\partial^\mu h_{\mu\sigma} + \partial^\rho\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\nu\partial_\sigma h - \square h_{\nu\sigma}), \quad (2.11)$$

manipulando e eliminando os termos de segunda ordem da perturbação métrica, obtemos:

$$R = \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} - \square h. \quad (2.12)$$

Por fim, o tensor de Einstein é dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.13)$$

---

<sup>1</sup>Uma maneira de tornar essa simplificação mais evidente é expressar a métrica como  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu}$ , onde  $\varepsilon \ll 1$  e  $h_{\mu\nu}$  tende a zero no infinito (D'INVERNO, 2021).

Substituindo as Equações (2.10) e (2.12), obtemos o tensor de Einstein linearizado,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial^\sigma h_{\sigma\nu} + \partial^\sigma \partial_\nu h_{\mu\sigma} - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial^\sigma \partial^\rho h_{\sigma\rho} - \square h) \quad (2.14)$$

onde desprezamos os termos de segunda ordem.

## 2.1 Decomposição por helicidade

Em um contexto mais geral para a teoria de perturbações cosmológicas, o fator perturbativo  $h_{\mu\nu}$  pode ser decomposto em três setores: escalar, vetorial e tensorial, de acordo com suas propriedades em relação a rotações espaciais, definidas pela helicidade em relação a uma direção  $\hat{k}$  (MAGGIORE, 2018).

A perturbação métrica pode conter graus de liberdade não físicos, que são eliminados por transformações de calibre e descritos por equações de Poisson com solução estática, além de graus de liberdade físicos radiativos, caracterizados por equações dinâmicas do tipo Klein-Gordon, apresentando soluções do tipo onda plana.

Ao considerar a emissão de ondas gravitacionais na relatividade geral utilizando a teoria linearizada, podemos mostrar que a perturbação métrica  $h_{\mu\nu}$  apresenta quatro graus de liberdade físicos não radiativos, associados às suas componentes escalares e vetoriais, que normalmente ficam ocultas devido ao uso do calibre harmônico, e dois graus de liberdade físicos radiativos, associados à componente tensorial (FLANAGAN; HUGHES, 2005).

Considerando novamente a Equação (2.1) para uma métrica plana  $\eta_{\mu\nu}$  sujeita a uma perturbação métrica  $h_{\mu\nu}$  que se anula no infinito, podemos interpretar suas componentes da seguinte forma:  $h_{00}$  comporta-se como um escalar sob rotações,  $h_{0i}$  transforma-se como um vetor espacial, e  $h_{ij}$  como um tensor espacial (MAGGIORE, 2018). Assim, podemos decompor as componentes da perturbação métrica  $h_{\mu\nu}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} h_{00} &= 2\psi, \\ h_{0i} &= \beta_i + \partial_i \gamma, \\ h_{ij} &= -2\phi \delta_{ij} + \left( \partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \lambda + \frac{1}{2} (\partial_i \epsilon_j + \partial_j \epsilon_i) + h_{ij}^{TT}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

sendo  $\nabla^2$  o laplaciano no espaço plano. Também devemos impor as seguintes con-

dições:

$$\begin{aligned}\partial_i \beta^i &= 0, & \partial_i \epsilon^i &= 0, \\ \partial^j h_{ij}^{TT} &= 0, & \delta^{ij} h_{ij}^{TT} &= 0.\end{aligned}\tag{2.16}$$

As quantidades definidas na decomposição da Equação (2.15) são como segue:  $\psi(x)$ ,  $\phi(x)$ ,  $\gamma(x)$  e  $\lambda(x)$ , campos escalares sob rotação espacial,  $\beta^i$  e  $\epsilon^i$  são campos vetoriais transversos e  $h_{ij}^{TT}$  é um campo tensorial simétrico, transverso e sem traço.

A decomposição em helicidade pode ser melhor visualizada no espaço de Fourier. Por exemplo, seja a decomposição  $h_{0i} = \beta_i + \partial_i \gamma$ , na transformada de Fourier, usando  $\partial_i \leftrightarrow ik_i$ , temos que:

$$\tilde{h}_{0i}(\hat{k}) = \tilde{\beta}_i(\hat{k}) + ik_i \tilde{\gamma}(\hat{k}).\tag{2.17}$$

Da Equação (2.16), podemos observar que  $k_i \tilde{\beta}^i(\hat{k}) = 0$ , o que implica que  $\tilde{\beta}_i$  é um campo vetorial transverso à direção  $\hat{k}$ , e a parte longitudinal é  $\tilde{\gamma}(\hat{k})\hat{k}$ .

O campo vetorial  $\tilde{\beta}(\hat{k})$  em uma base ortonormal definida por  $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{k}\}$  é dado por  $\tilde{\beta}(\hat{k}) = \tilde{\beta}_1(\hat{k})\hat{u} + \tilde{\beta}_2(\hat{k})\hat{v}$ . Uma rotação em torno do eixo  $\hat{k}$  por um ângulo  $\alpha$  é dada por:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_1(\hat{k}) &\rightarrow \tilde{\beta}_1(\hat{k}) \cos \alpha - \tilde{\beta}_2(\hat{k}) \sin \alpha, \\ \tilde{\beta}_2(\hat{k}) &\rightarrow \tilde{\beta}_1(\hat{k}) \sin \alpha + \tilde{\beta}_2(\hat{k}) \cos \alpha.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Desta forma, definindo uma quantidade,  $\tilde{\beta}_\pm \equiv \tilde{\beta}_1 \pm i\tilde{\beta}_2$ , vemos que ela se transforma como:

$$\tilde{\beta}_\pm(\hat{k}) \rightarrow e^{\pm i\alpha} \tilde{\beta}_\pm(\hat{k}).\tag{2.19}$$

Podemos interpretar que  $\tilde{\beta}_\pm(\hat{k})$  é um autovetor da helicidade com autovalores  $h = \pm 1$  (MAGGIORE, 2018). De forma análoga, podemos mostrar que  $\psi, \phi, \gamma$  e  $\lambda$  são escalares sob rotação, então  $h = 0$ . O tensor transverso sem traço  $h_{ij}^{TT}$  com componentes  $h_+$  e  $h_\times$  sob rotação em torno do eixo  $\hat{k}$  apresenta a seguinte transformação  $h_+ \pm ih_\times \rightarrow e^{\pm 2i\alpha}(h_+ \pm ih_\times)$ , desta forma, possui helicidade  $h = \pm 2$ .

Para que a decomposição de helicidade seja invertível, devemos impor as condições de contorno no infinito, tal que:

$$\begin{aligned}\gamma &\rightarrow 0, & \lambda &\rightarrow 0, \\ \nabla^2 \lambda &\rightarrow 0, & \epsilon_i &\rightarrow 0.\end{aligned}\tag{2.20}$$

As condições apresentadas nas Equações (2.20) são extremamente úteis para definir critérios que eliminam termos dependentes de equações do tipo  $\nabla^2 f(x) = 0$  e para obter as componentes da decomposição da Equação (2.15) em termos das

componentes da perturbação métrica  $h_{\mu\nu}$ .

Para as componentes escalares  $\{\psi, \phi, \gamma, \lambda\}$ , a inversa da decomposição por helicidade é dada por:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}h_{00}, \\ \phi &= -\frac{1}{6}\delta^{ij}h_{ij}, \\ \gamma &= \nabla^{-2}(\partial^i h_{0i}), \\ \nabla^2\lambda &= -\frac{1}{2}\left(\delta^{ij} - 3\nabla^{-2}\partial^i\partial^j\right)h_{ij},\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde  $\nabla^{-2}$  representa o Laplaciano inverso. Para as componentes vetoriais  $\{\beta_i, \epsilon_i\}$ :

$$\begin{aligned}\beta^i &= P^{ij}h_{0j}, \\ \epsilon^i &= 2\nabla^{-2}P^{ik}\partial^l h_{kl},\end{aligned}\tag{2.22}$$

sendo  $P_{ij}$  um operador definido por:

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{\nabla^2}.\tag{2.23}$$

Por fim, a componente tensorial da decomposição por helicidade é dada por:

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl}h_{kl},\tag{2.24}$$

onde o operador  $\Lambda_{ij,kl}$  é dado por:

$$\Lambda_{ij,kl} = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl}\tag{2.25}$$

Considerando um vetor unitário  $\hat{n} = \mathbf{R}/R$ , paralelo à direção de propagação da onda e, conseqüentemente, normal à frente de onda, observamos que o operador  $P_{ij}$  possui a propriedade de projetar um vetor no plano formado pela frente de onda, perpendicular à direção de  $\mathbf{n}$ , no espaço de Fourier:

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j.\tag{2.26}$$

Podemos verificar que o operador  $P_{ij}$  é simétrico,  $P_{ij} = P_{ji}$ , e transversal,  $P_{ij}n^i = 0$ , e ainda possui traço  $P_{ii} = 2$ .

Com o auxílio do operador  $P_{ij}$ , podemos construir o operador  $\Lambda_{ijkl}$ , que possui a

propriedade de extrair a parte “*Transverse-Traceless*” de um tensor do tipo (0,2) (BAMBI, 2018), definido na Equação (2.25). O operador  $\Lambda_{ijkl}$  possui as seguintes propriedades: é transverso,

$$n^i \Lambda_{ijkl} = n^j \Lambda_{ijkl} = n^k \Lambda_{ijkl} = n^l \Lambda_{ijkl} = 0, \quad (2.27)$$

é sem traço em relação aos pares de índices  $(i, j)$  e  $(k, l)$ , ou seja,

$$\Lambda_{iikl} = \Lambda_{ijkk} = 0, \quad (2.28)$$

e, por fim, é simétrico sob a permutação  $(i, j) \rightarrow (k, l)$  (MAGGIORE, 2007). Desta forma, para um tensor simétrico de ordem (0,2), obtemos sua versão transversa e sem traço aplicando o operador  $\Lambda_{ijkl}$ .

## 2.2 Invariantes de calibre

Para avaliar como a perturbação métrica se comporta sob uma transformação de calibre, primeiro consideremos a seguinte mudança no sistema de coordenadas  $\{x_\mu\}$ , dada pela transformação:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu. \quad (2.29)$$

Assumindo que  $\xi^\mu$  seja um campo vetorial infinitesimal arbitrário, descrito por quatro funções de  $x^\mu$  e de mesma ordem que  $h_{\mu\nu}$  (BAMBI, 2018), a transformação inversa é dada por:

$$x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu. \quad (2.30)$$

Aplicando a transformação definida pela Equação (2.29) na métrica dada pela Equação (2.1), obtemos:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \\ &= (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \xi^\alpha)(\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \xi^\beta)(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Desprezando os termos de segunda ordem do tipo  $\partial\xi^\alpha\partial\xi^\beta$  e  $\partial\xi^\alpha h_{\alpha\beta}$ , temos que a transformação sobre a métrica é dada por:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu. \quad (2.32)$$

Também é esperado que, no novo sistema de coordenadas, a métrica apresente uma relação do tipo  $g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}$ . Assim, utilizando a Equação (2.32), podemos obter



a seguinte relação para a transformação da perturbação da métrica  $h_{\mu\nu}$ :

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu. \quad (2.33)$$

A Equação (2.33) mostra que  $h_{\mu\nu}$  não se transforma como um tensor sob transformações gerais de coordenadas. Porém, sob as transformações de Lorentz, definida por  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$  obtemos  $h'_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu h_{\alpha\beta}$ . Neste caso, a perturbação se comporta como um tensor (BAMBI, 2018).

Observando a Equação (2.33) para a transformação de calibre para a perturbação métrica, é útil realizar a decomposição em helicidade para as funções de calibre  $\xi_\mu$ :

$$\begin{aligned} \xi_0 &= A, \\ \xi_i &= B_i + \partial_i C, \end{aligned} \quad (2.34)$$

sendo que  $B_i$  é um vetor transverso,  $\partial_i B^i = 0$ ,  $A$  e  $C$  são escalares sob rotação. Manipulando as Equações (2.33), (2.15) e (2.34), obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi - \dot{A}, \\ \phi &\rightarrow \phi + \frac{1}{3} \nabla^2 C, \\ \gamma &\rightarrow \gamma - A - \dot{C}, \\ \lambda &\rightarrow \lambda - 2C, \\ \beta_i &\rightarrow \beta_i - \dot{B}_i, \\ \epsilon_i &\rightarrow \epsilon_i - 2B_i, \\ h_{ij}^{TT} &\rightarrow h_{ij}^{TT}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Na Equação (2.35), notamos que os campos escalares  $\psi$ ,  $\phi$ ,  $\gamma$  e  $\lambda$ , por simetria, dependem dos escalares  $A$  e  $C$  enquanto os campos vetoriais transversos  $\beta_i$  e  $\epsilon_i$  dependem de  $B_i$ , e o campo tensorial  $h_{ij}^{TT}$  é invariante de calibre<sup>2</sup> (MAGGIORE, 2018).

Com combinações das Equações (2.35), podemos construir invariantes de calibre para definir os campos escalares e vetoriais da decomposição (FLANAGAN; HUGHES, 2005),

$$\Phi = -\phi - \frac{1}{6} \nabla^2 \lambda, \quad (2.36)$$

---

<sup>2</sup>O fato de  $h_{ij}^{TT}$  ser invariante é consequência direta do fato de que as funções  $\xi_\mu$  se decompõem em parte de helicidade 0 e  $\pm 1$ , e  $h_{ij}^{TT}$  tem helicidade igual à  $\pm 2$

$$\Psi = -\psi + \dot{\gamma} - \frac{1}{2}\ddot{\lambda}, \quad (2.37)$$

$$\Xi_i = \beta_i - \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_i. \quad (2.38)$$

Considerando  $\Xi_i$  um vetor transversal, então  $\partial_i \Xi^i = 0$ . Desta forma, dentro da teoria linearizada, a perturbação métrica apresenta seis graus de liberdade invariantes de calibre, caracterizados por dois campos escalares  $\Phi$  e  $\Psi$ , o campo vetorial  $\Xi_i$  com dois graus de liberdade, e o campo tensorial  $h_{ij}^{TT}$  com mais dois graus de liberdade. Essas quantidades são conhecidas como variáveis de Bardeen para um espaço de fundo plano, que foram propostas inicialmente por [Bardeen \(1980\)](#) considerando uma métrica de fundo FLRW.

Podemos escolher um calibre específico e reescrever as componentes da métrica em termos dos invariantes de calibre. Por exemplo, ao escolher o calibre newtoniano (também denominado calibre de Poisson ou calibre longitudinal), definindo  $\lambda = \gamma = \beta_i = 0$ , as Equações (2.36), (2.37) e (2.38) são simplificadas, e a perturbação métrica dada pela Equação (2.15) resulta em:

$$\begin{aligned} h_{00} &= -2\Psi, \\ h_{0i} &= 0, \\ h_{ij} &= 2\Phi\delta_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_i\epsilon_j + \partial_j\epsilon_i) + h_{ij}^{TT}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde  $\dot{\epsilon}_i = -2\Xi_i$ . A escolha do calibre newtoniano e a métrica dada pela Equação (2.39) é útil quando é necessário definir alguma quantidade em termos dos invariantes de calibre  $\Psi$ ,  $\Phi$ ,  $\Xi_i$  e  $h_{ij}^{TT}$ , como por exemplo as componentes do tensor de Riemann.

### 2.3 Decomposição do tensor momento-energia

Para relacionar as componentes do tensor energia-momento com os invariantes de calibre, é necessário aplicar a decomposição em helicidade do tensor energia-momento, conforme discutido em ([FLANAGAN; HUGHES, 2005](#)). Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho, \\ T_{0i} &= S_i + \partial_i S, \\ T_{ij} &= p\delta_{ij} + \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\sigma + \frac{1}{2}(\partial_i\sigma_j + \partial_j\sigma_i) + \sigma_{ij}^{TT}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Do mesmo modo que foi feito para a perturbação da métrica por meio das Equação (2.16), vamos definir o seguinte conjunto de condições:

$$\begin{aligned}\partial_i \sigma^i &= 0, & \partial_i S^i &= 0, \\ \partial^i \sigma_{ij}^{TT} &= 0, & \delta^{ij} \sigma_{ij}^{TT} &= 0.\end{aligned}\tag{2.41}$$

O termo  $p\delta_{ij}$  representa a parte isotrópica de  $T_{ij}$ , em que  $p$  é a pressão. Os demais termos que dependem do escalar  $\sigma$ , do vetor transversal  $\sigma_i$  e do tensor  $\sigma_{ij}^{TT}$  representam a parte anisotrópica de  $T_{ij}$  (MAGGIORE, 2018). Para que a decomposição seja inversível, devemos impor as condições de contorno que no infinito temos:

$$\begin{aligned}S &\rightarrow 0, & \sigma &\rightarrow 0, \\ \nabla^2 \sigma &\rightarrow 0, & \sigma^i &\rightarrow 0.\end{aligned}\tag{2.42}$$

As relações das transformações inversas seguem de forma análoga à decomposição por helicidade para a perturbação métrica, conforme mostrado nas Equações (2.21), (2.22) e (2.24). Os principais resultados que podemos destacar são para  $\rho = T_{00}$  e  $\sigma_{ij} = \Lambda_{ij,kl} T_{kl}$ .

## 2.4 Tensor de Einstein linearizado

Uma vez que o tensor de Riemann é uma quantidade invariante de calibre, e, por consequência, o escalar e o tensor de Ricci também o são, podemos obter expressões em termos dos invariantes de calibre  $h_{ij}^{TT}$ ,  $\Psi$ ,  $\Phi$  e  $\Xi_i$  (ALVES, 2024; FLANAGAN; HUGHES, 2005).

Utilizando a decomposição por helicidade da Equação (2.16) e aplicando-a ao tensor de Riemann linearizado, dado pela Equação (2.9), obtemos:

$$R_{i0j0} = \partial_i \partial_j \Psi - \ddot{\Phi} \delta_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_i \dot{\Xi}_j + \partial_j \dot{\Xi}_i) - \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij}^{TT}.\tag{2.43}$$

Estas são as componentes “elétricas” do tensor de Riemann. Já as componentes do tensor de Ricci, Equação (2.10), são dadas por:

$$\begin{aligned}R_{00} &= \nabla^2 \Psi - 3\ddot{\Phi}, \\ R_{0i} &= -2\partial_i \dot{\Phi} - \frac{1}{2} \nabla^2 \Xi_i, \\ R_{ij} &= -\partial_i \partial_j (\Phi + \Psi) - \delta_{ij} (-\ddot{\Phi} + \nabla^2 \Phi) - \frac{1}{2}(\partial_i \dot{\Xi}_j + \partial_j \dot{\Xi}_i) - \frac{1}{2} \square h_{ij}^{TT}.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Por fim, o escalar de Ricci é dado por:

$$R = -2\nabla^2\Psi + 6\ddot{\Phi} - 4\nabla^2\Phi. \quad (2.45)$$

Utilizando os resultados das Equações (2.44) e (2.45), podemos obter o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , onde suas componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} G_{00} &= -2\nabla^2\Phi, \\ G_{0i} &= R_{0i}, \\ G_{ij} &= R_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}R. \end{aligned} \quad (2.46)$$

## 2.5 Estados de polarização de ondas gravitacionais

Como já foi mencionado, os seis graus de liberdade das ondas gravitacionais podem ser classificados como radiativos ou não radiativos, dependendo da teoria gravitacional considerada. Na Relatividade Geral, apenas a quantidade tensorial  $h_{ij}^{TT}$  é radiativa. A análise desses aspectos em diferentes teorias gravitacionais pode ser realizada por meio das variáveis de Bardeen (ALVES, 2024). Para avaliar todos os seis possíveis estados de polarização, assumimos que todas as quantidades invariantes de calibre são radiativas e independentes.

Tomamos como exemplo uma quantidade radiativa  $A = A(u_A)$ , definida no tempo retardado  $u_A$ , dado por:

$$u_A \equiv t - \frac{\mathbf{k}_A \cdot \mathbf{r}}{\omega}, \quad (2.47)$$

onde  $\mathbf{k}_A$  é o vetor de onda da onda gravitacional e  $\omega$  é a frequência angular.

A partir dessa definição, obtemos a seguinte relação:

$$\nabla A = -\frac{\mathbf{k}_A}{\omega} \dot{A}. \quad (2.48)$$

Utilizando essa relação, podemos definir a quantidade  $\eta_A$ , identificada como a relação de dispersão:

$$\eta_A(\omega) \equiv \left| \frac{\nabla A}{\dot{A}} \right| = \frac{k_A}{\omega}. \quad (2.49)$$

Em geral, cada uma das quantidades invariantes de calibre  $\{\Psi, \Phi, \Xi_i, h_{ij}^{TT}\}$  pode possuir uma relação de dispersão distinta, definida em relação a um tempo retardado

da forma  $u_A = t - \eta_A \hat{k} \cdot \mathbf{r}$ , com subíndice  $A \rightarrow \Psi, \Phi, V$  e  $T$ .

Caso  $\dot{\Psi} \neq 0$  é útil definir mais uma quantidade escalar invariante de calibre através da seguinte relação entre  $\Psi$  e  $\Phi$  (ALVES, 2024):

$$\Theta \equiv \eta_\Psi^2 \Psi - \Phi, \quad (2.50)$$

onde,

$$\eta_\Psi \equiv \left| \frac{\nabla \Psi}{\dot{\Psi}} \right|. \quad (2.51)$$

Reescrevendo as componentes elétricas do tensor de Riemann linearizado dado pela Equação (2.43), obtemos:

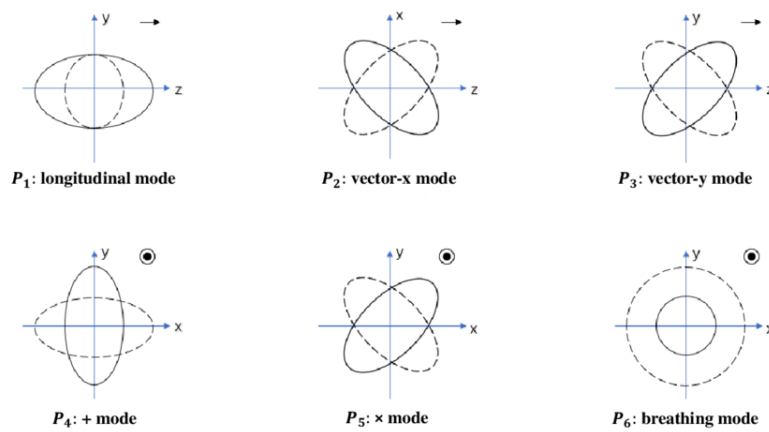
$$R_{i0j0} = \hat{k}_i \hat{k}_j \Theta'' - (\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j) \Phi'' - \frac{1}{2} \eta_V (\hat{k}_i \Xi_j'' + \hat{k}_j \Xi_i'') - \frac{1}{2} h_{ij}^{TT''}, \quad (2.52)$$

onde as linhas denotam derivadas em relação aos tempos retardados, e  $k_i$  as componentes do vetor de onda unitário.

Os seis possíveis modos de polarização das ondas gravitacionais podem ser descritos em termos das variáveis invariantes de calibre. Os dois modos tensoriais usuais são representados por  $h_{ij}^{TT}$ , enquanto os modos vetoriais estão associados ao campo  $\Xi_i$ , que, apesar de ser transversal, contribui para a curvatura tanto nas direções transversais quanto longitudinais. Já os modos escalares envolvem as quantidades  $\Phi$  e  $\Theta$ . Apesar de serem grandezas escalares, elas contribuem para a curvatura em determinadas direções. Isso ocorre devido à forma como aparecem na Equação (2.52). A quantidade  $\Phi$  está associada ao modo escalar-transversal, por meio do operador projetor  $(\delta_{ij} - \hat{k}_i \hat{k}_j)$ , enquanto  $\Theta$  descreve a polarização escalar-longitudinal, devido ao termo  $\hat{k}_i \hat{k}_j$ . Esse tratamento, baseado nas variáveis de Bardeen, permite a identificação direta dos modos de polarização sem depender de uma relação específica de dispersão (ALVES, 2024).

Na Figura 2.1, são ilustrados os efeitos dos seis possíveis estados de polarização de uma onda gravitacional sobre um anel de partículas-teste. A figura considera uma onda gravitacional que se propaga ao longo da direção do eixo  $z$ . As subfiguras P2 e P3 correspondem aos dois modos vetoriais associados à polarização  $\Xi_i$ , enquanto as subfiguras P4 e P5 representam os modos tensoriais relativos à polarização  $h_{ij}^{TT}$ . Já a subfigura P1 ilustra o modo escalar-longitudinal  $\Theta$ , e a subfigura P6, o modo escalar-transversal  $\Phi$ .

Figura 2.1 - Efeitos dos seis possíveis estados polarização de uma onda gravitacional



A figura representa os efeitos dos modos de polarização de uma ondas gravitacionais sobre um anel de partículas, considerando uma propagação ao longo da direção +z.

Fonte: [Dong e Liu \(2022\)](#).

### 3 ONDAS GRAVITACIONAIS

#### 3.1 Ondas gravitacionais na Relatividade Geral

A ação gravitacional é composta pela soma das ações de Einstein e da matéria,  $S = S_E + S_M$ , onde a primeira é dada por

$$S_E = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.1)$$

e  $S_M$  representa a contribuição da matéria. O tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  é obtido a partir da variação da ação da matéria  $S_M$  em relação à métrica  $g_{\mu\nu}$ , ou seja,

$$\delta S_M = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (3.2)$$

Variando a ação com respeito ao tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , obtemos a equação de campo de Einstein (MAGGIORE, 2007), dada por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

Por meio do tensor de Einstein dado pela Equação (2.46) e pelo tensor energia-momento dado pela Equação (2.40), obtemos as equações de campo para cada uma das componentes invariantes de calibre,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= -\frac{4\pi G}{c^4} \rho, \\ \nabla^2 \Psi &= \frac{4\pi G}{c^4} (\rho - 2\nabla^2 \sigma), \\ \nabla^2 \Xi_i &= -\frac{16\pi G}{c^4} S_i, \\ \square h_{ij}^{TT} &= -\frac{16\pi G}{c^4} \sigma_{ij}^{TT}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Observe que as equações de campo para os invariantes escalares  $\Phi$  e  $\Psi$ , assim como para o invariante vetorial  $\Xi_i$ , assumem a forma da equação de Poisson. Dessa forma, esses graus de liberdade físicos são determinados pela distribuição de matéria, porém não apresentam caráter radiativo. Apenas a perturbação tensorial  $h_{ij}^{TT}$  obedece a uma equação do tipo Klein-Gordon, admitindo soluções do tipo onda. Consequentemente, tratam-se dos únicos dois graus de liberdade físicos com comportamento radiativo (MAGGIORE, 2007).

Podemos obter uma equação envolvendo as perturbações escalares  $\Phi$  e  $\Psi$  ao combinar as duas primeiras equações de (3.4), resultando em:

$$\nabla^2(\Psi + \Phi) = -\frac{8\pi G}{c^4}\nabla^2\sigma. \quad (3.5)$$

Aplicando as condições de contorno, em que esses termos se anulam no infinito, obtemos:

$$\Phi + \Psi = -\frac{8\pi G}{c^4}\sigma. \quad (3.6)$$

Portanto, se a componente escalar do tensor energia-momento  $\sigma$  for nula, segue que  $\Psi = -\Phi$ . No vácuo, onde todas as componentes do tensor energia-momento são nulas, temos  $\Psi = \Phi = 0$  e  $\Xi_i = 0$ . Assim, apenas a perturbação tensorial permanece distinta de zero, assumindo a forma de ondas planas. Dessa maneira, concluímos que a perturbação da métrica na relatividade geral apresenta apenas dois graus de liberdade radiativos. Também observamos que, para os modos tensoriais, temos  $\eta_T = 1$ , ou seja,  $\omega = k_T$ , o que implica que as ondas gravitacionais viajam na velocidade da luz.

A equação de campo para a componente tensorial  $h_{ij}^{TT}$  é dada por:

$$\square h_{ij}^{TT} = -\frac{16\pi G}{c^4}\Lambda_{ij,kl}T_{kl} = -\frac{16\pi G}{c^4}\sigma_{ij}^{TT}. \quad (3.7)$$

A solução geral é dada por:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4G}{c^4}\Lambda_{ij,kl} \int_V \frac{T_{kl}(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|/c, \mathbf{r}')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} d^3r', \quad (3.8)$$

Desta forma, a perturbação métrica é expressa como uma integral sobre o volume  $V$ , que geralmente engloba a fonte do tensor energia-momento avaliado no tempo retardado  $t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|/c$ , onde  $\mathbf{R}$  representa a distância do observador em relação à fonte, e  $\mathbf{r}'$  é a coordenada de integração dentro da fonte.

Considerando um observador na zona radiativa, onde  $\mathbf{R} \gg |\mathbf{r}|$ , obtemos:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4G}{c^4 R} \Lambda_{ij,kl} \int_V T_{kl}(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|/c, \mathbf{r}') d^3r'. \quad (3.9)$$

Da lei de conservação do tensor energia-momento na relatividade geral,  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ ,



podemos obter veja, por exemplo em [Bambi \(2018\)](#):

$$\int_V T^{ij} d^3r = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T^{00} r^i r^j d^3x. \quad (3.10)$$

Desta forma, podemos escrever a solução para  $h_{ij}^{TT}$  como:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2G}{c^4 R} \Lambda_{ij,kl} \ddot{Q}_{kl}(t - R/c), \quad (3.11)$$

em que  $Q^{ij}$  é denominado tensor momento de quadrupolo da fonte, definido por:

$$Q^{ij}(t) = \frac{1}{c^2} \int_V T^{00}(t, \mathbf{r}) r^i r^j d^3r. \quad (3.12)$$

A partir da Equação (3.11), observamos que o modo de polarização tensorial  $h_{ij}^{TT}$  é determinado pela segunda derivada do tensor momento de quadrupolo  $Q_{ij}$ . Isso implica que a emissão de ondas gravitacionais requer certo grau de assimetria no sistema, como ocorre em eventos de coalescência de corpos compactos ou pulsação radial, entre outros. Em contrapartida, distribuições de massa em que  $Q_{ij}$  permanece constante, como sistemas com simetria esférica ou axial, não geram ondas gravitacionais ([BAMBI, 2018](#)).

No caso de simetria esférica, essa conclusão torna-se ainda mais evidente quando consideramos o teorema de Birkhoff. Esse teorema implica que, para uma distribuição de massa colapsando radialmente, a métrica externa permanece inalterada. Como consequência, a perturbação não afeta o campo gravitacional externo, impossibilitando a emissão de ondas gravitacionais ([MISNER KIP S. THORNE, 1973](#)).

A Equação (3.11) mostra que o primeiro termo mais importante para a emissão de ondas gravitacionais é o tensor momento de quadrupolo, sem contribuições de monopolo ou dipolo. Isso ocorre porque, na teoria linearizada, a fonte conserva massa e momento linear, e esses momentos estão diretamente ligados à sua conservação. Como a perturbação  $h_{ij}^{TT}$  depende das derivadas dos momentos multipolares, as contribuições de monopolo e dipolo se anulam ([MAGGIORE, 2007](#)). Mesmo em um regime não linear, o momento de quadrupolo continua sendo a principal contribuição para a emissão de ondas gravitacionais.

O tensor energia-momento associado a uma onda gravitacional na relatividade geral

é dado por (BAMBI, 2018),

$$T_{\mu\nu}^{\text{gw}} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{TT}^{ij} \partial_\nu h_{ij}^{TT} \rangle. \quad (3.13)$$

Para calcular a luminosidade de uma onda gravitacional, consideramos inicialmente o fluxo de energia da radiação gravitacional, definido como a quantidade de energia  $dE$  que atravessa um elemento de área  $dA$  de uma esfera de raio  $R$  envolvendo a fonte, em um intervalo de tempo  $dt$ . Esse fluxo é determinado pela componente  $T_{03}^{\text{gw}}$  do tensor energia-momento, de modo que:

$$\frac{dE}{dtdA} = T_{03}^{\text{gw}} = -\frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{TT}^{ij} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle. \quad (3.14)$$

Utilizando a solução da Equação (3.11) e a relação  $dA = R^2 d\Omega$ , obtemos:

$$\frac{dE}{dtd\Omega} = -\frac{G}{8\pi c^5} \langle \ddot{Q}_{TT}^{ij} \ddot{Q}_{ij}^{TT} \rangle. \quad (3.15)$$

Integrando sobre todo o ângulo sólido, obtemos a luminosidade da onda gravitacional  $L_{\text{gw}} = dE/dt$ .

Para calcular o tensor momento de quadrupolo, vamos considerar o tensor energia-momento de um sistema formado por um conjunto de partículas pontuais, indexadas por  $A$ , descrevendo uma trajetória  $x_a(t)$ . Esse tensor é dado por:

$$T_{\text{tot}}^{\mu\nu}(t, \mathbf{r}) = \sum_a \frac{p_a^\mu p_a^\nu}{\gamma_a m_a} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = \sum_a \gamma_a m_a \frac{dr_a^\mu}{dt} \frac{dr_a^\nu}{dt} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad (3.16)$$

sendo que,  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  é o fator de Lorentz, e  $p^\mu = \gamma m (dr^\mu/dt) = (E/c, \mathbf{p})$  é o 4-momento para uma partícula pontual (LANDAU; LIFSHITZ, 1980; WEINBERG, 1972). Para o caso particular onde  $\mu = \nu = 0$ ,

$$T_{\text{tot}}^{00}(t, \mathbf{r}) = \sum_a \gamma_a m_a c^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (3.17)$$

Substituindo na Equação (3.12), considerando um sistema binário e aplicando o limite não-relativístico  $\gamma \approx 1$ , obtemos:

$$Q^{ij}(t) = \sum_a^2 m_a r_a^i(t) r_a^j(t) = \mu r^i(t) r^j(t), \quad (3.18)$$

onde  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  é a massa reduzida do sistema e  $r$  a distância orbital.

Consideraremos um sistema binário descrevendo uma órbita quase-circular, com  $\dot{r} \ll \omega r$ . Vamos considerar um movimento em órbita quase circular no plano  $(x, y)$  com raio  $r = r(t)$  e velocidade angular  $\omega = \omega(t)$ , em coordenadas cartesianas dadas por:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos(\Omega(t)), \\ y(t) &= r(t) \sin(\Omega(t)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sendo que:

$$\Omega(t) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt'. \quad (3.20)$$

Utilizando a equação de movimento para calcular o tensor momento de quadrupolo e considerando um observador na direção  $\hat{n}$  definida pelos ângulos  $(\iota, \phi_0)$ , conforme definido pela Figura 3.1 onde o ângulo  $\iota$  é definido em relação ao eixo  $z$  e o ângulo  $\phi_0$  está definido em relação no plano  $xy$ . Obtemos, por meio da Equação (3.11), conforme apresentado em Maggiore (2007):

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{4}{R} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\omega}{c} \right)^{2/3} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos(2\Omega + 2\phi_0) \Big|_{t-R/c}, \\ h_\times(t) &= \frac{4}{R} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left( \frac{\omega}{c} \right)^{2/3} \cos \iota \sin(2\Omega + 2\phi_0) \Big|_{t-R/c}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que foi introduzida a *chirp mass*,  $M_c = \mu^{3/5} m^{2/5}$  e foi utilizada a terceira lei de Kepler,

$$\omega^2 = \frac{Gm}{r^3}, \quad (3.22)$$

para eliminar  $r$ . O ângulo  $\phi_0$  ainda pode ser absorvido pela fase  $\Omega(t)$  através da fase inicial  $\Omega(t_0) = \Omega_0$ .

Utilizando a Equação (3.15), encontramos que a luminosidade na forma de onda gravitacional é:

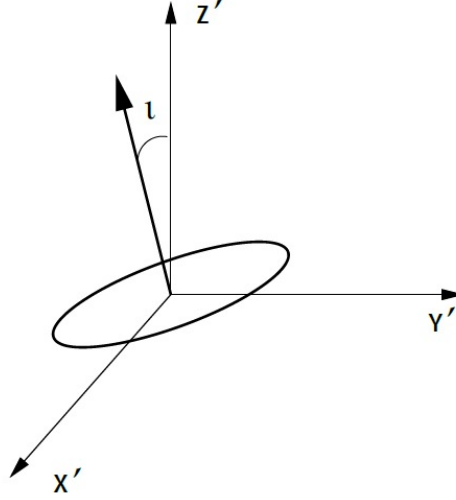
$$L_{\text{gw}} = \frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left( \frac{GM_c \omega}{c^3} \right)^{10/3}. \quad (3.23)$$

Considerando que a energia orbital de um sistema binário é dada por:

$$E_{\text{orbit}} = -\frac{Gm_1 m_2}{2R} = -\left( \frac{G^2 M_c^5 \omega^2}{8} \right)^{1/3}. \quad (3.24)$$

Podemos calcular a perda de energia orbital  $\dot{E}_{\text{orbit}}$  devido à emissão de ondas gravi-

Figura 3.1 - Representação de um sistema binário em relação a um observador.



A figura representa um sistema binário orbitando no plano  $xy$  emitindo ondas gravitacionais na direção de um observador localizado na direção  $\hat{n}$ .

Fonte: [Maggiore \(2007\)](#).

tacionais e, comparando-a com a luminosidade da radiação gravitacional, determinar a evolução da frequência orbital do sistema.

$$\dot{\omega} = \frac{96}{5} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{5/3} \omega^{11/3}. \quad (3.25)$$

Definindo o tempo para a coalescência como  $\tau \equiv t_{\text{coal}} - t$  e integrando obtemos:

$$\omega = \left( \frac{5}{256} \frac{1}{\tau} \right)^{3/8} \left( \frac{GM_c}{c^3} \right)^{-5/8}. \quad (3.26)$$

Esse resultado para  $\omega(\tau)$  descreve a evolução temporal da frequência da onda gravitacional  $\omega_{\text{gw}} = 2\omega$ , mostrando um crescimento até o momento de coalescência definido em  $\tau = 0$ . Usando a Equação (3.20) também obtemos a fase  $\Omega$ , dada por:

$$\Omega(\tau) = -2 \left( \frac{5GM_c}{c^3} \right)^{-5/8} \tau^{5/8} + \Omega_0. \quad (3.27)$$

Em que  $\Omega_0 = \Omega(\tau = 0)$  é a constante de integração. Reescrevendo o resultado para as amplitudes da onda gravitacional em termos do tempo para a coalescência  $\tau$ ,

medido pelo observador,

$$\begin{aligned} h_+(t) &= \frac{1}{R} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left( \frac{5}{c\tau} \right)^{1/4} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos[2\Omega(\tau)], \\ h_\times(t) &= \frac{1}{R} \left( \frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left( \frac{5}{c\tau} \right)^{1/4} \cos \iota \sin[2\Omega(\tau)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Observe que,  $\tau = t_{\text{coal}} - t = (t_{\text{coal}})_{\text{ret}} - t_{\text{ret}}$ . O resultado da Equação (3.28) mostra que, quando o sistema se aproxima da coalescência, a frequência e a amplitude da onda gravitacional emitida aumentam de forma semelhante ao “*chirping*” de um pássaro, como mostrado na Figura 3.2.

### 3.2 Fontes astrofísicas de ondas gravitacionais

Em linhas gerais, fontes astrofísicas de ondas gravitacionais são sistemas que movimentam uma grande quantidade de matéria e energia, que alteram a métrica (BAMBI, 2018). No entanto, sistemas que apresentam simetria esférica ou axial têm o seu momento de quadrupolo constante e, portanto, não são fontes de ondas gravitacionais.

A faixa observável de ondas gravitacionais varia aproximadamente de  $10^{-8}$  Hz, limite inferior para a técnica de *pulsar timing*, até  $10^4$  Hz, limite dos detectores terrestres (CIUFOLINI V. GORINI, 2001). Desta forma, os sistemas mais promissores para a emissão de ondas gravitacionais detectáveis são sistemas binários, especialmente aqueles compostos por objetos compactos, como estrelas de nêutrons e buracos negros, além de estrelas com deformações axiais, colapsos assimétricos e fontes estocásticas (MILLER; YUNES, 2021).

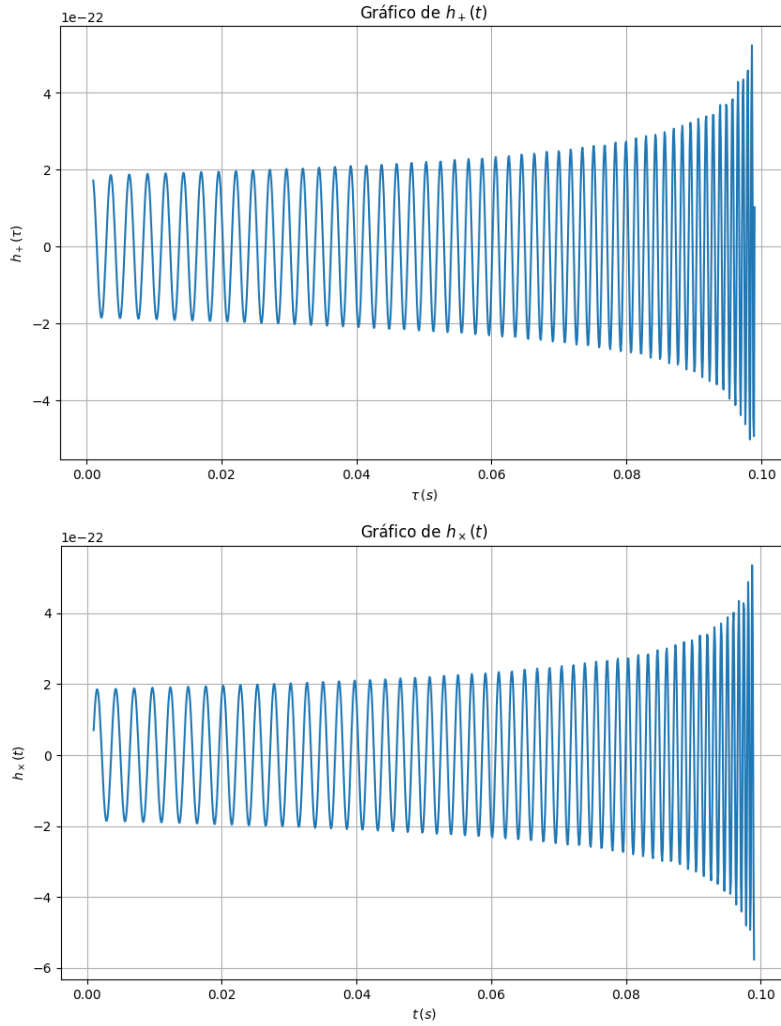
A radiação gravitacional apresenta baixa interação com a matéria, o que lhe permite viajar longas distâncias sem sofrer grandes alterações, e sua amplitude decai com o inverso da distância,  $1/r$ . Além disso, ao contrário da radiação eletromagnética, cujo comprimento de onda é muito menor que o tamanho do sistema fonte, as ondas gravitacionais, por serem geradas pelo movimento da fonte, apresentam comprimentos de onda da ordem das dimensões da própria fonte (BAMBI, 2018).

O estudo de ondas gravitacionais contribui para a caracterização de diversos sistemas astronômicos. Por exemplo, é a única radiação observável emitida diretamente por buracos negros<sup>1</sup>, sendo que as demais observações são obtidas de forma indireta

---

<sup>1</sup>Devemos destacar que um buraco negro só emite radiação gravitacional caso esteja em um sistema binário com outro objeto ou devido às oscilações para encontrar uma posição de equilíbrio

Figura 3.2 - Evolução temporal dos modos de polarização tensoriais  $h_+$  e  $h_\times$  na Relatividade Geral.



Fonte: Adaptado de [Maggiore \(2007\)](#).

(SCHUTZ, 1999). Além disso, é possível obter informações sobre outros tipos de sistemas, como binárias de estrelas de nêutrons, variáveis cataclísmicas, estrelas de nêutrons jovens, binárias de raios X de baixa massa, entre outros.

### 3.2.1 Coalescência de sistemas binários de objetos compactos

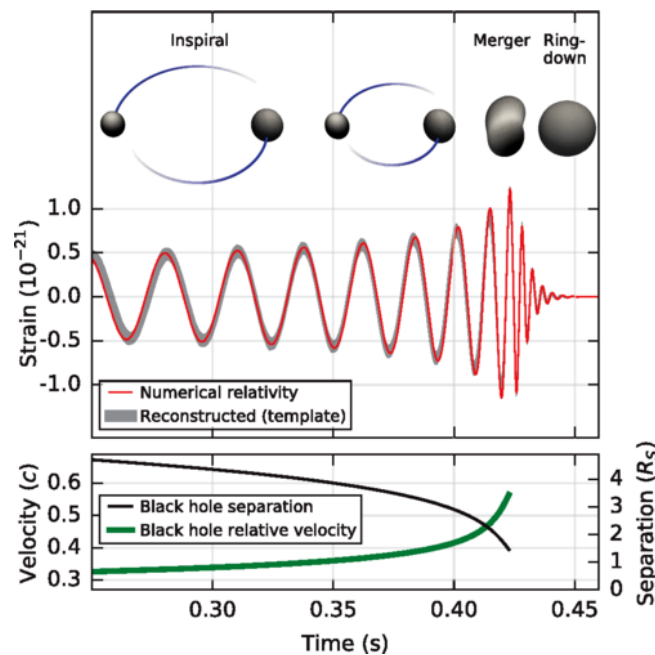
O processo de coalescência de um sistema binário formado por dois objetos compactos pode ser caracterizado por três estágios:

---

após sua formação.

- Fase espiral para o centro, em que o movimento orbital descreve uma espiral à medida que a distância orbital diminui devido à perda de energia pela emissão de ondas gravitacionais, o que leva ao aumento da frequência e da amplitude da onda. Esse processo continua até a fusão dos dois objetos.
- Fase de fusão, quando os dois objetos entram em processo de fusão após o raio orbital atingir a órbita circular estável mais interna, onde os dois objetos simplesmente mergulham um em direção ao outro.
- Fase de *Ringdown*, em que o objeto final está se estabilizando em uma configuração de equilíbrio. Um exemplo visual destas etapas é apresentada na Figura 3.3.

Figura 3.3 - Fases de coalescência para um sistema binário de objetos compactos.



A figura representa a evolução temporal da onda gravitacional e as fases de coalescência para o sistema binário de buracos negros do evento GW150914.

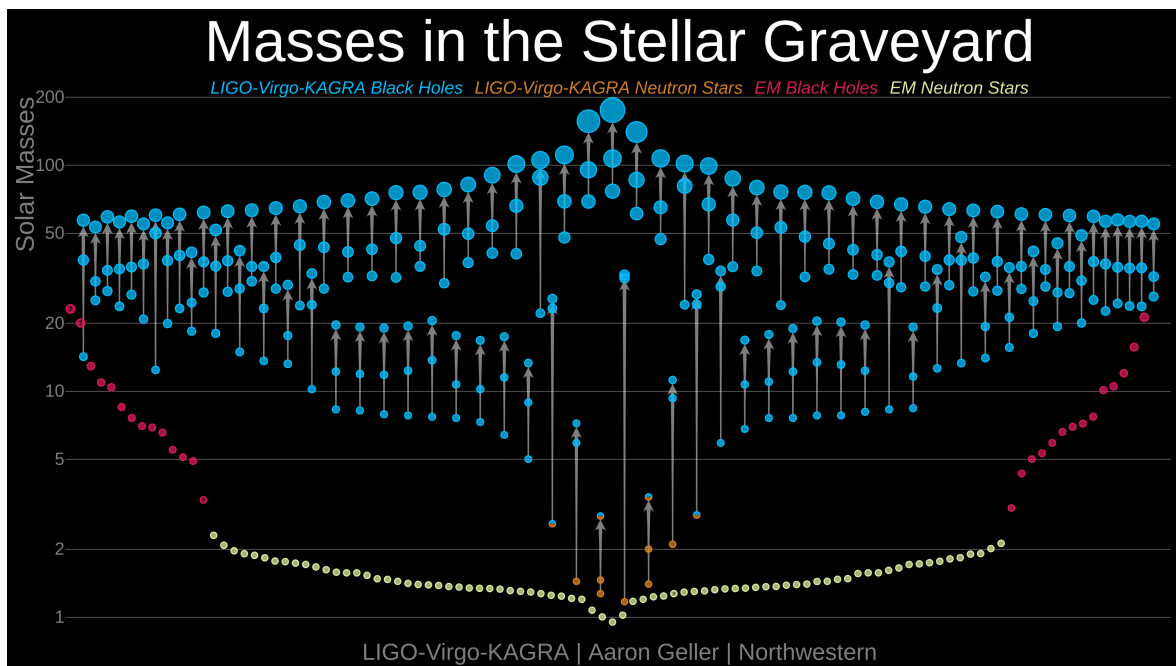
Fonte: [Abbott et al. \(2016\)](#).

Um diagrama das detecções da colaboração LIGO-Virgo-KAGRA para o terceiro catálogo transiente de ondas gravitacionais GWTC-3 é apresentada na Figura 3.4.

Sistemas binários de buracos negros são as principais fontes detectáveis de ondas gravitacionais, uma vez que os detectores terrestres estão na faixa de 10 Hz a 10 kHz e podem observar as fases finais da coalescência de buracos negros de massa estelar (BAMBI, 2018). Como já mencionado, um sistema binário de buracos negros foi responsável, em setembro de 2015, pela primeira detecção direta de ondas gravitacionais realizada pela colaboração LIGO-Virgo.

Sistemas binários de estrelas de nêutrons também são importantes na emissão de ondas gravitacionais detectáveis, embora apresentem maiores desafios em comparação com sistemas de buracos negros. Próximo ao processo de fusão, a estrela de nêutrons sofre deformações que modificam a forma da onda gravitacional.

Figura 3.4 - Diagrama das detecções da colaboração LIGO-Virgo-KAGRA.



A figura apresenta as detecções realizadas pela colaboração Ligo-Virgo-KAGRA para o terceiro Catálogo Transiente de Ondas Gravitacionais GWTC-3, em que mostra o tipo de objeto, buraco negro ou estrelas de nêutrons, a massa de cada uma das componentes e do resultado final da fusão. Em alguns casos, não é possível identificar com exatidão o tipo de objeto formado.

Fonte: LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION (2024).



### 3.2.2 Outras possíveis fontes

Uma estrela de nêutrons isolada ainda é capaz de emitir ondas gravitacionais, seja para se ajustar à posição de equilíbrio após a formação devido à rotação em casos de assimetria axial, ou para vários modos de oscilação de turbulências superfluidas do núcleo. Estudar sistemas compostos por estrelas de nêutrons oferece uma oportunidade de investigar a equação de estado da matéria em altas densidades (BAMBI, 2018).

Outra fonte são as fontes de explosão ou *bursts* de ondas gravitacionais. Esse tipo de fonte tem como característica a emissão de radiação gravitacional de curta duração na forma de explosões. Um exemplo desse tipo de fonte são as supernovas de colapso de núcleo. Considerando que o colapso não seja simétrico, as turbulências e a instabilidade do processo emitem ondas gravitacionais com duração de cerca de alguns décimos de segundo (MILLER; YUNES, 2021).

Fontes estocásticas são combinações de muitas fontes individualmente não resolvidas, geralmente associadas a fontes fracas para a detecção individual ou a processos envolvendo o universo primordial. Essas fontes formam um fundo de ondas gravitacionais (MILLER; YUNES, 2021). Em junho de 2023, foi anunciada a evidência de um sinal estocástico de ondas gravitacionais utilizando 15 anos de dados observacionais coletados pelo Observatório Norte-Americano Nanohertz para Ondas Gravitacionais (AGAZIE et al., 2023). Esse observatório utiliza a técnica de pulsar timing para a detecção de ondas gravitacionais.

### 3.3 Detectores de ondas gravitacionais

Um detector de ondas gravitacionais tem como objetivo monitorar a mudança na distância própria entre corpos teste causada pela passagem da radiação gravitacional (MILLER; YUNES, 2021). Se  $L$  é a distância própria das partículas teste e  $\Delta L$  a variação devido à passagem da onda gravitacional, então a deformação medida pelo detector é dada por  $h = \Delta L/L$ , chamada de *strain*.

A detecção direta de ondas gravitacionais apresenta um grande desafio devido ao baixo valor esperado para a deformação, da ordem de  $h \sim 10^{-20}$ . Para o raio da Terra,  $R \approx 6\,000$  km, isso corresponderia a uma variação de aproximadamente  $\Delta R = 60 \times 10^{-15}$  m, que é muito menor que o raio atômico,  $1\text{\AA} = 10^{-10}$  m.

Na década de 1960, Joseph Weber desenvolveu o primeiro detector de ondas gravitacionais, baseado no modelo de detectores ressonantes. Ele construiu uma barra

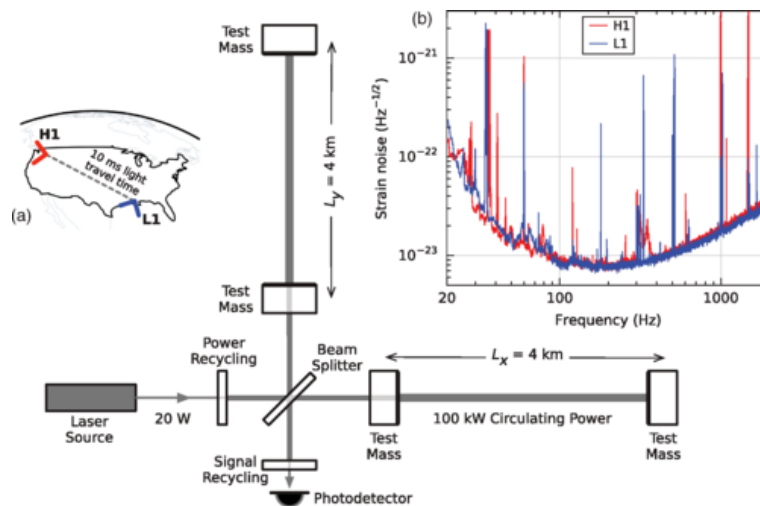
cilíndrica de alumínio com cerca de  $2 \times 10^3$  kg, mantida a aproximadamente 300 K. A sensibilidade dos primeiros protótipos era da ordem de  $10^{-13}$  a  $10^{-14}$  (CIUFOLINI V. GORINI, 2001), tendo sido posteriormente aprimorada para alcançar  $10^{-19}$ .

Exemplos de detectores desse modelo incluem os de barra cilíndrica, como o EXPLORER, ALLEGRO, NAUTILUS e AURIGA, e os detectores esféricos como MiniGRAIL e Mario Schenberg. Embora os detectores esféricos apresentem desafios tecnológicos, oferecem muitas vantagens, como a capacidade de detectar ondas gravitacionais vindas de qualquer direção. Por volta de 2010, por não conseguir competir com os detectores interferométricos, os experimentos com detectores ressonantes foram encerrados (BAMBI, 2018).

Detectores interferométricos para a observação de ondas gravitacionais são baseados no interferômetro de Michelson. A partir do padrão de interferência, é possível inferir a deformação do comprimento dos braços causada pela passagem de uma onda gravitacional e, conseqüentemente, medir seu sinal.

Alguns exemplos de detectores desse tipo são o LIGO, Virgo e KAGRA, que possuem braços de 4 km e 3 km, respectivamente (CIUFOLINI V. GORINI, 2001). A Figura 3.5 ilustra a disposição dos espelhos e do laser no interferômetro do LIGO.

Figura 3.5 - Diagrama simplificado de um detector Advanced LIGO.



Fonte: Abbott et al. (2016).

Uma onda gravitacional pode causar uma alteração no tempo de chegada do sinal de um pulsar na Terra. Como os pulsares são considerados relógios muito precisos, podemos estimar uma variação do sinal na ordem de nanossegundos ([HOBBS et al., 2010](#)). Os pulsares estão a uma distância da ordem de 1 a 10 kpc e podem detectar ondas gravitacionais de frequências muito baixas, como as emitidas por sistemas binários de dois buracos negros supermassivos e as ondas gravitacionais produzidas no Universo primordial. O International Pulsar Timing Array (IPTA) é uma colaboração internacional que une os grupos European Pulsar Timing Array (EPTA), o Parkes Pulsar Timing Array (PPTA) e o North American Nanohertz Observatory for Gravitational Waves (NANOGrav) ([HOBBS et al., 2010](#))



## 4 TEORIAS ESCALARES-TENSORIAIS: TEORIA DE BRANS-DICKE

A relatividade de Einstein é uma teoria que descreve a gravidade como a geometria do espaço-tempo, onde o elemento fundamental é um campo tensorial métrico. G. Nodström já tinha proposto uma teoria escalar da gravidade, mas, por não possuir uma natureza geométrica, acabou sendo deixada de lado (FARAONI, 2004).

Com as confirmações através das evidências experimentais, a teoria geral da relatividade de Einstein foi estabelecida como teoria padrão da gravitação. Porém, por várias razões, diversas teorias alternativas foram propostas. Uma delas é a chamada teoria escalar-tensorial, que é construída com base na relatividade geral e um campo escalar por meio de um acoplamento não-mínimo (FUJII, 2004). As teorias escalares-tensoriais têm como protótipo a teoria de Brans-Dicke, que inicialmente foi proposta por Jordan e em seguida assumida por C. Brans e R. H. Dicke.

Existem várias razões para o interesse contínuo nas teorias de Brans-Dicke e escalares-tensoriais, incluindo sua capacidade de incorporar princípios como a teoria de Mach e a possibilidade de explorar efeitos além da relatividade geral em contextos astrofísicos e cosmológicos. Por exemplo, o modo como o campo escalar e a métrica descrevem o campo gravitacional é característico para as supercordas, supergravidade e teoria-M. Além disso, a teoria de Brans-Dicke apresenta uma invariância sob transformações semelhantes das teorias de cordas em alta energia. Por último, uma teoria de Brans-Dicke com  $\omega = -1$  corresponde ao limite de baixa energia da teoria das cordas bosônicas (FARAONI, 2004).

### 4.1 Ação na teoria de Brans-Dicke

O protótipo para as teorias escalares-tensoriais é a chamada teoria da gravidade de Jordan-Fierz-Brans-Dicke ou simplesmente teoria de Brans-Dicke, onde por meio do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e de um campo escalar  $\varphi$  é possível descrever o campo gravitacional (FARAONI, 2004). Definida a ação:

$$S^{(\text{BD})} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \varphi R - \frac{\omega(\varphi)}{\varphi} g^{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi \nabla_\mu \varphi - V(\varphi) \right] + S^{(m)}, \quad (4.1)$$

sendo que,  $\omega(\varphi)$  é um parâmetro adimensional.  $V(\varphi)$  é o potencial do campo escalar, sendo uma generalização da constante cosmológica. O objetivo do desenvolvimento da teoria de Brans-Dicke foi incorporar o princípio de Mach, que não está de forma completa ou explícita na relatividade geral (FARAONI, 2004).

A ação descrita pela matéria  $S^{(m)}$  para um sistema de partículas pontuais com massa  $m(\varphi)$  e tempo próprio  $\tau$  pode ser definida da seguinte forma,

$$S^{(m)} = - \sum_a \int m_a(\varphi) d\tau_a. \quad (4.2)$$

A dependência da massa em relação ao campo escalar decorre de sua influência na autogravidade de objetos compactos (LIU et al., 2020). Como consequência, o acoplamento do campo escalar com a matéria diretamente na ação viola o princípio de equivalência fraco (WEP), tornando a lei de conservação covariante do tensor energia-momento da matéria,  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , inválida, exigindo um termo de correção (FUJII, 2004). Isso implica que o movimento de uma massa pontual deixa de seguir uma trajetória geodésica, um efeito conhecido como efeito Nordtvedt (ALSING et al., 2012).

Variando a ação da Equação (4.1) com relação à métrica e ao campo escalar, obtemos as seguintes equações de campo,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\varphi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega(\varphi)}{\varphi^2} \left( \nabla_\mu \varphi \nabla_\nu \varphi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \varphi \nabla_\alpha \varphi \right) + \frac{1}{\varphi} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) \varphi - \frac{V(\varphi)}{2\varphi} g_{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

$$\square \varphi - \frac{1}{2\omega(\varphi) + 3} \left( \varphi \frac{dV}{d\varphi} - 2V(\varphi) \right) = \frac{8\pi}{2\omega(\varphi) + 3} \left( T - 2\varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{2\omega(\varphi) + 3} \left( \frac{d\omega}{d\varphi} \nabla^\alpha \varphi \nabla_\alpha \varphi \right), \quad (4.4)$$

em que  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein, já definido na Equação (2.13). O tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  continua sendo dado pela Equação (3.16), porém, devemos considerar que  $m_a = m_a(\varphi)$ . O seu traço é dado por  $T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ , como  $g_{\mu\nu} p_a^\mu p_a^\nu = -m_a^2 c^2$ , considerando  $c = 1$ , temos:

$$T = - \sum_a \frac{m_a(\varphi)}{\gamma_a} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (4.5)$$

Nas Equações (4.1) e (4.3) verificamos que o campo escalar  $\varphi$  aparece no denominador de alguns termos, que pode indicar um papel do inverso do acoplamento gravitacional,

$$G_{\text{eff}}(\varphi) = \frac{1}{\varphi}. \quad (4.6)$$

O parâmetro  $\omega(\varphi)$  é um parâmetro livre também chamado de função de acoplamento

que está associado ao fenômeno de escalarização espontânea (RAMAZANOĞLU; PRETORIUS, 2016), onde quanto maior o seu valor, mais próximo a gravidade de Brans-Dicke está da relatividade geral (ROMERO; BARROS, 1993; BARROS; ROMERO, 1998b).

Aplicando a identidade de Bianchi nas equações de campo (4.3) e (4.4), resulta em (LIU et al., 2020):

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \partial_\nu \varphi = 0. \quad (4.7)$$

Observe que, caso a ação descrita pela matéria  $S^{(m)}$  não tenha uma dependência direta com o campo escalar  $\varphi$ , a Equação (4.7) se torna,  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$  (FUJII, 2004).

## 4.2 Equações de campo no limite de campo fraco

Podemos ainda considerar a métrica plana com uma pequena perturbação conforme a Equação (2.1), já o campo escalar  $\varphi$  pode ser expandido em torno de  $\varphi_0$ , valor de  $\varphi$  no fundo plano, da seguinte forma:

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi, \quad \delta\varphi \ll \varphi_0. \quad (4.8)$$

De forma semelhante, devemos ainda expandir o potencial  $V(\varphi)$  e o parâmetro  $\omega(\varphi)$  em torno de  $\varphi_0$ ,

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + V'(\varphi_0)\delta\varphi + \frac{1}{2}V''(\varphi_0)\delta\varphi^2 + \mathcal{O}(\delta\varphi^3), \quad (4.9)$$

$$\omega(\varphi) = \omega_0 + \omega_1\delta\varphi + \frac{1}{2}\omega_2\delta\varphi^2 + \mathcal{O}(\delta\varphi^3). \quad (4.10)$$

Onde  $' \equiv d/d\varphi$ ,  $\omega_0 \equiv \omega(\varphi_0)$ ,  $\omega_1 \equiv \omega'(\varphi_0)$  e  $\omega_2 = \omega''(\varphi_0)$ . Impondo as condições de contorno em que o espaço-tempo seja assintoticamente plano com  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  e  $\varphi = \varphi_0$ , temos que,  $V(\varphi_0) = V'(\varphi_0) = 0$  (SOTIRIOU; FARAONI, 2012). Devido à dependência da massa das partículas com o campo escalar  $\varphi$  também precisamos de uma expansão em torno de  $\varphi_0$ ,

$$m_a(\varphi) = m_a(\varphi_0) \left[ 1 + s_a \left( \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right) - \frac{1}{2} (s'_a - s_a^2 + s_a) \left( \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right)^2 + \mathcal{O} \left( \left( \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right)^3 \right) \right], \quad (4.11)$$

sendo que,  $m_a(\varphi_0) = m_a$  e apresentamos  $s_a$  e  $s'_a$  como “primeira e segunda sensibi-

lidades” respectivamente, definidas por (EARDLEY, 1975):

$$s_a = - \left. \frac{\partial(\ln m_a)}{\partial(\ln \varphi)} \right|_{\varphi_0}, \quad s'_a = - \left. \frac{\partial^2(\ln m_a)}{\partial(\ln \varphi)^2} \right|_{\varphi_0}. \quad (4.12)$$

A “sensibilidade” tem relação direta com a energia de ligação gravitacional de um objeto (ZAGLAUER, 1992). Para estrelas de nêutrons, temos um valor típico de  $s_a \sim 0.2$ , já para buracos negros  $s_a = 1/2$ .

Substituindo as Equações (4.8), (4.9) e (4.10) na equação do campo escalar (4.4) e eliminando os termos de segunda ordem em  $\delta\varphi$ , obtemos:

$$(\square - m_s^2)\delta\varphi = \frac{8\pi}{2\omega_0 + 3} \left( T - 2(\varphi_0 + \delta\varphi) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right), \quad (4.13)$$

onde  $m_s$  é definido como a massa do campo escalar dado por:

$$m_s^2 = - \frac{\varphi_0}{2\omega_0 + 3} V''(\varphi_0). \quad (4.14)$$

Podemos ainda definir um termo fonte  $T_\varphi$  para o campo escalar, dado por:

$$T_\varphi = - \frac{1}{2(2\omega_0 + 3)} \left( T - 2(\varphi_0 + \delta\varphi) \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right), \quad (4.15)$$

e reescrever a Equação (4.13) da seguinte forma:

$$(\square - m_s^2)\delta\varphi = -16\pi T_\varphi. \quad (4.16)$$

Utilizando a expansão da massa pelo campo escalar dado pela Equação (4.11) na definição do traço do tensor energia-momento na Equação (4.5), considerando até o termo de primeira ordem em  $\delta\varphi$  obtemos:

$$T = - \sum_a m_a \left( 1 + s_a \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (4.17)$$

também estamos considerando um sistema não relativístico, com  $\gamma \sim 1$ . Substituindo na Equação (4.15):

$$T_\varphi = \frac{1}{2(2\omega_0 + 3)} \sum_a m_a \left[ (1 - 2s_a) - s_a \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right] \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (4.18)$$

Podemos notar que os termos de ordem  $\delta\varphi/\varphi_0$  e superiores presentes no termo fonte



estão relacionados a correções de natureza pós-newtoniana (WILL, 2018; MIRSHEKARI; WILL, 2013). Para uma primeira análise, será considerado apenas o termo de ordem zero.

Para a equação do campo tensorial dada pela Equação (4.3), considerando  $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_0 + \delta\varphi} \sim \frac{1}{\varphi_0}$  e eliminando os termos de segunda ordem e superior como  $\delta\varphi^2$ ,  $h^2$  e  $h\delta\varphi$ , obtemos:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\varphi_0} T_{\mu\nu} - (\eta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \frac{\delta\varphi}{\varphi_0}. \quad (4.19)$$

Para obter as equações de campo para os invariantes de calibre  $h_{ij}^{TT}$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  e  $\Xi^i$ , vamos utilizar as componentes do tensor de Einstein linearizado dado pela Equação (2.46). Primeiro, fazendo  $\mu = \nu = 0$ , temos:

$$G_{00} = \frac{8\pi}{\varphi_0} T_{00} - (\eta_{00} \square - \partial_0 \partial_0) \frac{\delta\varphi}{\varphi_0}. \quad (4.20)$$

Utilizando o primeiro resultado da Equação (2.46) e a componente  $T_{00}$  da decomposição do tensor energia-momento dado pela Equação (2.40), obtemos a equação de campo para  $\Phi$ , dado por:

$$\nabla^2 \left( \Phi + \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right) = -\frac{4\pi}{\varphi_0} \rho. \quad (4.21)$$

Tomando  $\mu = 0$  e  $\nu = i$ , na Equação (4.19), temos:

$$G_{0i} = R_{0i} = \frac{8\pi}{\varphi_0} T_{0i} - (\eta_{0i} \square - \partial_0 \partial_i) \frac{\delta\varphi}{\varphi_0}, \quad (4.22)$$

e novamente, utilizando as Equações (2.40), (2.46) e (2.44):

$$\nabla^2 \Xi_i = -\frac{16\pi}{\varphi_0} S_i - 4\partial_i \left( \dot{\Phi} + \frac{1}{2} \frac{\delta\dot{\varphi}}{\varphi_0} + \frac{4\pi}{\varphi_0} S \right). \quad (4.23)$$

Aplicando  $\partial^i$  e tomando  $\partial^i \Xi = 0$  e  $\partial^i S_i = 0$ , obtemos:

$$\nabla^2 \left( \dot{\Phi} + \frac{1}{2} \frac{\delta\dot{\varphi}}{\varphi_0} + \frac{4\pi}{\varphi_0} S \right) = 0. \quad (4.24)$$

Como uma equação de Laplace do tipo  $\nabla^2 f(x) = 0$ , com condição de contorno

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , possui solução  $f(x) = 0$  (MAGGIORE, 2018), então:

$$\dot{\Phi} + \frac{1}{2} \frac{\delta \dot{\varphi}}{\varphi_0} + \frac{4\pi}{\varphi_0} S = 0. \quad (4.25)$$

Por fim, retornando   Equação (4.23), obtemos:

$$\nabla^2 \Xi_i = -\frac{16\pi}{\varphi_0} S_i. \quad (4.26)$$

Agora, para obter a equação de campo para  $\Psi$ , primeiro vamos aplicar  $\eta_{\mu\nu}$  para tomar o traço da Equação (4.19), desta forma obtemos:

$$-R = \frac{8\pi}{\varphi_0} T - 3\Box \frac{\delta\varphi}{\varphi_0}. \quad (4.27)$$

Verificando a decomposição do tensor energia-momento dado pela Equação (2.40), podemos verificar que seu traço    $T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\rho + 3p$ . Então utilizando (2.45) e reorganizando, obtemos:

$$\nabla^2 \left[ \Psi + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right) \right] = \frac{4\pi}{\varphi_0} (-\rho + 3p) + 3 \left( \ddot{\Phi} + \frac{1}{2} \frac{\delta \ddot{\varphi}}{\varphi_0} \right) - 2\nabla^2 \left[ \Phi + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right) \right]. \quad (4.28)$$

Por fim, observando as Equações (4.25) e (4.21), obtemos a equação de campo associada ao escalar  $\Psi$ :

$$\nabla^2 \left( \Psi + \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right) = \frac{4\pi}{\varphi_0} (\rho + 3p - 3\dot{S}). \quad (4.29)$$

Agora, para obter a equação de campo para  $h_{ij}^{TT}$  devemos fazer  $\mu = i$  e  $\nu = j$  na Equação (4.19):

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} R = \frac{8\pi}{\varphi_0} T_{ij} - (\eta_{ij} \Box - \partial_i \partial_j) \frac{\delta\varphi}{\varphi_0}. \quad (4.30)$$

Tomando as Equações (2.44),

$$\begin{aligned} \Box h_{ij}^{TT} = & -\frac{16\pi}{\varphi_0} \sigma_{ij}^{TT} - \partial_i \left( \dot{\Xi}_j + \frac{8\pi}{\varphi_0} \sigma_j \right) - \partial_j \left( \dot{\Xi}_i + \frac{8\pi}{\varphi_0} \sigma_i \right) \\ & - 2\partial_i \partial_j \left( \Phi + \Psi + \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} + \frac{8\pi}{\varphi_0} \sigma \right) - \frac{8\pi}{\varphi_0} \left( \dot{S} - p - \frac{2}{3} \nabla^2 \sigma \right) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Aplicando  $\partial^j$ , e utilizando o fato de que as quantidades  $\partial^j h_{ij}^{TT}$ ,  $\partial^j \sigma_{ij}^{TT}$ ,  $\partial^j \Xi_j$  se

anulam, podemos encontrar as seguintes relações entre as componentes do tensor energia-momento <sup>1</sup>:

$$p - \dot{S} + \frac{2}{3}\nabla^2\sigma = 0, \quad (4.32)$$

$$\dot{S}_i = \frac{1}{2}\nabla^2\sigma_i. \quad (4.33)$$

Utilizando as relações (4.32) e (4.33) nas equações de campo (4.21), (4.29) e (4.26), obtemos ainda que:

$$\dot{\Xi}_i + \frac{8\pi}{\varphi_0}\sigma_i = 0, \quad (4.34)$$

$$\Phi + \Psi + \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} + \frac{8\pi}{\varphi_0}\sigma = 0. \quad (4.35)$$

Desta forma, utilizando os resultados acima na Equação (4.31) obtemos finalmente a equação de campo associada às polarizações tensoriais  $h_{ij}^{TT}$ :

$$\square h_{ij}^{TT} = -\frac{16\pi}{\varphi_0}\sigma_{ij}^{TT}. \quad (4.36)$$

A partir das Equações (4.21), (4.29), (4.26) e (4.36), verificamos que a teoria de Brans-Dicke possui quatro graus de liberdade radiativos, sendo dois associados à componente tensorial  $h_{ij}^{TT}$  e os outros dois às componentes escalares  $\Phi$  e  $\Psi$ . O campo vetorial  $\Xi_i$  admite uma solução estática, assim como na Relatividade Geral, sendo nulo na ausência de matéria.

Note-se que as Equações (4.21) e (4.29) assumem a forma de uma equação de Poisson, o que implica soluções estáticas — assim como ocorre com a equação associada ao campo  $\Xi_i$ . O caráter estático dessas soluções está relacionado a combinações entre a perturbação do campo escalar  $\delta\varphi$  e os invariantes de calibre  $\Phi$  e  $\Psi$ . Isso significa que as soluções das componentes escalares podem ser escritas como uma combinação de um termo estático com um termo de onda:

$$\Phi = \Phi^{\text{gw}} + \Phi^{\text{static}}, \quad \Psi = \Psi^{\text{gw}} + \Psi^{\text{static}}, \quad (4.37)$$

---

<sup>1</sup>Essas relações ocorrem na Relatividade Geral de forma geral, a partir da conservação de energia-momento,  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ . No entanto, como na teoria de Brans-Dicke essa condição é modificada, as relações entre as componentes do tensor energia-momento estão restritas ao regime de teoria linearizada.

em que,

$$\Phi^{\text{gw}} = \Psi^{\text{gw}} = -\frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0}. \quad (4.38)$$

Como o objetivo é o estudo da emissão de ondas gravitacionais, apenas o termo de onda será considerado. Os detalhes desse resultado serão melhor explorados na próxima seção.

#### 4.2.1 Movimento de partículas pontuais na ordem Newtoniana

Para derivar as soluções dos estados de polarização na teoria de Brans-Dicke, vamos primeiro analisar as equações de movimento na ordem Newtoniana das partículas que geram as ondas gravitacionais. Considerando o tensor energia-momento no limite newtoniano, temos:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho^* + \mathcal{O}(\rho^* \epsilon^2), \\ T_{0i} &= \mathcal{O}(\rho^* \epsilon), \\ T_{ij} &= \mathcal{O}(\rho^* \epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Definimos a densidade  $\rho^* = \sum_a m_a \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a)$  (LIU et al., 2020). No limite newtoniano, a solução para o campo escalar  $\delta\varphi$  é independente do tempo. Portanto, na Equação (4.13), temos que  $\square\delta\varphi \rightarrow \nabla^2\delta\varphi$ :

$$(\nabla^2 - m_s^2)\delta\varphi = -16\pi T_\varphi. \quad (4.40)$$

Considerando até a ordem zero da Equação (4.18), temos:

$$(\nabla^2 - m_s^2)\delta\varphi = -\frac{8\pi}{2\omega_0 + 3} \sum_a m_a (1 - 2s_a) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a), \quad (4.41)$$

cuja solução é do tipo, conforme apresentado por Liu et al. (2020):

$$\delta\varphi = \frac{2}{2\omega_0 + 3} U_s, \quad (4.42)$$

onde  $U_s$  é definido por:

$$U_s = \sum_a \frac{m_a (1 - 2s_a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|} e^{-m_s |\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|}. \quad (4.43)$$

Para o invariante de calibre escalar  $\Phi$ , sua equação, dada por (4.21), torna-se:

$$\nabla^2 \left( \Phi + \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right) = -\frac{4\pi}{\varphi_0} \rho^* = -\frac{4\pi}{\varphi_0} \sum_a m_a \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_a). \quad (4.44)$$

A solução desta equação é:

$$\Phi + \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} = \frac{U}{\varphi_0}, \quad (4.45)$$

onde  $U$  é dado por:

$$U = \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_a|}. \quad (4.46)$$

Por fim com as Equações (4.42) e (4.43), obtemos:

$$\Phi = \frac{1}{\varphi_0} \left( U - \frac{1}{2\omega_0 + 3} U_s \right). \quad (4.47)$$

De maneira análoga, para o escalar  $\Psi$  definido pela Equação (4.29), obtemos:

$$\nabla^2 \left( \Psi + \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right) = \frac{4\pi}{\varphi_0} \rho^*. \quad (4.48)$$

Observa-se que a solução para o escalar  $\Psi$  apresenta uma forma semelhante àquela obtida para o escalar  $\Phi$ , de modo que:

$$\Psi = -\frac{1}{\varphi_0} \left( U + \frac{1}{2\omega_0 + 3} U_s \right). \quad (4.49)$$

Para o invariante vetorial  $\Xi_i$ , temos:

$$\nabla^2 \Xi_i = 0 \quad \rightarrow \quad \Xi_i = 0. \quad (4.50)$$

No caso do invariante tensorial  $h_{ij}^{TT}$ , dado pela Equação (4.36), temos a mesma situação apresentada no campo escalar  $\delta\varphi$ , onde  $\square h_{ij}^{TT} \rightarrow \nabla^2 h_{ij}^{TT}$ , resultando em:

$$\nabla^2 h_{ij}^{TT} = 0 \quad \rightarrow \quad h_{ij}^{TT} = 0. \quad (4.51)$$

Dessa forma, a perturbação métrica  $h_{\mu\nu}$ , no calibre newtoniano dado pela Equação (2.39), pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} h_{00} &= \frac{2}{\varphi_0} \left( U + \frac{1}{2\omega_0 + 3} U_s \right), \\ h_{0i} &= 0, \\ h_{ij} &= \frac{2}{\varphi_0} \left( U - \frac{1}{2\omega_0 + 3} U_s \right) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Utilizando a definição do tensor energia-momento fornecida pela Equação (3.16), obtemos uma equação geodésica modificada devido à dependência da massa com o

campo escalar:

$$m_a(\varphi)u_a^\mu\nabla_\mu u_a^\nu + \frac{dm_a(\varphi)}{d\varphi}(g^{\mu\nu} + u_a^\mu u_a^\nu)\nabla_\mu\varphi = 0. \quad (4.53)$$

No limite Newtoniano, temos:

$$\frac{d^2 x_a^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i - \frac{1}{\phi} \frac{d \ln m_a(\varphi)}{d \ln \varphi} \partial_i \varphi. \quad (4.54)$$

Na teoria linearizada, os símbolos de Christoffel são dados pela Equação (2.6) e podemos utilizar o resultado da perturbação métrica na Equação (4.52) para obter:

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2}\partial_i h_{00} = -\frac{1}{\varphi_0} \left( U + \frac{1}{2\omega_0 + 3} U_s \right). \quad (4.55)$$

O segundo termo da Equação (4.54), no limite newtoniano, considerando a definição da sensibilidade  $s_a$ , pode ser aproximado da seguinte forma:

$$\frac{1}{\varphi} \frac{d \ln m_a(\varphi)}{d \ln \varphi} \sim \frac{s_a}{\varphi_0}. \quad (4.56)$$

Deste modo, a equação geodésica é dada por:

$$\frac{d^2 x_a^i}{dt^2} = \partial_i \left( \frac{1}{2} h_{00} - s_a \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right). \quad (4.57)$$

Substituindo o resultado do campo escalar  $\delta\varphi$  no limite Newtoniano, dado pela Equação (4.42), e a componente  $h_{00}$  da perturbação métrica dada pela Equação (4.52), temos:

$$\frac{d^2 x_a^i}{dt^2} = -\partial_i \left( -\frac{U}{\varphi_0} - \frac{(1 - 2s_a)}{\varphi_0(2\omega_0 + 3)} U_s \right). \quad (4.58)$$

Substituindo as definições de  $U_s$  e  $U$ , Equações (4.43) e (4.46), podemos identificar o potencial newtoniano  $V$ , comparando com o resultado conhecido  $\ddot{x} = -\partial_i V$  (D'INVERNO, 2021), desta forma

$$V = -\frac{1}{\varphi_0} \sum_b \frac{m_b}{r_{ab}} \left( 1 + \frac{1}{2\omega_0 + 3} (1 - 2s_a)(1 - 2s_b) e^{-m_s r_{ab}} \right), \quad (4.59)$$

onde  $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ . Observamos que os termos de ordem newtoniana são alterados pela presença de campos massivos, com o potencial newtoniano recebendo uma correção no formato de Yukawa (ALSING et al., 2012).

Por fim, obtemos a seguinte equação de movimento:

$$\frac{d^2 \mathbf{x}_a}{dt^2} = -\frac{1}{\varphi_0} \sum_b \frac{m_b \mathbf{r}_{ab}}{r_{ab}^3} \left[ 1 + (1 - 2s_a)(1 - 2s_b)(1 + m_s r_{ab}) \frac{e^{-m_s r_{ab}}}{2\omega_0 + 3} \right]. \quad (4.60)$$

Essa é a equação de movimento na ordem Newtoniana de uma partícula pontual de massa  $m_a$  devido ao campo gravitacional gerado por um conjunto de partículas de massa  $m_b$  a uma distância  $\mathbf{r}_{ab} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b$ .

#### 4.2.2 Sistema binário descrevendo uma órbita quase-circular

Considerando um sistema binário composto por dois objetos de massa  $m_1(\varphi)$  e  $m_2(\varphi)$ , localizados respectivamente em  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$ , e separados por uma distância  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ , obtemos as equações de movimento:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \frac{1}{\varphi_0} \frac{m_2 \mathbf{r}}{r^3} \left[ 1 + (1 - 2s_1)(1 - 2s_2)(1 + m_s r) \frac{e^{-m_s r}}{2\omega_0 + 3} \right], \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= -\frac{1}{\varphi_0} \frac{m_1 \mathbf{r}}{r^3} \left[ 1 + (1 - 2s_1)(1 - 2s_2)(1 + m_s r) \frac{e^{-m_s r}}{2\omega_0 + 3} \right]. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Definindo a coordenada do centro de massa do sistema como,

$$\mathbf{r}_{\text{CM}} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (4.62)$$

Se a origem do sistema de coordenada for o próprio centro de massa, então,  $r_{\text{CM}} = 0$ , que resulta em:

$$\mathbf{r} = -\frac{m_1 + m_2}{m_2} \mathbf{r}_1, \quad (4.63)$$

desta forma:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{\varphi_0} \frac{m \mathbf{r}}{r^3} \left[ 1 + (1 - 2s_1)(1 - 2s_2)(1 + m_s r) \frac{e^{-m_s r}}{2\omega_0 + 3} \right]. \quad (4.64)$$

Onde  $m = m_1 + m_2$  é a massa total do sistema. É útil definir alguns parâmetros, conforme apresentado por [Alsing et al. \(2012\)](#):

$$G \equiv \frac{1}{\varphi_0} \frac{4 + 2\omega_0}{3 + 2\omega_0}, \quad (4.65)$$

$$\xi \equiv \frac{1}{4 + 2\omega_0}, \quad (4.66)$$

$$\alpha \equiv \frac{1}{2\omega_0 + 3}, \quad (4.67)$$

de modo que:

$$G(1 - \xi) = \frac{1}{\varphi_0}. \quad (4.68)$$

Definimos ainda a função:

$$\tilde{g}(r) = G(1 - \xi)(1 - \Delta(r)), \quad (4.69)$$

onde,

$$\Delta(r) = \alpha(1 - 2s_1)(1 - 2s_2)(1 + m_s r)e^{-m_s r}. \quad (4.70)$$

Tomando o módulo da Equação (4.64) e reescrevendo, temos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{m}{r^2} G(1 - \xi)(1 - \Delta(r)) = \frac{m\tilde{g}(r)}{r^2}. \quad (4.71)$$

Consideramos um sistema binário descrevendo uma órbita circular de raio  $r$  com velocidade  $v$  e frequência angular  $\omega$ . Então,  $\ddot{r} = a_c = v^2/r = \omega^2 r$ . Substituindo na equação de movimento (4.71), obtemos a terceira lei de Kepler modificada:

$$\omega^2 = \frac{m\tilde{g}(r)}{r^3} = \frac{m}{r^3} G(1 - \xi)(1 - \Delta(r)). \quad (4.72)$$

Usando a relação (4.72), também podemos deduzir que  $v = \omega r = (\tilde{g}(r)m\omega)^{1/3}$ .

Consideremos também que o movimento do sistema binário, em um dado referencial, é descrito por  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , onde:

$$x = r \cos(\Omega(t)), \quad y = r \sin(\Omega(t)), \quad z = 0, \quad (4.73)$$

sendo que  $\Omega(t)$  é:

$$\Omega(t) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt'. \quad (4.74)$$

Seja um observador na direção  $\hat{n} = \mathbf{R}/R$ , com orientação definida pelos ângulos  $(\iota, \phi_0)$  no referencial do sistema binário, de modo que:  $\hat{n} = (\sin \iota \cos \phi_0, \sin \iota \sin \phi_0, \cos \iota)$ . Podemos identificar o seguinte produto escalar:

$$\hat{n} \cdot \mathbf{r} = r \sin \iota \cos(\Omega(t) - \phi). \quad (4.75)$$

O ângulo  $\phi$  está diretamente ligado com a fase inicial do sistema e pode ser absorvido pela definição de  $\Omega(t)$  escolhendo o tempo inicial  $t_0$  adequado. Por conveniência,



escolhemos  $t_0$  de modo que  $\phi \rightarrow \Omega(t_0) + \pi/2$ ,

$$\hat{n} \cdot \mathbf{r} = r \sin \iota \cos \left( \Omega(t) - \frac{\pi}{2} \right) = r \sin \iota \sin \left( \Omega(t) \right), \quad (4.76)$$

como consequência,

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \dot{\mathbf{r}} &= r\omega \sin \iota \cos \left( \Omega(t) \right), \\ \hat{n} \cdot \ddot{\mathbf{r}} &= -r\omega^2 \sin \iota \cos \left( \Omega(t) \right). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Aqui, utilizamos que  $\omega = d\Omega/dt$ . Essas relações serão úteis para determinar a solução do campo escalar  $\delta\varphi$  na próxima seção. Observe também que estamos considerando  $\dot{r} \ll r\omega$ , conforme estabelecido no regime quase-circular.

### 4.3 Solução para os estados de polarização escalar

As duas polarizações escalares,  $\Phi$  e  $\Theta$ , são determinadas a partir da solução das equações de campo (4.21) e (4.29). Essas equações, por sua vez, dependem diretamente da solução do campo escalar  $\delta\varphi$ , obtida a partir da Equação (4.16). A seguir mostramos como obter a solução para  $\delta\varphi$ .

#### 4.3.1 Evolução dinâmica da perturbação escalar

Primeiro, definimos uma função de Green  $\mathcal{G}(x)$  que satisfaz a equação diferencial associada ao operador  $(\square - m_s^2)$ , de modo que:

$$(\square - m_s^2)\mathcal{G}(x) = -4\pi\delta^{(4)}(x). \quad (4.78)$$

A função de Green adequada é dada por (POISSON et al., 2011):

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{R}) = \frac{\delta(t - R)}{R} - H(t - R) \frac{m_s J_1 \left( m_s \sqrt{t^2 - R^2} \right)}{\sqrt{t^2 - R^2}}, \quad (4.79)$$

onde  $J_1(x)$  representa a função de Bessel de primeira espécie e ordem um, e  $H(x)$  é a função degrau de Heaviside, definida como  $H(x) = 0$  para  $x < 0$  e  $H(x) = 1$  para  $x \geq 0$ . Utilizando a função de Green, podemos expressar a solução geral da Equação (4.16) da seguinte forma:

$$\delta\varphi = 4 \int G(t - t', \mathbf{R} - \mathbf{r}') T_\varphi(t', \mathbf{r}') d^3 r' dt. \quad (4.80)$$

Utilizando a Equação (4.79), podemos reescrever a solução de  $\delta\varphi$  em duas partes,

$$\delta\varphi = \delta\varphi_B + \delta\varphi_m, \quad (4.81)$$

onde:

$$\delta\varphi_B = 4 \int \frac{T_\varphi(t', \mathbf{r}') \delta(t - t' - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} d^3 r' dt, \quad (4.82)$$

$$\delta\varphi_m = -4 \int \frac{m_s T_\varphi(t', \mathbf{r}') J_1 \left( m_s \sqrt{(t - t')^2 - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^2} \right)}{\sqrt{(t - t')^2 - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^2}} H(t - t' - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|) d^3 r' dt. \quad (4.83)$$

Podemos ainda definir  $z = m_s \sqrt{(t - t')^2 - |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^2}$ , e reescrever  $\delta\varphi$ :

$$\delta\varphi_m = -4 \int d^3 r' \int_0^\infty \frac{T_\varphi \left( t - \sqrt{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^2 - \left( \frac{z}{m_s} \right)^2}, \mathbf{r}' \right) J_1(z)}{\sqrt{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|^2 + \left( \frac{z}{m_s} \right)^2}} dz. \quad (4.84)$$

Vamos considerar que a fonte de ondas gravitacionais, onde  $T_{\mu\nu} \neq 0$ , está confinada em uma região de volume  $V$ , cujas dimensões são tipicamente muito menores do que o comprimento de onda da radiação emitida (BAMBI, 2018). Além disso, assumimos que o observador está localizado em uma região distante da fonte, na zona radiativa, onde  $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r}|$ . Aplicando a aproximação de baixas velocidades, podemos utilizar uma expansão multipolar para  $\delta\varphi_B$  e  $\delta\varphi_m$  (ALSING et al., 2012; LIU et al., 2020), obtendo assim:

$$\delta\varphi_B = \frac{4}{R} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int d^3 r' T_\varphi(t - R, \mathbf{r}') (\hat{n} \cdot \mathbf{r}')^k, \quad (4.85)$$

$$\delta\varphi_m = -\frac{4}{R} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int d^3 r' (\hat{n} \cdot \mathbf{r}')^k \int_0^\infty dz \frac{T_\varphi(t - Ru, \mathbf{r}') J_1(z)}{u^{k+1}}. \quad (4.86)$$

Definimos  $u = \sqrt{1 + \left( \frac{z}{m_s R} \right)^2}$ . Considerando o termo fonte  $T_\varphi$  de ordem zero, conforme dado pela Equação (4.18), podemos calcular os termos da expansão multipolar para  $\delta\varphi$ . Começamos analisando o termo de monopolo ( $k = 0$ ), dado por  $\delta\varphi_0 = \delta\varphi_B^{k=0} + \delta\varphi_m^{k=0}$ . Substituindo o primeiro termo da Equação (4.18) nas Equações (4.85) e (4.86) para  $k = 0$ , obtemos:

$$\delta\varphi_B^{k=0} = \frac{2\alpha}{R} \sum_a m_a (1 - 2s_a), \quad (4.87)$$

$$\delta\varphi_m^{k=0} = -\frac{2\alpha}{R} \sum_a m_a (1 - 2s_a) \int_0^\infty dz \frac{J_1(z)}{\left( 1 + \left( \frac{z}{m_s R} \right)^2 \right)^{1/2}}. \quad (4.88)$$

Observamos que o termo de monopolo do campo escalar gera uma contribuição estática no tempo, não influenciando a forma de onda associada ao campo escalar.

O termo de dipolo ( $k = 1$ ) será dado por  $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_B^{k=1} + \delta\varphi_m^{k=1}$ . Considerando agora  $k = 1$  nas Equações (4.85) e substituindo à Equação (4.18), obtemos:

$$\delta\varphi_B^{k=1} = \frac{2\alpha}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_a m_a (1 - 2s_a) (\hat{n} \cdot \mathbf{r}_a) \right) \Big|_{t-R}. \quad (4.89)$$

Para um sistema binário, conforme descrito na Seção 4.2.2, o termo em parênteses é dado por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{a=1}^2 m_a (1 - 2s_a) (\hat{n} \cdot \mathbf{r}_a) \right) = m_1 (1 - 2s_1) (\hat{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}_1) + m_2 (1 - 2s_2) (\hat{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}_2). \quad (4.90)$$

Considerando  $\mathbf{r}_1 = -(m_2/m)\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}_2 = (m_1/m)\mathbf{r}$  e  $m = m_1 + m_2$ , obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{a=1}^2 m_a (1 - 2s_a) (\hat{n} \cdot \mathbf{r}_a) \right) = \frac{m_1 m_2}{m} 2(s_1 - s_2) (\hat{n} \cdot \dot{\mathbf{r}}). \quad (4.91)$$

Usando as relações definidas na Equação (4.77), definindo a massa reduzida  $\mu = m_1 m_2 / m$  e o parâmetro  $\mathcal{S} = s_2 - s_1$ , temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{a=1}^2 m_a (1 - 2s_a) (\hat{n} \cdot \mathbf{r}_a) \right) = -2\mu \mathcal{S} r \omega \sin \iota \cos(\Omega(t)). \quad (4.92)$$

Desta forma, o termo de dipolo de  $\delta\varphi_B$  é dado por:

$$\delta\varphi_B^{k=1} = -\frac{4\alpha\mu}{R} \mathcal{S} r \omega \sin \iota \cos \Omega \Big|_{t-R} \quad (4.93)$$

Tomando  $k = 1$  na Equação (4.86), obtemos o termo dipolar para  $\delta\varphi_m$ :

$$\delta\varphi_m^{k=1} = -\frac{2\alpha}{R} \int_0^\infty dz \frac{J_1(z)}{u^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_a m_a (1 - 2s_a) (\hat{n} \cdot \mathbf{r}_a) \right) \Big|_{t-Ru} \quad (4.94)$$

Utilizando a Equação (4.92) resulta em:

$$\delta\varphi_m^{k=1} = \frac{4\alpha\mu}{R} \int_0^\infty dz J_1(z) \left[ \frac{\mathcal{S} r \omega \sin \iota \cos \Omega}{u^2} \right]_{t-Ru} \quad (4.95)$$

Por fim, o termo dipolar do campo escalar  $\delta\varphi_1$  é dado por:

$$\delta\varphi_1 = -\frac{4\alpha\mu}{R}\mathcal{S}(\tilde{g}m)^{1/3} \sin\iota \left( \omega^{1/3} \cos\Omega \Big|_{t-R} - \int_0^\infty dz \frac{J_1(z)}{u^2} \omega^{1/3} \cos\Omega \Big|_{t-Ru} \right), \quad (4.96)$$

onde foi utilizada a Equação (4.72) para eliminar, de forma explícita, a distância orbital  $r$ .

O termo de quadrupolo ( $k = 2$ ) é dado por  $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_B^{k=2} + \delta\varphi_m^{k=2}$ . Para  $k = 2$ , a Equação (4.85) é dada por:

$$\delta\varphi_B^{k=2} = \frac{\alpha}{R} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_a m_a (1 - 2s_a) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a)^2 \right) \Big|_{t-R}. \quad (4.97)$$

Utilizando o sistema binário definido na Seção 4.2.2, o termo entre parênteses pode ser expresso por:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{a=1}^2 m_a (1 - 2s_a) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a)^2 \right) = 2\mu\Gamma \left( (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) + (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 \right), \quad (4.98)$$

onde  $\mu$  é a massa reduzida e foi definido o parâmetro  $\Gamma = m_2(1 - 2s_1) + m_1(1 - 2s_2)$ . Substituindo as relações dadas pela Equação (4.77), obtemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_{a=1}^2 m_a (1 - 2s_a) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a)^2 \right) = 2\mu\Gamma r^2 \omega^2 \sin^2 \iota \cos(2\Omega(t)). \quad (4.99)$$

Desta forma, o termo de quadrupolo para  $\delta\varphi_B$  é:

$$\delta\varphi_B^{k=2} = \frac{2\mu\alpha}{R} \Gamma r^2 \omega^2 \sin^2 \iota \cos 2\Omega \Big|_{t-R}. \quad (4.100)$$

Já o termo de quadrupolo para  $\delta\varphi_m$ , fazendo  $k = 2$  na Equação (4.86), temos:

$$\delta\varphi_m^{k=2} = -\frac{\alpha}{R} \int_0^\infty dz \frac{J_1(z)}{u^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \sum_a m_a (1 - 2s_a) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_a)^2 \right). \quad (4.101)$$

Substituindo a Equação (4.99), obtemos:

$$\delta\varphi_m^{k=2} = -\frac{2\alpha\mu}{R} \int_0^\infty dz J_1(z) \frac{\Gamma r^2 \omega^2}{u^3} \sin^2 \iota \cos 2\Omega \Big|_{t-Ru} \quad (4.102)$$

O termo de quadrupolo do campo escalar  $\delta\varphi$  é dado por,  $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_B^{k=2} + \delta\varphi_m^{k=2}$ , então:

$$\delta\varphi_2 = \frac{2\alpha\mu}{R}\Gamma(\tilde{g}m)^{2/3}\sin^2\iota\left(\omega^{2/3}\cos 2\Omega\Big|_{t-R} - \int_0^\infty dz \frac{J_1(z)}{u^3}\omega^{2/3}\cos 2\Omega\Big|_{t-Ru}\right) \quad (4.103)$$

Os termos de dipolo e quadrupolo da solução de  $\delta\varphi$  dados pelas Equações (4.103) e (4.96) dependem do resultado das integrais associadas à função de Bessel  $J_1(z)$ . Para avaliar essas integrais vamos analisar o comportamento assintótico em que  $R \rightarrow \infty$  (LIU et al., 2020; LIU et al., 2018), neste regime obtemos os seguintes resultados:

$$I_1 = \int_0^\infty dz \frac{J_1(z)}{u^2}\omega^{1/3}\cos\Omega\Big|_{t-Ru} \sim \omega^{1/3}\cos\Omega\Big|_{t-R} - \omega^{-2/3}\sqrt{\omega^2 - m_s^2}\cos\left(\frac{m_s^2 R}{\sqrt{\omega^2 - m_s^2}} + \Omega\right)\Big|_{t-Rv_1}, \quad (4.104)$$

$$I_2 = \int_0^\infty dz \frac{J_1(z)}{u^3}\omega^{2/3}\cos 2\Omega\Big|_{t-Ru} \sim \omega^{2/3}\cos 2\Omega\Big|_{t-R} - \omega^{2/3}\left(1 - \frac{m_s^2}{4\omega^2}\right)\cos\left(\frac{m_s^2 R}{\sqrt{4\omega^2 - m_s^2}} + 2\Omega\right)\Big|_{t-Rv_2}, \quad (4.105)$$

onde  $v_n$  é definido por:

$$v_n = \frac{n\omega}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}}\Big|_{t-R}. \quad (4.106)$$

Substituindo os resultados das integrais (4.104) e (4.105) nas soluções de dipolo e quadrupolo para o campo escalar  $\delta\varphi$  dado pelas Equações (4.96) e (4.103), obtemos:

$$\delta\varphi^{k=1} = -\frac{4\alpha\mu}{R}\mathcal{S}(\tilde{g}m)^{1/3}\sin\iota\omega^{1/3}\sqrt{1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}}\cos\left(\frac{m_s^2 R}{\sqrt{\omega^2 - m_s^2}} + \Omega\right)H(\omega - m_s)\Big|_{t-Rv_1}, \quad (4.107)$$

$$\delta\varphi^{k=2} = \frac{2\alpha\mu}{R}\Gamma(\tilde{g}m)^{2/3}\sin^2\iota\omega^{2/3}\left(1 - \frac{m_s^2}{4\omega^2}\right)\cos\left(\frac{m_s^2 R}{\sqrt{4\omega^2 - m_s^2}} + 2\Omega\right)H(2\omega - m_s)\Big|_{t-Rv_2}. \quad (4.108)$$

Um sistema binário pode emitir ondas escalares apenas quando a frequência orbital  $\omega$  for maior que a frequência de corte  $\omega_c$ , definida a partir da massa do campo

escalar  $m_s$ . Caso contrário, os modos escalares são rapidamente atenuados. Essa condição é controlada pela função de Heaviside (LIU et al., 2020). Considerando uma massa escalar de  $m_s = 2.5 \times 10^{-20}$  eV, valor estimado como limite superior em Alsing et al. (2012), obtemos um comprimento de onda de Compton associado  $\lambda_s = h/(m_s c) \approx 4.95 \times 10^{13}$  m e uma frequência de corte  $\omega_c = 2\pi c/\lambda_s \approx 3.81 \times 10^{-5}$  Hz, que correspondem a um valor bem abaixo da banda dos interferômetros atuais.

A fase da onda escalar satisfaz a relação de dispersão:

$$\partial_\mu \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{\omega^2 - m_s^2}} + \Omega \right) \partial^\mu \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{\omega^2 - m_s^2}} + \Omega \right) = -m_s^2. \quad (4.109)$$

Se considerarmos uma frequência orbital constante ou que varie lentamente, então a fase assume uma forma bem conhecida:

$$\frac{m_s^2 R}{\sqrt{\omega^2 - m_s^2}} + \Omega = \omega t - kR + \text{constant}, \quad (4.110)$$

onde  $k = \sqrt{\omega^2 - m_s^2}$  é o número de onda (LIU et al., 2020).

#### 4.3.2 Modo de polarização escalar-transversal $\Phi$

Com a solução do campo escalar  $\delta\varphi$  dado pelas Equações (4.107) e (4.108), podemos obter os estados de polarização escalar na teoria de Brans-Dicke. Para o modo escalar-transversal  $\Phi$  dado pela Equação (4.21), temos:

$$\nabla^2 \left( \Phi + \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} \right) = -\frac{4\pi}{\varphi_0} \rho. \quad (4.111)$$

A solução da equação de Poisson pode ser obtida utilizando a função de Green do Laplaciano (BARAUSSE; COAUTHORS, 2024), dada por:

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|}, \quad (4.112)$$

que satisfaz

$$\nabla^2 \mathcal{G}(\mathbf{r}) = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (4.113)$$

O que leva à seguinte solução geral:

$$\Phi + \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} = \frac{1}{\varphi_0} \int \frac{\rho(t, r')}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} d^3 r'. \quad (4.114)$$

Usando a aproximação da zona radiativa, em que  $|\mathbf{R}| \gg \mathbf{r}'$ , então:

$$\Phi + \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} = \frac{1}{\varphi_0 R} \int \rho(t, r') d^3 r'. \quad (4.115)$$

Podemos identificar a integral como a massa total do sistema,  $m = \int \rho(t, r') d^3 r'$ . Por fim, a solução geral para o estado de polarização  $\Phi$  é dada por:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} + \frac{m}{\varphi_0 R}. \quad (4.116)$$

O primeiro termo corresponde à solução do campo escalar  $\delta\varphi$  e contém toda a informação sobre a variação temporal do modo escalar-transversal. O segundo termo é estático, representando o potencial newtoniano  $\sim m/R$ , e não contribui para a emissão de radiação na forma de ondas gravitacionais. A Equação (4.116) pode ser interpretada como  $\Phi = \Phi^{\text{gw}} + \Phi^{\text{static}}$ . Descartando o termo estático e utilizando a solução para o campo escalar  $\delta\varphi$  das Equações (4.107) e (4.108), obtemos que a parte radiativa do modo escalar-transversal  $\Phi$  é dada por:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (4.117)$$

onde  $\Phi_1$  é a contribuição dipolar escalar, dada por:

$$\Phi_1 = \frac{2G\xi\mu}{R} \mathcal{S}(\tilde{g}m)^{1/3} \sin \iota \omega^{1/3} \sqrt{1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}} \cos \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{\omega^2 - m_s^2}} + \Omega \right) H(\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_1}, \quad (4.118)$$

e  $\Phi_2$  é a contribuição de quadrupolo escalar, dada por:

$$\Phi_2 = -\frac{G\xi\mu}{R} \Gamma(\tilde{g}m)^{2/3} \sin^2 \iota \omega^{2/3} \left( 1 - \frac{m_s^2}{4\omega^2} \right) \cos \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{4\omega^2 - m_s^2}} + 2\Omega \right) H(2\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_2}, \quad (4.119)$$

onde, por meio da definição de  $G$ ,  $\xi$  e  $\alpha$ , dadas pelas Equações (4.65), (4.66) e (4.67), respectivamente, podemos mostrar que  $G\xi = \alpha/\varphi_0$ .

### 4.3.3 Modo de polarização escalar-longitudinal $\Theta$

Agora solução para o invariante de calibre escalar  $\Psi$  segue de maneira análoga, partindo da Equação (4.29), obtemos:

$$\Psi + \frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} = \frac{1}{\varphi_0} \int \frac{(\rho + 3p - 3\dot{S})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} d^3r' \approx \frac{1}{\varphi_0 R} \int (\rho + 3p - 3\dot{S}) d^3r', \quad (4.120)$$

definindo  $\tilde{m} = \int (\rho + 3p - 3\dot{S}) d^3r'$ , temos:

$$\Psi = -\frac{1}{2} \frac{\delta\varphi}{\varphi_0} + \frac{\tilde{m}}{\varphi_0 R}. \quad (4.121)$$

Utilizando a Equação (4.32), podemos verificar que:

$$\tilde{m} = \int (\rho + 3p - 3\dot{S}) d^3r' = \int \rho d^3r' - 2 \int \nabla^2 \sigma d^3r' = m. \quad (4.122)$$

Na segunda integral podemos aplicar o teorema de Gauss, sendo  $\partial V$  a superfície fechada que contorna o volume  $V$ . Considerando que a fonte está completamente confinada no interior da superfície, o tensor energia-momento deve ser nulo na superfície  $T_{\mu\nu} = 0$ , então temos:

$$\int_V \nabla^2 \sigma d^3r' = \int_V \nabla \cdot (\nabla \sigma) d^3r' = \int_{\partial V} (\nabla \sigma) dS = 0. \quad (4.123)$$

O resultado  $\tilde{m} = m$  leva à conclusão de que os dois invariantes de calibre escalares são iguais, ou seja,  $\Psi = \Phi$ . Assim, o escalar  $\Psi$  também pode ser decomposto em uma parte que contém toda a informação sobre sua variação temporal, associada ao campo escalar  $\delta\varphi$ , e em um termo estático correspondente ao potencial Newtoniano  $m/R$ . Da mesma forma que no caso de  $\Phi$ , ao estudar a emissão de ondas gravitacionais, desprezamos o termo estático de  $\Psi$ .

Com a solução dos escalares  $\Phi$  e  $\Psi$  em mãos, podemos determinar a solução para o estado de polarização escalar-longitudinal  $\Theta$  dado pela definição da Equação (2.50). Como encontramos que  $\Psi = \Phi$ , isso significa que eles possuem a mesma relação de dispersão:

$$\eta_\Phi = \eta_\Psi = \frac{k}{\omega_{\text{gw}}}. \quad (4.124)$$

O número de onda  $k$  e, como consequência, a relação de dispersão serão diferentes para as contribuições de dipolo e quadrupolo. Para a contribuição dipolar,  $k =$



$\sqrt{\omega_{\text{gw}}^2 - m_s^2}$  e a relação de dispersão é:

$$\eta_\Phi = \eta_\Psi = \frac{\sqrt{\omega_{\text{gw}}^2 - m_s^2}}{\omega_{\text{gw}}} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_s}{\omega_{\text{gw}}}\right)^2}. \quad (4.125)$$

Aplicando na definição da Equação (2.50) e usando o fato de que  $\Psi = \Phi$ , temos:

$$\Theta_1 = -\left(\frac{m_s}{\omega}\right)^2 \Phi_1. \quad (4.126)$$

Para a contribuição de quadrupolo o número de onda é  $k = \sqrt{4\omega^2 - m_s^2}$  então a relação de dispersão é dada por:

$$\eta_\Phi = \eta_\Psi = \frac{\sqrt{4\omega^2 - m_s^2}}{2\omega} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_s}{2\omega}\right)^2}. \quad (4.127)$$

Então o termo de quadrupolo para o modo escalar-longitudinal  $\Theta$  é:

$$\Theta_2 = -\left(\frac{m_s}{2\omega}\right)^2 \Phi_2. \quad (4.128)$$

Deste modo, o estado de polarização escalar-longitudinal é dado por:

$$\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = -\frac{m_s^2}{\omega^2} \Phi_1 - \frac{m_s^2}{4\omega^2} \Phi_2, \quad (4.129)$$

onde  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são as contribuições de dipolo e quadrupolo do estado de polarização escalar-transversal, dadas pelas Equações (4.107) e (4.108), respectivamente.

#### 4.4 Solução para os estados de polarização tensorial

Os modos tensoriais representados por  $h_{ij}^{TT}$  são obtidos através da solução da Equação (4.36), que podemos escrever através da transformação inversa da decomposição por helicidade do tensor momento-energia dada por,  $\sigma_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} T_{kl}$ , então temos:

$$\square h_{ij}^{TT} = -\frac{16\pi}{\varphi_0} \sigma_{ij}^{TT} = -\frac{16\pi}{\varphi_0} \Lambda_{ij,kl} T_{kl}. \quad (4.130)$$

A função de Green para o operador  $\square$  é:

$$\mathcal{G}(t, \mathbf{R}) = \frac{\delta(t - R)}{R}, \quad (4.131)$$

onde,

$$\square \mathcal{G}(x) = -4\pi\delta^{(4)}(x). \quad (4.132)$$

Desta forma, a solução para  $h_{ij}^{TT}$  é dada por:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4}{\varphi_0} \Lambda_{ij,kl} \int \frac{T_{kl}(t', \mathbf{r}') \delta(t - t', |\mathbf{R} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}'|} d^3 r' dt. \quad (4.133)$$

Como mencionado durante a expansão multipolar do campo escalar  $\delta\varphi$ , vamos considerar que a fonte está contida em uma região de volume  $V$ , com dimensões muito menores que o comprimento de onda gravitacional emitido, e que  $|\mathbf{R}| \gg \mathbf{r}$ . Dessa forma, podemos reescrever a Equação (4.133) da seguinte maneira:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{4}{\varphi_0 R} \Lambda_{ij,kl} \int T_{kl}(t - R, \mathbf{r}') d^3 r'. \quad (4.134)$$

Na equação de conservação de energia para a teoria de Brans-Dicke, dada pela Equação (4.7), podemos utilizar a seguinte aproximação na teoria linearizada:  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} \rightarrow \partial^\mu T_{\mu\nu}$  e  $\partial_\nu \varphi \rightarrow \partial_\nu(\delta\varphi)$ . Assim, obtemos:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} \partial_\nu(\delta\varphi) = 0. \quad (4.135)$$

Agora, ao considerar  $\nu \rightarrow i = 1, 2, 3$  na Equação (4.135), multiplicar por  $x^j$  e integrar sobre o volume da fonte  $V$ , obtemos:

$$\int_V \partial_k T^{ki} x^j d^3 x = -\partial_0 \int_V T^{0i} x^j d^3 x + \int \frac{\partial T}{\partial \varphi} \partial^i(\delta\varphi) x^j d^3 x. \quad (4.136)$$

Na primeira integral do termo à esquerda da equação, podemos inicialmente aplicar integração por partes,

$$\begin{aligned} \int_V \partial_k T^{ki} x^j d^3 x &= \int_V \partial_k (T^{ki} x^j) d^3 x - \int_V T^{ki} \frac{\partial x^j}{\partial x^k} d^3 x, \\ &= \int_{\partial V} T^{ki} x^j dS_k - \int_V T^{ki} \delta_k^j d^3 x, \\ &= - \int_V T^{ij} d^3 x. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Utilizamos o teorema de Gauss e o fato de que o tensor energia-momento se anula na superfície que limita o volume  $V$ . Deste modo, substituindo o resultado da Equação

(4.137) na Equação (4.136) obtemos:

$$\int_V T^{ij} d^3x = \partial_0 \int_V T^{0i} x^j d^3x - \int \frac{\partial T}{\partial \varphi} \partial^i(\delta\varphi) x^j d^3x. \quad (4.138)$$

Usando o fato de que o tensor energia-momento  $T^{ij}$  é simétrico, fazendo  $i \leftrightarrow j$  e somando os dois resultados obtemos:

$$2 \int_V T^{ij} d^3x = \partial_0 \int_V (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) d^3x - \int \frac{\partial T}{\partial \varphi} (\partial^i(\delta\varphi) x^j + \partial^j(\delta\varphi) x^i) d^3x. \quad (4.139)$$

Retornando à Equação (4.135), mas agora fazendo  $\nu = 0$ , multiplicando por  $x^i x^j$  e integrando sobre o volume  $V$ , temos:

$$\int_V \partial_k T^{k0} x^i x^j d^3x = -\partial_0 \int_V T^{00} x^i x^j d^3x - \int_V \frac{\partial T}{\partial \varphi} \partial_0(\delta\varphi) x^i x^j d^3x. \quad (4.140)$$

Da integral do lado esquerdo, temos:

$$\begin{aligned} \int_V \partial_k T^{k0} x^i x^j d^3x &= \int_V \partial_k (T^{k0} x^i x^j) d^3x - \int_V T^{k0} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x^k} x^j + x^i \frac{\partial x^j}{\partial x^k} \right) d^3x \\ &= \int_{\partial V} T^{k0} x^i x^j dS_k - \int_V (T^{k0} \delta_k^i x^j + T^{k0} x^i \delta_k^j) d^3x \\ &= - \int_V (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) d^3x. \end{aligned} \quad (4.141)$$

Substituindo a integral acima na Equação (4.140) e aplicando  $\partial_0$ , obtemos:

$$\partial_0 \int_V (T^{0i} x^j + T^{0j} x^i) d^3x = \partial_0^2 \int_V T^{00} x^i x^j d^3x + \partial_0 \int_V \frac{\partial T}{\partial \varphi} \partial_0(\delta\varphi) x^i x^j d^3x. \quad (4.142)$$

Por fim, comparando as Equações (4.139) e (4.142), identificamos que:

$$2 \int_V T^{ij} d^3x = \partial_0^2 \int_V T^{00} x^i x^j d^3x + \partial_0 \int_V \frac{\partial T}{\partial \varphi} \partial_0(\delta\varphi) x^i x^j d^3x - \int \frac{\partial T}{\partial \varphi} (\partial^i(\delta\varphi) x^j + \partial^j(\delta\varphi) x^i) d^3x. \quad (4.143)$$

Definimos  $Q^{ij}$ , denominado tensor momento de quadrupolo da fonte, dado por:

$$Q^{ij}(t) = \int_V T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j d^3x, \quad (4.144)$$

e  $\delta Q^{ij}$  representando “termos de correção” do tensor momento de quadrupolo:

$$\delta Q_\varphi^{ij} = \partial_0 \int_V \frac{\partial T}{\partial \varphi} \partial_0 (\delta \varphi) x^i x^j d^3x - \int \frac{\partial T}{\partial \varphi} \left( \partial^i (\delta \varphi) x^j + \partial^j (\delta \varphi) x^i \right) d^3x. \quad (4.145)$$

Desta forma:

$$\int_V T^{ij} d^3x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} Q^{ij} + \delta Q_\varphi^{ij} \right). \quad (4.146)$$

Substituindo este resultado na Equação (4.134), obtemos:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2}{\varphi_0 R} \Lambda_{ij,kl} \left( \ddot{Q}_{ij} + \delta Q_{ij}^\varphi \right) \Big|_{t-R}. \quad (4.147)$$

Adiantamos que o termo  $\delta Q_\varphi^{ij}$  contém apenas correções de ordem  $(\delta \varphi / \varphi_0) \ll 1$ , como será mostrado mais adiante, a partir da definição da perturbação do campo escalar  $\delta \varphi$ . Da Equação (4.17), obtemos:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \sum_a \frac{m_a s_a}{\varphi_0} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (4.148)$$

Então a Equação (4.145) é:

$$\delta Q_\varphi^{ij} = - \sum_a m_a s_a \left[ \partial_0 \left( \frac{\delta \varphi}{\varphi_0} x_a^i x_a^j \right) - \left( \partial^i \left( \frac{\delta \varphi}{\varphi_0} \right) x_a^j + \partial^j \left( \frac{\delta \varphi}{\varphi_0} \right) x_a^i \right) \right] \quad (4.149)$$

Desta forma,  $\delta Q_\varphi^{ij}$  é importante para correções pós-Newtonianas. Na nossa aproximação  $\delta Q_\varphi^{ij} \sim 0$ . Então vamos considerar que a solução para o modo tensorial  $h_{ij}^{TT}$  é dada por:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{2}{\varphi_0 R} \Lambda_{ij,kl} \ddot{Q}_{ij}(t - R). \quad (4.150)$$

Usando a definição do tensor energia-momento (3.16) considerando um sistema não-relativístico com  $\gamma_a \sim 0$ , obtemos que a componente  $T^{00}$  é,

$$T^{00}(t, \mathbf{r}) = \sum_a m_a(\varphi) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)). \quad (4.151)$$

Desta forma, usando  $x^i \rightarrow r^i$ , obtemos que o tensor momento de quadrupolo é dado por:

$$Q^{ij}(t) = \sum_a m_a(\varphi) r_a^i r_a^j. \quad (4.152)$$

Observe que  $m_a(\varphi)$  é dado pela Equação (4.11). Podemos desprezar os termos do

tipo  $\delta\varphi/\varphi_0$  para obter o tensor momento de quadrupolo em sua ordem mais baixa. Considerando um sistema binário, conforme descrito na Seção 4.2.2, encontramos que:

$$Q^{ij}(t) = \mu r^i(t)r^j(t), \quad (4.153)$$

onde  $\mu$  é a massa reduzida do sistema. Utilizando  $r^i(t) = (x, y, z)$ , dado pela Equação (4.73), temos que:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{1}{2}\mu r^2(1 - \cos 2\Omega), \\ Q_{22} &= \frac{1}{2}\mu r^2(1 + \cos 2\Omega), \\ Q_{12} &= -\frac{1}{2}\mu r^2 \sin 2\Omega. \end{aligned} \quad (4.154)$$

Observe que todas as demais componentes são nulas e que  $Q_{12} = Q_{21}$ . Derivando duas vezes no tempo,

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_{11} &= 2\mu r^2 \omega^2 \cos 2\Omega, \\ \ddot{Q}_{22} &= -2\mu r^2 \omega^2 \cos 2\Omega, \\ \ddot{Q}_{12} &= 2\mu r^2 \omega^2 \sin 2\Omega. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Observe que novamente estamos considerando  $\dot{r} \ll r\omega$ , conforme estabelecido no regime quase-circular.

Por fim, substituindo na Equação (A.12), obtemos as amplitudes *plus* e *cross* da onda gravitacional gerada pelo sistema binário em uma direção arbitrária  $\hat{n} = \mathbf{R}/R$ , definida pelos ângulos  $\iota$  e  $\phi_0$ . O resultado obtido é:

$$\begin{aligned} h_+ &= \frac{4}{\varphi_0 R} \mu \omega^2 r^2 \left( \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos(2\Omega + 2\phi_0) \Big|_{t-R}, \\ h_\times &= \frac{4}{\varphi_0 R} \mu \omega^2 r^2 \cos \theta \sin(2\Omega + 2\phi_0) \Big|_{t-R}. \end{aligned} \quad (4.156)$$

Como mencionado na Seção 4.2.2, o ângulo  $\phi_0$  está relacionado com a fase inicial do sistema, e pode ser escolhido de modo que  $\phi_0 \rightarrow \Omega(t_0) + \pi/2$ . Na Equação (4.156) ainda podemos eliminar a distância orbital  $r$  utilizando a Equação (4.72), assim podemos obter:

$$\begin{aligned} h_+(t) &= -\frac{4}{R} (1 - \Delta)^{2/3} (G(1 - \xi)M_c)^{5/3} \omega^{2/3} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos(2\Omega) \Big|_{t-R}, \\ h_\times(t) &= -\frac{4}{R} (1 - \Delta)^{2/3} (G(1 - \xi)M_c)^{5/3} \omega^{2/3} \cos \iota \sin(2\Omega) \Big|_{t-R}. \end{aligned} \quad (4.157)$$

Onde usamos a definição de  $\tilde{g} = G(1 - \xi)(1 - \Delta)$  dada pela Equação (4.69), também usando que  $G(1 - \xi) = 1/\varphi_0$  e foi introduzida a *chirp mass*,  $M_c$ , definida por:

$$M_c = \mu^{3/5} m^{2/5} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}. \quad (4.158)$$

A Equação (4.157) mostra que as soluções para os modos de polarização tensorial na teoria de Brans-Dicke são muito semelhantes às da Relatividade Geral. As principais diferenças estão no aparecimento do termo  $(1 - \Delta)$  e do termo  $G \rightarrow G(1 - \xi)$ . No limite em que  $\omega \rightarrow \infty$ , obtemos  $\Delta \rightarrow 0$  e  $\xi \rightarrow 0$ , recuperando assim os resultados dos modos de polarização tensorial da Relatividade Geral.

## 5 FORMA DE ONDA GRAVITACIONAL EMITIDA POR UM SISTEMA BINÁRIO

Em resumo, do capítulo anterior vimos que, na teoria de Brans-Dicke, um sistema binário composto por corpos de massas  $m_1$  e  $m_2$  emite ondas gravitacionais em quatro estados de polarização: o modo escalar-transversal  $\Phi$ , o modo escalar-longitudinal  $\Theta$  e os dois modos tensoriais usuais  $h_+$  e  $h_\times$ .

Podemos reescrever a solução dos modos tensoriais dada pela Equação (4.157), como:

$$h_+ = -\frac{A_+}{R} \cos(2\Omega) \Big|_{t-R}, \quad h_\times = -\frac{A_\times}{R} \sin(2\Omega) \Big|_{t-R}. \quad (5.1)$$

Onde  $A_+$  e  $A_\times$  são dadas por:

$$A_+ = 4(1 - \Delta)^{2/3} [G(1 - \xi)M_c]^{5/3} \omega^{2/3} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2}, \quad (5.2)$$

$$A_\times = 4(1 - \Delta)^{2/3} [G(1 - \xi)M_c]^{5/3} \omega^{2/3} \cos \iota. \quad (5.3)$$

O modo escalar-transversal, dado pelas Equações (4.118) e (4.119), pode ser reescrito da seguinte forma, primeiro para a contribuição de dipolo:

$$\Phi_{\text{dip}} = \frac{A_\Phi^{\text{dip}}}{R} \cos \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{\omega^2 - m_s^2}} + \Omega \right) H(\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_1}, \quad (5.4)$$

e para a contribuição de quadrupolo:

$$\Phi_{\text{quad}} = -\frac{A_\Phi^{\text{quad}}}{R} \cos \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{4\omega^2 - m_s^2}} + 2\Omega \right) H(2\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_2}, \quad (5.5)$$

onde  $A_\Phi^{\text{dip}}/R$  e  $A_\Phi^{\text{quad}}/R$  representam as amplitudes de dipolo e quadrupolo, respectivamente. Partindo das Equações (4.118) e (4.119) podemos escrever que:

$$A_\Phi^{\text{dip}} = 2\alpha \mathcal{SD} (1 - \Delta)^{2/3} [G(1 - \xi)M_c]^{5/3} \omega^{1/3} \left( 1 - \frac{m_s^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \sin \iota, \quad (5.6)$$

onde  $\mathcal{D} = [(1 - \Delta)G(1 - \xi)m]^{-1/3}$  é um parâmetro definido para descrever a amplitude do termo de dipolo, tornando-o muito similar ao termo de quadrupolo:

$$A_\Phi^{\text{quad}} = \alpha \Gamma (1 - \Delta)^{2/3} [G(1 - \xi)M_c]^{5/3} \omega^{2/3} \left( 1 - \frac{m_s^2}{4\omega^2} \right) \sin^2 \iota \quad (5.7)$$

Já o modo escalar-longitudinal  $\Theta$  é dado pela seguinte relação com o modo escalar-transversal:

$$\Theta_{\text{dip}} = - \left( \frac{m_s}{\omega} \right)^2 \Phi_{\text{dip}}, \quad \Theta_{\text{quad}} = - \left( \frac{m_s}{2\omega} \right)^2 \Phi_{\text{quad}}. \quad (5.8)$$

O sinal dos quatro modos de polarização  $(\Phi, \Theta, h_+, h_\times)$  decai com  $1/R$  e depende da inclinação da órbita do sistema em relação ao observador, através do ângulo  $\iota$ . A dependência de  $\iota$  aparece de forma distinta em cada polarização: para os modos tensoriais, temos  $h_+ \sim (1 + \cos^2 \iota)$  e  $h_\times \sim \cos \iota$ ; para os modos escalares, o termo de dipolo satisfaz  $\Phi_{\text{dip}}, \Theta_{\text{dip}} \sim \sin \iota$ , enquanto o termo de quadrupolo segue  $\Phi_{\text{quad}}, \Theta_{\text{quad}} \sim \sin^2 \iota$ . Dessa forma, sistemas binários não apresentam modos de polarização escalar na direção  $\iota = 0$ , enquanto os modos tensoriais contribuem em qualquer direção, atingindo apenas um valor mínimo em  $\iota = \pi/2$ .

Além disso, dependem das massas das componentes do sistema binário,  $(m_1, m_2)$ , e de suas combinações, como a massa total  $m = m_1 + m_2$  e a *chirp mass*  $M_c$ . Especificamente, as contribuições de quadrupolo (tanto tensorial quanto escalar) seguem a dependência  $M_c^{5/3}$ , enquanto a contribuição de dipolo nos modos escalares aparece na forma  $M_c^{5/3}/m^{1/3}$ . Também há uma dependência com as massas no fator  $\Gamma$  no caso de sistemas binários que contêm estrelas de nêutrons.

A dependência das componentes com as sensibilidades  $s_1$  e  $s_2$  surge nos parâmetros  $\mathcal{S}$  e  $\Gamma$  e na função  $\Delta = \Delta(r)$ , definidos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= s_2 - s_1, \\ \Gamma &= \frac{(1 - 2s_1)m_2 + (1 - 2s_2)m_1}{m}, \\ \Delta &= \delta(1 + m_s r)e^{-m_s r}, \\ \delta &= \alpha(1 - 2s_1)(1 - 2s_2). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Aqui, definimos o parâmetro  $\delta$  para separar os termos que dependem das sensibilidades do termo que é uma função da distância orbital  $r$ .

A frequência angular  $\omega$  do sistema binário aparece tanto na amplitude dos modos de polarização escalares e tensoriais quanto na fase da onda, por meio de  $\Omega(t)$ , definida como:

$$\Omega(t) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt'. \quad (5.10)$$

Dessa forma, a determinação da evolução temporal da frequência angular é essencial para obter as formas de onda associadas aos quatro estados de polarização. A função



$\omega(t)$  será determinada na Seção 5.3. Além disso, sendo  $f$  a frequência orbital do sistema binário, podemos definir a relação  $f = \omega/2\pi$  ou, equivalentemente,  $\omega = 2\pi f$ . Manteremos a frequência angular  $\omega$  para o desenvolvimento das equações, contudo, para a análise de tabelas e gráficos, utilizaremos a frequência  $f$ .

Considerando um sistema binário em uma órbita circular de frequência  $\omega$  constante, obtemos  $\Omega(t) = \omega t + \Omega_0$ . Verificamos que o modo tensorial, dado por um termo de quadrupolo, apresenta uma frequência angular  $\omega_{\text{gw}}^{(\text{quad})}$  igual ao dobro da frequência angular do sistema binário,  $\omega_{\text{gw}}^{(\text{quad})} = 2\omega$ . Em termos da frequência  $f_{\text{gw}}^{(\text{quad})}$ , temos

$$f_{\text{gw}}^{(\text{quad})} = \frac{\omega_{\text{gw}}^{(\text{quad})}}{2\pi} = \frac{\omega}{\pi}. \quad (5.11)$$

Já os modos escalares apresentam um termo de dipolo com frequência angular  $\omega_{\text{gw}}^{(\text{dip})}$  igual à frequência angular do sistema, ou seja,  $\omega_{\text{gw}}^{(\text{dip})} = \omega$ . Em termos de frequência, temos

$$f_{\text{gw}}^{(\text{dip})} = \frac{\omega_{\text{gw}}^{(\text{dip})}}{2\pi} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (5.12)$$

além de um termo de quadrupolo com frequência igual à frequência do modo tensorial.

Os parâmetros associados à teoria de Brans-Dicke são a massa do campo escalar  $m_s$  e a função de acoplamento  $\omega(\varphi)$ , que, neste caso, consideramos constante,  $\omega(\varphi) = \omega_0$ , assumindo apenas o primeiro termo da expansão em torno da perturbação do campo escalar  $\delta\varphi$ , conforme dado pela Equação (4.10). Usualmente, o termo constante também recebe o índice  $BD$ ,  $\omega_0 \rightarrow \omega_{BD}$ .

A massa do campo escalar está relacionada com o comprimento de onda Compton, dado por  $\lambda_s = h/(m_s c)$ , onde  $h$  é a constante de Planck e  $c$  é a velocidade da luz. Além disso, essa grandeza define uma frequência de corte associada:

$$f_c = \frac{m_s c^2}{h}. \quad (5.13)$$

Como já mencionado, um sistema binário só pode emitir radiação escalar em frequências superiores à frequência de corte. Dessa forma, a contribuição de dipolo da radiação escalar ocorre apenas para sistemas binários cuja frequência orbital satisfaça  $f > f_c$  ou, em termos da frequência do termo dipolar da onda gravitacional,  $f_{\text{gw}}^{(\text{dip})} > f_c$ . Enquanto isso, a contribuição de quadrupolo se manifesta para  $2f > f_c$ , ou, equivalentemente, em termos da frequência das contribuições de quadrupolo da

onda gravitacional,  $f_{\text{gw}}^{(\text{quad})} > f_c$ .

Em [Alsing et al. \(2012\)](#), foram analisados o atraso de Shapiro, o efeito Nordtvedt e o decaimento orbital devido à emissão de radiação gravitacional em sistemas binários compactos com órbitas quase circulares. Ao comparar com dados observacionais, esse trabalho determinou limites no espaço de parâmetros bidimensional da teoria de Brans-Dicke,  $(m_s, \omega_{BD})$ . Os principais resultados obtidos foram: para o atraso de Shapiro no Sistema Solar (missão Cassini),  $\omega_{BD} > 40.000$  para massas escalares  $m_s < 2,5 \times 10^{-20}$  eV; para o efeito Nordtvedt,  $\omega_{BD} > 1000$  quando  $m_s < 2,5 \times 10^{-20}$  eV; e para o decaimento do período orbital da binária PSR J1012+5307,  $\omega_{BD} > 1250$  para  $m_s < 10^{-20}$  eV.

Dessa forma, adotaremos os valores limites  $m_s = 2,5 \times 10^{-20}$  eV e  $\omega_0 = 40.000$ . Nessa faixa, os parâmetros associados à teoria de Brans-Dicke, que aparecem nas equações dos estados de polarização, são apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.2. As duas tabelas apresentam os valores dos limites impostos ao espaço de parâmetros  $(m_s, \omega_{BD})$ , obtidos por [Alsing et al. \(2012\)](#). A partir desses valores, calculamos os respectivos parâmetros associados.

Tabela 5.1 - Massa do campo escalar  $m_s$ .

| $m_s$ (eV)            | $\lambda_s$ (m)       | $f_c$ (Hz)            |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $2.5 \times 10^{-20}$ | $4.96 \times 10^{13}$ | $6.05 \times 10^{-6}$ |
| $1.0 \times 10^{-20}$ | $1.24 \times 10^{14}$ | $2.42 \times 10^{-6}$ |
| $2.5 \times 10^{-20}$ | $4.96 \times 10^{13}$ | $6.05 \times 10^{-6}$ |

Tabela 5.2 - Parâmetro de acoplamento  $\omega_0$ .

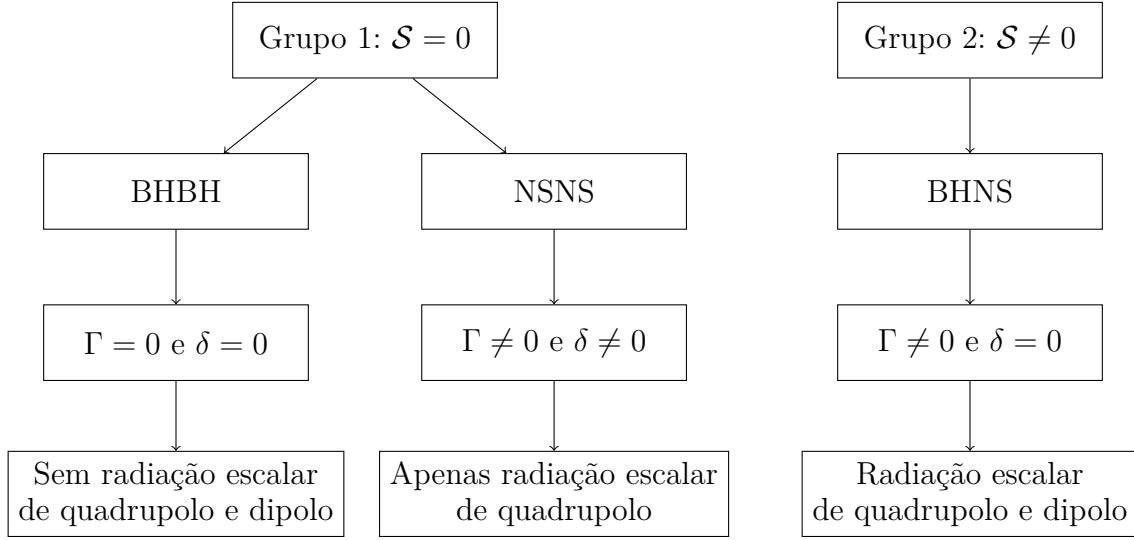
| $\omega_0$ | $\alpha$              | $\xi$                 |
|------------|-----------------------|-----------------------|
| 1000       | $4.99 \times 10^{-4}$ | $4.99 \times 10^{-4}$ |
| 1250       | $4.00 \times 10^{-4}$ | $3.99 \times 10^{-4}$ |
| 40000      | $1.25 \times 10^{-5}$ | $1.25 \times 10^{-5}$ |

Fonte: [Alsing et al. \(2012\)](#).

Uma maneira de classificar os sistemas binários é de acordo com o valor do parâmetro  $\mathcal{S}$ , conforme é apresentado na Figura 5.1. Assim, identificamos dois grupos: O primeiro grupo consiste em sistemas formados por objetos do mesmo tipo, como binárias de estrelas de nêutrons (NSNS) e binárias de buracos negros (BHBH). O segundo grupo corresponde às binárias mistas, compostas por objetos de naturezas diferentes, como sistemas formados por um buraco negro e uma estrela de nêutrons (BHNS). A principal diferença entre esses dois grupos está no parâmetro  $\mathcal{S}$ , responsável pela contribuição dipolar da radiação escalar, que apenas para binárias mistas

não é nula.

Figura 5.1 - Diagrama - Sistemas binários na teoria de Brans-Dicke.



O diagrama descreve as características gerais referentes a emissão de ondas gravitacionais por sistemas binários de objetos compactos na teoria de Brans-Dicke.

Fonte: Autor.

No caso de um sistema binário composto por dois buracos negros, temos  $s_1 = s_2 = 1/2$ . A partir das Equações (5.9), observamos que os parâmetros associados às contribuições de dipolo e quadrupolo dos modos escalares se anulam, ou seja,  $\mathcal{S} = \Gamma = 0$ . Dessa forma, não há emissão de radiação escalar na forma de onda gravitacional para binárias de buracos negros, considerando as contribuições de dipolo e quadrupolo no regime de órbitas quase circulares. Além disso, a Equação (5.9) também mostra que  $\delta = 0$ , o que implica que os modos tensoriais apresentam resultados análogos aos da Relatividade Geral, com a substituição  $M_c \rightarrow M_c(1 - \xi)$  (WILL, 1994).

Este resultado já era esperado, uma vez que a teoria de Brans-Dicke prevê buracos negros com geometria idêntica à geometria de Schwarzschild, com o campo escalar  $\varphi = \varphi_0$  constante em todo o exterior do horizonte, sendo responsável apenas por definir o valor da constante gravitacional (WILL, 2018).

Deste modo, não podemos distinguir a dinâmica de um sistema binário de buracos negros daquela prevista pela Relatividade Geral. Essa é uma consequência do

teorema de *no-hair* da Relatividade Geral, que também se aplica à teoria de Brans-Dicke, segundo o qual um buraco negro estacionário e neutro é caracterizado unicamente por sua massa e momento angular. Em [Will e Zaglauer \(1989\)](#), essa propriedade de *no-hair* é estendida para um par de buracos negros em órbita, assumindo que a separação orbital seja suficientemente grande para que as deformações de maré possam ser ignoradas.

Portanto, para o estudo dos estados de polarização escalar na teoria de Brans-Dicke, é necessário que, pelo menos, uma das componentes do sistema binário seja uma estrela de nêutrons. Nesse contexto, o evento GW170817 é particularmente relevante para a investigação de ondas gravitacionais escalares, pois corresponde a um sistema binário confirmado de estrelas de nêutrons.

Em uma binária de estrelas de nêutrons, onde  $s_1 = s_2 = 0.2$ , não há contribuição dipolar dos modos escalares, pois  $\mathcal{S} = 0$ . Dessa forma, apenas as contribuições de quadrupolo estão presentes tanto nos modos escalares quanto nos tensoriais. Por outro lado, em um sistema binário misto, composto por uma estrela de nêutrons e um buraco negro, há contribuições tanto dipolares quanto quadrupolares nos modos escalares, o que pode levar a uma evolução mais complexa da frequência orbital. Além disso, observa-se que  $\delta = 0$ , resultando em modos tensoriais análogos aos da Relatividade Geral, com a relação  $M_c \rightarrow M_c(1 - \xi)$ .

Na Tabela 5.3, apresentamos alguns dos parâmetros associados à emissão de ondas gravitacionais para sistemas binários dos tipos NSNS, BHBH e NSBH, considerando valores típicos de massa para estrelas de nêutrons e buracos negros de massas estelares.

Tabela 5.3 - Parâmetros típicos para alguns sistemas binários.

| Parâmetro      | NSNS                  | BHBH  | NSBH |
|----------------|-----------------------|-------|------|
| $m_1(M_\odot)$ | 1.40                  | 5.00  | 1.40 |
| $m_2(M_\odot)$ | 1.40                  | 5.00  | 5.00 |
| $s_1$          | 0.20                  | 0.50  | 0.20 |
| $s_2$          | 0.20                  | 0.50  | 0.50 |
| $m(M_\odot)$   | 2.80                  | 10.00 | 6.40 |
| $\mu(M_\odot)$ | 0.70                  | 2.50  | 1.09 |
| $M_c(M_\odot)$ | 1.22                  | 4.35  | 2.22 |
| $\mathcal{S}$  | 0.00                  | 0.00  | 0.30 |
| $\Gamma$       | 0.60                  | 0.00  | 0.47 |
| $\delta$       | $4.50 \times 10^{-6}$ | 0.00  | 0.00 |

Fonte: Autor.

Na Tabela 5.4, calculamos os valores das amplitudes dos quatro modos de polarização para um sistema típico NSNS, cujos parâmetros são dados pela Tabela 5.3, considerando um sistema binário com frequências orbitais típicas de  $f = 6.05 \times 10^{-6}, 0.1 \times 10^{-3}, 10, 100$  Hz. Lembramos que as frequências da onda gravitacional são  $f_{\text{gw}}^{\text{dipolo}} = f$  para o termo de dipolo e  $f_{\text{gw}}^{\text{quad}} = 2f$  para o termo de quadrupolo. Além disso, assumimos uma inclinação orbital de  $\iota = \pi/4$  para evitar anular as amplitudes dos modos escalares e consideramos uma distância da fonte de  $R = 40 \text{ Mpc} \approx 1.23 \times 10^{24} \text{ m}$ . Nas Tabelas 5.5 e 5.6 fazemos o mesmo procedimento para sistemas BHBH e binárias BHNS, respectivamente.

Tabela 5.4 - Amplitude dos estados de polarização - sistema binário NSNS.

| Frequência (Hz)                               | $f = 6.05 \times 10^{-6}$ | $f = 1.00 \times 10^{-4}$ | $f = 10.0$             | $f = 100.0$            |
|---|---------------------------|---------------------------|------------------------|------------------------|
| $A_+$   | $1.64 \times 10^{-27}$    | $1.06 \times 10^{-26}$    | $2.29 \times 10^{-23}$ | $1.06 \times 10^{-22}$ |
| $A_\times$                                    | $1.54 \times 10^{-27}$    | $1.00 \times 10^{-26}$    | $2.16 \times 10^{-23}$ | $1.00 \times 10^{-22}$ |
| $A_\Phi^{\text{quad}}$                        | $2.03 \times 10^{-33}$    | $1.33 \times 10^{-32}$    | $2.86 \times 10^{-29}$ | $1.33 \times 10^{-28}$ |
| $A_\Phi^{\text{dipolo}}$                      | 0                         | 0                         | 0                      | 0                      |
| $A_\times/A_+$                                | 0.943                     | 0.943                     | 0.943                  | 0.943                  |
| $A_\Phi^{\text{dipolo}}/A_\Phi^{\text{quad}}$ | 0                         | 0                         | 0                      | 0                      |
| $A_\Phi^{\text{quad}}/A_+$                    | $1.24 \times 10^{-6}$     | $1.25 \times 10^{-6}$     | $1.25 \times 10^{-6}$  | $1.25 \times 10^{-6}$  |
| $A_\Phi^{\text{dip}}/A_+$                     | 0                         | 0                         | 0                      | 0                      |
| $A_\Phi^{\text{quad}}/A_+$                    | $1.24 \times 10^{-6}$     | $1.25 \times 10^{-6}$     | $1.25 \times 10^{-6}$  | $1.25 \times 10^{-6}$  |
| $\Theta_{\text{dip}}/\Phi_{\text{dip}}$       | -                         | -                         | -                      | -                      |
| $\Theta_{\text{quad}}/\Phi_{\text{quad}}$     | 0.25                      | $9.16 \times 10^{-4}$     | $9.16 \times 10^{-14}$ | $9.16 \times 10^{-16}$ |

Para os valores apresentados nesta tabela consideramos  $\iota = \pi/4$  e  $R = 40$  Mpc.

Fonte: Autor.

Tabela 5.5 - Amplitude dos estados de polarização - sistema binário BHBH.

| Frequência (Hz)                               | $f = 6.05 \times 10^{-6}$ | $f = 1.00 \times 10^{-4}$ | $f = 10.0$             | $f = 100.0$            |
|---|---------------------------|---------------------------|------------------------|------------------------|
| $A_+$   | $1.37 \times 10^{-26}$    | $8.86 \times 10^{-26}$    | $1.91 \times 10^{-22}$ | $8.86 \times 10^{-22}$ |
| $A_\times$                                    | $1.29 \times 10^{-26}$    | $8.35 \times 10^{-26}$    | $1.80 \times 10^{-22}$ | $8.35 \times 10^{-22}$ |
| $A_\Phi^{\text{quad}}$                        | 0                         | 0                         | 0                      | 0                      |
| $A_\Phi^{\text{dipolo}}$                      | 0                         | 0                         | 0                      | 0                      |
| $A_\times/A_+$                                | 0.943                     | 0.943                     | 0.943                  | 0.943                  |
| $A_\Phi^{\text{dipolo}}/A_\Phi^{\text{quad}}$ | —                         | —                         | —                      | —                      |
| $A_\Phi^{\text{quad}}/A_+$                    | 0                         | 0                         | 0                      | 0                      |
| $A_\Phi^{\text{dipolo}}/A_+$                  | 0                         | 0                         | 0                      | 0                      |
| $\Theta_{\text{dip}}/\Phi_{\text{dip}}$       | —                         | —                         | —                      | —                      |
| $\Theta_{\text{quad}}/\Phi_{\text{quad}}$     | —                         | —                         | —                      | —                      |

Para os valores apresentados nesta tabela consideramos  $\iota = \pi/4$  e  $R = 40$  Mpc.

Fonte: Autor.

Tabela 5.6 - Amplitude dos estados de polarização - sistema binário BHNS.

| Frequência (Hz)                               | $f = 6.05 \times 10^{-6}$ | $f = 1.00 \times 10^{-4}$ | $f = 10.0$             | $f = 100.0$            |
|---|---------------------------|---------------------------|------------------------|------------------------|
| $A_+$   | $4.44 \times 10^{-27}$    | $2.88 \times 10^{-26}$    | $6.20 \times 10^{-23}$ | $2.88 \times 10^{-22}$ |
| $A_\times$                                    | $4.18 \times 10^{-27}$    | $2.71 \times 10^{-26}$    | $5.84 \times 10^{-23}$ | $2.71 \times 10^{-22}$ |
| $A_\Phi^{\text{quad}}$                        | $4.30 \times 10^{-33}$    | $2.81 \times 10^{-32}$    | $6.05 \times 10^{-29}$ | $2.81 \times 10^{-28}$ |
| $A_\Phi^{\text{dipolo}}$                      | $7.29 \times 10^{-30}$    | $1.88 \times 10^{-29}$    | $8.73 \times 10^{-28}$ | $1.88 \times 10^{-27}$ |
| $A_\times/A_+$                                | 0.943                     | 0.943                     | 0.943                  | 0.943                  |
| $A_\Phi^{\text{dipolo}}/A_\Phi^{\text{quad}}$ | $1.69 \times 10^3$        | 669                       | 14.4                   | 6.69                   |
| $A_\Phi^{\text{quad}}/A_+$                    | $9.70 \times 10^{-7}$     | $9.77 \times 10^{-7}$     | $9.77 \times 10^{-7}$  | $9.77 \times 10^{-7}$  |
| $A_\Phi^{\text{dipolo}}/A_+$                  | $1.64 \times 10^{-3}$     | $6.54 \times 10^{-4}$     | $1.41 \times 10^{-5}$  | $6.54 \times 10^{-6}$  |
| $A_\Phi^{\text{quad}}/A_+$                    | $9.70 \times 10^{-7}$     | $9.77 \times 10^{-7}$     | $9.77 \times 10^{-7}$  | $9.77 \times 10^{-7}$  |
| $\Theta_{\text{dip}}/\Phi_{\text{dip}}$       | 1.00                      | $3.66 \times 10^{-3}$     | $3.66 \times 10^{-13}$ | $3.66 \times 10^{-15}$ |
| $\Theta_{\text{quad}}/\Phi_{\text{quad}}$     | 0.25                      | $9.16 \times 10^{-4}$     | $9.16 \times 10^{-14}$ | $9.16 \times 10^{-16}$ |

Para os valores apresentados nesta tabela consideramos  $\iota = \pi/4$  e  $R = 40$  Mpc.

Fonte: Autor.

Analisando a Equação (4.72), podemos avaliar a variação da frequência orbital  $\omega$  em função da distância orbital  $r$  do sistema. Devido à dependência de  $\Delta$  com  $r$ , através do termo  $(1 + m_s r)e^{-m_s r}$ , a obtenção da evolução temporal da frequência, devido ao decaimento da órbita, pode se tornar complexa. Para simplificar a análise, podemos considerar o regime em que  $m_s r \ll 1$ . Para justificar essa aproximação, verificaremos a evolução da frequência em função da distância orbital e identificaremos em que valores de  $r$  o sistema entra na banda de detecção dos interferômetros terrestres atuais, que operam na faixa de 10 Hz a 1000 Hz.

Considerando os três sistemas descritos na Tabela 5.3 e os parâmetros da Tabela 5.2, com  $\omega_{BD} = 40.000$ , obtemos<sup>1</sup> os resultados apresentados na Figura 5.2. Observamos que, nos casos analisados, os sistemas binários entram na banda de detecção dos interferômetros terrestres quando a separação orbital está entre 600 km e 1 200 km, o que significa que podemos considerar  $r \sim 10^5$  m ou  $r \sim 10^6$  m. Como o comprimento de onda de Compton associado à massa do campo escalar  $m_s = 2.5 \times 10^{-20}$  eV é

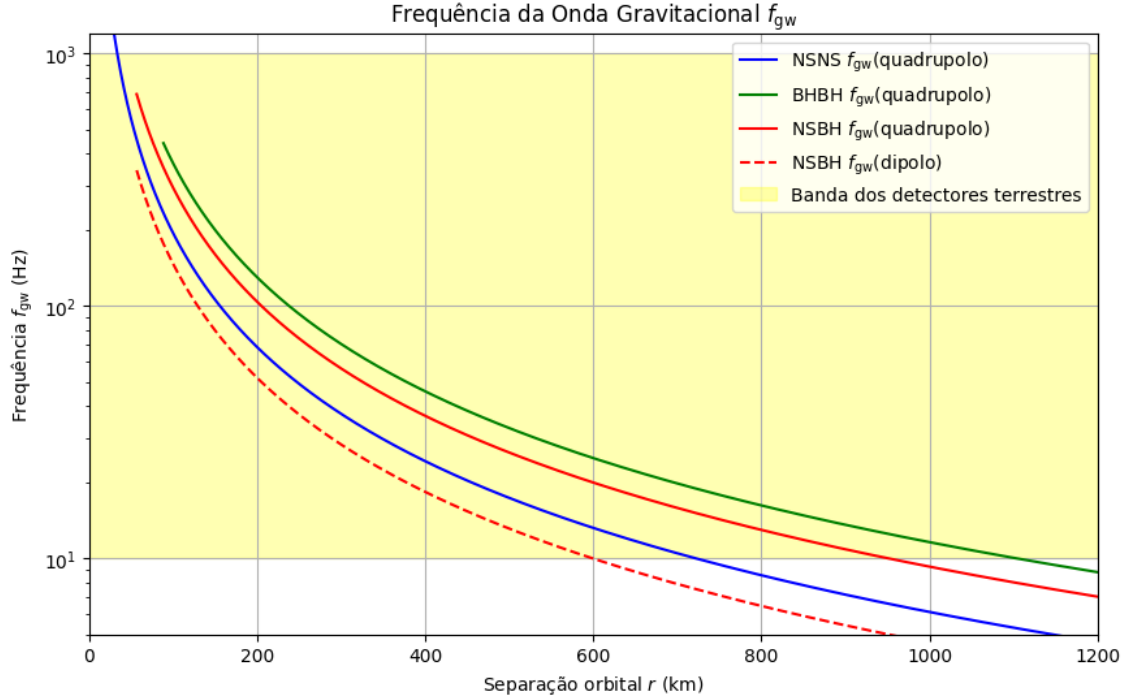
<sup>1</sup>Utilizamos a Equação (4.72) e as relações entre a frequência de onda gravitacional com a frequencial angular do sistema orbital apresentadas nas Equações (5.11) e (5.12).

aproximadamente  $\lambda_s = 4.97 \times 10^{13}$  m, podemos estimar a razão  $m_s r$  como:

$$m_s r \sim \frac{r}{\lambda_s} \sim 10^{-7}. \quad (5.14)$$

Dessa forma, no regime de órbitas quase circulares, avaliando a emissão de ondas gravitacionais na faixa de detecção dos interferômetros terrestres, podemos considerar a aproximação  $m_s r \ll 1$  como válida.

Figura 5.2 - Evolução da frequência gravitacional com a distância orbital.



O gráfico ilustra a evolução da frequência da onda gravitacional  $f_{gw}$  em função da separação orbital dos sistemas binários apresentados na Tabela 5.3. Também utilizamos os resultados para  $m_s = 2.5 \times 10^{-20}$  eV e  $\omega_{BD} = 40\,000$ , conforme apresentados na Tabela 5.2. A escala do gráfico está definida para frequências próximas da banda dos detectores terrestres entre  $10 \text{ Hz} < f < 1\,000 \text{ Hz}$ .

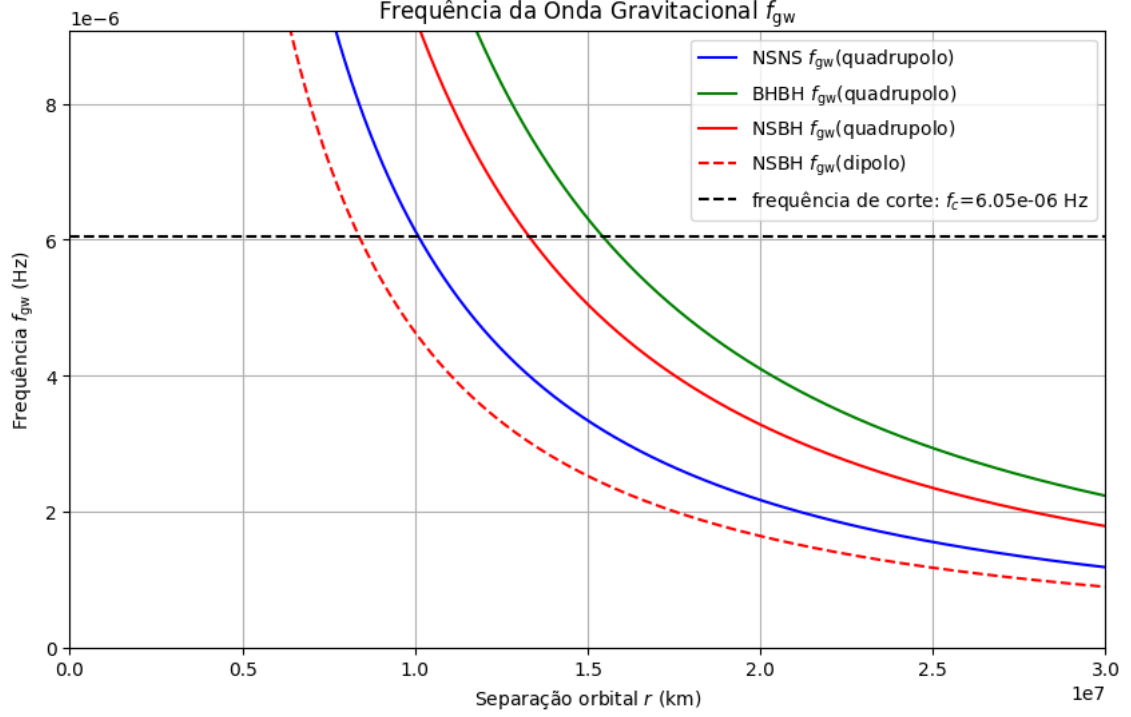
Fonte: Autor.

Outro regime de interesse é determinar a distância orbital mínima na qual um sistema binário começa a emitir radiação escalar. Como mencionado anteriormente, a frequência da onda gravitacional deve ser maior que a frequência de corte associada



à massa do campo escalar  $m_s$ . Na Figura 5.3, observamos que, para os sistemas considerados na Tabela 5.3, a emissão de radiação escalar ocorre apenas quando a distância orbital é da ordem de  $r \sim 10^{10}$  m ou menor.

Figura 5.3 - Frequência de corte para radiação escalar.



O gráfico é semelhante ao apresentado na Figura 5.2, porém em uma escala próxima à frequência de corte  $f_c = 6.05 \times 10^{-6}$  Hz. Observe que, para os modos de polarização escalares, a emissão de radiação gravitacional ocorrerá apenas para frequências superiores à frequência de corte.

Fonte: Autor.

No caso limite em que a frequência gravitacional se aproxima da frequência de corte,  $f_{gw} \sim 10^{-6}$ , temos  $m_s r \sim 10^{-3}$ . A frequência de corte, embora esteja bem abaixo da faixa de detecção dos interferômetros terrestres, encontra-se próxima da região observável pela técnica de *pulsar timing*, no caso de campos escalares mais leves, com  $m_s \approx 1.27 \times 10^{-23}$  eV, resultando em  $f_c \sim 10^{-9}$  Hz.

## 5.1 Energia orbital de um sistema binário

A energia total do sistema  $E$  é dada basicamente pela soma da energia cinética com a energia potencial do sistema,  $E = E_c + E_p$ . A energia cinética para um sistema binário é dada por:

$$E_c = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2. \quad (5.15)$$

Considerando uma órbita circular, temos que  $\dot{r} = r\omega$  e utilizando a relação (4.72), obtemos:

$$E_c = \frac{1}{2}\mu(\tilde{g}m\omega)^{2/3} = \frac{1}{2}\mu(G(1-\xi)m\omega)^{2/3}(1-\Delta)^{2/3}. \quad (5.16)$$

A energia potencial pode ser obtida utilizando a Equação (4.59) para calcular o potencial atuando em uma partícula de massa  $m_1$ , gerado por uma única partícula de massa  $m_2$  a uma distância  $r$ :

$$V = -\frac{m_2}{\varphi_0 r} \left( 1 + \frac{1}{2\omega_0 + 3} (1 - 2s_1)(1 - 2s_2)e^{-m_s r} \right). \quad (5.17)$$

A energia potencial é dada por  $E_p = m_1 V$ , desta forma, utilizando as definições de  $\alpha$ ,  $G$  e  $\xi$ , (4.65), (4.66) e (4.67), obtemos:

$$E_p = -\frac{m_1 m_2}{r} G(1-\xi) \left( 1 + \alpha(1 - 2s_1)(1 - 2s_2)e^{-m_s r} \right). \quad (5.18)$$

Utilizando a Equação (4.72) para eliminar  $r$  e definindo a função  $\Delta'(r)$ , dada por:

$$\Delta'(r) = \alpha(1 - 2s_1)(1 - 2s_2)e^{-m_s r} = \delta e^{-m_s r}, \quad (5.19)$$

também encontramos a relação:

$$\Delta(r) = (1 + m_s r)\Delta'(r), \quad (5.20)$$

por fim, obtemos:

$$E_p = -\left( \frac{1 - \Delta'}{1 - \Delta} \right) \mu [G(1-\xi)m\omega]^{2/3} (1 - \Delta)^{2/3} \quad (5.21)$$

Desta forma, a energia total de um sistema binário é dada por:

$$E = \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{1 - \Delta'}{1 - \Delta} \right) \right] [G(1-\xi)(1 - \Delta)]^{2/3} M_c^{5/3} \omega^{2/3}, \quad (5.22)$$

onde foi utilizada a Equação (4.158) para identificar  $M_c^{5/3} = \mu m^{2/3}$ . Observamos

que, com o resultado da (5.22), não será possível eliminar a distância orbital  $r$  quando for calculado o decaimento da energia orbital  $\dot{E}$  devido a emissão de ondas gravitacionais, uma vez que as funções  $\Delta$  e  $\Delta'$  contêm termos do tipo  $\Delta(r) \sim (1 + m_s r)e^{-m_s r}$  e  $\Delta'(r) \sim e^{-m_s r}$ .

Considerando um regime em que o termo  $m_s r \ll 1$ , condição compatível com a faixa de frequência dos detectores terrestres, podemos adotar as aproximações  $(1 - m_s r)e^{-m_s r} \approx e^{-m_s r} \approx 1$ . Desta forma, obtemos que:

$$\Delta \approx \Delta' \approx \delta = \alpha(1 - 2s_1)(1 - 2s_2). \quad (5.23)$$

Assim, dentro dessa aproximação, a energia total pode ser expressa como:

$$E = -\frac{1}{2} \left[ G(1 - \xi)(1 - \delta) \right]^{2/3} M_c^{5/3} \omega^{2/3}. \quad (5.24)$$

A partir da Equação (5.24), observamos que, à medida que a energia total diminui devido à emissão de ondas gravitacionais, tornando-se cada vez mais negativa, a frequência orbital  $\omega$  deve aumentar progressivamente. Pela Equação (4.72), verifica-se que um aumento na frequência orbital  $\omega$  corresponde a uma redução da distância orbital  $r$ , o que intensifica ainda mais a perda de energia do sistema. Esse processo é instável e, conseqüentemente, leva ao colapso do sistema.

Dessa forma, a órbita do sistema binário sofre um desvio significativo em relação a uma órbita perfeitamente circular. Para caracterizar um regime quase-circular, tomamos a derivada da Equação (4.72), considerando o limite em que  $m_s r \ll 1$ . Assim, obtemos:

$$\dot{r} = -\frac{2}{3} r \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{2}{3} (\omega r) \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}. \quad (5.25)$$

Observamos que, se  $\dot{\omega} \ll \omega^2$ , então  $|\dot{r}|$  é muito menor que a velocidade tangencial  $\omega r$ . Isso indica que o raio da órbita varia lentamente ao longo do tempo, caracterizando um regime quase-circular<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>O regime de órbita quase-circular já foi previamente considerado na solução dos modos de polarização escalar e tensorial.

## 5.2 Energia emitida por onda gravitacional

O tensor energia-momento associado à emissão de ondas gravitacionais na teoria de Brans-Dicke é dado por (SAFFER et al., 2018):

$$T_{\mu\nu}^{\text{gw}} = \left\langle \frac{\varphi_0}{32\pi} \partial_\mu h_{TT}^{ij} \partial_\nu h_{ij}^{TT} + \frac{\varphi_0}{16\pi} (3 + 2\omega_0) \frac{\partial_\mu(\delta\varphi) \partial_\nu(\delta\varphi)}{\varphi_0^2} \right\rangle, \quad (5.26)$$

onde os termos entre  $\langle \dots \rangle$  representam uma média sobre vários comprimentos de onda.<sup>3</sup>

Para calcular a luminosidade de uma onda gravitacional, consideramos inicialmente o fluxo de energia da radiação gravitacional, definido como a quantidade de energia  $dE$  que atravessa um elemento de área  $dA$  em uma esfera de raio  $R$  ao redor da fonte, durante um intervalo de tempo  $dt$ . Supondo uma onda se propagando na direção do eixo  $z = R$ , o fluxo de energia é dado pela componente  $T_{0R}^{\text{gw}}$  do tensor energia-momento, conforme a Equação (5.26):

$$\frac{dE}{dt dA} = -T_{0R}^{\text{gw}} \rightarrow \frac{dE}{dt d\Omega} = -R^2 T_{0R}^{\text{gw}}, \quad (5.27)$$

onde utilizamos a definição de ângulo sólido  $dA = R^2 d\Omega$ . O sinal negativo indica que a onda gravitacional, ao se propagar para fora, transporta energia para longe da fonte.

No caso de ondas gravitacionais escalares e tensoriais sem massa, podemos utilizar a relação  $T_{\text{gw}}^{0R} = T_{\text{gw}}^{00} + \mathcal{O}(R^{-3})$ . No entanto, ao considerar um campo massivo com massa  $m_s$ , essa relação não se mantém, ou seja,  $T_{\text{gw}}^{0R} \neq T_{\text{gw}}^{00} + \mathcal{O}(R^{-3})$ .

Desta forma, a potência por unidade de ângulo sólido da radiação em onda gravitacional emitida na teoria de Brans-Dicke é dada por (LIU et al., 2020):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{dE_t}{dt d\Omega} + \frac{dE_s}{dt d\Omega}, \quad (5.28)$$

onde o primeiro termo do lado direito está relacionado à energia emitida pelos termos tensoriais, dado por:

$$\frac{dE_t}{dt d\Omega} = -\frac{\varphi_0}{32\pi} R^2 \left\langle \partial_0 h_{TT}^{ij} \partial_R h_{ij}^{TT} \right\rangle \quad (5.29)$$

---

<sup>3</sup>Em (SAFFER et al., 2018), é utilizada a quantidade  $\theta_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h - \frac{\delta\varphi}{\varphi_0}\eta_{\mu\nu}$ . No entanto, pode-se demonstrar que, no calibre TT, temos  $\theta_{ij}^{TT} = h_{ij}^{TT}$ .

e o segundo termo está relacionado com a energia carregada pelos modos escalares, dado por:

$$\frac{dE_s}{dt d\Omega} = -\frac{\varphi_0}{16\pi}(3 + 2\omega_0)R^2 \left\langle \frac{\partial_0(\delta\varphi) \partial_R(\delta\varphi)}{\varphi_0^2} \right\rangle. \quad (5.30)$$

Deste modo, para determinar a potência por unidade de ângulo sólido emitida por um sistema binário na forma de onda gravitacional, é necessário calcular separadamente as contribuições escalar e tensorial.

### 5.2.1 Radiação tensorial

Utilizando a solução para o modo tensorial apresentada na Equação (5.1), observamos que as polarizações  $h_+$  e  $h_\times$  dependem do tempo retardado  $t - R$ . Isso implica que, se  $h_{ij}^{TT} = \frac{1}{R}f_{ij}(t - R)$ , então:

$$\partial_R h_{ij}^{TT} = -\frac{1}{R^2}f_{ij}(t - R) + \frac{1}{R}\partial_R f_{ij}(t - R). \quad (5.31)$$

Aplicando a regra da cadeia,  $\partial_R f_{ij}(t - R) = -\partial_0 f_{ij}(t - R)$ , obtemos a seguinte relação (MAGGIORE, 2007):

$$\partial_R h_{ij}^{TT} = -\partial_0 h_{ij}^{TT} + \mathcal{O}(1/R^2), \quad (5.32)$$

onde eliminamos os termos  $\mathcal{O}(1/R^2)$ . Desta forma, a contribuição dos modos tensoriais para a potência por unidade de ângulo sólido é:

$$\frac{dE_t}{dt d\Omega} = -\frac{\varphi_0}{32\pi}R^2 \left\langle \partial_0 h_{TT}^{ij} \partial_R h_{ij}^{TT} \right\rangle = \frac{\varphi_0}{32\pi}R^2 \left\langle \dot{h}_{TT}^{ij} \dot{h}_{ij}^{TT} \right\rangle = \frac{\varphi_0}{16\pi}R^2 \left\langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \right\rangle, \quad (5.33)$$

em que utilizamos a relação  $\dot{f}(t) = \partial_0 f$ . Substituindo a Equação (5.1), considerando que a média  $\langle \cos^2 \rangle = \langle \sin^2 \rangle = 1/2$ , obtemos:

$$\frac{dE_t}{dt d\Omega} = \frac{2}{\pi} \frac{(1 - \Delta)^{2/3}}{G(1 - \xi)} \left[ G(1 - \xi) M_c \omega \right]^{10/3} g(\iota). \quad (5.34)$$

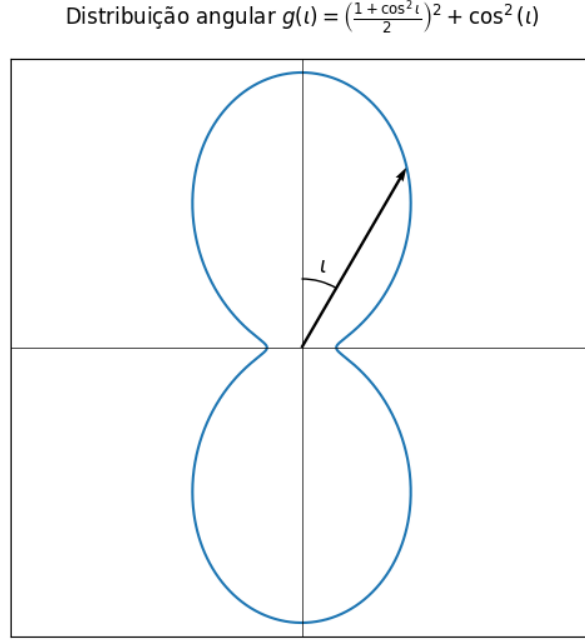
onde a função  $g(\iota)$  que dá a dependência angular da distribuição da potência irradiada é definida por:

$$g(\iota) = \left( \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right)^2 + \cos^2(\iota). \quad (5.35)$$

Como mostrado na Figura 5.4, a radiação é máxima quando  $\iota = 0$ , e mínima quando  $\iota = \pi/2$ , mas nunca se anula.

Para obter a potência total irradiada, devemos integrar a Equação (5.34) sobre

Figura 5.4 - Distribuição angular da radiação gravitacional.



Distribuição angular definida pela função  $g(\iota)$ , onde  $\iota$  está definido em relação ao eixo vertical.

Fonte: Adaptado de [Maggiore \(2007\)](#).

todo ângulo sólido, o que basicamente significa integrar a função  $g(\iota)$ . Usando que  $d\Omega = \sin \iota \, d\iota \, d\phi$ , obtemos:

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} g(\iota) = \frac{4}{5}, \quad (5.36)$$

Portanto, a potência total irradiada por um sistema binário nos modos tensoriais é dada por:

$$P_t = \frac{dE_t}{dt} = \frac{32}{5} \frac{(1 - \Delta)^{4/3}}{G(1 - \xi)} \left[ G(1 - \xi) M_c \omega \right]^{10/3} = \frac{32}{5} \tilde{g}^{4/3} G(1 - \xi) M_c^{10/3} \omega^{10/3}. \quad (5.37)$$

Podemos ainda corrigir as unidades restaurando o valor da velocidade da luz  $c$ :

$$\frac{dE_t}{dt} = \frac{32}{5c^5} \frac{(1 - \Delta)^{4/3}}{G(1 - \xi)} (G(1 - \xi) M_c \omega)^{10/3}. \quad (5.38)$$

### 5.2.2 Radiação escalar

Utilizando a relação  $\Phi = -\frac{1}{2}\delta\varphi$ , podemos reescrever a contribuição escalar para a potência por unidade de ângulo sólido da radiação gravitacional em função do modo invariante de calibre escalar-transversal:

$$\frac{dE_s}{dt d\Omega} = -\frac{\varphi_0}{16\pi}(3+2\omega_0)R^2 \left\langle \frac{\partial_0(\delta\varphi) \partial_R(\delta\varphi)}{\varphi_0^2} \right\rangle = -\frac{\varphi_0}{4\pi}(3+2\omega_0)R^2 \left\langle \partial_0\Phi \partial_R\Phi \right\rangle. \quad (5.39)$$

Desta forma, podemos substituir as Equações (5.4) e (5.5) para calcular as contribuições de dipolo e quadrupolo para a potência irradiada. Observamos também que os modos escalares apresentam a dependência temporal dada por  $t - v_n R$ , onde  $n$  indica o termo da expansão em multipolo (dipolo  $n = 1$  e quadrupolo  $n = 2$ ) e  $v_n$  é dado por:

$$v_n = \frac{n\omega}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}}. \quad (5.40)$$

Fazendo a seguinte generalização:

$$\Phi_n = \frac{A_n}{R} \cos \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}} + n\Omega \right) H(n\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_n}, \quad (5.41)$$

onde  $n = 1, 2$ . Calculando a derivada temporal desprezando qualquer variação para a  $A_n$  ou  $\omega$  e também utilizando o fato de que  $\partial_0\Omega = \omega$ , obtemos:

$$\partial_0\Phi_n = -\frac{A_n}{R} n\omega \sin \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}} + n\Omega \right) H(n\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_n}. \quad (5.42)$$

Agora, tomando a derivada com relação a variável  $R$ , distância da fonte, obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_R\Phi_n = & -\frac{A_n}{R^2} \cos \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}} + n\Omega \right) H(n\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_n} \\ & - \frac{A_n}{R} \sin \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}} + n\Omega \right) \partial_R \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}} + n\Omega \right) H(n\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_n}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Utilizando a definição de  $v_n$ , verificamos que:

$$\frac{d}{dR} \left[ \frac{m_s^2 R}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}} + n\Omega(t - Rv_n) \right] = -\left(n^2\omega^2 - m_s^2\right)^{1/2} = -n\omega \left(1 - \frac{m_s^2}{n^2\omega^2}\right)^{1/2}. \quad (5.44)$$

Por fim, encontramos que a derivada  $\partial_R \Phi_n$  é dada por:

$$\begin{aligned} \partial_R \Phi_n = & \frac{A_n}{R} n\omega \left(1 - \frac{m_s^2}{n^2\omega^2}\right)^{1/2} \sin \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}} + n\Omega \right) H(n\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_n} \\ & - \frac{A_n}{R^2} \cos \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{n^2\omega^2 - m_s^2}} + n\Omega \right) H(n\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_n}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

Deste modo, identificamos a seguinte relação:

$$\partial_R \Phi_n = - \left(1 - \frac{m_s^2}{n^2\omega^2}\right)^{1/2} \partial_0 \Phi_n + \mathcal{O}(R^2). \quad (5.46)$$

Desta forma, constatamos que  $\partial_0 \Phi \neq -\partial_R \Phi + \mathcal{O}(R^2)$  para uma onda escalar com massa. No caso particular da teoria de Brans-Dicke sem massa, onde  $m_s = 0$ , verificamos que  $v_n = 1$ , o que leva à relação  $\varphi_{,0} = -\varphi_{,R} + \mathcal{O}(R^2)$ . As formas de onda associadas a sistemas binários nesta condição foram obtidas em [Berti et al. \(2012\)](#), sendo baseadas nos resultados de [Alsing et al. \(2012\)](#). Contudo, a consideração de um campo escalar massivo ( $m_s \neq 0$ ) foi abordada apenas em [Liu et al. \(2020\)](#).

Dessa forma, a potência por unidade de ângulo sólido associada à contribuição do termo  $n$  da radiação escalar, desprezando os termos de ordem  $\mathcal{O}(1/R^2)$ , é dada por:

$$\left( \frac{dE_s}{dt d\Omega} \right)_n = \frac{\varphi_0}{4\pi} (3 + 2\omega_0) R^2 \left(1 - \frac{m_s^2}{n^2\omega^2}\right)^{1/2} \left\langle \partial_0 \Phi_n \partial_0 \Phi_n \right\rangle. \quad (5.47)$$

Considerando a contribuição dipolar, com  $n = 1$ , para a radiação escalar, observamos que, a partir da Equação (5.42), encontramos que:

$$\begin{aligned} \partial_0 \Phi_{\text{dip}} = & -\frac{2\alpha}{R} \mathcal{SD} (1 - \Delta)^{2/3} [G(1 - \xi) M_c]^{5/3} \omega^{4/3} \left(1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \sin \iota \\ & \times \sin \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{\omega^2 - m_s^2}} + \Omega \right) H(\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_1}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Desta forma, a contribuição dipolar para potência por unidade de ângulo sólido para a radiação escalar é dada por

$$\left( \frac{dE_s}{dt d\Omega} \right)_1 = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{S}^2 \mathcal{D}^2 \frac{(1 - \Delta)^{4/3}}{G(1 - \xi)} [G(1 - \xi) M_c]^{10/3} \omega^{8/3} \left(1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{3/2} \sin^2 \iota H(\omega - m_s) \quad (5.49)$$



Agora, considerando a contribuição de quadrupolo,  $n = 2$ , da radiação escalar, da Equação (5.42), temos:

$$\begin{aligned} \partial_0 \Phi_{\text{quad}} = & -\frac{2\alpha}{R} \Gamma(1 - \Delta)^{2/3} (G(1 - \xi)M_c)^{5/3} \omega^{5/3} \left(1 - \frac{m_s^2}{4\omega^2}\right) \sin^2 \iota \\ & \times \sin \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{4\omega^2 - m_s^2}} + 2\Omega \right) H(2\omega - m_s) \Big|_{t-Rv_2}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Então, a potência por unidade de ângulo sólido devido à contribuição de quadrupolo da radiação escalar é:

$$\left( \frac{dE_s}{dt d\Omega} \right)_2 = \frac{\alpha}{2\pi} \Gamma^2 \frac{(1 - \Delta)^{4/3}}{G(1 - \xi)} [G(1 - \xi)M_c]^{10/3} \omega^{10/3} \left(1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{5/2} \sin^4 \iota H(2\omega - m_s). \quad (5.51)$$

Na Figura 5.5, apresentamos a distribuição angular  $g(\iota)$  da potência irradiada devido à radiação escalar da onda gravitacional, considerando os termos de dipolo (à esquerda) e de quadrupolo (à direita). Observamos que a dependência com o ângulo de observação  $\iota$  é dada pela função  $\sin \iota$  em ambos os casos. Dessa forma, para sistemas binários situados em um ângulo  $\iota = 0$  em relação ao observador, não há emissão de radiação escalar na direção do observador.

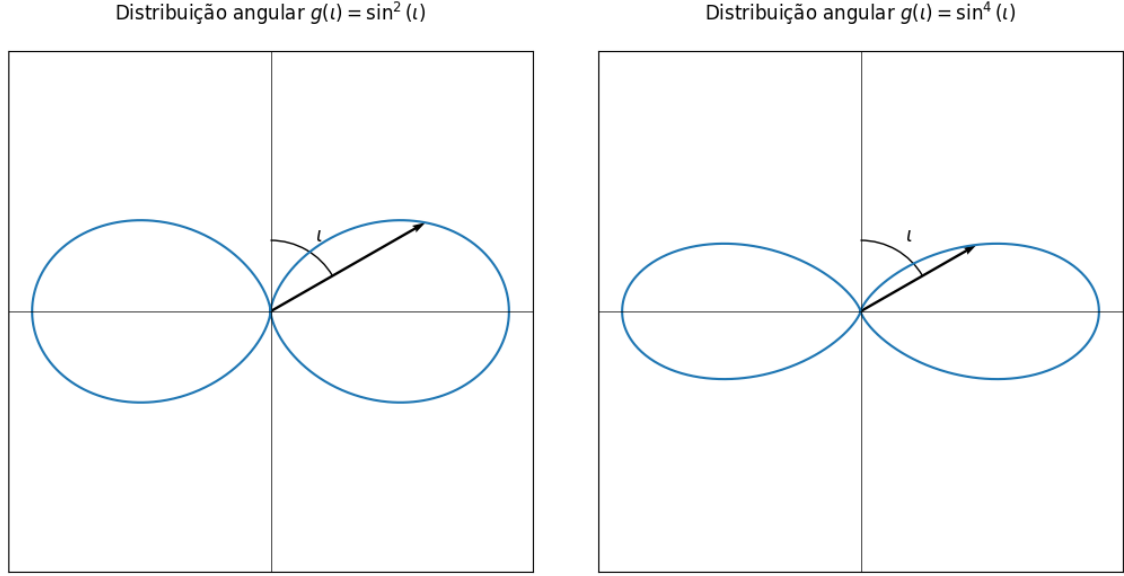
Agora, para obter a potência irradiada na forma de ondas gravitacionais devido à contribuição escalar, vamos integrar as Equações (5.49) e (5.51) sobre todo o ângulo sólido, o que basicamente significa integrar os termos que dependem de  $\sin \iota$ . Utilizando os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \iota d\Omega &= \frac{8\pi}{3}, \\ \int \sin^4 \iota d\Omega &= \frac{32\pi}{15}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Obtemos, a potência para o termo dipolar,

$$\left( \frac{dE_s}{dt} \right)_1 = \frac{4}{3} \alpha \mathcal{S}^2 \mathcal{D}^2 \frac{(1 - \Delta)^{4/3}}{G(1 - \xi)} [G(1 - \xi)M_c]^{10/3} \omega^{8/3} \left(1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{3/2} H(\omega - m_s). \quad (5.53)$$

Figura 5.5 - Distribuição angular da radiação gravitacional.



Distribuição angular definida pela função  $g(\iota)$ , onde  $\iota$  está definido em relação ao eixo vertical. A figura do lado esquerdo apresenta a distribuição angular para o termo de dipolo para a radiação escalar. A figura do lado direito apresenta a distribuição angular para o termo de quadrupolo.

Fonte: Autor.

Para a contribuição quadrupolar:

$$\left(\frac{dE_s}{dt}\right)_2 = \frac{16}{15}\alpha\Gamma^2\frac{(1-\Delta)^{4/3}}{G(1-\xi)}\left(G(1-\xi)M_c\right)^{10/3}\omega^{10/3}\left(1-\frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{5/2}H(2\omega-m_s). \quad (5.54)$$

Por fim, somando as contribuições de dipolo e quadrupolo, obtemos a potência irradiada devido à radiação escalar da onda gravitacional emitida por um sistema binário:

$$\begin{aligned} \frac{dE_s}{dt} = \alpha\frac{(1-\Delta)^{4/3}}{G(1-\xi)}\left[G(1-\xi)M_c\right]^{10/3}\left[\frac{4}{3}\mathcal{S}^2\mathcal{D}^2\omega^{8/3}\left(1-\frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{3/2}H(\omega-m_s) \right. \\ \left. + \frac{16}{15}\Gamma^2\omega^{10/3}\left(1-\frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{5/2}H(2\omega-m_s)\right]. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Corrigindo as unidades, escrevendo a velocidade da luz  $c$ , temos:

$$\frac{dE_s}{dt} = \frac{\alpha}{c^5} \frac{(1-\Delta)^{4/3}}{G(1-\xi)} [G(1-\xi)M_c]^{10/3} \left[ \frac{4}{3} \mathcal{S}^2 \mathcal{D}^2 c^2 \omega^{8/3} \left(1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{3/2} H(\omega - m_s) + \frac{16}{15} \Gamma^2 \omega^{10/3} \left(1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{5/2} H(2\omega - m_s) \right]. \quad (5.56)$$

### 5.3 Evolução da frequência

Para calcular a *back-reaction* da onda gravitacional, devemos determinar o decaimento da energia orbital do sistema binário devido à emissão de ondas gravitacionais. Para isso, inicialmente consideramos o regime em que  $m_s r \ll 1$  e, por consequência,  $\Delta \approx \delta$ . Desta forma, podemos utilizar a Equação (5.24) para descrever a energia orbital do sistema. Derivando-a com relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{3} \left[ G(1-\xi)(1-\delta) \right]^{2/3} M_c^{5/3} \omega^{-1/3} \dot{\omega}. \quad (5.57)$$

Uma vez que a perda de energia orbital é devido à emissão de ondas gravitacionais, então devemos ter a seguinte relação:

$$\frac{dE_{\text{gw}}}{dt} = -\frac{dE}{dt}, \quad (5.58)$$

onde  $dE_{\text{gw}}/dt$  é a potência irradiada na forma de onda gravitacional dada pelas contribuições tensorial e escalar obtidas nas Equações (5.38) e (5.55), respectivamente. Assim, temos:

$$\frac{dE_{\text{gw}}}{dt} = \frac{dE_t}{dt} + \frac{dE_s}{dt}. \quad (5.59)$$

Por fim, substituindo as Equações (5.38), (5.55) e (5.57), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & \frac{96}{5} (1-\delta)^{2/3} (G(1-\xi)M_c)^{5/3} \omega^{11/3} \\ & + 3\alpha (1-\delta)^{2/3} (G(1-\xi)M_c)^{5/3} \left[ \frac{4}{3} \mathcal{S}^2 \mathcal{D}^2 \omega^3 \left(1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{3/2} H(\omega - m_s) \right. \\ & \left. + \frac{16}{15} \Gamma^2 \omega^{11/3} \left(1 - \frac{m_s^2}{\omega^2}\right)^{5/2} H(2\omega - m_s) \right]. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Além de considerar o regime em que  $m_s r \ll 1$ , também podemos considerar a

frequência da onda gravitacional dentro da banda dos detectores terrestres, onde  $10 \text{ Hz} < f < 1000 \text{ Hz}$ . Isso implica que a frequência  $f = \omega/2\pi$  é muito maior que a frequência de corte  $f_c$ , ou seja, estamos no regime em que  $\omega \gg m_s$ , de modo que  $(m_s/\omega)^2 \ll 1$  e  $(m_s/2\omega)^2 \ll 1$ . Além disso, as funções de Heaviside podem ser omitidas, pois já temos a condição necessária para  $H(\omega - m_s) = H(2\omega - m_s) = 1$ , então:

$$\dot{\omega} = \frac{96}{5}(1 - \delta)^{2/3} \left[ G(1 - \xi)M_c \right]^{5/3} \left[ \left( 1 - \frac{\alpha\Gamma^2}{6} \right) \omega^{11/3} + \frac{5}{24} \alpha \mathcal{S}^2 \mathcal{D}^2 \omega^3 \right]. \quad (5.61)$$

Observe que para o caso limite quando  $\omega_{BD} \rightarrow \infty$ , temos que os parâmetros  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\xi$  se anulam, reproduzindo assim um resultado igual à relatividade geral.

Da equação diferencial (5.61), observamos que a solução para  $\omega(t)$  não é trivial. Porém, podemos considerar um sistema binário composto por dois objetos do mesmo tipo, como, por exemplo, duas estrelas de nêutrons, onde  $s_1 = s_2 \Rightarrow \mathcal{S} = 0$ . Dessa forma, obtemos:

$$\dot{\omega} = \frac{96}{5}(1 - \delta)^{2/3} \left[ G(1 - \xi)M_c \right]^{5/3} \left( 1 - \frac{\alpha\Gamma^2}{6} \right) \omega^{11/3}. \quad (5.62)$$

Integrando, obtemos o seguinte resultado:

$$\omega(t) = \left( \frac{5}{256} \frac{1}{C - t} \right)^{3/8} \left( G(1 - \xi)M_c \right)^{-5/8} \left( 1 - \frac{\alpha\Gamma^2}{6} \right)^{-3/8} (1 - \delta)^{-1/4}, \quad (5.63)$$

onde  $C$  é uma constante de integração. Verificamos que  $\omega$  diverge para infinito no instante em que o tempo for igual à constante de integração, quando isso acontece, o sistema entra na fase de coalescência. Podemos escrever  $C = t_{\text{coal}}$ , onde  $t_{\text{coal}}$  é o instante de tempo que marca a coalescência do sistema binário. Definindo o tempo para a coalescência como  $\tau \equiv t_{\text{coal}} - t$ , a Equação (5.63) pode ser reescrita como:

$$\omega(\tau) = \left( \frac{5}{256} \frac{1}{\tau} \right)^{3/8} \left( \frac{G(1 - \xi)M_c}{c^3} \right)^{-5/8} \left( 1 + \frac{\alpha\Gamma^2}{6} \right)^{-3/8} (1 + \delta)^{-1/4}. \quad (5.64)$$

A Equação (5.64) descreve a evolução temporal da frequência da onda gravitacional, mostrando um crescimento até o momento de coalescência definido em  $\tau = 0$ . Para obter a evolução temporal para a distância orbital do sistema, vamos reescrever a Equação (5.25), da seguinte forma:

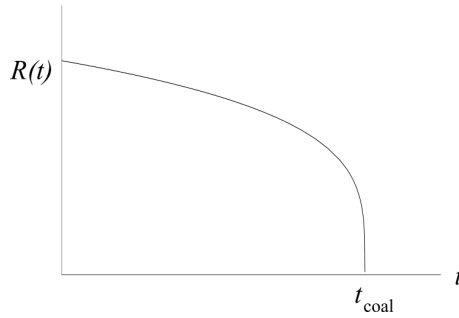
$$\frac{\dot{r}}{r} = -\frac{2}{3} \frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{1}{4\tau}. \quad (5.65)$$

Integrando, obtemos que:

$$r(\tau) = r_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{1/4} = r_0 \left( \frac{t_{\text{coal}} - t}{t_{\text{coal}} - t_0} \right)^{1/4}. \quad (5.66)$$

Verificamos que  $r_0$  é o valor de  $r$  no tempo inicial  $t_0$ , e  $\tau_0 = t_{\text{coal}} - t_0$ . Na Figura 5.6, é mostrada a evolução temporal da distância orbital  $r$ . Inicialmente, observamos um decaimento lento, porém, à medida que nos aproximamos da coalescência, onde  $t = t_{\text{coal}}$ , a distância diminui rapidamente, marcando a fase de mergulho. Neste estágio, a aproximação de órbita quase circular não é mais válida. Em sistemas binários compostos por estrelas de nêutrons ou buracos negros, a aproximação do espaço-tempo plano também se torna inadequada na fase de mergulho (MAGGIORE, 2007).

Figura 5.6 - Decaimento da distância orbital  $R(t)$ .



Fonte: Maggiore (2007).

Utilizando a Equação (5.64) na definição de  $\Omega(t)$  dada pela Equação (4.74), podemos calcular a integral e encontrar a solução para  $\Omega(\tau)$ , lembrando que  $dt = -d\tau$ :

$$\Omega(t) = \int_{t_0}^t \omega(t') dt' = - \int_{\tau_0}^{\tau} \omega(\tau') d\tau'. \quad (5.67)$$

Integrando a Equação (5.64) obtemos,

$$\Omega(\tau) = - \left( \frac{5G(1-\xi)M_c}{c^3} \right)^{-5/8} \left( 1 + \frac{\alpha\Gamma^2}{6} \right)^{-3/8} (1+\delta)^{-1/4} \tau^{5/8} + \Omega_0, \quad (5.68)$$

em que  $\Omega_0 = \Omega(\tau = 0)$  é a constante de integração.

#### 5.4 Forma de onda

O resultado para a evolução temporal da frequência do sistema binário, obtido na Equação (5.64), foi determinado dentro de um regime bem definido. Primeiramente, assumimos que  $m_s r \ll 1$ . Para sistemas binários cujos parâmetros estão descritos na Tabela 5.3, e considerando a faixa de frequência dos interferômetros terrestres atuais,  $10 \text{ Hz} < f_{\text{gw}} < 1000 \text{ Hz}$ , encontramos que  $m_s r \sim 10^{-7}$ . Além disso, levando em conta que a emissão de ondas gravitacionais ocorre acima da frequência de corte para os modos escalares, com  $f_c = 6.05 \times 10^{-6} \text{ Hz}$ , verificamos que se  $f > f_c$ , então  $m_s r < 10^{-3}$ . Isso indica que, mesmo em frequências próximas a  $f_c$ , ainda podemos considerar válida a aproximação  $m_s r \ll 1$ .

Além disso, para simplificar a Equação (5.60), consideramos um sistema binário emitindo ondas gravitacionais na banda dos detectores terrestres,  $10 \text{ Hz} < f_{\text{gw}} < 1000 \text{ Hz}$ , de modo que  $f_{\text{gw}} \gg f_c$ . Também assumimos um sistema binário composto por dois objetos idênticos, ou seja, binárias de estrelas de nêutrons ou binárias de buracos negros, fazendo  $s_1 = s_2$  e, consequentemente,  $\mathcal{S} = 0$ .

Essas duas simplificações foram adotadas pois a Equação (5.60) envolve uma integração complexa, cuja solução não permite obter uma expressão explícita para  $\omega(t)$ . Assim, possivelmente será necessário recorrer a métodos numéricos para resolvê-la.

Então, considerando o regime imposto acima para binárias de estrelas de nêutrons ou binárias de buracos negros, podemos reescrever os quatro modos de polarização apresentados nas Equações (5.1), (5.5) e (5.8). Primeiramente, para os modos tensoriais  $h_+$  e  $h_\times$ , temos:

$$\begin{aligned} h_+ &= -\frac{4}{R}(1-\delta)^{2/3} [G(1-\xi)M_c]^{5/3} \omega^{2/3} \frac{1+\cos^2 \iota}{2} \cos(2\Omega) \Big|_{t-R}, \\ h_\times &= -\frac{4}{R}(1-\delta)^{2/3} [G(1-\xi)M_c]^{5/3} \omega^{2/3} \cos \iota \sin(2\Omega) \Big|_{t-R}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

onde a única simplificação é  $\Delta \approx \delta$ . Para o modo escalar-transversal, temos:

$$\Phi = -\frac{\alpha}{R} \Gamma(1-\delta)^{2/3} [G(1-\xi)M_c]^{5/3} \omega^{2/3} \sin^2 \iota \cos \left( \frac{m_s^2 R}{\sqrt{4\omega^2 - m_s^2}} + 2\Omega \right) \Big|_{t-Rv_2}. \quad (5.70)$$

Onde utilizamos  $\Delta \approx \delta$  e  $(m_s/\omega) \ll 1$ . Não fizemos a simplificação do termo de fase

da onda, pois estamos considerando  $R \sim 40 \text{ Mpc} \sim 10^{24} \text{ m}$ . Além disso, como temos apenas o termo de quadrupolo, fizemos  $\Phi = \Phi_{\text{quad}}$ . Observe ainda que, como só existem termos de quadrupolo para os modos escalares e tensoriais, então só temos uma frequência para a onda gravitacional, dada por  $f_{\text{gw}} = 2f = \omega/\pi$ .

Já o modo escalar-longitudinal  $\Theta$  é dado pela seguinte relação com o modo escalar-transversal, Equação (4.128):

$$\Theta = - \left( \frac{m_s}{2\omega} \right)^2 \Phi. \quad (5.71)$$

Como estamos interessados na faixa de frequência  $f \sim 10^2 \text{ Hz}$ , encontramos que  $\left( \frac{m_s}{2\omega} \right)^2 \sim 10^{-16}$ , o que significa que, no regime dos detectores terrestres, o modo escalar-longitudinal  $\Theta$  é significativamente menor que o modo escalar-transversal  $\Phi$  e, conseqüentemente, menor que os modos tensoriais  $h_+$  e  $h_\times$ .

Utilizando a Equação (5.64) para calcular a frequência angular  $\omega$  e a Equação (5.68) para calcular a fase da onda gravitacional  $\Omega$ , podemos representar graficamente a forma de onda dos estados de polarização da onda gravitacional emitida por um sistema binário. Observe que a definição de  $\tau$  permite escrever as Equações (5.69) e (5.70) em função do tempo para a coalescência  $\tau$ .

Para os sistemas binários apresentados na Tabela 5.3, podemos analisar dois casos: um sistema do tipo BHBH e outro do tipo NSNS. Em ambos, a evolução temporal da frequência da onda gravitacional é dada por  $f_{\text{gw}} = 2f = \omega/\pi$  em função do tempo até a coalescência do sistema.

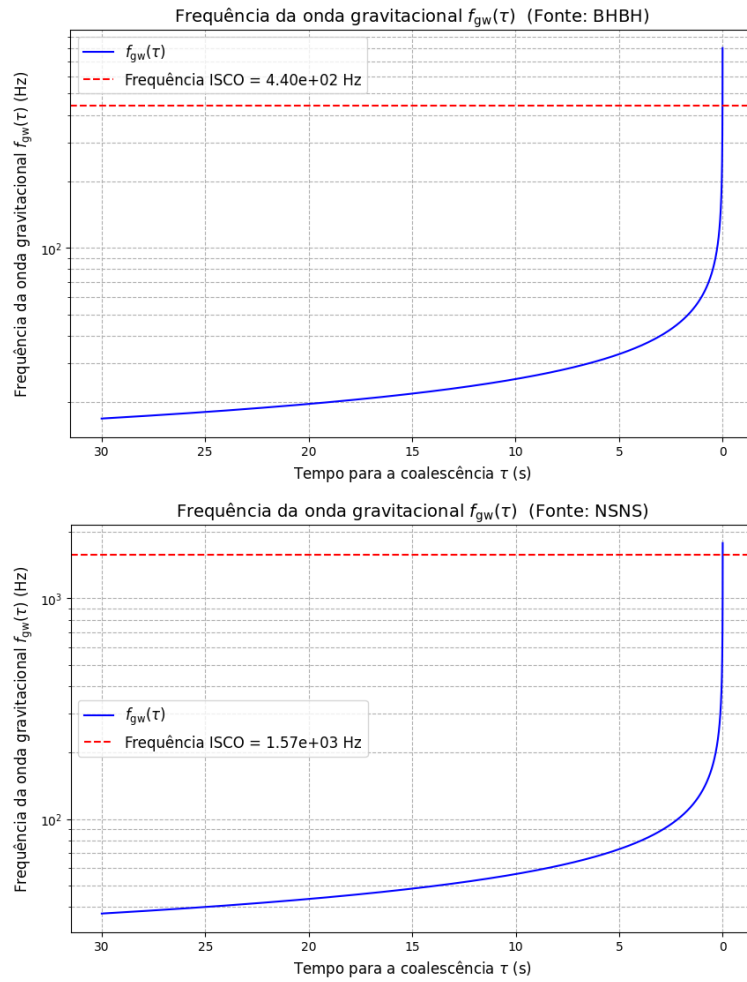
Na Figura 5.7, apresentamos a evolução da frequência para os sistemas BHBH e NSNS. Em ambos os casos, foram utilizados os parâmetros  $\alpha$  e  $\xi$  dados pela Tabela 5.2. Além disso, consideramos um sistema que sofrerá coalescência em 30 s, também demarcamos a frequência ISCO para indicar até onde a aproximação de órbita quase-circular é válida.

Na Figura 5.9, apresentamos a evolução da forma de onda dos modos tensoriais  $h_+$  e  $h_\times$  até instantes antes de o sistema alcançar a órbita ISCO e entrar em coalescência para a binária BHBH. Já na Figura 5.8, mostramos a evolução temporal da forma de onda dos estados de polarização da onda gravitacional para o sistema binário de estrelas de nêutrons. Nesse caso, além dos modos tensoriais  $h_+$  e  $h_\times$ , também temos o modo escalar-transversal  $\Phi$ . Observamos que, nos instantes finais antes da coalescência, esse modo escalar é aproximadamente seis ordens de grandeza menor

que os modos de polarização tensorial.

Observamos que, no caso de binárias de buracos negros, não há emissão de radiação escalar. Dessa forma, esse tipo de sistema não é relevante para o estudo de modos de polarização escalares. Como estamos considerando apenas sistemas cujos componentes são do mesmo tipo, restam-nos apenas as binárias de estrelas de nêutrons para essa análise.

Figura 5.7 - Evolução frequência da onda gravitacional - Sistema binário BHBH.

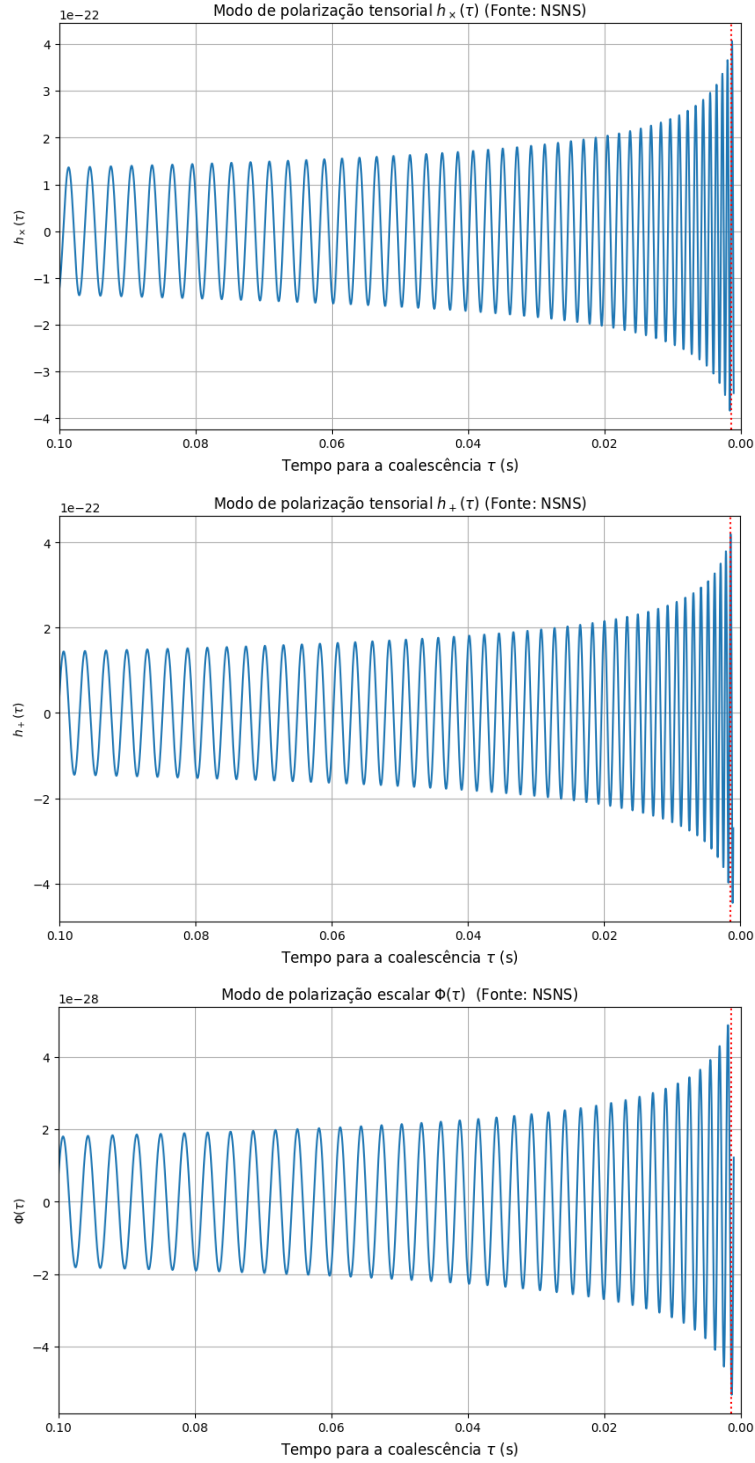


O gráfico mostra a evolução da frequência para os sistema binários BHBH e NSNS apresentados na Tabela 5.3, utilizando a Equação (5.64), na qual fazemos  $f_{gw} = \omega/\pi$ . Além disso, consideramos os valores dos parâmetros  $\xi$  e  $\alpha$  conforme seus valores para  $\omega_{BD} = 40\,000$ , conforme apresentado na Tabela 5.2.

Fonte: Autor.



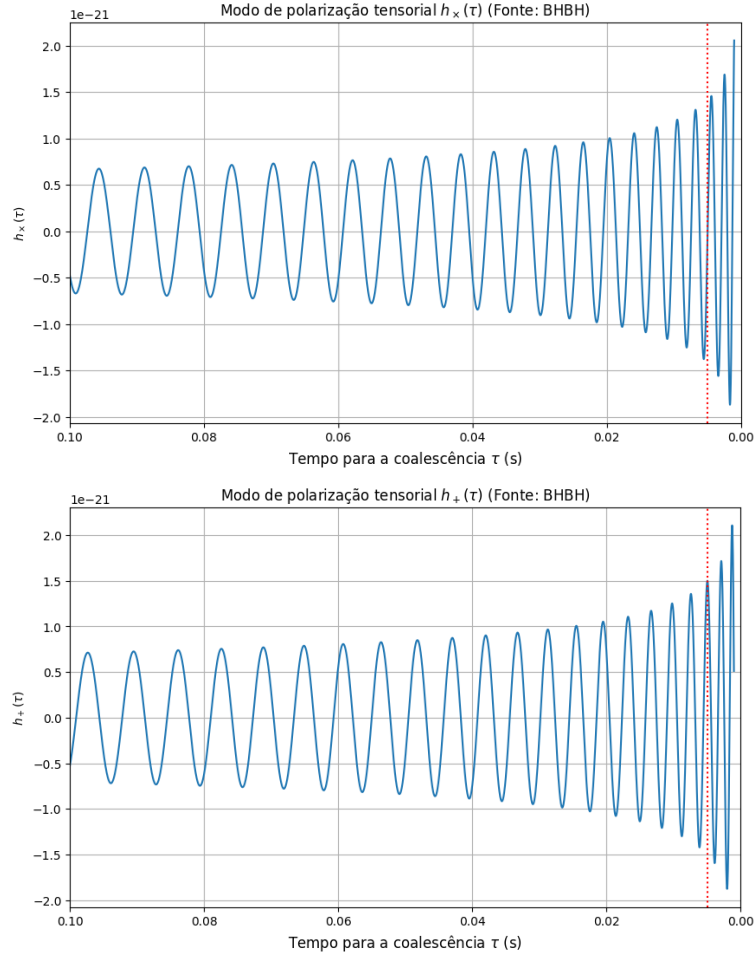
Figura 5.8 - Forma de onda para os estados de polarização:  $h_{\times}$ ,  $h_{+}$  e  $\Phi$  - Sistema binário NSNS.



Os gráficos apresentam a evolução temporal dos modos de polarização da onda gravitacional na teoria de Brans-Dicke para o sistema NSNS da Tabela 5.3. Nota-se que o modo escalar  $\Phi$  é aproximadamente seis ordens de grandeza menor que os modos tensoriais.

Fonte: Autor.

Figura 5.9 - Forma de onda para os estados de polarização:  $h_{\times}$  e  $h_{+}$  - Sistema binário BHBH.



Os gráficos apresentam a evolução temporal dos modos de polarização da onda gravitacional na teoria de Brans-Dicke para o sistema BHBH da Tabela 5.3. Observe que, binárias de buracos negros não emite radiação escalar no regime avaliado.

Fonte: Autor.

#### 5.4.1 Sistema GW170817

Um sistema que já foi detectado e que se encaixa nas condições impostas para a forma de onda apresentada nas Equações (5.69) e (5.70), e que seja comprovadamente uma binária de estrelas de nêutrons, é o sistema GW170817.

O evento GW170817, detectado em 2017, marcou a primeira observação de ondas gravitacionais associadas a uma contrapartida eletromagnética (*gamma-ray burst*),

inaugurando a era da astronomia multi-mensageira com ondas gravitacionais (ABBOTT et al., 2017a; ABBOTT et al., 2017b). Além de confirmar a fusão de estrelas de nêutrons como fonte de explosões de raios gama curtos, a detecção revelou a produção de elementos pesados, como ouro e platina, reforçando o papel dessas colisões na nucleossíntese (ABBOTT et al., 2017b).

Na Tabela 5.7 são apresentadas algumas das propriedades do sistema binário que deu origem ao evento GW 170817, sendo apenas um recorte da tabela apresentada em Abbott et al. (2017a).

Tabela 5.7 - Propriedades do evento GW170817.

|                                  | Priores de baixo spin             | Priores de alto spin              |
|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
|                                  | $( \chi  \leq 0.05)$              | $( \chi  \leq 0.89)$              |
| Massa primária $m_1$             | 1.36–1.60 $M_\odot$               | 1.36–2.26 $M_\odot$               |
| Massa secundária $m_2$           | 1.17–1.36 $M_\odot$               | 0.86–1.36 $M_\odot$               |
| Massa do chirp $M_c$             | $1.188^{+0.004}_{-0.002} M_\odot$ | $1.188^{+0.004}_{-0.002} M_\odot$ |
| Razão de massa $m_2/m_1$         | 0.7–1.0                           | 0.4–1.0                           |
| Massa total $m_{\text{total}}$   | $2.74^{+0.04}_{-0.01} M_\odot$    | $2.82^{+0.47}_{-0.09} M_\odot$    |
| Energia radiada $E_{\text{rad}}$ | $> 0.025 M_\odot c^2$             | $> 0.025 M_\odot c^2$             |
| Distância de luminosidade $D_L$  | $40^{+8}_{-14}$ Mpc               | $40^{+8}_{-14}$ Mpc               |
| Ângulo de visão $\Theta$         | $\leq 55^\circ$                   | $\leq 56^\circ$                   |

Propriedades do sistema binário responsável pelo evento GW170817.

Fonte: Abbott et al. (2017a)

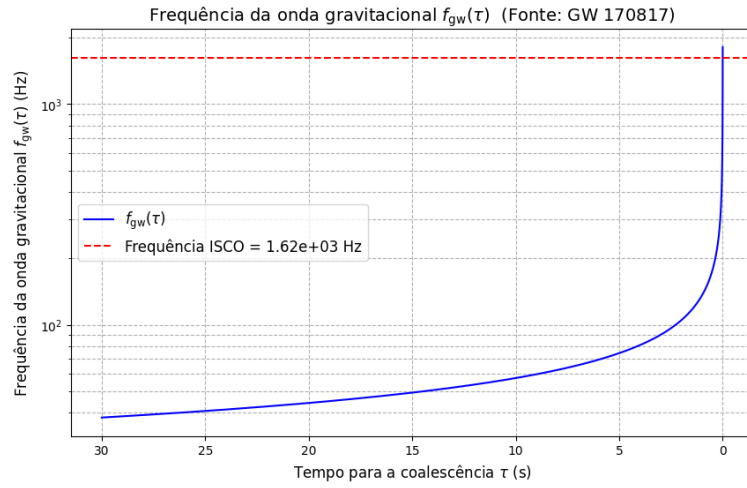
Com base na Tabela 5.7 vamos definir um sistema binário de estrelas de nêutrons com massas  $m_1 = m_2 = 1.36 M_\odot$ , de modo a construir a Tabela 5.8. Utilizando os dados identificados nesta tabela, apresentamos na Figura 5.10 a evolução temporal da frequência da onda gravitacional para o sistema. Na Figura 5.11 temos a evolução da forma de onda instantes antes da fusão do sistema binário.

Tabela 5.8 - Parâmetros para o sistemas binários GW170817.

| Parâmetro      | Valor | Parâmetro      | Valor                 |
|----------------|-------|----------------|-----------------------|
| $m_1(M_\odot)$ | 1.36  | $M_c(M_\odot)$ | 1.18                  |
| $m_2(M_\odot)$ | 1.36  | $\mathcal{S}$  | 0.00                  |
| $s_1$          | 0.20  | $\Gamma$       | 0.60                  |
| $s_2$          | 0.20  | $\delta$       | $4.50 \times 10^{-6}$ |
| $m(M_\odot)$   | 2.72  | $\iota$        | $55^\circ$            |
| $\mu(M_\odot)$ | 0.68  | $R$            | 40 Mpc                |

Fonte: Adaptado de [Abbott et al. \(2017b\)](#).

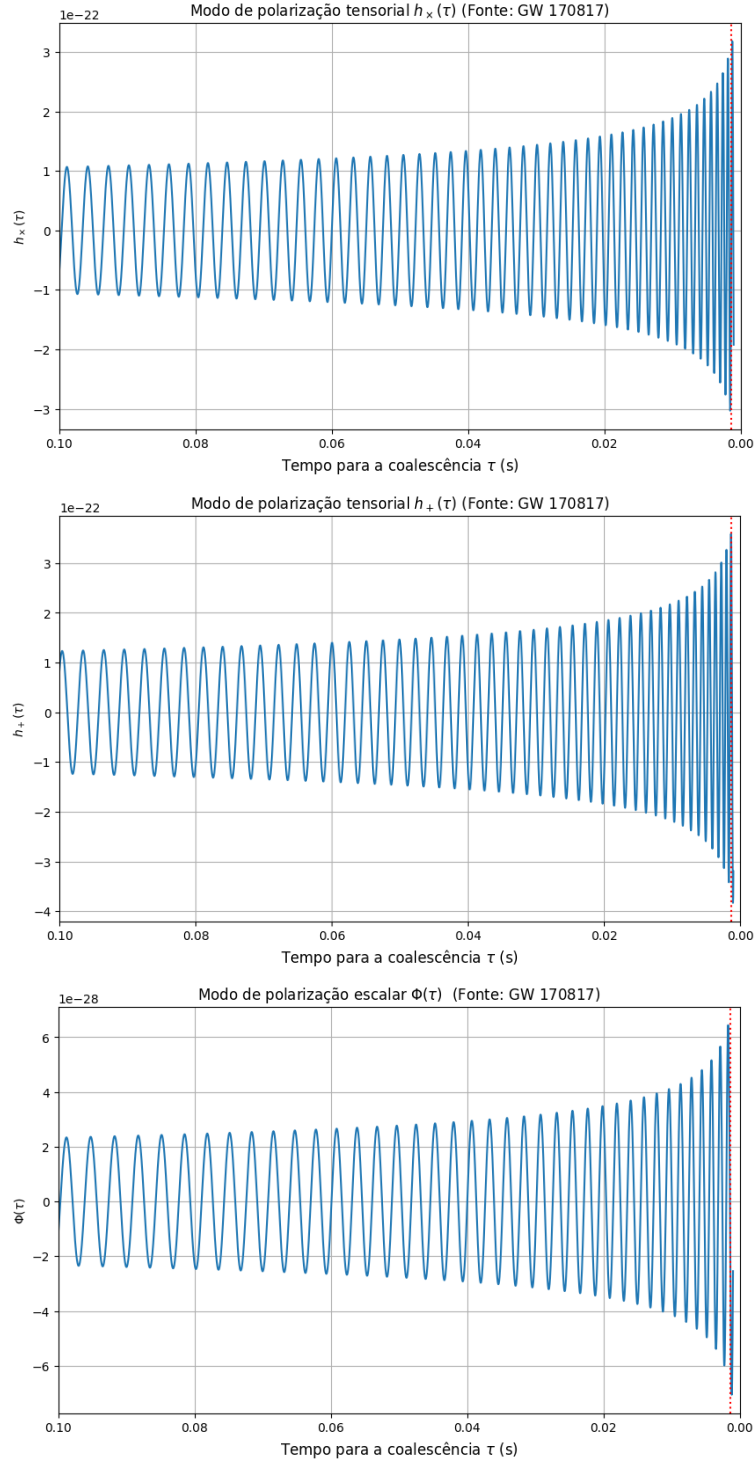
Figura 5.10 - Evolução frequência da onda gravitacional - Sistema binário GW170817.



O gráfico mostra a evolução da frequência para o sistema binário GW170817. Utilizamos os parâmetros da Tabela 5.8 na Equação (5.64), na qual fazemos  $f_{gw} = \omega/\pi$ . Além disso, consideramos os valores dos parâmetros  $\xi$  e  $\alpha$  conforme seus valores para  $\omega_{BD} = 40\,000$ , conforme apresentado na Tabela 5.2.

Fonte: Autor.

Figura 5.11 - Forma de onda para os estados de polarização:  $h_{\times}$ ,  $h_{+}$  e  $\Phi$  - Sistema binário GW170817.



Os gráficos apresentam a evolução temporal dos modos de polarização da onda gravitacional na teoria de Brans-Dicke para o sistema GW170817, com os parâmetros dados pela Tabela 5.8. Note que o modo escalar  $\Phi$  é aproximadamente seis ordens de grandeza menor que os modos tensoriais.

Fonte: Autor.

A partir de uma análise preliminar da Figura 5.11, verifica-se que a amplitude do modo escalar  $\Phi$  é aproximadamente seis ordens de grandeza menor do que a dos modos tensoriais  $h_+$  e  $h_\times$ , no regime de frequência dos detectores interferométricos atuais. Isso indica que a detecção de modos de polarização escalares, nesse contexto, é inviável com os detectores atualmente disponíveis. Diante disso, torna-se necessário investigar outros regimes físicos, como determinados sistemas astrofísicos ou faixas específicas de frequência, nos quais a contribuição do modo escalar  $\Phi$  possa ser mais significativa e, eventualmente, detectável.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, investigamos a emissão de ondas gravitacionais por sistemas binários de objetos compactos, considerando tanto a Relatividade Geral quanto teorias alternativas da gravitação, com ênfase nas teorias escalares-tensoriais. O estudo incluiu a modelagem da forma de onda gravitacional e a análise das polarizações adicionais previstas nessas teorias.

Mostramos como definir a perturbação métrica em termos de invariantes de calibre para perimir uma melhor visualização dos graus de liberdade físicos. Além disso, pudemos identificar os seis modos de polarização que uma onda gravitacional pode apresentar através de uma perturbação métrica, sendo dois modos escalares, dois vetoriais e dois tensoriais.

Apresentamos que, na Relatividade Geral, as ondas gravitacionais possuem apenas duas polarizações tensoriais ( $h_+$  e  $h_\times$ ), enquanto em teorias escalares-tensoriais, estados adicionais de polarização podem surgir. Especificamente, na teoria de Brans-Dicke, identificamos modos escalares-transversais e longitudinais ( $\Phi$ ,  $\Theta$ ). Verificamos que, na teoria de Brans-Dicke, os modos tensoriais dependem de um termo de quadrupolo, assim como na Relatividade Geral. No entanto, os modos escalares, além do termo quadrupolar proporcional a  $\Gamma$ , apresentam também uma contribuição dipolar proporcional a  $\mathcal{S}$ . A emissão dipolar, porém, só ocorre em sistemas binários mistos, como aqueles compostos por uma estrela de nêutrons e um buraco negro.

Para as contribuições quadrupolares, a frequência da onda gravitacional é o dobro da frequência orbital do sistema,  $f_{\text{gw}}^{\text{quad}} = 2f$ , enquanto, para a contribuição dipolar, as frequências coincidem, ou seja,  $f_{\text{gw}}^{\text{dip}} = f$ .

Um sistema binário só emite radiação escalar quando a frequência da onda gravitacional,  $f_{\text{gw}}$ , é superior à frequência de corte  $f_c$  associada à massa do campo escalar  $m_s$ . No caso limite discutido em [Alsing et al. \(2012\)](#), para  $m_s = 2.5 \times 10^{-20}$  eV, obtemos  $f_c = 6.05 \times 10^{-6}$  Hz.

Além disso, considerando sistemas binários em órbitas quase circulares de raio  $r$  e emitindo ondas gravitacionais dentro da faixa dos interferômetros terrestres, temos o regime  $m_s r \ll 1$ . Isso permite simplificações nas equações de movimento do sistema e na expressão para sua energia orbital. Nesse mesmo regime, como  $f_{\text{gw}} \gg f_c$ , algumas expressões podem ser ainda mais simplificadas.

Por outro lado, sistemas binários compostos exclusivamente por buracos negros não

emitem radiação escalar, nem por dipolo nem por quadrupolo, no regime de órbita quase circular. Isso ocorre devido ao teorema *no-hair* da Relatividade Geral, que estabelece que um buraco negro neutro é completamente caracterizado apenas por sua massa, momento angular e carga, esse resultado se estende a sistemas binários distantes da coalescência. Na teoria de Brans-Dicke, buracos negros possuem a mesma geometria prevista pela solução de Schwarzschild, com um campo escalar constante em seu exterior. Portanto, o teorema de *no-hair* também se aplica.

Dessa forma, para estudar os estados escalares de polarização de uma onda gravitacional na teoria de Brans-Dicke, é necessário que o sistema binário contenha pelo menos uma estrela de nêutrons, como em binárias compostas por duas estrelas de nêutrons ou em sistemas mistos.

Contudo, em binárias mistas, a presença da contribuição dipolar para a radiação escalar dificulta a obtenção analítica da evolução da frequência orbital do sistema. Assim, além de restringir a análise ao regime em que  $m_s r \ll 1$  e  $f_{\text{gw}} \gg f_c$ , para modelar a forma de onda, impusemos também a condição  $\mathcal{S} = 0$ , desconsiderando a análise de sistemas binários mistos.

Nesse contexto, como binárias de buracos negros não apresentam radiação escalar, os sistemas binários compostos por duas estrelas de nêutrons são os mais relevantes. No entanto, até o momento, houve poucas detecções desse tipo de sistema, sendo o principal exemplo o evento GW170817, que foi comprovadamente uma fusão de estrelas de nêutrons e teve uma contrapartida eletromagnética observada.

Todavia, ainda existem aspectos que não foram explorados até o momento da defesa desta dissertação de mestrado, mas que serão continuados ao longo do doutorado. Entre eles, destaca-se o estudo da modelagem da forma de onda em outros regimes, uma vez que o sinal da onda gravitacional na teoria de Brans-Dicke pode apresentar um desvio mais significativo em relação ao previsto pela Relatividade Geral quando a frequência se aproxima da frequência de corte, ou seja,  $f_{\text{gw}} \sim f_c$ . Além disso, também é necessário investigar o comportamento de sistemas binários mistos, cuja forma de onda não pôde ser obtida neste trabalho.

Outro aspecto que deve ser explorado em trabalhos futuros diz respeito aos parâmetros associados à teoria de Brans-Dicke,  $\omega_{BD}$  e  $m_s$ . Neste trabalho, utilizamos valores disponíveis na literatura, mas uma análise mais detalhada do espaço de parâmetros é fundamental para compreender melhor a emissão de ondas gravitacionais na teoria de Brans-Dicke. O parâmetro  $\omega_{BD}$  está relacionado com  $\xi$  e  $\alpha$ , que modulam



a amplitude dos modos escalares e descrevem os desvios em relação aos resultados previstos pela Relatividade Geral. Já a massa do campo escalar,  $m_s$ , é essencial para caracterizar os regimes de emissão de ondas gravitacionais, pois define a frequência de corte para as polarizações escalares.

Como a amplitude do modo escalar  $\Phi$  é seis ordens de magnitude menor do que a amplitude dos modos tensoriais, concluímos que esses modos não poderiam ser detectados pelos atuais interferômetros. No entanto, análises mais detalhadas precisam ser realizadas nesse sentido, como, por exemplo, avaliar em quais tipos de sistemas e faixas de frequência a amplitude do modo escalar  $\Phi$  poderia ser mais significativa.

Outros estudos que podem ser de interesse para trabalhos futuros incluem a análise dos termos pós-newtonianos e a exploração de outras teorias alternativas à Relatividade Geral, além da teoria de Brans-Dicke. Entre elas, destacam-se as teorias  $f(R)$ , teorias quadráticas e abordagens mais gerais, como a teoria de Horndeski. Também é interessante avaliar a detectabilidade dos modos de polarização para detectores que operam em frequências mais baixas do que os interferômetros como LIGO, Virgo e KAGRA. Por exemplo, pode-se considerar a análise para o detector LISA ou utilizando a técnica de *Pulsar Timing Arrays*.

Dessa forma, este trabalho contribui para o entendimento da emissão de ondas gravitacionais na teoria de Brans-Dicke e suas implicações físicas. Estudos futuros poderão explorar a detecção de polarizações adicionais, refinando ainda mais as previsões teóricas e os testes experimentais da gravitação.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABBOTT, B. P. et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. **Physical Review Letters**, v. 116, p. 061102, Feb 2016. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>>. 1, 25, 28

\_\_\_\_\_. GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. **Physical Review Letters**, v. 119, p. 161101, Oct 2017. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.161101>>>. 1, 85

\_\_\_\_\_. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger\*. **Physical Review Letters**, v. 848, n. 2, p. L12, oct 2017. Disponível em: <<<https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa91c9>>>. 1, 2, 85, 86

AGAZIE, G. et al. The nanograv 15 yr data set: evidence for a gravitational-wave background. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 951, n. 1, p. L8, jun. 2023. ISSN 2041-8213. Disponível em: <<<http://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/acdac6>>>. 27

ALSING, J.; BERTI, E.; WILL, C. M.; ZAGLAUER, H. Gravitational radiation from compact binary systems in the massive brans-dicke theory of gravity. **Physical Review Letters**, v. 85, p. 064041, Mar 2012. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.064041>>>. 32, 40, 41, 44, 48, 60, 74, 89

ALVES, M. E. S. Testing gravity with gauge-invariant polarization states of gravitational waves: theory and pulsar timing sensitivity. **Physical Review Letters**, v. 109, p. 104054, May 2024. Preprint available at <<https://arxiv.org/abs/2308.09178>>. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.109.104054>>>. 13, 14, 15

ALVES, M. F. S.; CUZINATTO, R. R.; MELO, C. A. M. de; MEDEIROS, L. G.; POMPEIA, P. J. Gravitational waves emission in quadratic gravity: longitudinal modes, angular momentum emission, and positivity of the radiated power. **Physical Review Letters**, v. 111, p. 084055, Apr 2025. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.111.084055>>>. 3

ALVES, M. F. S.; REIS, L. F. M. A. M.; MEDEIROS, L. G. Gravitational waves from inspiraling black holes in quadratic gravity. **Physical Review Letters**, v. 107, p. 044017, Feb 2023. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.107.044017>>>. 3

BAMBI, C. **Introduction to general relativity**. [S.l.]: Springer Singapore, 2018. (Undergraduate Lecture Notes in Physics). ISBN 978-981-13-1089-8, 978-981-13-1090-4. 5, 10, 11, 19, 20, 23, 26, 27, 28, 44

BARAUSSE, E.; COAUTHORS, N. The physics of gravitational waves. **Proceeding of Science**, p. 002, 2024. 48

BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. **Physical Review Letters**, v. 22, p. 1882–1905, Oct 1980. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.1882>>>. 12

BARROS, A.; ROMERO, C. On the weak field approximation of the brans-dicke theory of gravity. **Physics Letters A**, v. 245, n. 1, p. 31–34, 1998. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037596019800382X>>>. 3

\_\_\_\_\_. \_\_\_\_\_. **Physics Letters A**, v. 245, n. 1, p. 31–34, 1998. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037596019800382X>>>. 33

BERTI, E.; GUALTIERI, L.; HORBATSCH, M.; ALSING, J. Light scalar field constraints from gravitational-wave observations of compact binaries. **Physical Review Letters**, v. 85, p. 122005, Jun 2012. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.122005>>>. 74

CIUFOLINI V. GORINI, U. M. P. F. I. **Gravitational waves**. [S.l.]: Taylor Francis, 2001. (Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation). ISBN 0750307412,9780750307413. 1, 23, 28

D'INVERNO, J. V. R. **Introducing Einstein's relativity: a deeper understanding**. 2. ed. [S.l.]: Oxford University Press, 2021. ISBN 0198862024,9780198862024. 3, 5, 6, 40

DONG, Y.-Q.; LIU, Y.-X. Polarization modes of gravitational waves in palatini-horndeski theory. **Physical Review Letters**, v. 105, p. 064035, Mar 2022. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.105.064035>>>. 16

EARDLEY, D. M. Observable effects of a scalar gravitational field in a binary pulsar. **Astrophysical Journal**, v. 196, p. L59–L62, mar. 1975. Disponível em: <<<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...196L..59E>>>. 34

FARAONI, V. **Cosmology in scalar-tensor gravity**. [S.l.]: Springer Netherlands, 2004. (Fundamental Theories of Physics 139). ISBN 1402019882,9781402019883. 31

FLANAGAN, E.; HUGHES, S. A. The basics of gravitational wave theory. **New Journal of Physics**, v. 7, n. 1, p. 204, sep 2005. Disponível em: <<<https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/204>>>. 1, 7, 11, 12, 13

FORTES, H. G. M.; ARAUJO, J. C. N. Solving tolman–oppenheimer–volkoff equations in  $f(t)$  gravity: a novel approach. **Classical and Quantum Gravity**, v. 39, n. 24, p. 245017, nov 2022. Disponível em: <<<https://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aca384>>>. 3

FUJII, K. M. Y. **The scalar-tensor theory of gravitation**. [S.l.]: CUP, 2004. ISBN 0-511-04225-6. 31, 32, 33

HOBBS, G.; ARCHIBALD, A.; ARZOUMANIAN, Z.; BACKER, D.; BAILES, M.; BHAT, N. D. R.; BURGAY, M.; BURKE-SPOLAOR, S.; CHAMPION, D.; COGNARD, I.; COLES, W.; CORDES, J.; DEMOREST, P.; DESVIGNES, G.; FERDMAN, R. D.; FINN, L.; FREIRE, P.; GONZALEZ, M.; HESSELS, J.; HOTAN, A.; JANSSEN, G.; JENET, F.; JESSNER, A.; JORDAN, C.; KASPI, V.; KRAMER, M.; KONDRATIEV, V.; LAZIO, J.; LAZARIDIS, K.; LEE, K. J.; LEVIN, Y.; LOMMEN, A.; LORIMER, D.; LYNCH, R.; LYNE, A.; MANCHESTER, R.; MCLAUGHLIN, M.; NICE, D.; OSLOWSKI, S.; PILIA, M.; POSSENTI, A.; PURVER, M.; RANSOM, S.; REYNOLDS, J.; SANIDAS, S.; SARKISSIAN, J.; SESANA, A.; SHANNON, R.; SIEMENS, X.; STAIRS, I.; STAPPERS, B.; STINEBRING, D.; THEUREAU, G.; HAASTEREN, R. van; STRATEN, W. van; VERBIEST, J. P. W.; YARDLEY, D. R. B.; YOU, X. P. The international pulsar timing array project: using pulsars as a gravitational wave detector. **Classical and Quantum Gravity**, v. 27, n. 8, p. 084013, abr. 2010. ISSN 1361-6382. Disponível em:

<<<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/27/8/084013>>>. 29

HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. **Astrophysical Journal**, p. L51–L53, jan. 1975. Disponível em:

<<<https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...195L..51H>>>. 1

LANDAU, L.; LIFSHITZ, E. **The classical theory of fields**. 4. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann, 1980. ISBN 0750627689,9780750627689. 20

LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION. **LIGO**. 2024. Disponível em:

<<<https://www.ligo.caltech.edu/>>>. 26

LIU, T.; ZHANG, X.; ZHAO, W.; LIN, K.; ZHANG, C.; ZHANG, S.; ZHAO, X.; ZHU, T.; WANG, A. Waveforms of compact binary inspiral gravitational radiation in screened modified gravity. **Physical Review Letters**, v. 98, p. 083023, Oct 2018. Disponível em:

<<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.083023>>>. 47

LIU, T.; ZHAO, W.; WANG, Y. Gravitational waveforms from the quasicircular inspiral of compact binaries in massive brans-dicke theory. **Physical Review Letters**, v. 102, p. 124035, Dec 2020. Disponível em:

<<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.124035>>>. 32, 33, 38, 44, 47, 48, 70, 74

MAGGIORE, M. **Gravitational waves: volume 1: theory and experiments**. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2007. ISBN 0198570740,9780198570745. 10, 17, 19, 21, 22, 24, 71, 72, 79, 100

\_\_\_\_\_. **Gravitational waves, volume 2: astrophysics and cosmology**. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2018. ISBN

9780198570745,0198570740,9780198570899,0198570899,9780198755289,0198755287. 3, 7, 8, 11, 13, 36

- MILLER, M. C.; YUNES, N. **Gravitational waves in physics and astrophysics**. IOP Publishing, 2021. (2514-3433). ISBN 978-0-7503-3051-0. Disponível em: <<<https://dx.doi.org/10.1088/2514-3433/ac2140>>>. 23, 27
- MIRSHEKARI, S.; WILL, C. M. Compact binary systems in scalar-tensor gravity: equations of motion to 2.5 post-newtonian order. **Physical Review Letters**, v. 87, p. 084070, Apr 2013. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.084070>>>. 35
- MISNER KIP S. THORNE, J. A. W. J. W. K. T. C. W. **Gravitation**. [S.l.]: W. H. Freeman, 1973. (Physics Series). ISBN 9780716703440,0716703440,0716703343. 5, 19
- NUNES, R. C.; ALVES, M. E. S.; ARAUJO, J. C. N. de. Primordial gravitational waves in Horndeski gravity. **Physical Review D**, v. 99, p. 084022, Apr 2019. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.99.084022>>>. 3
- POISSON, E.; POUND, A.; VEGA, I. The motion of point particles in curved spacetime. **Living Reviews in Relativity**, v. 14, n. 1, p. 7, 2011. ISSN 1433-8351. Disponível em: <<<https://doi.org/10.12942/lrr-2011-7>>>. 43
- RAMAZANOĞLU, F. M.; PRETORIUS, F. Spontaneous scalarization with massive fields. **Physical Review Letters**, v. 93, p. 064005, Mar 2016. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.064005>>>. 33
- ROMERO, C.; BARROS, A. Does the brans-dicke theory of gravity go over to general relativity when  $\omega \rightarrow \infty$ ? **Physics Letters A**, v. 173, n. 3, p. 243–246, 1993. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037596019390271Z>>>. 33
- SAFFER, A.; YUNES, N.; YAGI, K. The gravitational wave stress–energy (pseudo)–tensor in modified gravity. **Classical and Quantum Gravity**, v. 35, n. 5, p. 055011, fev. 2018. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<<http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aaa7de>>>. 70
- SCHUTZ, B. F. Gravitational wave astronomy. **Classical and Quantum Gravity**, v. 16, n. 12A, p. A131–A156, nov. 1999. ISSN 1361-6382. Disponível em: <<<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/16/12A/307>>>. 24
- SOTIRIOU, T. P.; FARAONI, V. Black holes in scalar-tensor gravity. **Physical Review Letters**, v. 108, p. 081103, Feb 2012. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.108.081103>>>. 33
- VILHENA, S. G.; MEDEIROS, L. G.; CUZINATTO, R. R. Gravitational waves in higher-order  $R^2$  gravity. **Physical Review Letters**, v. 104, p. 084061, Oct 2021. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.084061>>>. 3
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of GR**. [S.l.]: John Wiley Sons, 1972. ISBN 0471925675,9780471925675. 20

WEISBERG, J. M.; HUANG, Y. Relativistic measurements from timing the binary pulsar psr b1913+16. **The Astrophysical Journal**, v. 829, n. 1, p. 55, sep 2016. Disponível em: <<<https://dx.doi.org/10.3847/0004-637X/829/1/55>>>. 1, 2

WILL, C. M. Testing scalar-tensor gravity with gravitational-wave observations of inspiralling compact binaries. **Physical Review Letters**, v. 50, p. 6058–6067, Nov 1994. Disponível em: <<<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.6058>>>. 61

\_\_\_\_\_. **Theory and experiment in gravitational physics**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. 35, 61

WILL, C. M.; ZAGLAUER, H. W. Gravitational radiation, close binary systems, and the Brans-dicke theory of gravity. **Astrophysical Journal**, v. 346, p. 366, 1989. 62

ZAGLAUER, H. W. Neutron stars and gravitational scalars. **Astrophysical Journal**, v. 393, p. 685, jul. 1992. 34





## APÊNDICE A - AMPLITUDE DA ONDA GRAVITACIONAL EM UMA DIREÇÃO ARBITRÁRIA

Para obter a solução da Equação (4.150) para uma direção arbitrária  $\hat{n}$ , devemos calcular o termo  $Q_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij.kl} Q_{kl}$ . Para isso, utilizamos a forma do operador projetor dada pela Equação (2.25) e realizamos a contração com o tensor momento de quadrupolo  $Q_{kl}$ .

Inicialmente, vamos considerar a propagação da onda gravitacional ao longo do eixo  $z$ . Em seguida, realizamos uma rotação no sistema de coordenadas para generalizar o caso para uma direção arbitrária, definida pelos ângulos  $(\theta, \phi)$ .

Para a direção de propagação da onda gravitacional dada por  $\hat{n} = \hat{z} = (0, 0, 1)$ , obtemos, a partir da Equação (2.26), que o operador projetor é dado por  $P_{ij} = \text{diag}(1, 1, 0)$ . Esse resultado indica que a projeção ocorre no plano  $(x, y)$ , o que é esperado, pois a onda se propaga ao longo do eixo  $z$ , tornando a frente de onda paralela ao plano  $(x, y)$ .

Então o tensor momento de quadruplo no calibre TT pode ser calculado como,

$$Q_{ij}^{TT} = \Lambda_{ijkl} Q_{kl} = \left[ P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \right] Q_{kl} = (PQP)_{ij} - \frac{1}{2} P_{ij} \text{Tr}(PQ), \quad (\text{A.1})$$

como resultado obtemos que,

$$Q_{ij}^{TT} = \Lambda_{ijkl} Q_{kl} = \begin{pmatrix} (Q_{11} - Q_{22})/2 & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & -(Q_{11} - Q_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Utilizando o resultado da Equação (A.2) na Equação (4.150), e considerando que, devido à simetria do tensor momento de quadrupolo, temos  $\ddot{Q}_{12} = \ddot{Q}_{21}$ , concluímos que a perturbação métrica no calibre TT para uma onda gravitacional que se propaga na direção do eixo  $z$  é dada por:

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

$h_+$  e  $h_\times$  são as amplitudes das polarizações *plus* e *cross* da radiação gravitacional,

respectivamente, e são expressas por:

$$h_+ = \frac{1}{R} \frac{G}{c^4} (\ddot{Q}_{11} - \ddot{Q}_{22}), \quad (\text{A.4})$$

$$h_{\times} = \frac{2}{R} \frac{G}{c^4} \ddot{Q}_{12}. \quad (\text{A.5})$$

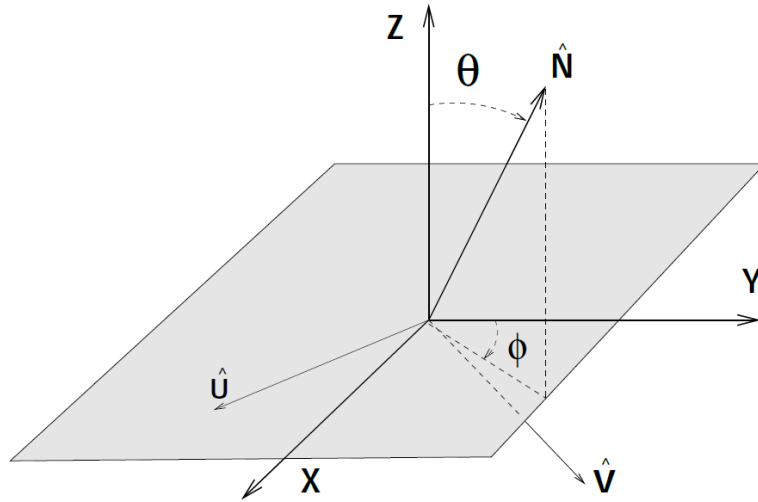
Agora, considerando uma direção genérica  $\hat{n}$ , definimos dois vetores unitários  $\hat{u}$  e  $\hat{v}$ , ortogonais a  $\hat{n}$ , de forma a constituírem um sistema de coordenadas com eixos  $(x', y', z')$  alinhados com as direções  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{n})$ . Dessa maneira, a onda gravitacional propagando-se na direção do eixo  $z$  nesse sistema de coordenadas é dada por:

$$h_+(t, \hat{n}) = \frac{1}{R} \frac{G}{c^4} (\ddot{Q}'_{11} - \ddot{Q}'_{22}), \quad (\text{A.6})$$

$$h_{\times}(t, \hat{n}) = \frac{2}{R} \frac{G}{c^4} \ddot{Q}'_{12}, \quad (\text{A.7})$$

em que a ' indica uma transformação de coordenadas. Seja um segundo referencial definido pelos eixos  $(x, y, z)$  rotacionado em relação ao referencial  $(x', y', z')$  pelos ângulos  $(\theta, \phi)$ , como mostrado na Figura A.1. Desta forma, identificamos que a

Figura A.1 - Relação dos eixos do referencial  $(x, y, z)$  e do referencial definido pelos vetores unitários  $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{n})$ .



Fonte: Maggiore (2007).

direção de propagação da onda gravitacional no referencial  $(x, y, z)$  é dada por:

$$n_i = (\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, \cos \theta). \quad (\text{A.8})$$

Isso implica que a direção de propagação no referencial  $(x', y', z')$ , denotada por  $n'_i$ , está relacionada com o referencial  $(x, y, z)$  pela transformação

$$n_i = R_{ij} n'_j, \quad (\text{A.9})$$

onde  $R_{ij}$  é a matriz de rotação dada por:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

De modo semelhante, podemos relacionar as componentes do tensor momento de quadrupolo  $Q'_{ij}$  no referencial  $(x', y', z')$  com as componentes  $Q_{ij}$  no referencial  $(x, y, z)$  através da matriz de rotação, de modo que:

$$Q_{ij} = R_{ik} R_{jl} Q'_{kl} \longrightarrow Q'_{ij} = (R^T Q R)_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

$R^T$  é a matriz de rotação transposta. Então, calculando as componentes de  $Q'_{ij}$  em função das componentes de  $Q_{ij}$  e substituindo o resultado nas equações (A.6) e (A.7), temos:

$$\begin{aligned} h_+(t, \hat{n}) &= \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} [\ddot{Q}_{11}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \cos^2 \theta) + \ddot{Q}_{22}(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\ &\quad + \ddot{Q}_{33} \sin^2 \theta - \ddot{Q}_{12} \sin 2\phi (1 + \cos^2 \theta) \\ &\quad + \ddot{Q}_{13} \sin \phi \sin 2\theta + \ddot{Q}_{23} \cos \phi \sin 2\theta] \\ h_\times(t, \hat{n}) &= \frac{2}{r} \frac{G}{c^4} [(\ddot{Q}_{11} - \ddot{Q}_{22}) \sin 2\phi \cos \theta + 2\ddot{Q}_{12} \cos 2\phi \cos \theta \\ &\quad - 2\ddot{Q}_{13} \cos \phi \sin \theta + 2\ddot{Q}_{23} \sin \phi \sin \theta] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A Equação (A.12) permite obter as amplitudes *plus* e *cross* de uma onda gravitacional se propagando em uma direção qualquer definida pelos ângulos  $\theta$  e  $\phi$ , e calcular a distribuição angular da radiação gravitacional uma vez que o momento de quadrupolo  $Q_{ij}$  é conhecido.