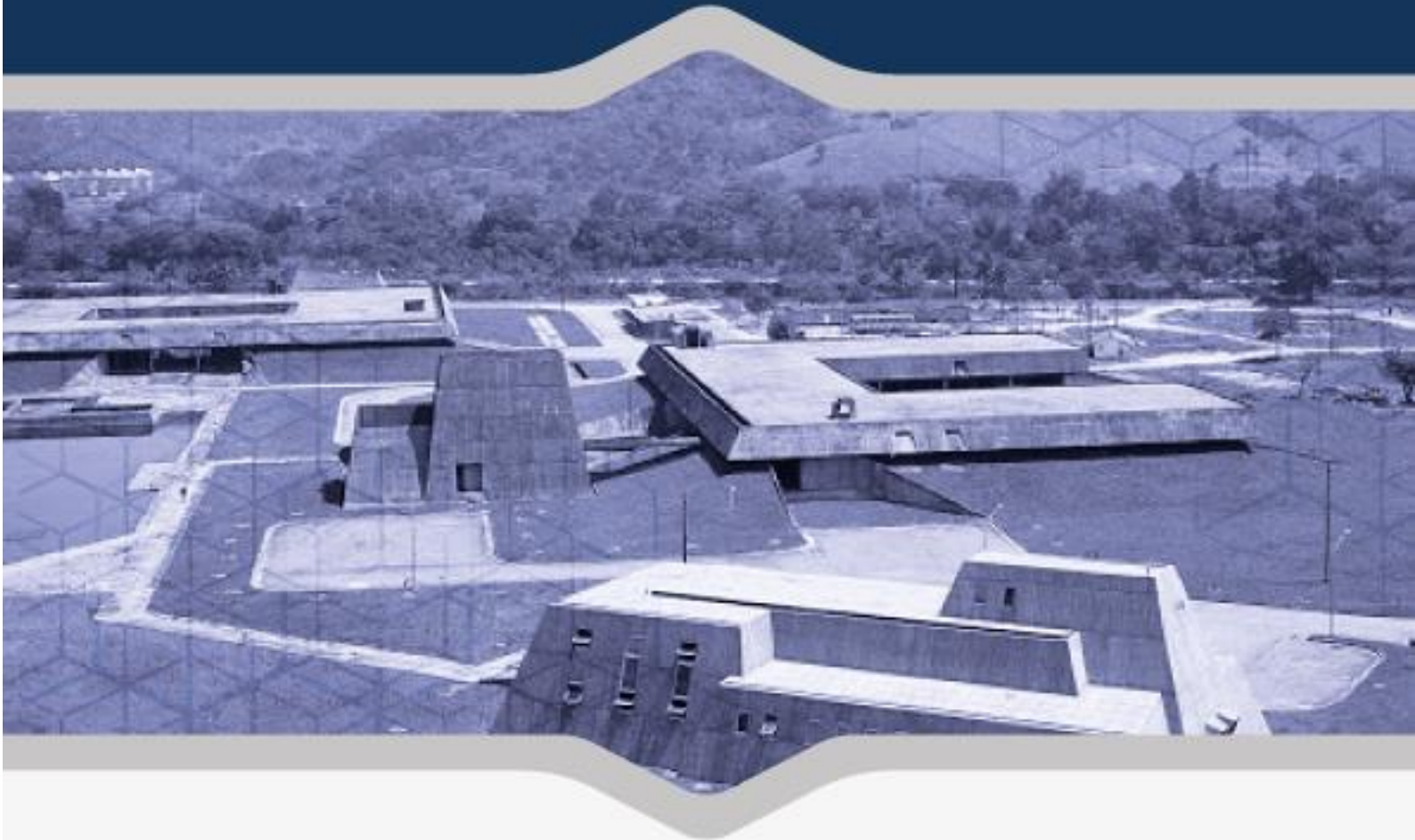


AVALIAÇÃO DE DADOS DE MEDIÇÃO

Suplemento 1 do “Guia para a expressão de incerteza de medição”

Propagação de distribuições usando um método de Monte Carlo



Tradução autorizada pelo BIPM da primeira edição internacional do documento Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method

junho/2020

Primeira edição do documento original:2008

Copyright 2020 by INMETRO

Avaliação de dados de medição — Suplemento 1 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Propagação de distribuições usando um método de Monte Carlo

Grupo de trabalho para tradução do JCGM 101:2008

Criação: Ordem de Serviço nº 03/(Dimci) - 07/08/2017

Coordenação: Antonio Carlos Baratto	Dimci/Dmtic/Inmetro
Jailton Carreteiro Damasceno	Dimci/Dimat/Inmetro
Paulo Paschoal Borges	Dimci/Dimqt/Inmetro
Paulo Roberto Guimarães Couto	Dimci/Dimec/Inmetro
Ricardo Luís d’Ávila Villela	Dimci/Diavi/Inmetro

© 2020 Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO)

Qualquer parte desta publicação pode ser reproduzida, desde que citada a fonte.

Título original em inglês

Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method

Inmetro

Presidente do Inmetro

Marcos Heleno Guerson de Oliveira Júnior

Diretor de Metrologia Científica e Tecnologia

Beniamin Achilles Bondarczuk

Desenvolvimento e Edição

Coordenador da Tradução e Formatação

Antonio Carlos Baratto

Capa

Divisão de Comunicação Social (Dicom)

Catálogo no Serviço de Documentação e Informação da Biblioteca do Inmetro

- A945 Avaliação de dados de medição — Suplemento 1 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Propagação de distribuições usando um método de Monte Carlo / Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia. Duque de Caxias, RJ: Inmetro, 2020.
1 recurso eletrônico, em PDF

Inclui índice.

Traduzido de: Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method – JCGM 101:2008.

Disponível também em: <http://www.inmetro.gov.br>

1. Metrologia científica 2. Incerteza de medição 3. Avaliação de incerteza
I. INMETRO II. Título

530.801

Apresentação

O Grupo de Trabalho 1 do Comitê Conjunto para Guias em Metrologia (*Joint Committee for Guides in Metrology - JCGM*) do BIPM publica uma série de documentos referenciados genericamente sob o título *Avaliação de dados de medição*. Essa série é composta pelo GUM e por diversos suplementos que o complementam, sendo que quatro foram já concluídos, aprovados e publicados, e três estão ainda em preparação. Os suplementos abordam temas específicos de maneira mais completa e abrangente que aquela com que são tratados no GUM, auxiliam sua interpretação, aprimoram seu emprego nas áreas tradicionais e ampliam as possibilidades de aplicação em áreas por ele ainda não abrangidas, ou em que seu uso se dá apenas marginalmente.

Apenas o Suplemento JCGM 104:2009, também referido como INTROGUM 2008, foi já traduzido e publicado pelo Inmetro, ainda em 2014. O presente Suplemento (JCGM 101:2008) é o segundo a ser traduzido no Brasil. Sua importância reside principalmente no fato de ser altamente compreensivo ao tratar o cálculo de incerteza de medição, podendo ser aplicado com sucesso mesmo em casos em que a aplicação da metodologia de incerteza do GUM se revela extremamente difícil e precária.

Pela importância de que se revestem os conteúdos abordados nos Suplementos, pretende-se envidar grandes esforços para que as traduções dos outros suplementos já publicados, e dos que vierem a ser publicados futuramente, sejam colocados à disposição da sociedade brasileira com bastante presteza.

O Inmetro tem funcionado como principal repositório do saber metrológico no Brasil. Trata-se de um componente importante de sua missão institucional de disseminação desse saber no âmbito da sociedade, onde pode subsidiar, direta e eficazmente, os processos produtivos e sociais. Com mais essa publicação, que ora colocamos à disposição da sociedade, estou certo de que estamos cumprindo adequadamente mais um de nossos basilares papéis – o de divulgador da cultura metrológica no Brasil, contribuindo para o desenvolvimento da infraestrutura de qualidade que o país necessita para garantir maior inovação e competitividade.

Marcos Heleno Guerson de Oliveira Júnior

Presidente do Inmetro

junho de 2020

JCGM 101:2008

**Avaliação de dados de medição — Suplemento 1
do “Guia para a expressão de incerteza de
medição” — Propagação de distribuições
usando um método de Monte Carlo**



*Évaluation des données de mesure — Supplément 1 du “Guide pour
l’expression de l’incertitude de mesure” — Propagation de distributions
par une méthode de Monte Carlo*

Primeira edição (original) 2008

© JCGM2008

Os direitos autorais sobre este documento orientador são compartilhados pelas organizações membro (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML) do Comitê Conjunto para Guias em Metrologia - JCGM.

Direitos autorais

Mesmo se versões eletrônicas estiverem gratuitamente disponíveis em endereços eletrônicos de uma ou mais organizações membro do JCGM, são internacionalmente protegidos os direitos econômicos e morais relacionados aos direitos autorais derivados de todas as publicações do JCGM. O JCGM não permite que, sem sua expressa autorização escrita, terceiros reescrevam ou repaginem edições, vendam cópias ao público, divulguem ou usem *on-line* suas publicações. Da mesma maneira, o JCGM é contrário a que distorções, acréscimos ou mutilações sejam realizados em suas publicações, incluindo seus títulos, lemas e logomarcas, assim como aqueles de suas organizações membro.

Versões oficiais e traduções

As únicas versões oficiais dos documentos são aquelas publicadas pelo JCGM em suas línguas originais.

As publicações do JCGM podem ser traduzidas para outras línguas que não aquelas em que os documentos foram originalmente publicados pelo JCGM. Permissão do JCGM deve ser obtida antes de uma tradução ser feita. Todas as traduções devem respeitar os formatos originais e oficiais das fórmulas e unidades (sem qualquer conversão para outras fórmulas ou unidades).

O JCGM não assume qualquer responsabilidade pela relevância, exatidão, completeza ou qualidade das informações e materiais disponibilizados em qualquer tradução. Uma cópia da presente tradução foi fornecida ao JCGM antes de sua publicação.

Declaramos ainda que:

Todos os produtos do JCGM são protegidos internacionalmente por direitos autorais. Esta tradução do documento original do JCGM foi realizada com a permissão do JCGM. O JCGM mantém direitos autorais integrais, protegidos internacionalmente, sobre os formatos e conteúdos deste documento e sobre os títulos, lemas e logomarcas do JCGM. As organizações membro do JCGM também mantêm direitos integrais protegidos internacionalmente sobre seus títulos, lemas e logomarcas incluídos nas publicações do JCGM. A única versão oficial é o documento JCGM 101:2008 publicado pelo JCGM nas línguas originais.

Reprodução

As publicações do JCGM podem ser reproduzidas desde que seja obtida permissão escrita do JCGM. Uma amostra de qualquer documento reproduzido deverá ser providenciada ao JCGM por ocasião da reprodução, declarando que:

Este documento foi reproduzido com a permissão do JCGM, o qual mantém direitos autorais integrais protegidos internacionalmente sobre os formatos e conteúdos deste documento e sobre os títulos, lemas e logomarcas do JCGM. As organizações membro do JCGM também mantêm direitos integrais protegidos internacionalmente sobre seus títulos, lemas e logomarcas incluídos nas publicações do JCGM. As únicas versões oficiais dos documentos publicadas pelo JCGM são as versões originais.

Responsabilidade

O JCGM e suas organizações membro publicaram este documento para ampliar o acesso a informações sobre Metrologia. Envidarão esforços para atualizá-lo regularmente, mas não podem garantir sua correção a todo o momento e não poderão ser responsabilizados por qualquer prejuízo direto ou indireto que possa resultar de seu uso. Qualquer referência a produtos comerciais de qualquer tipo (incluindo, não restritamente, qualquer *software*, dados ou *hardware*), ou indicações para endereços eletrônicos na internet, sobre os quais o JCGM e suas organizações membro não têm nenhum controle e pelos quais não assumem qualquer responsabilidade, não implicam aprovação, endosso ou recomendação pelo JCGM e por suas organizações membro.

Sumário	Página
Prefácio da primeira edição brasileira	4
Prefácio da primeira edição original	5
Introdução	6
1 Escopo	9
2 Referências normativas	11
3 Termos e definições	11
4 Convenções e notação	17
5 Princípios básicos	20
5.1 Principais etapas da avaliação de incerteza	20
5.2 Propagação de distribuições	21
5.3 Obtenção de informações do resumo	22
5.4 Implementações da propagação de distribuições	23
5.5 Declarando os resultados	25
5.6 A metodologia de incerteza do GUM	26
5.7 Condições para aplicação válida da metodologia de incerteza do GUM para modelos lineares	28
5.8 Condições para aplicação válida da metodologia de incerteza do GUM para modelos não-lineares	29
5.9 Abordagem de Monte Carlo nas etapas de propagação e resumo	30
5.10 Condições para aplicação válida do método de Monte Carlo descrito	32
5.11 Comparação entre a metodologia de incerteza do GUM e o método de Monte Carlo descrito	33
6 Funções densidade de probabilidade para as grandezas de entrada	36
6.1 Generalidades	36
6.2 O teorema de Bayes	37
6.3 O Princípio de Máxima Entropia	37
6.4 Atribuição da função densidade de probabilidade para alguns casos mais comuns	38
6.4.1 Generalidades	38
6.4.2 Distribuições retangulares	38
6.4.3 Distribuições retangulares com limites prescritos não exatos	39
6.4.4 Distribuições trapezoidais	41
6.4.5 Distribuições triangulares	43
6.4.6 Distribuições arco seno (em forma de U)	44
6.4.7 Distribuições gaussianas	45
6.4.8 Distribuições gaussianas multivariadas	45
6.4.9 Distribuições- <i>t</i>	46
6.4.10 Distribuições exponenciais	49
6.4.11 Distribuições gama	49
6.5 Distribuições de probabilidade a partir de cálculos de incerteza anteriores	50

7	Implementação de um método de Monte Carlo	51
7.1	Generalidades	51
7.2	Número de iterações de Monte Carlo	51
7.3	Amostragem de distribuições de probabilidade	52
7.4	Avaliação do modelo	52
7.5	Representação discreta da função distribuição para a grandeza de saída	53
7.6	Estimativa da grandeza de saída e da incerteza-padrão associada	54
7.7	Intervalo de abrangência para a grandeza de saída	55
7.8	Tempo de processamento computacional	55
7.9	Procedimento adaptativo de Monte Carlo	56
7.9.1	Generalidades	56
7.9.2	Tolerância numérica associada a um valor numérico	57
7.9.3	Objetivo do procedimento adaptativo	57
7.9.4	Procedimento adaptativo	58
8	Validação de resultados	60
8.1	Validação da metodologia de incerteza do GUM (MIG) usando um método de Monte Carlo	60
8.2	Obtenção de resultados usando um método de Monte Carlo (MIG) para fins de validação	61
9	Exemplos	61
9.1	Ilustrações de aspectos deste Suplemento	61
9.2	Modelo aditivo	62
9.2.1	Formulação	62
9.2.2	Grandezas de entrada com distribuições normais	63
9.2.3	Grandezas de entrada com distribuições retangulares de mesma largura	65
9.2.4	Grandezas de entrada com distribuições retangulares de diferentes larguras	67
9.3	Calibração de massa	68
9.3.1	Formulação	68
9.3.2	Propagação e resumo	70
9.4	Comparação de perdas na calibração de medidor de potência de micro-ondas	72
9.4.1	Formulação	72
9.4.2	Propagação e resumo: covariância zero	73
9.4.3	Propagação e resumo: covariância diferente de zero	79
9.5	Calibração de bloco-padrão	81
9.5.1	Formulação: modelo	81
9.5.2	Formulação: atribuição de FDP	83
9.5.3	Propagação e resumo	88
9.5.4	Resultados	88
	Anexos	
A	Perspectiva histórica	90
B	Coefficientes de sensibilidade e planilhas de incerteza	91

C	Amostragens a partir de distribuições de probabilidade	92
C.1	Generalidades	92
C.2	Distribuições diversas	92
C.3	Distribuição retangular	93
C.3.1	Generalidades	93
C.3.2	Testes de aleatoriedade	94
C.3.3	Procedimento para geração de números pseudoaleatórios para uma distribuição retangular	95
C.4	Distribuição gaussiana	97
C.5	Distribuição gaussiana multivariada	97
C.6	Distribuição- <i>t</i>	99
D	Aproximação sucessiva à função distribuição para a grandeza de saída	100
E	Intervalo de abrangência para a convolução quádrupla de uma distribuição retangular	103
F	O problema da comparação de perdas	105
F.1	Esperança e desvio-padrão obtidos analiticamente	105
F.2	Solução analítica para a estimativa do zero do coeficiente de reflexão de voltagem com covariância zero associada	106
F.3	Metodologia de incerteza do GUM aplicada ao problema da comparação de perdas	108
F.3.1	Grandezas de entrada não correlacionadas	108
F.3.2	Grandezas de entrada correlacionadas	109
G	Glossário dos principais símbolos	110
	Bibliografia	115
	Índice alfabético (Português — Inglês)	118
	Notas dos tradutores	125

Prefácio da primeira edição brasileira

O presente Suplemento (JCGM 101:2008) é parte de uma série de documentos correlatos do JCGM (*Joint Committee for Guides in Metrology*) do BIPM, designados genericamente sob o título unificador *Avaliação de dados de medição*. São desenvolvidos os procedimentos para o cálculo de incerteza de medição de um mensurando que, consubstanciado num modelo matemático de medição [GUM 3.1.6], será tratado por um método numérico que emprega a propagação das distribuições de probabilidade das grandezas de entrada como base para a avaliação, sua implementação sendo realizada por um método de Monte Carlo. Trata-se de um método de grande importância, principalmente nos casos, bastante frequentes, em que a função de medição é significativamente não linear, tornando praticamente inviável, em vista das dificuldades inerentes aos cálculos das derivadas parciais, um tratamento pela metodologia de incerteza do GUM. O tratamento apresentado se aplica a um modelo com qualquer número de grandezas de entrada, e com uma única grandeza de saída.

Constituindo-se como primeira edição de um documento que aborda um assunto assaz sofisticado, pode-se considerar como bastante natural que o texto original (inglês) não se caracterize por apresentar todos os conceitos com exemplar clareza e expressos numa linguagem precisamente escorreita. O atingimento de tais características somente pode ser honestamente esperado a partir de uma segunda edição. Assim, para uma melhor compreensão do texto ou do contexto julgamos conveniente, em algumas passagens mais problemáticas, remeter o leitor para o final do documento, onde apresentamos algumas notas explicativas (NT – Nota dos Tradutores). Por outro lado, com o fito de propiciar uma leitura relativamente suave e sem constantes interrupções, tentou-se evitar uma profusão de NTs. Optou-se assim, quando necessária uma aclaração, e sempre que possível e mais conveniente, por acrescentar um texto curto complementar ou explicativo, ressaltado em vermelho, em vez de uma NT adicional.

Achamos por bem justapor, aos termos e expressões constantes do **Índice Alfabético**, os respectivos e correspondentes termos e expressões do **índice alfabético original** (em inglês). Os termos em Português estão em fonte **Times New Roman 10 negrito**. Os termos correspondentes em Inglês estão em fonte *Arial 8*. Isso foi feito com o objetivo de facilitar aos leitores, sempre que julguem necessário ou apropriado, proceder à verificação especulativa ou crítica da tradução utilizada para alguns termos ou conceitos.

Os tradutores

Maio/2020

Prefácio

Em 1997, as sete organizações internacionais que haviam originalmente (1993) elaborado o “Guia para a expressão de incerteza de medição (GUM)” e o “Vocabulário internacional de metrologia - conceitos fundamentais e gerais e termos associados” (VIM) criaram um Comitê Conjunto para Guias em Metrologia (JCGM – *Joint Committee for Guides in Metrology*), presidido pelo Diretor do BIPM. O JCGM assumiu a responsabilidade por esses dois documentos do Grupo Técnico Consultivo 4 da ISO (ISO *Technical Advisory Group* - TAG4).

O JCGM é formado pelo *Bureau* Internacional de Pesos e Medidas (BIPM - *Bureau International des Poids et Mesures*) conjuntamente com a Comissão Eletrotécnica Internacional (IEC – *International Electrotechnical Commission*), a Federação Internacional de Química Clínica e Medicina Laboratorial (IFCC – *International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine*), a Cooperação Internacional para Acreditação de Laboratórios (ILAC – *International Laboratory Accreditation Cooperation*), a Organização Internacional de Normalização (ISO – *International Organization for Standardization*), a União Internacional de Química Pura e Aplicada (IUPAC – *International Union of Pure and Applied Chemistry*), a União Internacional de Física Pura e Aplicada (IUPAP – *International Union of Pure and Applied Physics*) e a Organização Internacional de Metrologia Legal (OIML – *International Organization of Legal Metrology*).

O JCGM possui dois Grupos de Trabalho. O Grupo de Trabalho 1, "Expressão de incerteza em medição", tem a tarefa de promover o uso do GUM e preparar Suplementos e outros documentos para a sua ampla aplicação. O Grupo de Trabalho 2, "Grupo de Trabalho para o VIM", tem a tarefa de revisar e promover o uso do VIM. Para mais informações sobre a atividade do JCGM, acessar www.bipm.org.

Suplementos como este têm por finalidade agregar valor ao GUM, fornecendo orientações sobre aspectos da avaliação de incerteza que não são tratados explicitamente no próprio GUM. Essas orientações, contudo, serão tão consistentes quanto possível com as bases probabilísticas gerais do GUM.

O presente Suplemento 1 do GUM foi elaborado pelo Grupo de Trabalho 1 do JCGM, tendo recebido a contribuição de revisões detalhadas realizadas pelas organizações membro do JCGM e pelos Institutos Nacionais de Metrologia.

Introdução

Este Suplemento ao “Guia para a expressão de incerteza de medição” (GUM) versa sobre a propagação de distribuições de probabilidade, efetivada através de um modelo matemático de medição [GUM 3.1.6], como base para avaliação de incertezas de medição, sua implementação sendo realizada por um método de Monte Carlo. O tratamento se aplica a um modelo com qualquer número de grandezas de entrada e com uma única grandeza de saída.

O método de Monte Carlo descrito é uma alternativa prática à metodologia de incerteza do GUM [GUM 3.4.8]. Ele é aplicável quando

- a) a linearização do modelo resulta em uma representação inadequada, ou
- b) a função densidade de probabilidade (FDP) para a grandeza de saída se afasta sensivelmente de uma distribuição gaussiana ou de uma distribuição-t escalada e deslocada, devido, por exemplo, a uma pronunciada assimetria.

No caso a), a estimativa da grandeza de saída e a incerteza-padrão associada, fornecidas pela metodologia de incerteza do GUM, podem não ser confiáveis. No caso b), o mesmo tratamento pode resultar em intervalos de abrangência (uma generalização de “incerteza expandida” na metodologia do GUM) irrealistas.

O GUM [GUM 3.4.8] “...fornece uma metodologia para avaliar incerteza...” com base na lei de propagação de incertezas [GUM 5], sendo a caracterização da grandeza de saída representada por uma distribuição gaussiana ou uma distribuição-t escalada e deslocada [GUM G.6.2, G.6.4]. Nessa metodologia, a lei de propagação de incertezas fornece um meio para propagar as incertezas com base no modelo (de medição) adotado. Especificamente, essa metodologia avalia a incerteza-padrão associada a uma estimativa da grandeza de saída, sendo dados

- 1) as melhores estimativas das grandezas de entrada,
- 2) as incertezas-padrão associadas com essas estimativas, e, quando apropriado,
- 3) os graus de liberdade associados com essas incertezas-padrão, e
- 4) quaisquer covariâncias não nulas associadas com pares dessas estimativas.

A FDP que foi empregada para caracterizar a grandeza de saída é usada, dentro dessa metodologia, para prover um intervalo de abrangência referente a uma probabilidade de abrangência estipulada para essa mesma grandeza.

As melhores estimativas, incertezas-padrão, covariâncias e graus de liberdade resumem as informações disponíveis concernentes às grandezas de entrada. Com referência à abordagem considerada neste Suplemento, a informação disponível está codificada em termos de FDPs para as grandezas de entrada. A abordagem opera com essas FDPs para determinar a FDP da grandeza de saída.

Existem algumas limitações quanto ao uso da metodologia de incerteza do GUM. A propagação de distribuições, no entanto, sempre fornecerá uma FDP para a grandeza de saída consistente com o modelo da medição e com as FDPs para as grandezas de entrada. Esta FDP da grandeza de saída descreve o conhecimento que dela se obtém com base nas informações disponíveis para as grandezas de entrada, conforme descritas pelas respectivas FDPs. Uma vez que a FDP para a grandeza de saída esteja disponível, essa grandeza pode ser resumida por sua esperança, tomada como uma estimativa da grandeza (**isto é, do valor do mensurando**), e seu desvio-padrão, tomado com a incerteza-padrão associada a essa estimativa. Além disso, a FDP pode ser usada para obter, para a grandeza de saída, um intervalo de abrangência correspondente a uma probabilidade de abrangência estipulada.

O uso de FDPs conforme descrito neste Suplemento é geralmente consistente com os conceitos subjacentes ao GUM. A FDP para uma grandeza expressa o estado de conhecimento sobre ela, isto é, quantifica o grau de confiança sobre os valores que podem ser atribuídos à grandeza com base na informação disponível. A informação consiste, geralmente, de dados estatísticos brutos, resultados de medição, ou outras declarações científicas relevantes, bem como julgamento profissional.

Para construir uma FDP referente a uma grandeza, com base em uma série de indicações, o teorema de Bayes pode ser aplicado [27, 33]. Estando disponível informação apropriada sobre efeitos sistemáticos, o princípio da máxima entropia pode ser usado para atribuir uma FDP adequada [51, 56].

A propagação de distribuições tem uma aplicação mais ampla do que a metodologia de incerteza do GUM, pois trabalha com informações mais ricas do que as proporcionadas por melhores estimativas e suas incertezas-padrão associadas (e graus de liberdade e covariâncias, quando apropriado).

Uma perspectiva histórica é dada no anexo A.

NOTA 1 Citações da forma [GUM 3.1.6] são usadas para indicar itens e subitens do GUM 2008, segundo tradução publicada pelo Inmetro em 2012 [referência 57].

NOTA 2 O GUM provê uma abordagem também em casos em que a não linearidade da função de medição é significativa [GUM 5.1.2 NOTA]. A abordagem tem limitações: são usados apenas os principais

termos não-lineares na expansão da série de Taylor do modelo adotado, e as FDPs para as grandezas de entrada são consideradas gaussianas. (ver NT 01)

NOTA 3 Particularmente, o GUM caracteriza a variável $(Y - y)/u(y)$ como uma distribuição-t, onde Y é a grandeza de saída, y uma estimativa de Y e $u(y)$ a incerteza-padrão associada a y [GUM G.3.1]. Essa caracterização também é usada neste Suplemento. [O GUM, na realidade, faz referência à variável $(y - Y)/u(y)$].

NOTA 4 Uma FDP para uma grandeza não deve ser entendida como uma densidade de frequência.

NOTA 5 "A avaliação da incerteza não é uma tarefa de rotina nem uma tarefa puramente matemática; ela depende do conhecimento detalhado da natureza do mensurando, do método de medição e do procedimento utilizado. A qualidade e a utilidade da incerteza expressa como resultado de uma medição dependem, portanto, e em última instância, da compreensão, da análise crítica e da integridade daqueles que contribuíram para a obtenção de seu valor." [17].

Avaliação de dados de medição — Suplemento 1 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Propagação de distribuições usando um método de Monte Carlo

1 Escopo

Este Suplemento fornece uma abordagem numérica geral, consistente com os princípios gerais do GUM [GUM G.1.5] (ver NT 02), para a realização dos cálculos que se fazem necessários como parte de uma avaliação de incerteza de medição. A abordagem aplica-se a qualquer modelo que tenha uma grandeza única como saída e cujas grandezas de entrada sejam caracterizadas por quaisquer tipos de FDPs especificados [GUM G.1.4, G.5.3].

Assim como o GUM, este Suplemento está primariamente relacionado com a expressão da incerteza de medição de uma grandeza física bem definida - o mensurando - que pode ser caracterizada por um valor essencialmente único [GUM 1.2].

Este Suplemento fornece orientação também em situações em que as condições consideradas para a metodologia de incerteza do GUM [GUM G.6.6] não são cumpridas, ou não está claro se isso acontece. Ele pode ser aplicado, por exemplo, em situações em que a complexidade do modelo torna difícil a aplicação do enfoque de incerteza de GUM. São dadas orientações numa forma apropriada a uma implementação computacional.

Este Suplemento pode ser usado para fornecer (uma representação para) a FDP relativa à grandeza de saída, a partir da qual possam ser obtidos

- a) uma estimativa da grandeza de saída,
- b) a incerteza-padrão associada a essa estimativa, e
- c) um intervalo de abrangência para essa grandeza, correspondente a uma probabilidade de abrangência especificada.

Dado (i) o modelo que relaciona a grandeza de saída com as grandezas de entrada e (ii) as FDPs que caracterizam essas grandezas de entrada, haverá apenas uma única FDP para a grandeza de saída, a qual, geralmente, não pode ser determinada analiticamente. O objetivo da abordagem aqui descrita é, portanto, determinar os itens a), b), e c) acima para uma tolerância numérica prescrita, sem aproximações que não sejam quantificadas.

Para atender a uma probabilidade de abrangência prescrita, este Suplemento pode ser usado para fornecer qualquer intervalo de abrangência requerido, inclusive o intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico, e também o intervalo mínimo de abrangência.

Este Suplemento se aplica a casos em que as grandezas de entrada são independentes, a cada grandeza sendo atribuída uma FDP apropriada, ou a casos em que são não independentes, quando a algumas ou a todas estas grandezas é atribuída uma única FDP conjunta.

Problemas típicos de avaliação de incerteza aos quais este Suplemento pode ser aplicado incluem aqueles em que

- as incertezas contribuintes não possuem todas, aproximadamente, a mesma magnitude [GUM G.2.2],
- é difícil, ou inconveniente, obter as derivadas parciais do modelo, como requerido pela lei de propagação de incertezas [GUM 5],
- a FDP para a grandeza de saída não é uma distribuição gaussiana ou uma distribuição-t escalada e deslocada [GUM G.6.5],
- uma estimativa da grandeza de saída e a incerteza-padrão associada são aproximadamente da mesma magnitude [GUM G.2.1],
- os modelos são consideravelmente complicados [GUM G.1.5], e
- as FDPs para as grandezas de entrada são assimétricas [GUM G.5.3].

É apresentado também um procedimento de validação para verificar (em cada caso) se a metodologia de incerteza do GUM pode ser aplicada, sendo que esta metodologia continua a ser a abordagem primária de avaliação de incerteza em circunstâncias em que é comprovadamente aplicável.

É suficiente, normalmente, relatar incertezas de medição com um ou dois dígitos decimais significativos. É aqui fornecida orientação sobre a realização dos cálculos para uma garantia razoável de que, em termos das informações disponíveis, o número de dígitos decimais relatado esteja correto.

Exemplos detalhados ilustram as orientações fornecidas.

Este documento é um Suplemento ao GUM e deve ser usado em conjunto com ele. Outras abordagens, que sejam no geral consistentes com o GUM, podem alternativamente ser usadas. O público-alvo deste Suplemento é o mesmo que o do GUM.

NOTA 1 Este Suplemento não considera modelos que não definem univocamente a grandeza de saída (por exemplo, modelos que envolvem a solução de uma equação quadrática sem especificar qual raiz deve ser considerada).

NOTA 2 Este Suplemento não considera o caso em que uma FDP prévia para a grandeza de saída esteja disponível, mas o tratamento pode ser adaptado para atender também a este caso [16].

2 Referências normativas

Os seguintes documentos de referência são indispensáveis para a aplicação deste documento.

JCGM 100 (GUM). Guia para a expressão da incerteza em medição (GUM), 2008. Versão publicada pelo Inmetro em 2012.

JCGM 200 (VIM: 2012). Vocabulário Internacional de Metrologia - Conceitos fundamentais e gerais e termos associados, VIM, 1ª edição Luso-Brasileira, 2012.

3 Termos e definições

Para os propósitos deste documento aplicam-se os termos e definições usados no GUM e no “Vocabulário Internacional de Metrologia: Conceitos fundamentais e gerais e termos associados” (VIM), salvo indicação diferente. Algumas das definições mais relevantes, adaptadas desses documentos (ver 4.2) quando necessário, são dadas abaixo. Outras definições, importantes para este Suplemento, são também apresentadas, incluindo definições tomadas ou adaptadas de outras fontes.

Um glossário dos principais símbolos é apresentado no anexo G.

3.1

distribuição de probabilidade

(de uma variável aleatória) função que determina a probabilidade de que uma variável aleatória assuma qualquer valor dado, ou de que pertença a um dado conjunto de valores

NOTA A probabilidade do conjunto inteiro de valores da variável aleatória é igual a 1.

[Adaptado de ISO 3534-1:1993; 1.3; GUM C.2.3]

NOTA 1 Uma distribuição de probabilidade é denominada univariada quando relacionada a uma variável aleatória (escalar) singular, e multivariada quando relacionada a um vetor de variáveis aleatórias. Uma distribuição de probabilidade multivariada é descrita também como uma distribuição conjunta.

NOTA 2 Uma distribuição de probabilidade pode assumir a forma de uma função distribuição ou de uma função densidade de probabilidade.

3.2

função distribuição

função que determina, para cada valor ξ , a probabilidade de que a variável aleatória X seja menor que ou igual a ξ :

$$G_X(\xi) = \Pr(X \leq \xi)$$

[Adaptado de ISO 3534-1:1993, 1.4; GUM C.2.4]

3.3

função densidade de probabilidade

derivada, quando existe, da função distribuição

$$g_X(\xi) = dG_X(\xi)/d\xi$$

NOTA $g_X(\xi)d\xi$ é o “elemento de probabilidade”

$$g_X(\xi)d\xi = \Pr(\xi < X < \xi + d\xi).$$

[Adaptado de ISO 3534-1:1993, 1.5; GUM C.2.5]

3.4

distribuição normal

distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X , cuja função densidade de probabilidade é

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2\right],$$

para $-\infty < \xi < +\infty$

NOTA μ é a esperança e σ é o desvio-padrão de X .

[Adaptado de ISO 3534-1:1993, 1.37; GUM C.2.14]

NOTA A distribuição normal é conhecida também como uma distribuição gaussiana.

3.5

Distribuição-t

distribuição de probabilidade de uma variável aleatória contínua X , cuja função densidade de probabilidade é

$$g_X(\xi) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{\xi^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2},$$

para $-\infty < \xi < +\infty$, com o parâmetro ν (um inteiro positivo) sendo o número de graus de liberdade da distribuição, e onde

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0$$

é a função gama

3.6

esperança

propriedade de uma variável aleatória, a qual, para uma variável aleatória contínua X caracterizada por uma FDP $g_X(\xi)$, é dada por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g_X(\xi) d\xi$$

NOTA 1 Nem todas as variáveis aleatórias possuem uma esperança.

NOTA 2 A esperança de uma variável aleatória $Z = F(X)$, para uma dada função $F(X)$, é

$$E(Z) = E(F(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) g_X(\xi) d\xi.$$

3.7

variância

propriedade de uma variável aleatória, a qual, para uma variável aleatória contínua X caracterizada por uma FDP $g_X(\xi)$, é dada por

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi - E(X)]^2 g_X(\xi) d\xi$$

NOTA Nem todas as variáveis aleatórias possuem uma variância.

3.8

desvio-padrão

raiz quadrada positiva $[V(X)]^{1/2}$ da variância

3.9

momento de ordem r

esperança da r -ésima potência de uma variável aleatória, nominalmente

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^r g_X(\xi) d\xi$$

NOTA 1 O momento central de ordem r é a esperança da variável aleatória $Z = [X - E(X)]^r$.

NOTA 2 A esperança $E(X)$ é o primeiro momento. A variância $V(X)$ é o momento central de ordem 2.

3.10

covariância

propriedade de um par de variáveis aleatórias, a qual, para duas variáveis aleatórias contínuas X_1 e X_2 , caracterizadas por uma FDP conjunta (multivariada) $g_X(\boldsymbol{\xi})$, onde $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ e $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$, é dada por

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi_1 - E(X_1)][\xi_2 - E(X_2)] g_X(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2$$

NOTA Nem todos os pares de variáveis aleatórias possuem uma covariância.

3.11

matriz de incerteza

matriz de dimensão $N \times N$ contendo, em sua diagonal, os quadrados das incertezas-padrão associadas às estimativas dos componentes de uma grandeza vetorial de dimensão N e, nas posições fora da diagonal, as covariâncias associadas a pares de estimativas

NOTA 1 Uma matriz de incerteza \mathbf{U}_x de dimensão $N \times N$ associada à estimativa vetorial \mathbf{x} de uma grandeza vetorial \mathbf{X} tem a representação

$$\mathbf{U}_x = \begin{bmatrix} u(x_1, x_1) & \dots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & \dots & u(x_N, x_N) \end{bmatrix},$$

onde $u(x_i, x_i) = u^2(x_i)$ é a variância (o quadrado da incerteza-padrão) associada a x_i e $u(x_i, x_j)$ é a covariância associada a x_i e x_j . As covariâncias $u(x_i, x_j)$ serão iguais a zero se os elementos X_i e X_j de \mathbf{X} são não correlacionados.

NOTA 2 Covariâncias são também chamadas de incertezas mútuas.

NOTA 3 Uma matriz de incerteza é também conhecida como matriz de covariância ou matriz de variância-covariância.

3.12

intervalo de abrangência (ver NT 03)

intervalo, baseado na informação disponível, que contém o valor de uma grandeza com uma probabilidade determinada

NOTA 1 Um intervalo de abrangência é também conhecido como intervalo de credibilidade ou intervalo bayesiano.

NOTA 2 Há, geralmente, mais de um intervalo de abrangência para uma mesma probabilidade declarada.

NOTA 3 Um intervalo de abrangência não deve ser denominado "intervalo de confiança" para evitar confusão com este conceito (que é puramente) estatístico [GUM 6.2.2].

NOTA 4 Esta definição difere daquela contida no VIM, 3ª Edição (2012), uma vez que, devido a razões apresentadas no GUM [GUM E.5], o termo "valor verdadeiro" não foi usado neste Suplemento.

3.13

probabilidade de abrangência

probabilidade de que o valor de uma grandeza esteja contido dentro de um intervalo de abrangência especificado

NOTA A probabilidade de abrangência é por vezes denominada "nível da confiança" [GUM 6.2.2].

3.14

amplitude de um intervalo de abrangência

maior valor menos o menor valor em um intervalo de abrangência

3.15

intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico

intervalo de abrangência para uma grandeza em que a probabilidade de a grandeza ser menor do que o limite inferior do intervalo é igual à probabilidade de ela ser maior do que o limite superior do intervalo

3.16

mínimo intervalo de abrangência

intervalo de abrangência para uma grandeza com a menor amplitude entre todos os intervalos de abrangência referentes a essa grandeza que possuem a mesma probabilidade de abrangência

3.17

propagação de distribuições

método usado para determinar a distribuição de probabilidade para uma grandeza de saída a partir das distribuições de probabilidade atribuídas às grandezas de entrada das quais a grandeza de saída depende

3.18

metodologia de incerteza do GUM

aplicação da lei de propagação de incertezas e caracterização da grandeza de saída por uma distribuição gaussiana, ou uma distribuição-t escalada e deslocada, para fornecer um intervalo de abrangência

3.19

método de Monte Carlo

método para a propagação de distribuições com o uso de amostragem aleatória de distribuições de probabilidade

3.20

tolerância numérica

semi amplitude do intervalo mais curto que contém todos os números que podem ser expressos corretamente com um número especificado de algarismos decimais significativos

EXEMPLO Com justamente dois algarismos significativos, todos os números maiores que 1,75 e menores que 1,85 podem ser expressos como 1,8. A tolerância numérica, neste caso, será $(1,85 - 1,75)/2 = 0,05$.

NOTA Para o cálculo de tolerância numérica associada com um valor numérico, ver [7.9.2](#).

4 Convenções e notação

Para os propósitos deste Suplemento são adotadas as seguintes convenções e notação.

4.1 Um modelo matemático de medição [GUM 4.1] de uma grandeza singular (escalar) pode ser expresso como uma relação funcional f :

$$Y = f(\mathbf{X}), \quad (1)$$

onde Y é uma grandeza de saída escalar e \mathbf{X} representa as N grandezas de entrada $(X_1, \dots, X_N)^T$. Cada X_i é considerado uma variável aleatória com possíveis valores ξ_i e esperança x_i . Y é uma variável aleatória com possíveis valores η e esperança y .

NOTA 1 O mesmo símbolo é usado para uma grandeza física e para a variável aleatória que representa essa grandeza (ver [GUM 4.1.1 NOTA 1]).

NOTA 2 Muitos modelos de medição podem ser expressos na forma da Equação (1). Uma forma mais geral é

$$h(Y, \mathbf{X}) = 0$$

que relaciona implicitamente \mathbf{X} e Y . Em qualquer caso, para aplicar o método de Monte Carlo aqui descrito, é necessário apenas que Y possa ser correspondentemente formado a partir de quaisquer \mathbf{X} que tenham significância.

4.2 Este Suplemento não utiliza os símbolos usados frequentemente para 'FDP' e 'função distribuição' [24]. O GUM usa o símbolo genérico f para denotar um modelo e uma FDP, o que pode acarretar, por vezes, algumas possíveis confusões. A contextualização neste Suplemento é diferente. Os conceitos de modelo, FDP e função distribuição são fundamentais para acompanhar e implementar a orientação fornecida. Portanto, em lugar dos símbolos f e F indicarem a FDP e a função distribuição, respectivamente, são utilizados os símbolos g e G . Estes símbolos são indexados adequadamente para indicar a grandeza em questão. O símbolo f é reservado para o modelo.

NOTA As definições na Cláusula 3 relacionadas a FDP e distribuições são apropriadamente adaptadas.

4.3 Neste Suplemento, uma FDP é atribuída a uma grandeza, que pode ser singular (escalar) X ou vetorial \mathbf{X} . No caso escalar, a FDP para X é denotada por $g_X(\xi)$, onde ξ é uma variável que descreve os possíveis valores de X , considerada uma variável aleatória com esperança $E(X)$ e variância $V(X)$ (ver 3.6 e 3.7).

4.4 No caso vetorial, a FDP para X é denotada por $g_X(\xi)$, onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ é uma variável vetorial que descreve os possíveis valores da grandeza vetorial X , considerada uma variável vetorial aleatória com esperança (vetorial) $E(X)$ e matriz de covariância $V(X)$.

4.5 Uma FDP para mais de uma grandeza de entrada é geralmente denominada conjunta mesmo se todas as grandezas de entrada são independentes.

4.6 Quando os elementos X_i de X são independentes, a FDP para X_i é denotada por $g_{X_i}(\xi_i)$.

4.7 A FDP para Y é denotada por $g_Y(\eta)$ e a função distribuição para Y por $G_Y(\eta)$.

4.8 No corpo deste Suplemento, uma grandeza é geralmente simbolizada por uma letra maiúscula e a esperança desta grandeza, ou uma estimativa da mesma, pela letra minúscula correspondente. Por exemplo, a esperança ou uma estimativa da grandeza Y seria denotada por y . Essa notação é bastante inapropriada para grandezas físicas, devido ao uso largamente estabelecido de alguns símbolos específicos, por exemplo, T para temperatura e t paratempo. Portanto, em alguns dos exemplos (Cláusula 9), uma notação diferente é usada. Neste caso, uma grandeza é denotada pelo seu símbolo convencional e sua esperança, ou sua estimativa, por esse mesmo símbolo com o sinal do acento circunflexo sobreposto. Por exemplo, na calibração de um bloco-padrão, a grandeza que representa o desvio de comprimento em relação ao seu comprimento nominal (ver 9.5) é denotada por δL , e a estimativa de δL por $\widehat{\delta L}$.

NOTA Um símbolo com o sinal do acento circunflexo sobreposto é geralmente usado na literatura estatística para indicar uma estimativa.

4.9 Neste Suplemento, o termo "lei de propagação de incertezas" aplica-se ao uso de uma aproximação da série de Taylor de primeira ordem para o modelo. O termo é qualificado apropriadamente quando uma aproximação de ordem superior é utilizada.

4.10 O subscrito "c" [GUM 5.1.1] para a incerteza-padrão combinada é redundante neste Suplemento. A incerteza-padrão associada a uma estimativa y de uma grandeza de saída Y pode, portanto, ser escrita como $u(y)$, mas o uso de $u_c(y)$ permanece aceitável se for útil enfatizar o fato de que ele representa uma incerteza-padrão combinada. O qualificador "combinada", neste contexto, também é considerado supérfluo e pode ser omitido: a presença de "y" em " $u(y)$ " já indica a estimativa com a qual a incerteza-padrão está associada. Além disso, quando os resultados de uma ou mais avaliações de incerteza se tornam insumos para uma avaliação de incerteza subsequente, o uso do subíndice "c" e o qualificador "combinada" tornam-se então inapropriados.

4.11 Os termos "intervalo de abrangência" e "probabilidade de abrangência" são usados ao longo deste Suplemento. O GUM usa o termo "nível da confiança" como sinônimo de probabilidade de abrangência, e estabelece uma distinção entre "nível de confiança" e "nível da confiança", porque o primeiro tem uma definição específica em estatística (ver NT 04). Uma vez que, em alguns idiomas, a tradução destes dois termos a partir do idioma inglês produz a mesma expressão, seu uso é evitado aqui.

4.12 De acordo com a Resolução 10 da 22ª CGPM (2003) "... o símbolo para o marcador decimal deve ser o ponto ou a vírgula...". O JCGM decidiu adotar, em seus documentos em Inglês, o ponto. Nesta tradução em português foi adotada a vírgula.

4.13 Salvo indicação contrária, números são expressos de forma a indicar o número de dígitos decimais significativos.

EXEMPLO Os números 0,060; 0,60; 6,0 e 60 são expressos com dois dígitos decimais significativos. Os números 0,06; 0,6; 6 e 6×10^1 são expressos com um dígito decimal significativo. Seria incorreto expressar o número 6×10^1 como 60, uma vez que estariam então implícitos dois dígitos decimais significativos.

4.14 Alguns símbolos têm mais de um significado neste Suplemento. Ver o Anexo G. O contexto esclarece o uso.

4.15 As seguintes abreviaturas são usadas neste Suplemento:

CGPM	Conferência Geral de Pesos e Medidas (<i>Conférence Générale des Poids et Mesures</i>)
IEEE	Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (<i>Institute of Electrical and Electronic Engineers</i>)
MIG	Metodologia de incerteza do GUM (<i>GUF - GUM uncertainty framework</i>)
JCGM	Comitê Conjunto para Guias em Metrologia (<i>Joint Committee for Guides in Metrology</i>)
GUM	Guia para a expressão da incerteza em medição (<i>Guide to the expression of uncertainty in measurement</i>)
MMC	Método de Monte Carlo (<i>MCM - Monte Carlo method</i>)
FDP	Função densidade de probabilidade (<i>PDF - probability density function</i>)
VIM	Vocabulário Internacional de Metrologia: Conceitos fundamentais e gerais e termos associados

5 Princípios básicos

5.1 Principais etapas da avaliação de incerteza

5.1.1 As principais etapas que compõem a avaliação de incerteza são formulação, propagação e resumo:

- a) Formulação:
 - 1) definir a grandeza de saída Y , a qual se pretende medir (o mensurando);
 - 2) determinar as grandezas de entrada $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ das quais Y depende;
 - 3) desenvolver um modelo relacionando Y a \mathbf{X} ;
 - 4) com base no conhecimento disponível, atribuir FDPs – gaussianas (normais), retangulares (uniformes), ou outras adequadas – para as entradas X_i . Atribuir, por outro lado, uma FDP conjunta às entradas X_i que não sejam independentes;
- b) Propagação: propagar as FDPs dos X_i por meio do modelo para se obter a FDP para Y ;
- c) Resumo: usar a FDP de Y para obter
 - 1) a esperança de Y , tomada como uma estimativa y da grandeza,
 - 2) o desvio-padrão de Y , tomado como a incerteza-padrão $u(y)$ associada com y [GUM E.3.2], e
 - 3) um intervalo de abrangência contendo Y com uma probabilidade especificada (a probabilidade de abrangência).

NOTA 1 A esperança pode não ser apropriada para todas as aplicações (ver [GUM 4.1.4]).

NOTA 2 Grandezas descritas por algumas distribuições, como a distribuição de Cauchy, não têm esperança ou desvio-padrão. No entanto, um intervalo de abrangência para a grandeza de saída pode sempre ser obtido.

5.1.2 A metodologia de incerteza do GUM não faz referência explícita à atribuição de FDPs às grandezas de entrada. No entanto [GUM 3.3.5], "... uma incerteza-padrão do Tipo A é obtida a partir de uma **função densidade de probabilidade** ... derivada de uma **distribuição de frequência observada** ..., enquanto que uma incerteza-padrão do Tipo B é obtida de uma função densidade de probabilidade assumida como conveniente e adequada com base no grau de credibilidade de que um evento irá ocorrer.... Ambos os enfoques empregam interpretações reconhecidas de probabilidade".

NOTA O uso de distribuições de probabilidade em uma avaliação de incerteza do Tipo B é uma característica da inferência bayesiana [21, 27]. Pesquisas continuam sendo realizadas [22] sobre os limites

de validade para a atribuição de número de graus de liberdade a uma incerteza-padrão baseada na fórmula de Welch-Satterthwaite.

5.1.3 Os passos na etapa de formulação são realizados pelo metrologista, com possível suporte especializado. Orientação sobre as atribuições de FDPs [passo 4) da etapa a) em 5.1.1] é fornecida neste Suplemento para alguns casos comuns (6.4). As etapas de propagação e resumo, b) e c) em 5.1.1, para as quais são aqui fornecidas orientações detalhadas, não requerem informações metrológicas adicionais e, em princípio, podem ser realizadas para qualquer tolerância numérica requerida para o problema especificado na etapa de formulação.

NOTA Uma vez realizada a etapa de formulação a) em 5.1.1, a FDP da grandeza de saída fica matematicamente especificada de forma completa, mas geralmente os cálculos da esperança, do desvio-padrão e dos intervalos de abrangência requerem métodos numéricos que envolvem algum grau de aproximação.

5.2 Propagação de distribuições

Neste Suplemento, apresenta-se uma abordagem geralmente eficiente para a determinação (de uma aproximação numérica) da seguinte função distribuição de Y

$$G_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} g_Y(z) dz$$

Ela é baseada na aplicação de um método de Monte Carlo (MMC) como uma implementação da propagação de distribuições (5.9).

NOTA Uma definição formal [9] para a FDP de Y é

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g_X(\xi) \delta(\eta - f(\xi)) d\xi_N \dots d\xi_1$$

onde $\delta(\cdot)$ denota a função delta de Dirac. Em geral, não se consegue uma solução analítica para essa integral múltipla. Uma regra de integração numérica pode ser aplicada para fornecer uma aproximação de $g_Y(\eta)$, mas esta não é uma abordagem eficiente.

5.3 Obtenção de informações do resumo

5.3.1 Uma estimativa y de Y é a esperança $E(Y)$. A incerteza-padrão $u(y)$ associada a y é dada pelo desvio-padrão de Y , a raiz quadrada positiva da variância $V(Y)$ de Y .

5.3.2 Um intervalo de abrangência para Y pode ser determinado a partir de $G_Y(\eta)$. Sendo α qualquer valor numérico entre zero e $1 - p$, onde p é a probabilidade de abrangência requerida, os pontos extremos de um intervalo de abrangência de $100p$ % para Y são $G_Y^{-1}(\alpha)$ e $G_Y^{-1}(p + \alpha)$, ou seja, os quantis de α e de $(p + \alpha)$ de $G_Y(\eta)$.

5.3.3 A escolha de $\alpha = (1 - p) / 2$ fornece o intervalo de abrangência definido pelos quantis $(1 - p) / 2$ e $(1 + p) / 2$, proporcionando um intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de $100p$ %.

NOTA Quando a FDP para Y é simétrica em relação à estimativa y , o intervalo de abrangência obtido seria idêntico a $y \pm U_p$, onde a incerteza expandida [GUM 2.3.5] U_p é dada pelo produto entre a incerteza-padrão $u(y)$ e o fator de abrangência apropriado para essa FDP. Esta FDP geralmente não é conhecida analiticamente.

5.3.4 Um valor numérico de α diferente de $(1 - p) / 2$ pode ser mais apropriado se a FDP for assimétrica. Neste caso pode ser usado o mínimo intervalo de abrangência de $100p$ %. Para uma FDP unimodal (de pico único), este intervalo possui a propriedade de conter a moda, ou seja, o valor mais provável de Y . Ele é obtido a partir do valor numérico de α que, se $g_Y(\eta)$ é unimodal, satisfaz $g_Y(G_Y^{-1}(\alpha)) = g_Y(G_Y^{-1}(p + \alpha))$ e, geralmente, a partir do valor numérico de α tal que $G_Y^{-1}(p + \alpha) - G_Y^{-1}(\alpha)$ é um mínimo.

5.3.5 O intervalo de abrangência de $100p$ % probabilisticamente simétrico e o mínimo intervalo de abrangência de $100p$ % são idênticos para uma FDP simétrica, como ocorre na distribuição gaussiana e na distribuição-t escalada e deslocada, usadas na metodologia de incerteza do GUM. Portanto, para uma comparação da metodologia de incerteza do GUM com outras abordagens, qualquer um desses intervalos pode ser usado.

5.3.6 A Figura 1 mostra a função distribuição $G_Y(\eta)$ correspondente a uma FDP assimétrica. As linhas verticais pontilhadas marcam os pontos extremos do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 %, e as linhas horizontais pontilhadas marcam os pontos de probabilidade correspondentes, 0,025 e 0,975. As linhas contínuas marcam os pontos extremos do mínimo intervalo de abrangência de 95 % e os pontos correspondentes de probabilidade, que são 0,006 e 0,956 neste caso. Os comprimentos dos intervalos de abrangência de 95 % são, nos dois casos, 1,76 e 1,69 unidades, respectivamente.

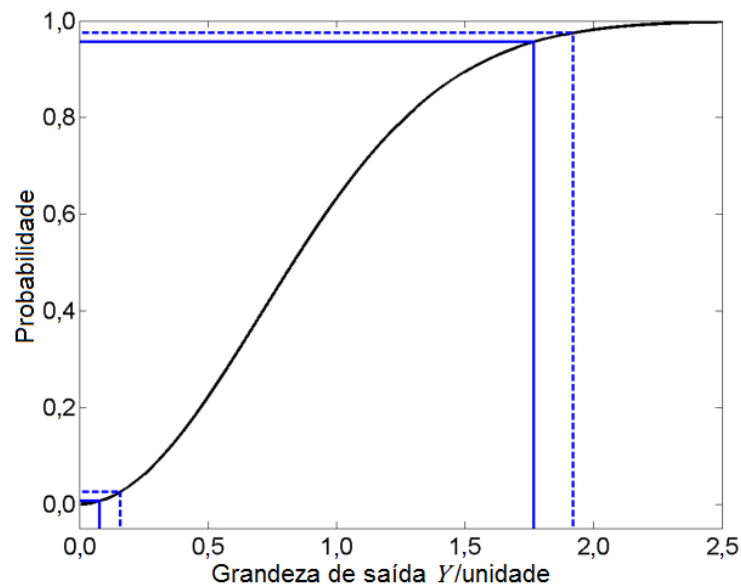


Figura 1 – Uma função distribuição $G_Y(\eta)$ correspondente a uma FDP assimétrica, mostrando os intervalos de abrangência: probabilisticamente simétrico e mínimo intervalo de abrangência para 95 % (5.3.6). “Unidade” denota qualquer unidade

5.4 Implementações da propagação de distribuições

5.4.1 A propagação de distribuições pode ser implementada de diversas formas:

- métodos analíticos, isto é, métodos que fornecem uma representação matemática da FDP para Y ;
- propagação de incertezas com base na substituição do modelo por uma aproximação da série Taylor de primeira ordem [GUM 5.1.2] - a lei de propagação de incertezas;
- como em b), exceto que as contribuições derivadas de termos de ordem superior na aproximação da série Taylor são incluídas [GUM 5.1.2 NOTA];
- métodos numéricos [GUM G.1.5] que implementam a propagação de distribuições, usando especificamente o MMC (ver 5.9).

NOTA 1 Métodos analíticos são ideais na medida em que não introduzem nenhuma aproximação. No entanto, são aplicáveis apenas em casos simples. Um tratamento e exemplos estão disponíveis [8, 13]. Esses métodos não serão mais considerados neste Suplemento, a não ser nos exemplos (Cláusula 9) para fins comparativos.

NOTA 2 O MMC como aqui tratado é considerado um meio para fornecer uma representação numérica da distribuição para a grandeza de saída, em vez de um método de simulação propriamente dito. No contexto da etapa de propagação da avaliação de incerteza, o problema a ser resolvido é determinístico, não havendo um processo físico aleatório a ser simulado.

5.4.2 Abordagens para avaliações de incertezas que não aquela do GUM são permitidas pelo Guia [GUM G.1.5]. A abordagem proposta neste Suplemento, baseada na propagação de distribuições, é geral. Para modelos lineares ou linearizados e grandezas de entrada para as quais as FDPs são gaussianas, a abordagem produz resultados consistentes com os da abordagem do GUM. No entanto, em casos nos quais as condições para a aplicação da metodologia de incerteza do GUM (ver 5.7 e 5.8) não são atendidas, a abordagem deste Suplemento leva geralmente a uma declaração de incerteza válida.

5.4.3 Para a etapa de propagação deve ser escolhido um método que seja o mais apropriado. Se for possível demonstrar que são aplicáveis as condições necessárias para que a metodologia de incerteza do GUM produza resultados válidos, então essa abordagem pode ser usada. Se houver indicações de que a metodologia de incerteza do GUM será provavelmente inválida, então outra abordagem deve ser empregada. Pode surgir uma terceira situação em que seja difícil avaliar se a metodologia de incerteza do GUM será ou não válida. Em todos os três casos, o MMC fornece um método prático (alternativo). No primeiro caso, o MMC às vezes pode ser mais fácil de aplicar devido, por exemplo, a dificuldades no cálculo dos coeficientes de sensibilidade [GUM 5.1.3]. No segundo, espera-se que o MMC geralmente forneça resultados válidos, uma vez que não faz hipóteses de aproximação. No terceiro, o MMC pode ser aplicado para determinar diretamente os resultados ou para avaliar a qualidade daqueles fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM.

5.4.4 A propagação das FDPs ($g_{X_i}(\xi_i)$, $i = 1, \dots, N$) das grandezas de entrada X_i com o uso do modelo, para fornecer a FDP $g_Y(\eta)$ para a grandeza de saída Y , está ilustrada na Figura 2 para três X_i independentes ($N = 3$). A Figura 2 pode ser comparada à Figura 3 para a lei de propagação de incertezas. Na Figura 2, as FDPs ($g_{X_i}(\xi_i)$, $i = 1, 2, 3$) são, respectivamente, gaussiana, triangular e gaussiana. A FDP de saída $g_Y(\eta)$ é indicada como sendo assimétrica, como geralmente ocorre para modelos não-lineares ou para entradas $g_{X_i}(\xi_i)$ assimétricas.

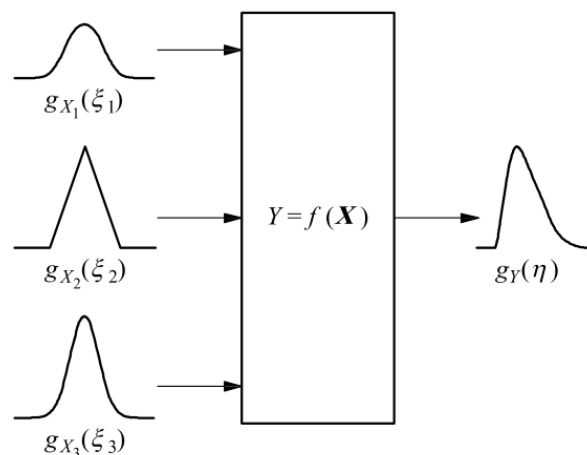


Figura 2 – Ilustração da propagação de distribuições para $N = 3$ grandezas de entrada independentes (5.4.4)

5.4.5 Na prática, apenas para casos simples a propagação de distribuições pode ser implementada sem se fazerem aproximações. Tanto a metodologia de incerteza do GUM como o MMC implementam métodos aproximados, embora de distintas naturezas. Para um pequeno, mas importante, subconjunto de problemas a metodologia de incerteza do GUM é exata. O MMC nunca é exato, mas, para uma grande classe de problemas, tem uma maior validade que a metodologia de incerteza do GUM.

5.5 Declarando os resultados

5.5.1 Os seguintes itens são normalmente declarados após a aplicação da propagação de distribuições:

- a) uma estimativa y da grandeza de saída Y ;
- b) a incerteza-padrão $u(y)$ associada a y ;
- c) a probabilidade de abrangência estipulada de $100p$ % (p.ex. 95 %);
- d) os pontos extremos do intervalo de abrangência de $100p$ % selecionado;
- e) qualquer outra informação relevante, tal como se o intervalo de abrangência é probabilisticamente simétrico ou um mínimo intervalo de abrangência.

5.5.2 y , $u(y)$ e os pontos extremos de um intervalo de abrangência de $100p$ % para Y devem ser reportados com um número de dígitos decimais de modo que o algarismo menos significativo esteja na mesma posição em relação ao ponto decimal apresentado em $u(y)$ [GUM 7.2.6]. Um ou dois algarismos significativos são geralmente adequados para representar $u(y)$.

NOTA 1 Cada um desses valores numéricos declarados é normalmente obtido arredondando-se um valor numérico originalmente expresso com um número maior de algarismos significativos.

NOTA 2 Um fator que influencia a escolha entre um e dois algarismos significativos é o valor do primeiro algarismo significativo de $u(y)$. Se este algarismo for 1 ou 2, será grande o desvio relatado do valor numérico de $u(y)$ com relação ao seu valor numérico antes do arredondamento. Se o primeiro algarismo significativo for 9, o desvio será relativamente menor.

NOTA 3 Se os resultados forem utilizados em cálculos posteriores, deve-se considerar a necessidade de manutenção de algarismos originais.

EXEMPLO Os resultados reportados correspondentes à declaração de dois algarismos significativos em $u(y)$, para um caso em que o intervalo de abrangência é assimétrico em relação a y , são

$$y = 1,024 \text{ V}, \quad u(y) = 0,028 \text{ V},$$

$$\text{mínimo intervalo de abrangência para } 95 \% = [0,983; 1,088] \text{ V}.$$

Os mesmos resultados, reportados com um algarismo significativo em $u(y)$, seriam

$$y = 1,02 \text{ V}, \quad u(y) = 0,03 \text{ V},$$

mínimo intervalo de abrangência para 95 % = [0,98; 1,09] V.

5.6 Metodologia de incerteza do GUM

5.6.1 O GUM fornece orientação geral sobre muitos aspectos das etapas de avaliação de incerteza apresentadas em 5.1.1. Provê também a metodologia de incerteza do GUM para as etapas de propagação e resumo da avaliação de incerteza. A metodologia de incerteza do GUM tem sido adotada por muitas organizações, é amplamente utilizada, e tem sido implementada em normas e em guias sobre incerteza de medição e também em *softwares*.

5.6.2 A metodologia de incerteza do GUM compreende as etapas que se seguem. Cada grandeza de entrada X_i do modelo é representada por sua esperança e por seu desvio-padrão, de acordo com a FDP para essa grandeza [GUM 4.1.6]. A esperança é tomada como a melhor estimativa x_i de X_i e o desvio-padrão como a incerteza-padrão $u(x_i)$ associada a x_i . Essa informação é propagada usando-se a lei de propagação de incertezas [GUM 5.1.2], por meio de uma aproximação da série de Taylor de primeira ordem (ou ordem superior) do modelo, para fornecer

- a) uma estimativa y da grandeza de saída Y , e
- b) a incerteza-padrão $u(y)$ associada a y .

A estimativa y é obtida avaliando-se o modelo para os valores x_i . Um intervalo de abrangência para Y é fornecido considerando-se a FDP de Y como gaussiana ou, se os graus de liberdade associados a $u(y)$ forem finitos [GUM Anexo G], como uma distribuição-t escalada e deslocada.

NOTA Quando da apresentação dos X_i incluem-se também, caso seja apropriado, os graus de liberdade associados aos $u(x_i)$ [GUM 4.2.6]. Incluem-se ainda, quando apropriado, covariâncias associadas a pares de x_i [GUM 5.2.5].

5.6.3 As etapas de propagação e resumo da metodologia de incerteza do GUM (etapas b) e c) em 5.1.1) constituem os passos computacionais a seguir. Veja também a Figura 3, que ilustra a lei de propagação de incertezas para um modelo com $N = 3$ grandezas de entrada independentes $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$, que são estimadas por x_i com incertezas-padrão associadas $u(x_i)$, $i = 1, 2, 3$. A grandeza de saída Y é estimada por y , com incerteza-padrão associada $u(y)$.

- a) Obter, das FDPs das grandezas de entrada $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$, as esperanças $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ e os desvios-padrão (incertezas-padrão) $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [u(x_1), \dots, u(x_N)]^T$. Se pares

dos X_i não forem independentes (caso em que suas covariâncias são diferentes de zero), deve-se usar a FDP conjunta de \mathbf{X} .

- b) Estabelecer o número de graus de liberdade (finito ou infinito) associado a cada $u(x_i)$.
- c) Para cada par i, j para o qual X_i e X_j não são independentes, obter a covariância (incerteza mútua) $u(x_i, x_j)$, associada a x_i e x_j a partir da FDP conjunta de X_i e X_j .
- d) Obter as derivadas parciais de primeira ordem de $f(\mathbf{X})$ em relação a \mathbf{X} .
- e) Calcular y , isto é, o modelo avaliado em \mathbf{X} igual a \mathbf{x} .
- f) Calcular os coeficientes de sensibilidade do modelo [GUM 5.1.3], sendo eles as derivadas parciais em \mathbf{x} avaliadas acima.
- g) Calcular a incerteza-padrão $u(y)$ combinando $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, os $u(x_i, x_j)$ e usando os coeficientes de sensibilidade do modelo [GUM Fórmulas (10), (13)].
- h) Calcular ν_{eff} , o número efetivo de graus de liberdade associado a $u(y)$, usando a fórmula de Welch-Satterthwaite [GUM Fórmula (G.2b)].
- i) Calcular a incerteza expandida U_p , e então um intervalo de abrangência (para uma probabilidade de abrangência estipulada p) para Y , considerada como uma variável aleatória, formando o múltiplo apropriado de $u(y)$ ao se tomar a distribuição de probabilidade de $(Y - y)/u(y)$ como uma distribuição gaussiana padrão ($\nu_{\text{eff}} = \infty$) ou distribuição-t ($\nu_{\text{eff}} < \infty$).

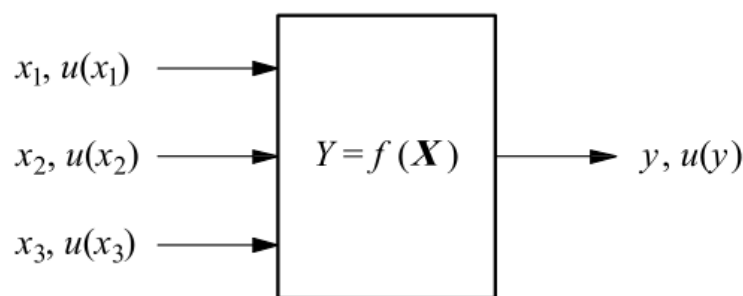


Figura 3 – Ilustração da lei de propagação de incertezas para $N = 3$ grandezas de entrada independentes (5.4.4 e 5.6.3).

5.7 Condições para aplicação válida da metodologia de incerteza do GUM para modelos lineares

5.7.1 Nenhuma condição é necessária para a aplicação válida da lei de propagação de incertezas a modelos lineares (modelos que são lineares nos X_i).

5.7.2 De acordo com a informação fornecida no GUM, um intervalo de abrangência pode ser determinado nas seguintes condições:

- a) a equação de Welch-Satterthwaite é adequada para calcular o número de graus de liberdade efetivos associado a $u(y)$ [GUM G.4.1] quando um ou mais dos $u(x_i)$ têm um número de graus de liberdade associado finito;
- b) os X_i são independentes, nos casos em que os números de graus de liberdade associados aos $u(x_i)$ são finitos;
- c) a FDP de Y pode ser aproximada adequadamente por uma distribuição gaussiana ou por uma distribuição-t escalada e deslocada.

NOTA 1 A condição a) é necessária para que Y possa ser caracterizada por uma distribuição-t escalada e deslocada apropriada.

NOTA 2 A condição b) é necessária porque o GUM não trata X_i que não sejam independentes em conjunto com graus de liberdade finitos.

NOTA 3 A condição c) é satisfeita quando a cada X_i está associada uma distribuição gaussiana. É satisfeita também quando as condições para o teorema do limite central [GUM G.2] são válidas.

NOTA 4 A metodologia de incerteza do GUM pode não ser válida quando houver um X_i com distribuição atribuída não gaussiana e cuja contribuição para $u(y)$ seja dominante.

5.7.3 Quando as condições em 5.7.2 são válidas, espera-se que os resultados da aplicação da metodologia de incerteza do GUM sejam válidos para modelos lineares. Essas condições se aplicam em muitas circunstâncias.

5.8 Condições para aplicação válida da metodologia de incerteza do GUM para modelos não-lineares

5.8.1 A lei de propagação de incertezas pode ser aplicada de forma válida para modelos não-lineares nas seguintes condições:

- a) f é continuamente diferenciável em relação aos elementos X_i de \mathbf{X} na vizinhança das melhores estimativas x_i dos X_i ;
- b) a condição a) aplica-se a todas as derivadas até a ordem apropriada;
- c) os X_i envolvidos em termos de ordem superior significativos de uma aproximação de série de Taylor para $f(\mathbf{X})$ são independentes;
- d) as FDPs atribuídas aos X_i envolvidos em termos de ordem superior de uma aproximação da série Taylor para $f(\mathbf{X})$ são gaussianas;
- e) os termos de ordem superior que não estão incluídos na aproximação da série de Taylor para $f(\mathbf{X})$ são insignificantes.

NOTA 1 A condição a) é necessária para a aplicação da lei de propagação de incertezas com base em uma aproximação da série de Taylor de primeira ordem para $f(\mathbf{X})$ quando a não-linearidade de f é insignificante [GUM 5.1.2].

NOTA 2 A condição b) é necessária para a aplicação da lei de propagação de incertezas com base em uma aproximação da série de Taylor de ordem superior para $f(\mathbf{X})$ [GUM 5.1.2]. Uma expressão para os termos mais importantes de ordem superior subsequente a ser incluída é fornecida no GUM [GUM 5.1.2 NOTA].

NOTA 3 A condição c) refere-se à declaração contida no GUM [GUM 5.1.2 NOTA] relativa a uma significante não-linearidade do modelo no caso de X_i independentes. Neste contexto, o GUM não considera X_i que não sejam independentes.

NOTA 4 A condição d) constitui uma correção para a declaração contida no GUM [GUM 5.1.2 NOTA] de que a versão da lei de propagação de incertezas usando termos de ordem superior se baseia na simetria das FDPs para os X_i [19, 27].

NOTA 5 Se a determinação analítica das derivadas superiores, exigidas quando a não-linearidade do modelo é significativa, é difícil ou propensa a erros, um *software* adequado para diferenciação automática pode ser utilizado. Alternativamente, estas derivadas podem ser aproximadas numericamente usando-se diferenças finitas [5]. (O GUM fornece uma fórmula de diferença finita para derivadas parciais de primeira ordem [GUM 5.1.3 NOTA 2].) Contudo, deve-se tomar cuidado quanto aos efeitos de cancelamento subtrativo quando se formam diferenças entre valores do modelo que sejam numericamente próximos.

5.8.2 Um intervalo de abrangência pode ser determinado, em termos das informações fornecidas no GUM, quando as condições a), b) e c) em 5.7.2 se aplicam, com a ressalva de que o conteúdo da NOTA 3 nesse mesmo subitem seja substituído por “A condição c) é necessária para que os intervalos de abrangência possam ser determinados a partir dessas distribuições”.

5.8.3 Quando as condições em 5.8.1 e 5.8.2 são válidas, é de se esperar que os resultados da aplicação da metodologia de incerteza do GUM sejam válidos para modelos não-lineares. Essas condições se aplicam em muitas circunstâncias.

5.9 Abordagem de Monte Carlo nas etapas de propagação e resumo

5.9.1 O MMC fornece uma abordagem geral para se obter uma representação numérica aproximada \mathbf{G} , digamos, da função distribuição $G_Y(\eta)$ para Y [32, p. 75]. A essência da abordagem é a realização de repetidas amostragens das FDPs para os X_i e a avaliação numérica do modelo em cada caso.

5.9.2 Uma vez que $G_Y(\eta)$ codifica todas as informações conhecidas sobre Y , qualquer propriedade de Y , como esperança, variância e intervalos de abrangência, pode ser obtida aproximadamente usando-se \mathbf{G} . A qualidade desses possíveis resultados calculados melhora com o aumento do número de vezes que as FDPs são amostradas.

5.9.3 Esperanças e variâncias, e momentos superiores, podem ser determinados diretamente a partir do conjunto de valores obtidos do modelo. A determinação de intervalos de abrangência exige que esses valores do modelo sejam ordenados.

5.9.4 Se y_r , para $r = 1, \dots, M$, representam M valores de modelo de uma distribuição de probabilidade para Y , independentemente amostrados, então a esperança $E(Y)$ e a variância $V(Y)$ podem ser aproximadamente obtidas usando os y_r . Em geral, os momentos de Y [incluindo $E(Y)$ e $V(Y)$] são aproximados por aqueles valores de modelo amostrados. Considere que M_{y_0} indica o número de valores de y_r que não são maiores que y_0 , sendo este qualquer número prescrito. A probabilidade $\Pr(Y \leq y_0)$ é aproximada por M_{y_0}/M . Desta forma, os y_r fornecem uma aproximação de função degrau (tipo histograma) para a função distribuição $G_Y(\eta)$.

5.9.5 Cada y_r é obtido pela amostragem aleatória a partir de cada uma das FDPs para os X_i e pela avaliação do modelo nos valores amostrados assim obtidos. \mathbf{G} , a saída primária do MMC, constitui os y_r organizados em ordem estritamente crescente.

NOTA É remota a possibilidade de que existam igualdades entre os y_r . Caso isso ocorra, pequenas perturbações adequadas feitas nos y_r permitiriam que os y_r fossem organizados em ordem estritamente crescente. Ver 7.5.1.

5.9.6 O MMC como uma implementação da propagação de distribuições é mostrado esquematicamente na Figura 4 para um valor de M previamente escolhido (ver 7.9 para um procedimento alternativo). O MMC pode ser descrito como um procedimento passo-a-passo:

- a) selecionar o número M de iterações de Monte Carlo a serem executadas. Ver 7.2;
- b) gerar M vetores, por amostragem das FDPs associadas, como realizações das (N) grandezas de entrada X_i . Ver 7.3;
- c) para cada vetor, calcular o valor de modelo correspondente Y , obtendo-se M valores de modelo. Ver 7.4;
- d) organizar estes M valores em ordem estritamente crescente, usando os valores organizados para gerar G . Ver 7.5;
- e) usar G para formar uma estimativa y de Y e uma incerteza-padrão $u(y)$ associada a y . Ver 7.6;
- f) usar G para formar um intervalo de abrangência apropriado para Y , para uma probabilidade de abrangência p estipulada. Ver 7.7.

NOTA 1 O subitem 6.4 e o anexo C fornecem informações sobre a amostragem a partir de distribuições de probabilidade.

NOTA 2 Matematicamente, a média dos M valores de modelo é uma realização de uma variável aleatória com esperança $E(Y)$ e variância $V(Y)/M$. Assim, espera-se que o grau de concordância entre essa média e $E(Y)$ seja proporcional a $M^{-1/2}$.

NOTA 3 O passo e) pode ser equivalentemente executado usando os M valores de modelo não organizados. É necessário organizar estes valores de modelo para determinar o intervalo de abrangência no passo f).

5.9.7 A efetividade do MMC na determinação de y , $u(y)$ e do intervalo de abrangência para Y depende do uso de um valor adequadamente grande de M (passo a) em 5.9.6). Orientações para a obtenção de tais valores e, de forma geral, para a implementação do MMC, estão disponíveis em [7]. Ver também 7.2 e 7.9.

5.10 Condições para aplicação válida do método de Monte Carlo descrito

5.10.1 A propagação de distribuições implementada pelo uso do MMC pode ser validamente aplicada, e as informações requeridas no resumo subsequentemente determinadas, usando a abordagem fornecida neste Suplemento, sob as seguintes condições:

- a) f é contínua com respeito aos elementos X_i de \mathbf{X} na vizinhança das melhores estimativas x_i de X_i ;
- b) a função distribuição para Y é contínua e estritamente crescente;
- c) a FDP para Y é
 - 1) contínua ao longo do intervalo para o qual esta FDP é estritamente positiva,
 - 2) unimodal (de pico único), e
 - 3) estritamente crescente (ou zero) à esquerda da moda e estritamente decrescente (ou zero) à direita da moda;
- d) $E(Y)$ e $V(Y)$ existem;
- e) é usado um valor suficientemente grande de M .

NOTA 1 Com relação à condição a), nenhuma condição para as derivadas de f é necessária.

NOTA 2 As condições a) e b) são necessárias para assegurar que a inversa da função distribuição seja única e, portanto, intervalos de abrangência possam ser determinados. Somente a condição a) é necessária se um intervalo de abrangência não é requerido.

NOTA 3 A condição c) é necessária somente quando o mínimo intervalo de abrangência deve ser determinado. Neste caso, a condição é necessária para assegurar que o mínimo intervalo de abrangência correspondente a uma probabilidade de abrangência estipulada seja único. A moda pode ocorrer num ponto extremo do intervalo no qual essa FDP é estritamente positiva, caso em que uma das duas condições em 3) é irrelevante.

NOTA 4 A condição d) é necessária para convergência (estocástica) do MMC quando se aumenta o número M de iterações (ver 7.2).

NOTA 5 A condição e) é necessária para assegurar que as informações do resumo sejam confiáveis. Ver 8.2.

5.10.2 Quando as condições em 5.10.1 se aplicam, espera-se que os resultados da aplicação da propagação de distribuições implementada em termos do MMC sejam válidos. Essas condições são menos restritivas que aquelas (ver 5.7 e 5.8) para aplicação da metodologia de incerteza do GUM.

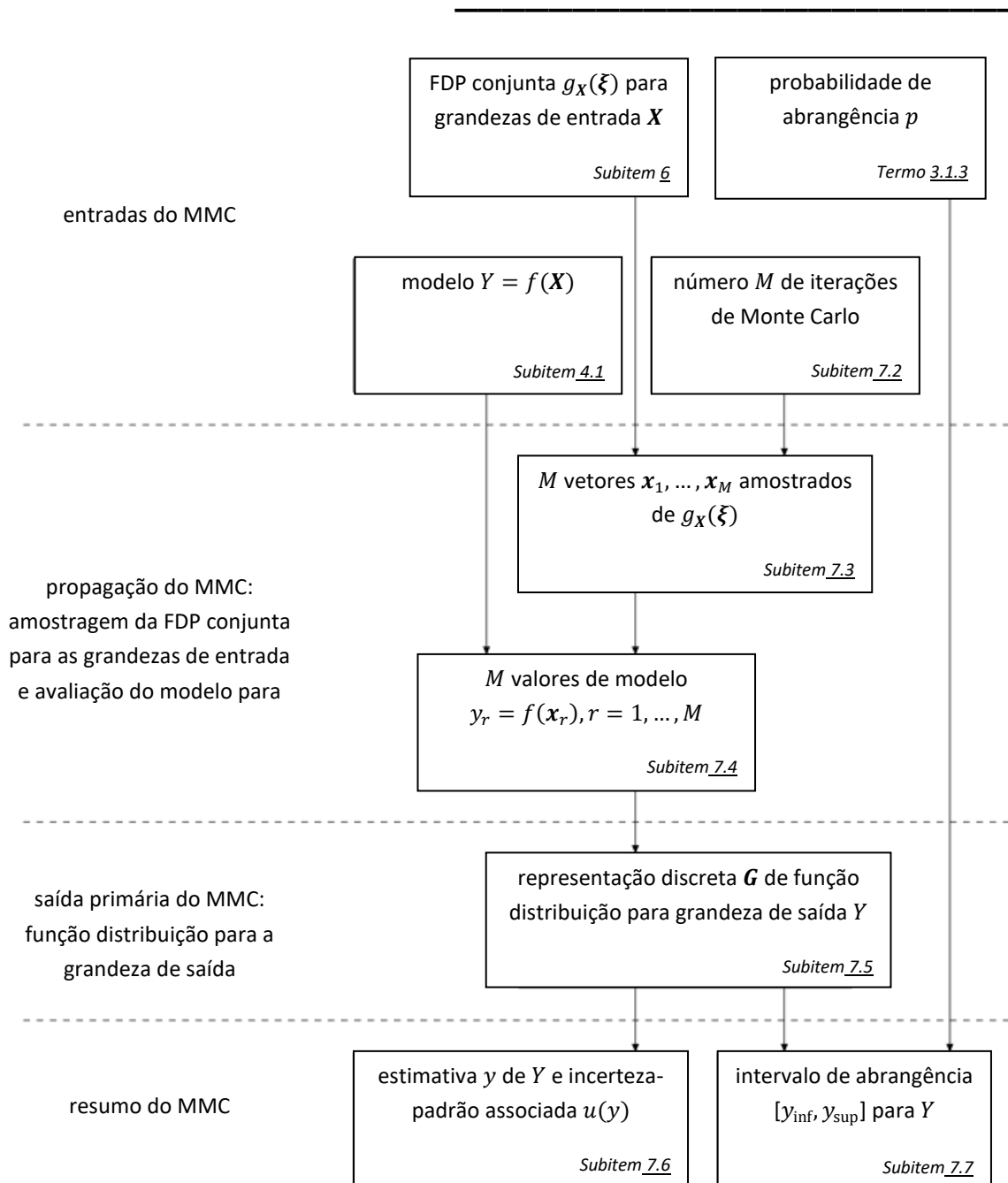


Figura 4 – Etapas de propagação e resumo de avaliação de incerteza usando o MMC para implementar a propagação de distribuições (5.9.6, 7.1)

5.11 Comparação entre a metodologia de incerteza do GUM e o método de Monte Carlo aqui descrito

5.11.1 A finalidade deste subitem é comparar os princípios nos quais estão baseados a metodologia de incerteza do GUM e o MMC como uma implementação da propagação de distribuições. Este subitem incentiva também o uso do MMC em circunstâncias em que é questionável se é válida a aplicação da metodologia de incerteza do GUM.

5.11.2 Para fins de comparação entre a metodologia de incerteza do GUM e o MMC, é útil rever as considerações do GUM com relação a avaliações de incerteza do Tipo A e do Tipo B. Quanto a avaliações do Tipo A, o GUM fornece orientação para obtenção da melhor estimativa de uma grandeza e de sua incerteza-padrão associada por meio da média e de seu desvio-padrão associado, obtidos de um conjunto de indicações independentes da grandeza. Para avaliações do Tipo B, é usado conhecimento prévio sobre a grandeza para caracterizá-la por uma FDP, a partir da qual uma melhor estimativa e sua incerteza-padrão associada são determinadas. O GUM declara que ambos os tipos de avaliação são baseados em distribuições de probabilidades [GUM 3.3.4], e que ambas abordagens empregam interpretações de probabilidade bem reconhecidas [GUM 3.3.5]. As FDPs são consideradas pelo GUM como apoio para a avaliação de incerteza: no contexto da lei de propagação de incertezas, o Guia refere-se explicitamente às grandezas de entrada e saída como sendo descritas ou caracterizadas por distribuições de probabilidade [GUM G.6.6]. Ver também 5.1.2.

5.11.3 A metodologia de incerteza do GUM não determina explicitamente uma FDP para a grandeza de saída. No entanto, a distribuição de probabilidade usada por essa metodologia para caracterizar a grandeza de saída é algumas vezes referida, neste Suplemento, como “fornecida pela” ou “resultante da” metodologia de incerteza do GUM.

5.11.4 Esse Suplemento tenta fornecer uma abordagem que seja tão consistente com o GUM quanto possível, especialmente com relação ao uso de FDPs para todas as grandezas, mas, quando apropriado, diverge dessa abordagem de uma forma claramente identificada. Essas divergências são:

- a) FDPs são explicitamente atribuídas a todas as grandezas de entrada X_i (em vez de associarem-se incertezas-padrão a estimativas x_i de X_i) com base nas informações concernentes a essas grandezas. A classificação em avaliações de incerteza do Tipo A e Tipo B não é necessária;
- b) coeficientes de sensibilidade [GUM 5.1.3] não são uma parte inerente da abordagem (do MMC), e assim o cálculo ou a aproximação numérica das derivadas parciais do modelo com relação aos X_i não são necessários. No entanto, aproximações para os coeficientes de sensibilidade podem ser fornecidas, o que corresponde a se levar em conta todos os termos de maior ordem na expansão da série de Taylor do modelo (anexo B);
- c) uma representação numérica da função distribuição para Y , definida completamente pelo modelo e pelas FDPs para os X_i , é obtida, não se restringindo, no entanto, a uma distribuição gaussiana ou a uma distribuição-t escalada e deslocada;
- d) como a FDP para Y não é geralmente simétrica, um intervalo de abrangência para Y não é necessariamente centrado na estimativa de Y . Desta forma, é necessária uma cuidadosa

avaliação quando da escolha do intervalo de abrangência correspondente a uma probabilidade de abrangência especificada.

5.11.5 Uma vez que a metodologia de incerteza do GUM usa explicitamente somente as melhores estimativas x_i e as incertezas associadas (e covariâncias e números de graus de liberdade, quando apropriado), ela fica restringida na informação que pode fornecer sobre Y . Limita-se, essencialmente, a fornecer uma estimativa y de Y e a incerteza-padrão $u(y)$ associada com y e, talvez, o número (efetivo) de graus de liberdade correspondente. y e $u(y)$ serão válidos para um modelo que é linear em X . Qualquer outra informação sobre Y , por exemplo, intervalos de abrangência, é obtida usando-se pressupostos adicionais como, por exemplo, que a distribuição para Y é gaussiana ou é uma distribuição-t escalada e deslocada.

5.11.6 Algumas características do MMC são

- a) redução do esforço de análise requerido para modelos complicados ou não-lineares, especialmente porque as derivadas parciais dos termos de primeira ordem ou superior, usados na obtenção dos coeficientes de sensibilidade para a lei de propagação de incertezas, não são necessárias,
- b) estimativa geralmente melhorada de Y para modelos não-lineares (cf. [GUM 4.1.4]),
- c) melhor avaliação da incerteza-padrão associada com a estimativa de Y para modelos não-lineares, especialmente quando FDPs não gaussianas (e.g. assimétricas) são atribuídas aos X_i , sem haver necessidade de calcular derivadas de ordem superior [GUM 5.1.2 NOTA],
- d) provimento de um intervalo de abrangência correspondente a uma probabilidade de abrangência estipulada quando a FDP para Y não pode ser adequadamente aproximada por uma distribuição gaussiana ou uma distribuição-t escalada e deslocada, ou seja, quando o teorema central do limite não se aplica [GUM G.2.1, G.6.6]. Tal aproximação inadequada pode surgir quando (1) a FDP associada a um X_i dominante não é uma distribuição gaussiana ou uma distribuição-t escalada e deslocada, (2) o modelo é não-linear, ou (3) o erro de aproximação que decorre do uso da equação de Welch-Satterthwaite para determinação do número de graus de liberdade efetivos não é desprezível, e
- e) não há necessidade de um fator de abrangência [GUM 2.3.6] para a determinação de um intervalo de abrangência.

6 Funções densidade de probabilidade para as grandezas de entrada

6.1 Generalidades

6.1.1 Este item fornece, em algumas ocorrências bastante comuns, orientação para a atribuição de FDPs às grandezas de entrada X_i na etapa de formulação da avaliação de incerteza. Essa é uma tarefa que pode ser realizada com base no teorema de Bayes [20] ou no princípio de máxima entropia. [8, 26, 51, 56].

NOTA Em certas circunstâncias, alguma outra abordagem pode ser útil para a atribuição de uma FDP. Em qualquer caso, como em toda matéria científica, a razão que levou à tomada da decisão deve ser registrada.

6.1.2 Geralmente, uma FDP conjunta $g_X(\xi)$ é atribuída às grandezas de entrada $X = (X_1, \dots, X_N)^T$. Ver 6.4.8.4 NOTA 2.

6.1.3 Quando os X_i são independentes, FDPs $g_{X_i}(\xi_i)$ são-lhes atribuídas individualmente com base em uma análise de uma série de indicações (avaliação de incerteza do Tipo A) ou em julgamento científico usando outras informações [50], tais como dados históricos, calibrações, e julgamento de especialistas (avaliação de incerteza do Tipo B) [GUM 3.3.5].

6.1.4 Quando alguns dos X_i são mutuamente independentes, FDPs são-lhes atribuídas individualmente e, para os demais, é atribuída uma FDP conjunta.

NOTA Pode ser possível remover algumas ou todas as dependências reescrevendo grandezas de entrada relevantes em termos de grandezas de entrada independentes mais fundamentais das quais as grandezas de entrada originais dependem [GUM F.1.2.4, H.1.2]. Tais alterações podem simplificar tanto a aplicação da lei de propagação de incertezas quanto a aplicação da propagação de distribuições. Detalhes e exemplos estão disponíveis em [15].

6.1.5 Informação relevante para a atribuição de FDPs aos X_i está disponível [GUM 4.3].

6.1.6 Orientação completa para atribuição de FDPs individuais ou conjuntas para os X_i está além do escopo deste Suplemento. As FDPs atribuídas retratam o conhecimento e a expertise do metrologista que formula o modelo, configurando-se como principal responsável pela qualidade dos resultados finais.

6.1.7 Um texto padrão sobre distribuições de probabilidade encontra-se em Evans, Hastings e Peacock [18].

6.2 Teorema de Bayes

6.2.1 Suponha-se que a informação sobre uma grandeza de entrada X consiste de uma série de indicações consideradas como realizações de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, caracterizadas por uma FDP especificada, porém com esperança e variância desconhecidas. O teorema de Bayes pode ser usado para calcular uma FDP para X , onde X é considerado como sendo igual à média desconhecida dessas variáveis aleatórias. O cálculo se processa em duas etapas. Primeiro, uma FDP não-informativa conjunta prévia (pré-dados) é atribuída à esperança e à variância desconhecidas. Usando o teorema de Bayes, essa FDP conjunta anterior é então atualizada, baseada na informação provida pela série de indicações, para fornecer uma FDP posterior (pós-dados) para os dois parâmetros desconhecidos. A FDP posterior desejada para a média desconhecida é então calculada como uma FDP marginal pela integração sobre os valores possíveis das variâncias desconhecidas (ver [6.4.9.2](#)).

6.2.2 Com o uso do teorema de Bayes, a atualização é realizada pela formação do produto de uma função de verossimilhança com a FDP prévia [20]. A função de verossimilhança, no caso de indicações obtidas independentemente, é o produto de funções, uma função para cada indicação e idêntica em forma, por exemplo, a uma FDP gaussiana. A FDP posterior é então determinada pela integração do produto da FDP prévia com a verossimilhança em todos os valores possíveis da variância e normalizando-se a expressão resultante.

NOTA 1 Em alguns casos (e.g. como em [6.4.11](#)), as variáveis aleatórias, cujas indicações são consideradas como realizações, são caracterizadas por uma FDP com parâmetro único. Em tais casos, uma FDP prévia não-informativa é atribuída à esperança desconhecida das variáveis aleatórias, e a distribuição posterior para X é dada diretamente pelo teorema de Bayes, sem a necessidade de FDPs marginais.

NOTA 2 O teorema de Bayes pode também ser aplicado em outras circunstâncias, por exemplo, quando a esperança e o desvio-padrão são desconhecidos e iguais.

6.3 Princípio de máxima entropia

6.3.1 Quando se usa o princípio de máxima entropia, introduzido por Jaynes [25], uma única FDP é selecionada entre todas as FDPs possíveis com propriedades especificadas, e.g. momentos centrais especificados de ordens diferentes ou intervalos especificados em que a FDP é diferente de zero. Este método é particularmente útil para atribuir FDPs a grandezas em que uma série de indicações não está disponível ou a grandezas que não tenham sido explicitamente medidas.

6.3.2 Na aplicação do princípio de máxima entropia para obtenção de uma FDP $g_x(\xi)$ que, considerando a informação disponível, caracterize adequadamente um conhecimento incompleto sobre a grandeza X , a integral

$$S[g] = - \int g_x(\xi) \ln g_x(\xi) d\xi,$$

que define a “entropia de informação”, introduzida por Shannon [48], é maximizada considerando restrições impostas pela informação.

6.4 Atribuição de função densidade de probabilidade em algumas circunstâncias comuns

6.4.1 Generalidades

Os subitens 6.4.2 a 6.4.11 tratam da atribuição de FDPs a grandezas com base em vários tipos de informação disponíveis sobre as mesmas. São dados, para cada FDP $g_X(\xi)$,

- a) fórmulas para a esperança e a variância de X , e
- b) como proceder para realizar amostragens de $g_X(\xi)$.

A Tabela 1 facilita o uso desses subitens e também ilustra as FDPs correspondentes.

NOTA Essas ilustrações das FDPs não estão desenhadas em escala. A FDP gaussiana multivariada não está ilustrada.

6.4.2 Distribuições retangulares

6.4.2.1 Se a única informação disponível a respeito de uma grandeza X é um limite inferior a e um limite superior b , com $a < b$, então, de acordo com o princípio de máxima entropia, uma distribuição retangular $R(a, b)$ no intervalo $[a, b]$ deve ser atribuída a X .

6.4.2.2 A FDP para X é

$$g_X(\xi) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq \xi \leq b, \\ 0, & \text{outros valores de } \xi. \end{cases}$$

6.4.2.3 A esperança e a variância de X são

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2)$$

6.4.2.4 Para realizar uma amostragem a partir de $R(a, b)$ tome aleatoriamente valores r provenientes da distribuição retangular padronizada $R(0,1)$ (ver C.3.3) e obtenha

$$\xi = a + (b-a)r.$$

6.4.3 Distribuições retangulares com limites prescritos não exatos

6.4.3.1 Sabe-se que uma grandeza X situa-se entre os limites A e B com $A < B$, que o ponto médio $(A + B)/2$ do intervalo definido por esses limites é fixo, e que o comprimento $B - A$ do intervalo não é exatamente conhecido. Sabe-se também que A está no intervalo $a \pm d$ e B no intervalo $b \pm d$, sendo a, b e d especificados, com $d > 0$ e $a + d < b - d$. Se nenhuma outra informação a respeito de X , A e B está disponível, o princípio de máxima entropia pode ser aplicado para atribuir a X um “trapezoide curvilíneo” (uma distribuição retangular com limites prescritos não exatos).

6.4.3.2 A FDP para X é












$$g_X(\xi) = \frac{1}{4d} \begin{cases} \ln \left[\frac{w+d}{x-\xi} \right], & a-d \leq \xi \leq a+d, \\ \ln \left[\frac{w+d}{w-d} \right], & a+d < \xi < b-d, \\ \ln \left[\frac{w+d}{\xi-x} \right], & b-d \leq \xi \leq b+d, \\ 0, & \text{outros valores de } \xi, \end{cases} \quad (3)$$

onde $x = (a + b)/2$ e $w = (b - a)/2$ são, respectivamente, o ponto médio e a semi-largura do intervalo $[a, b]$ [GUM 4.3.9 NOTA 2]. Essa FDP é semelhante a uma FDP trapezoidal, porém possui lados que não são linhas retas.

NOTA Para implementação computacional, a fórmula (3) pode ser expressa como

$$g_X(\xi) = \frac{1}{4d} \max \left(\ln \frac{w+d}{\max(|\xi-x|, w-d)}, 0 \right).$$

Tabela 1 – Informação disponível e a FDP atribuída com base nessa informação (6.4.1, C.1.2)

Informação disponível	FDP atribuída e ilustração (escala arbitrária)	Subitem
Limites inferior e superior a, b	Retangular: $R(a, b)$ 	<u>6.4.2</u>
Limites inferior e superior não exatos $a \pm d, b \pm d$	Trapezoide curvilíneo: CTrap(a, b, d) 	<u>6.4.3</u>
Soma de duas grandezas com distribuições retangulares atribuídas com limites inferiores a_1, b_1 e limites superiores a_2, b_2	Trapezoidal: Trap(a, b, β) com $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $\beta = (b_1 - a_1) - (b_2 - a_2) / (b - a)$ 	<u>6.4.4</u>
Soma de duas grandezas com distribuições retangulares atribuídas com limites inferiores a_1, b_1 e superiores a_2, b_2 e mesma semi-largura ($b_1 - a_1 = b_2 - a_2$)	Triangular: T(a, b) com $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ 	<u>6.4.5</u>
Sinusoidal entre limites inferior e superior a, b	Arco seno (formato de U): U(a, b) 	<u>6.4.6</u>
Melhor estimativa x e incerteza-padrão associada $u(x)$	Gaussiana: N($x, u^2(x)$) 	<u>6.4.7</u>
Melhor estimativa x de uma grandeza vetorial e matriz de incerteza associada U_x	Gaussiana multivariada: N(x, U_x) 	<u>6.4.8</u>
Séries de indicações x_1, \dots, x_n amostradas independentemente de uma grandeza com distribuição gaussiana e esperança e variância desconhecidas	Distribuição-t escalada e deslocada: $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n)$, com $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$, $s_2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)$ 	<u>6.4.9.2</u>
Melhor estimativa x , incerteza expandida U_p , fator de abrangência k_p e número efetivo de graus de liberdade ν_{eff}	Distribuição-t escalada e deslocada: $t_{\nu_{\text{eff}}}(x, (U_p/k_p)^2)$ 	<u>6.4.9.7</u>
Melhor estimativa x de uma grandeza não-negativa	Exponencial: Ex($1/x$) 	<u>6.4.10</u>
Número q de objetos contados	Gama: G($q + 1, 1$) 	<u>6.4.11</u>

6.4.3.3 A esperança e a variância de X são

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{d^2}{9}. \quad (4)$$

NOTA 1 A variância, na expressão (4), é sempre maior do que a variância para o caso de limites exatos na expressão (2), isto é, quando $d = 0$.

NOTA 2 O GUM trata a informação acerca de X em 6.4.3.1 atribuindo um número efetivo de graus de liberdade para a incerteza-padrão associada à melhor estimativa de X [GUM G.4.2].

6.4.3.4 Para amostrar a partir de $\text{CTrap}(a, b, d)$ tome, aleatória e independentemente, dois valores r_1 e r_2 provenientes de uma distribuição retangular padrão $R(0,1)$ (ver C.3.3), e obtenha

$$a_s = (a - d) + 2dr_1, \quad b_s = (a + b) - a_s,$$

e

$$\xi = a_s + (b_s - a_s)r_2.$$

NOTA a_s é um valor amostral de uma distribuição retangular com limites $a \pm d$. b_s é então obtido para assegurar que o ponto médio entre a_s e b_s seja o valor $x = (a + b)/2$ prescrito.

EXEMPLO Um certificado declara que uma tensão elétrica X está no intervalo de $10,0 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$. Nenhuma outra informação a respeito de X está disponível, exceto que se acredita que as magnitudes dos pontos extremos do intervalo resultam do correto arredondamento de um determinado valor numérico (ver 3.20). Com base nisso, esse valor numérico situa-se entre $0,05 \text{ V}$ e $0,15 \text{ V}$, uma vez que o valor numérico de cada ponto no intervalo $(0,05, 0,15)$, arredondado para um algarismo decimal significativo, é $0,1$. A localização do intervalo pode, portanto, ser considerada fixa, embora sua largura não seja exata. A melhor estimativa de X é $x = 10 \text{ V}$ e, usando-se a expressão (4), considerando $a = 9,9 \text{ V}$, $b = 10,1 \text{ V}$ e $d = 0,05 \text{ V}$, a incerteza-padrão associada a $u(x)$ é dada por

$$u^2(x) = \frac{(0,2)^2}{12} + \frac{(0,05)^2}{9} = 0,003 \text{ 6}.$$

Assim, $u(x) = (0,003 \text{ 6})^{1/2} = 0,060 \text{ V}$, que, no caso de limites exatos, pode ser comparado com $0,2/\sqrt{12} = 0,058 \text{ V}$, quando se utiliza d igual a zero. O uso de limites exatos neste caso fornece um valor numérico para $u(x)$ que é 4% menor do que quando se usam limites não exatos. A relevância de tal diferença precisa ser considerada no contexto da aplicação.

6.4.4 Distribuições Trapezoidais

6.4.4.1 A atribuição de uma distribuição simétrica trapezoidal a uma grandeza é discutida em [GUM 4.3.9]. Suponha que uma grandeza X seja definida como a soma de duas grandezas independentes X_1 e X_2 . Suponha também que, para $i = 1$ e $i = 2$, seja atribuída a X_i uma

distribuição retangular $R(a_i, b_i)$ com limite inferior a_i e limite superior b_i . Então, a distribuição $\text{Trap}(a, b, \beta)$ para X é uma distribuição-trapezoidal simétrica com limite inferior a , limite superior b e um parâmetro β igual à razão entre as semi-larguras do topo e da base do trapezoide. Os parâmetros dessa distribuição-trapezoidal estão relacionados aos parâmetros da distribuição retangular por

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \quad \beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (5)$$

onde

$$\lambda_1 = \frac{|(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)|}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{b - a}{2}, \quad (6)$$

e

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2.$$

6.4.4.2 A FDP para X (Figura 5), obtida usando-se convolução [42, p. 93], é

$$g_X(\xi) = \begin{cases} (\xi - x + \lambda_2)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), & x - \lambda_2 \leq \xi < x - \lambda_1, \\ 1/(\lambda_1 + \lambda_2), & x - \lambda_1 \leq \xi \leq x + \lambda_1, \\ (x + \lambda_2 - \xi)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), & x + \lambda_1 < \xi \leq x + \lambda_2, \\ 0, & \text{outros valores de } \xi, \end{cases} \quad (7)$$

onde $x = (a + b)/2$.

NOTA Para implementação computacional, a Fórmula (7) pode ser expressa como

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \min\left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \max(\lambda_2 - |\xi - x|, 0), 1\right).$$

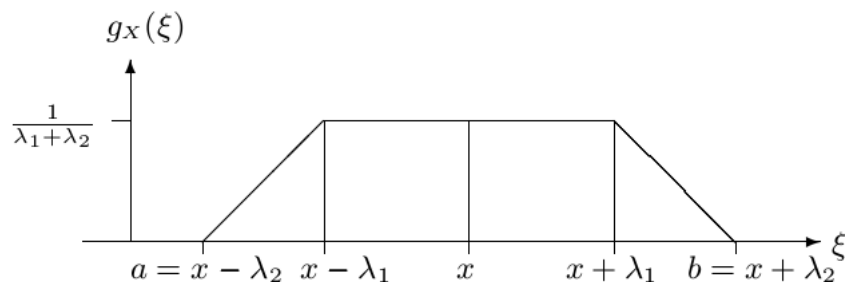


Figura 5 — FDP trapezoidal para $X = X_1 + X_2$, na qual as FDPs para X_1 e X_2 são retangulares (6.4.4.2)

6.4.4.3 A esperança e a variância de X são

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{24} (1 + \beta^2).$$

6.4.4.4 Para realizar uma amostragem a partir de $\text{Trap}(a, b, \beta)$ tome, aleatória e independentemente, dois valores r_1 e r_2 , provenientes da distribuição retangular padrão $R(0,1)$ (ver C.3.3), e obtenha

$$\xi = a + \frac{b-a}{2} [(1 + \beta)r_1 + (1 - \beta)r_2].$$

6.4.5 Distribuições Triangulares

6.4.5.1 Suponha uma grandeza X definida como a soma de duas grandezas independentes, sendo a cada uma atribuída uma distribuição retangular (ver 6.4.4), porém com semi-larguras iguais, isto é, $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$. Segue-se das expressões (5) e (6) que $\lambda_1 = 0$ e $\beta = 0$. A distribuição para X é a distribuição-trapezoidal $\text{Trap}(a, b, 0)$, a qual se reduz à distribuição-triangular (simétrica) $T(a, b)$ no intervalo $[a, b]$.

6.4.5.2 A FDP para X é

$$g_X(\xi) = \begin{cases} (\xi - a)/w^2, & a \leq \xi \leq x, \\ (b - \xi)/w^2, & x < \xi \leq b, \\ 0, & \text{outros valores de } \xi, \end{cases} \quad (8)$$

onde $x = (a + b)/2$ e $w = \lambda_2 = (b - a)/2$.

NOTA Para implementação computacional, a Fórmula (8) pode ser expressa como

$$g_X(\xi) = \frac{2}{b-a} \max\left(1 - \frac{2|\xi - x|}{b-a}, 0\right).$$

6.4.5.3 A esperança e a variância de X são

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

6.4.5.4 Para realizar uma amostragem a partir de $T(a, b)$ tome, aleatória e independentemente, dois valores r_1 e r_2 , provenientes de uma distribuição retangular padronizada $R(0,1)$ (ver C.3.3), e obtenha

$$\xi = a + \frac{b-a}{2} (r_1 + r_2).$$

6.4.6 Distribuições arco seno (formato de U)

6.4.6.1 Se uma grandeza X for conhecida por variar sinusoidalmente, com fase ϕ desconhecida, entre limites especificados a e b , com $a < b$, então, de acordo com o princípio da máxima entropia, deve ser atribuída a ϕ uma distribuição retangular $R(0, 2\pi)$. A distribuição atribuída a X é a distribuição arco seno $U(a, b)$ [18], dada pela transformação

$$X = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \text{sen } \phi,$$

onde ϕ tem a distribuição retangular $R(0, 2\pi)$.

6.4.6.2 A FDP para X é

$$g_X(\xi) = \begin{cases} (2/\pi)[(b-a)^2 - (2\xi - a - b)^2]^{-1/2}, & a < \xi < b, \\ 0, & \text{outros valores de } \xi. \end{cases}$$

NOTA $U(a, b)$ está relacionada à distribuição arco seno padronizada $U(0, 1)$ dada, na variável Z , por

$$g_Z(z) = \begin{cases} [z(1-z)]^{-1/2}/\pi, & 0 < z < 1, \\ 0, & \text{outros valores de } z. \end{cases} \quad (9)$$

através da transformação linear

$$X = a + (b - a)Z.$$

em que a esperança de Z é $1/2$ e sua variância é $1/8$. A distribuição (9) é denominada distribuição arco seno, uma vez que a função distribuição correspondente é

$$G_Z(z) = \frac{1}{\pi} \text{arc sen}(2z - 1) + \frac{1}{2}.$$

Este é um caso especial da distribuição beta com ambos os parâmetros iguais a $1/2$.

6.4.6.3 A esperança e a variância de X são

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

6.4.6.4 Para realizar uma amostragem a partir de $U(a, b)$, tome aleatoriamente valores r provenientes de uma distribuição retangular padronizada $R(0,1)$ (ver C.3.3) e obtenha

$$\xi = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \text{sen } 2\pi r.$$

6.4.7 Distribuições gaussianas

6.4.7.1 Se as únicas informações disponíveis a respeito de uma grandeza X são uma melhor estimativa x e a incerteza-padrão associada $u(x)$, então, de acordo com o princípio da máxima entropia, deve-lhe ser atribuída uma distribuição de probabilidade gaussiana $N(x, u^2(x))$.

6.4.7.2 A FDP para X é

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} u(x)} \exp\left(-\frac{(\xi-x)^2}{2u^2(x)}\right). \quad (10)$$

6.4.7.3 A esperança e a variância de X são

$$E(X) = x, \quad V(X) = u^2(x).$$

6.4.7.4 Para amostrar a partir de $N(x, u^2(x))$ tome aleatoriamente valores z provenientes da distribuição gaussiana padronizada $N(0,1)$ (ver C.4) e obtenha

$$\xi = x + u(x)z.$$

6.4.8 Distribuições gaussianas multivariadas

6.4.8.1 Um resultado comparável àquele obtido em 6.4.7.1 vale também para uma grandeza $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$, de dimensão N . Se a única informação disponível for uma melhor estimativa $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ de \mathbf{X} e a matriz de incerteza associada (estritamente) positiva

$$\mathbf{U}_x = \begin{bmatrix} u^2(x_1) & u(x_1, x_2) \dots & u(x_1, x_N) \\ u(x_2, x_1) & u^2(x_2) \dots & u(x_2, x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & u(x_N, x_2) \dots & u^2(x_N) \end{bmatrix},$$

então uma distribuição gaussiana multivariada $N(\mathbf{x}, \mathbf{U}_x)$ deve ser atribuída a \mathbf{X} .

6.4.8.2 A FDP conjunta para \mathbf{X} é

$$g_X(\xi) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det \mathbf{U}_x]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - \mathbf{x})^T \mathbf{U}_x^{-1}(\xi - \mathbf{x})\right). \quad (11)$$

6.4.8.3 A esperança e a matriz de covariância de \mathbf{X} são

$$E(\mathbf{X}) = \mathbf{x}, \quad V(\mathbf{X}) = \mathbf{U}_x.$$

6.4.8.4 Para amostrar a partir de $N(\mathbf{x}, \mathbf{U}_x)$, tome aleatoriamente N valores independentes z_i ($i = 1, \dots, N$) provenientes da distribuição gaussiana padrão $N(0,1)$ (ver C.4), e obtenha

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{R}^T \mathbf{z},$$

onde $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)^T$ e \mathbf{R} é a matriz triangular superior dada pela decomposição de Cholesky $\mathbf{U}_x = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ (ver C.5).

NOTA 1 Qualquer fatoração matricial dessa forma pode ser usada em lugar da decomposição de Cholesky $\mathbf{U}_x = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$.

NOTA 2 As únicas FDPs conjuntas explicitamente consideradas neste Suplemento são as gaussianas multivariadas, cujas distribuições são comumente usadas na prática. Um procedimento numérico para amostragem a partir de uma FDP gaussiana multivariada é dado acima (e em C.5). Se outra FDP multivariada tiver de ser usada, um modo para realizar a amostragem da distribuição deverá ser fornecido.

NOTA 3 A FDP gaussiana multivariada (11) se reduz ao produto de N FDPs gaussianas univariadas quando não há decorrências de covariâncias. Nesse caso

$$\mathbf{U}_x = \text{diag}(u^2(x_1), \dots, u^2(x_N)),$$

daí

$$g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^N g_{x_i}(\xi_i),$$

com

$$g_{x_i}(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} u(x_i)} \exp\left(-\frac{(\xi_i - x_i)^2}{2u^2(x_i)}\right).$$

6.4.9 Distribuições- t

6.4.9.1 Distribuições- t surgem caracteristicamente em duas circunstâncias: na avaliação de uma série de indicações (ver 6.4.9.2), e na interpretação de certificados de calibração (ver 6.4.9.7).

6.4.9.2 Suponha que esteja disponível uma série de n indicações x_1, \dots, x_n obtidas independentemente de uma grandeza com esperança desconhecida μ_0 e variância desconhecida

σ_0^2 com distribuição gaussiana $N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Considera-se que a grandeza de entrada em estudo X é igual a μ_0 . Então, atribuindo uma distribuição conjunta anterior e não-informativa a μ_0 e a σ_0^2 , e usando-se o teorema de Bayes, a FDP marginal para X é uma distribuição-t escalada e deslocada $t_\nu(\bar{x}, s^2/n)$ com $\nu = n - 1$ graus de liberdade, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

são, respectivamente, a média e a variância das indicações [20].

6.4.9.3 A FDP para X é

$$g_X(\xi) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{(n-1)\pi}} \times \frac{1}{s/\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n-1} \left(\frac{\xi - \bar{x}}{s/\sqrt{n}} \right)^2 \right)^{-n/2}, \quad (12)$$

onde

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0,$$

é a função gama.

6.4.9.4 A esperança e a variância de X são

$$E(X) = \bar{x}, \quad V(X) = \frac{n-1}{n-3} \frac{s^2}{n},$$

onde $E(X)$ é definida somente para $n > 2$ e $V(X)$ somente para $n > 3$. Para $n > 3$, a melhor estimativa de X e sua incerteza-padrão associada são, portanto,

$$x = \bar{x}, \quad u(x) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (13)$$

NOTA 1 No GUM [GUM 4.2], a incerteza-padrão $u(x)$ associada à média de uma série de n indicações obtidas independentemente é avaliada como $u(x) = s/\sqrt{n}$ em vez da fórmula (13), e o número de graus de liberdade associado $\nu = n - 1$ é considerado como uma medida de confiabilidade de $u(x)$. Por extensão, um número de graus de liberdade é associado a uma incerteza obtida de uma avaliação Tipo B, com base em julgamento subjetivo da confiabilidade da avaliação [GUM G.4.2] (cf. 6.4.3.3 NOTA 2). O número de graus de liberdade associado com as incertezas $u(x_i)$ é necessário para a obtenção, pela aplicação da fórmula de Welch-Satterthwaite, do número efetivo de graus de liberdade ν_{eff} associado à incerteza $u(y)$.

NOTA 2 No contexto bayesiano deste Suplemento, conceitos tais como confiabilidade ou incerteza de uma incerteza não são necessários. Assim, o número de graus de liberdade em uma avaliação de incerteza Tipo A não é mais considerado como medida de confiabilidade, e deixa de ter significado também o número de graus de liberdade em uma avaliação Tipo B.

6.4.9.5 Para realizar uma amostragem a partir de $t_\nu(\bar{x}, s^2/n)$, tome aleatoriamente um valor t proveniente da distribuição- t centralizada t_ν com $\nu = n - 1$ graus de liberdade [GUM G.3] (ver também C.6) e obtenha

$$\xi = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t.$$

6.4.9.6 Se, em vez de um desvio-padrão s calculado de uma série simples de indicações, for usado um desvio-padrão agrupado s_p com ν_p graus de liberdade obtidos de Q grupos

$$s_p^2 = \frac{1}{\nu_p} \sum_{j=1}^Q \nu_j s_j^2, \quad \nu_p = \sum_{j=1}^Q \nu_j,$$

o número de graus de liberdade $\nu = n - 1$ da distribuição- t escalada e deslocada atribuída a X deve ser substituído pelo número de graus de liberdade ν_p associado ao desvio-padrão agrupado s_p . Consequentemente, a fórmula (12) deve ser substituída por

$$g_X(\xi) = \frac{\Gamma((\nu_p + 1)/2)}{\Gamma(\nu_p/2)\sqrt{\nu_p\pi}} \times \frac{1}{s_p/\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{\nu_p} \left(\frac{\xi - \bar{x}}{s_p/\sqrt{n}} \right)^2 \right)^{-(\nu_p+1)/2}$$

e as expressões (13) por

$$x = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad u(x) = \sqrt{\frac{\nu_p}{\nu_p-2}} \frac{s_p}{\sqrt{n}} \quad (\nu_p \geq 3).$$

6.4.9.7 Se a informação sobre a grandeza X é oriunda de um certificado de calibração [GUM 4.3.1] em que são fornecidos a melhor estimativa x , a incerteza expandida U_p , o fator de abrangência k_p e o número efetivo de graus de liberdade ν_{eff} , então deve ser atribuída a X uma distribuição- t escalada e deslocada $t_\nu(x, (U_p/k_p)^2)$ com um número de graus de liberdade ν igual a ν_{eff} .

6.4.9.8 Se ν_{eff} é declarado como infinito, ou não é especificado, caso em que, na ausência de outra informação, supõe-se também que seja infinito, uma distribuição gaussiana $N(x, (U_p/k_p)^2)$ deve ser atribuída a X (ver 6.4.71).

NOTA Essa distribuição é o caso limite da distribuição- t escalada e deslocada $t_\nu(x, (U_p/k_p)^2)$ quando ν tende a infinito.

6.4.10 Distribuições Exponenciais

6.4.10.1 Se a única informação disponível sobre uma grandeza não negativa X é uma melhor estimativa $x > 0$ de X , então, de acordo com o princípio de máxima entropia, a X deve ser atribuída uma distribuição exponencial $\text{Ex}(1/x)$.

6.4.10.2 A FDP para X é

$$g_X(\xi) = \begin{cases} \exp(-\xi/x)/x, & \xi \geq 0, \\ 0, & \text{outros valores de } \xi. \end{cases}$$

6.4.10.3 A esperança e a variância de X são

$$E(X) = x, \quad V(X) = x^2.$$

6.4.10.4 Para realizar uma amostragem de $\text{Ex}(1/x)$, tome aleatoriamente um valor r proveniente da distribuição retangular padronizada $R(0,1)$ (ver [C.3.3](#)) e obtenha

$$\xi = -x \ln r.$$

NOTA Informação adicional sobre atribuição de FDPs a grandezas não negativas disponível em [14].

6.4.11 Distribuições Gama

6.4.11.1 Suponha que a grandeza X seja o número médio de objetos presentes em uma amostra de tamanho fixo (por exemplo, o número médio de partículas em uma amostra de ar de uma sala limpa, ou o número médio de fótons emitidos por uma fonte em um intervalo de tempo específico). Suponha também que o número de objetos contados em uma amostra de tamanho especificado seja q , e que o número contado é assumido como sendo uma grandeza com esperança desconhecida tendo uma distribuição de Poisson. Então, de acordo com o teorema de Bayes, após atribuir uma distribuição *a priori* constante à esperança, deve ser atribuída a X uma distribuição gama $G(q + 1, 1)$.

6.4.11.2 A FDP para X é

$$g_X(\xi) = \begin{cases} \xi^q \exp(-\xi)/q!, & \xi \geq 0, \\ 0, & \text{outros valores de } \xi. \end{cases} \quad (14)$$

6.4.11.3 A esperança e a variância de X são

$$E(X) = q + 1, \quad V(X) = q + 1. \quad (15)$$

6.4.11.4 Para realizar uma amostragem a partir de $G(q + 1, 1)$, tome aleatoriamente $q + 1$ valores independentes r_i ($i = 1, \dots, q + 1$) da distribuição retangular padronizada $R(0,1)$ (ver C.3.3) e obtenha [18]

$$\xi = -\ln \prod_{i=1}^{q+1} r_i.$$

NOTA 1 Se a contagem é realizada com várias amostras (de acordo com a mesma distribuição de Poisson), e q_i é o número de objetos contados na i -ésima amostra, cujo tamanho é S_i , então a distribuição para o número médio de objetos em uma amostra de tamanho $S = \sum_i S_i$ será $G(\alpha, \beta)$, com $\alpha = 1 + \sum_i q_i$ e $\beta = 1$. Aplicam-se as fórmulas (14) e (15) com $q = \sum_i q_i$.

NOTA 2 A distribuição gama é uma generalização da distribuição qui-quadrado e é usada para caracterizar informações associadas com variâncias.

NOTA 3 A distribuição gama particular apresentada em 6.4.11.4 é uma distribuição de Erlang obtida pela soma de $q + 1$ distribuições exponenciais com parâmetro 1 [18].

6.5 Distribuições de probabilidade a partir de cálculos prévios de incerteza

Um cálculo prévio de incerteza pode ter fornecido uma distribuição de probabilidade para uma grandeza de saída que irá se tornar uma grandeza de entrada em um cálculo de incerteza posterior. Essa distribuição de probabilidade pode estar disponível analiticamente em uma forma reconhecida, por exemplo, como uma FDP gaussiana. Ela pode estar disponível como uma aproximação de uma função distribuição para uma grandeza que tenha sido obtida, por exemplo, a partir de uma aplicação anterior do MMC. Diversas maneiras de descrever tais funções de distribuição para uma grandeza são mostradas em 7.5.1 e D.2.

7 Implementação de um método de Monte Carlo

7.1 Generalidades

Este item fornece informações sobre a implementação de um método de Monte Carlo para a propagação de distribuições: veja o procedimento fornecido em 5.9.6 e mostrado esquematicamente na Figura 4.

7.2 Número de iterações de Monte Carlo

7.2.1 Um valor de M , o número de iterações de Monte Carlo, ou seja, o número de avaliações do modelo a serem feitas, deve ser selecionado. Isso pode ser feito *a priori*, em qual caso não haverá controle direto sobre a qualidade dos resultados numéricos fornecidos pelo MMC. O motivo é que o número de iterações necessárias para fornecer esses resultados com uma tolerância numérica prescrita dependerá da “forma” da FDP da grandeza de saída e da probabilidade de abrangência requerida. Além disso, os cálculos são de natureza estocástica, sendo baseados em amostragem aleatória.

NOTA Um valor de $M = 10^6$ fornece, em geral, um intervalo de abrangência de 95% para a grandeza de saída, de maneira que essa largura estará correta para um ou dois algarismos decimais significativos.

7.2.2 Deve-se escolher um valor de M que seja grande comparado com $1/(1 - p)$, por exemplo, M sendo pelo menos 10^4 vezes maior que $1/(1 - p)$. Pode-se então esperar que G forneça uma representação discreta e razoável de $G_Y(\eta)$ nas regiões próximas aos pontos extremos de um intervalo de abrangência de $100p\%$ para Y .

7.2.3 Como não há garantia de que este ou qualquer número pré-escolhido específico seja suficiente, pode-se usar um procedimento que seleciona M de forma adaptativa, isto é, conforme o andamento das iterações. Orientações a esse respeito estão disponíveis em [2]. O subitem 7.9 fornece tal procedimento, cuja característica principal consiste em que o número de iterações realizadas seja economicamente consistente com a expectativa de alcançar uma tolerância numérica requerida.

NOTA Se o modelo for complicado, envolvendo, por exemplo, a solução de um modelo de elementos finitos, pode não ser possível usar um valor suficientemente grande de M para obter um conhecimento adequado da distribuição da grandeza de saída, pois os tempos de computação demandados podem ser proibitivos. Em tal caso, uma abordagem aproximada seria considerar $g_Y(\eta)$ como gaussiana (como no GUM) e proceder da seguinte maneira. Um valor relativamente pequeno de M , 50 ou 100, por exemplo, seria usado. A média e o desvio-padrão dos M valores de modelo resultantes de Y seriam tomados como y e $u(y)$, respectivamente. Dada esta informação, uma FDP gaussiana $g_Y(\eta) = N(y, u^2(y))$ seria atribuída para caracterizar o conhecimento de Y (ver 6.4.7) e um intervalo de abrangência desejado para

Y seria calculado. Embora o uso de um valor pequeno de M seja inevitavelmente menos confiável do que o de um valor grande, uma vez que não fornece uma aproximação à FDP de Y , ele leva em conta a não-linearidade do modelo.

7.3 Amostragem a partir de distribuições de probabilidade

Em uma implementação de MMC, M vetores x_r , $r = 1, \dots, M$ (ver 7.2), são amostrados a partir das FDPs $g_{X_i}(\xi_i)$ das N grandezas de entrada X_i . Quando apropriado, as amostragens devem ser realizadas a partir de FDPs conjuntas $g_X(\xi)$ (multivariadas). Recomendações sobre a maneira pela qual esta amostragem pode ser realizada são dadas no Anexo C para as distribuições mais comuns: a retangular, a gaussiana, a distribuição- t e a gaussiana multivariada. Ver também 6.4. É possível amostrar valores aleatoriamente de qualquer outra distribuição. Ver C.2. Algumas dessas distribuições podem ser aproximações de distribuições baseadas em resultados de Monte Carlo de um cálculo de incerteza anterior (ver 6.5, 7.5 e Anexo D).

NOTA Para que os resultados do MMC sejam estatisticamente válidos é necessário que os geradores de números pseudo-aleatórios, usados para tomar valores a partir das distribuições estipuladas, tenham propriedades adequadas. Alguns testes para avaliação da aleatoriedade de números produzidos por um gerador são indicados em C.3.2.

7.4 Avaliação do modelo

7.4.1 O modelo é avaliado para cada uma das M amostragens tomadas a partir das FDPs das N grandezas de entrada. Especificamente, representam-se as M amostragens por x_1, \dots, x_M , onde a r -ésima amostragem aleatória x_r contém $x_{1,r}, \dots, x_{N,r}$, com $x_{i,r}$ sendo a amostragem feita a partir da FDP de X_i . Assim, os valores do modelo são

$$y_r = f(x_r), \quad r = 1, \dots, M.$$

7.4.2 Modificações necessárias são feitas em 7.4.1 se os X_i não são independentes e, portanto, uma FDP conjunta é a eles atribuída.

NOTA Avaliações de modelos e de derivadas são realizadas, quando se aplica a lei de propagação de incertezas usando derivadas exatas, nas melhores estimativas das grandezas de entrada. Quando se aplica a lei de propagação de incertezas usando aproximações numéricas (diferenças finitas) para as derivadas, somente avaliações de modelo são realizadas. Essas avaliações são feitas, se a recomendação do GUM [GUM 5.1.3 NOTA 2] é adotada, nas melhores estimativas das grandezas de entrada e em pontos impactados por \pm uma incerteza-padrão de cada estimativa, isoladamente. Com o MMC, avaliações de modelo são realizadas nas vizinhanças dessas melhores estimativas, ou seja, em pontos que podem se situar até várias incertezas-padrão distantes das estimativas. O fato de as avaliações de modelo serem feitas, de acordo com a abordagem utilizada, em pontos diferentes, pode levantar questões relativas ao

procedimento numérico utilizado para avaliar o modelo, por exemplo, quanto à garantia de sua convergência (quando são utilizados esquemas iterativos) e sua estabilidade numérica. O usuário deve-se assegurar de que, quando apropriado, os métodos numéricos usados para avaliar f sejam válidos para uma região suficientemente grande contendo essas melhores estimativas. Apenas ocasionalmente seria este um aspecto crítico.

7.5 Representação discreta da função distribuição para a grandeza de saída

7.5.1 Uma representação discreta \mathbf{G} da função distribuição $G_Y(\eta)$ para a grandeza de saída Y pode ser obtida como abaixo descrito:

- a) classifique os valores do modelo fornecidos pelo MMC ($y_r, r = 1, \dots, M$) em ordem não decrescente. Denomine os valores ordenados do modelo como $y_{(r)}, r = 1, \dots, M$;
- b) faça, se necessário, pequenas perturbações numéricas para eventuais valores replicados do modelo $y_{(r)}$ de tal forma que o conjunto completo resultante $y_{(r)}, r = 1, \dots, M$ forme uma sequência estritamente crescente (cf. condição b) em 5.10.1);
- c) tome \mathbf{G} como o conjunto $y_{(r)}, r = 1, \dots, M$.

NOTA 1 Com referência à etapa a), deve ser utilizado um algoritmo de ordenação que realize um número de operações proporcional a $M \ln M$ [47]. Um algoritmo simples levaria um tempo proporcional a M^2 , tornando o tempo de computação desnecessariamente longo. Veja 7.8.

NOTA 2 Na etapa a), o termo “não decrescente”, em vez de “crescente”, é usado devido a possíveis igualdades entre valores do modelo y_r .

NOTA 3 Com referência à etapa b), fazer apenas pequenas perturbações garantirá que as propriedades estatísticas de $y_{(r)}$ sejam mantidas.

NOTA 4 Na etapa b), é extremamente improvável que perturbações sejam necessárias, devido à grande quantidade de distintos números do tipo ponto flutuante que podem surgir a partir dos valores do modelo obtidos de grandezas de entrada fornecidas por geradores de números aleatórios. Uma boa implementação de software, entretanto, faria provisão apropriada.

NOTA 5 Com referência à etapa c), uma variedade de informações pode ser deduzida de \mathbf{G} . Em particular, informações complementares à esperança e ao desvio-padrão podem ser obtidas, tais como medidas de assimetria e curtose, e ainda outras estatísticas, tais como a moda e a mediana.

NOTA 6 No caso de Y se tornar grandeza de entrada para um cálculo de incerteza posterior, a amostragem de sua distribuição de probabilidade é prontamente realizada por amostragem aleatória com igual probabilidade, a partir de $y_{(r)}, r = 1, \dots, M$ (ver 6.5).

7.5.2 $y_{(r)}$ (ou y_r), quando dispostos em um histograma (com larguras de célula adequadas), formam uma distribuição de frequência que, quando normalizada para ter área unitária, fornece uma aproximação para a FDP $g_Y(\eta)$ de Y . Os cálculos não são geralmente realizados em termos deste histograma, cuja resolução depende da escolha das larguras de células, porém em termos de G . O histograma pode, no entanto, ser útil como uma ajuda para entender a natureza da FDP, por exemplo, quanto à extensão de sua assimetria. Atentar, no entanto, para a Nota 1 de 7.8.3 sobre o uso de um valor numérico grande para M .

7.5.3 Uma aproximação contínua para $G_Y(\eta)$ pode se tornar útil. O Anexo D contém um meio para se obter tal aproximação.

7.6 Estimativa da grandeza de saída e da incerteza-padrão associada

A média

$$\tilde{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r \quad (16)$$

e o desvio-padrão $u(\tilde{y})$ determinado por

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{1}{M-1} \sum_{r=1}^M (y_r - \tilde{y})^2 \quad (17)$$

são tomados, respectivamente, como uma estimativa y de Y e a incerteza-padrão $u(y)$ associada a y .

NOTA 1 A fórmula (17) deve ser usada no lugar da fórmula matematicamente equivalente

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{M}{M-1} \left(\frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_r^2 - \tilde{y}^2 \right).$$

Para as muitas circunstâncias na metrologia em que $u(y)$ é muito menor que $|y|$ (em cujo caso os y_r terão um bom número de algarismos decimais em comum) a última fórmula sofre numericamente de cancelamento subtrativo (envolvendo uma média quadrática menos um quadrado da média). Esse efeito pode ser tão severo que o valor numérico resultante pode ter poucos dígitos decimais significativos corretos para que a avaliação da incerteza venha a ser válida [4].

NOTA 2 Em algumas circunstâncias especiais, tais como quando a uma das grandezas de entrada foi atribuída uma FDP baseada na distribuição-t com um número de graus de liberdade menor que três, a esperança e o desvio-padrão de Y , conforme descrito pela FDP $g_Y(\eta)$, podem não existir. As fórmulas (16) e (17) podem não fornecer resultados com claro sentido. No entanto, um intervalo de abrangência para Y (ver 7.7) pode ser formado, uma vez que G é significativo e pode ser determinado.

NOTA 3 \tilde{y} não concordará em geral com o modelo avaliado nas melhores estimativas das grandezas de entrada, uma vez que, para um modelo $f(\mathbf{X})$ não-linear, $E(Y) = E[f(\mathbf{X})] \neq f[E(\mathbf{X})]$ (cf. [GUM 4.1.4]). Independentemente do fato de f ser linear ou não-linear, no limite em que M tende ao infinito, \tilde{y} se aproxima de $E[f(\mathbf{X})]$, quando este existe.

7.7 Intervalo de abrangência para a grandeza de saída

7.7.1 Um intervalo de abrangência para Y pode ser determinado a partir da representação discreta \mathbf{G} de $G_Y(\eta)$, de maneira análoga àquela descrita em 5.3.2, sendo $G_Y(\eta)$ conhecida.

7.7.2 Seja $q = pM$, se pM é um inteiro. Caso contrário, tome q como sendo a parte inteira de $pM + 1/2$. Então, $[y_{\text{inf}}, y_{\text{sup}}]$ é um intervalo de abrangência de $100p\%$ para Y , em que, para qualquer $r = 1, \dots, M - q$, $y_{\text{inf}} = y_{(r)}$ e $y_{\text{sup}} = y_{(r+q)}$. O intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico $100p\%$ é dado tomando $r = (M - q)/2$, se $(M - q)/2$ for um inteiro ou, caso contrário, a parte inteira de $(M - q + 1)/2$. O mínimo intervalo de abrangência de $100p\%$ é dado pela determinação de r^* tal que, para $r = 1, \dots, M - q$, $y_{(r^*+q)} - y_{(r^*)} \leq y_{(r+q)} - y_{(r)}$.

NOTA Devido à aleatoriedade do MMC, alguns comprimentos desses $M - q$ intervalos serão menores do que seriam em média, e alguns serão maiores. Assim, ao escolher o menor de tais comprimentos, (a aproximação para) o mínimo intervalo de abrangência de $100p\%$ tende a ser marginalmente mais curto do que aquele que seria calculado a partir de $G_Y(\eta)$, com a consequência de que a probabilidade de abrangência típica é menor que $100p\%$. Para valores grandes de M essa probabilidade de abrangência é insignificamente menor que $100p\%$.

EXEMPLO 10^5 números foram extraídos de um gerador de números pseudoaleatórios a partir da distribuição retangular no intervalo $[0, 1]$, sendo o mínimo intervalo de abrangência de 95% formado como descrito acima. Este exercício foi realizado 1 000 vezes. A probabilidade de abrangência média foi de $94,92\%$ e o desvio-padrão das 1 000 probabilidades de abrangência obtidas foi de $0,06\%$.

7.8 Tempo de computação

7.8.1 O tempo de computação do MMC é determinado principalmente pelo tempo necessário para as três etapas adiante:

- fazer M amostragens a partir da FDP de cada uma das grandezas de entrada X_i (ou da FDP conjunta para \mathbf{X});
- fazer M correspondentes avaliações do modelo;
- classificar os M valores resultantes do modelo em ordem não decrescente.

7.8.2 Os tempos demandados nas três etapas são diretamente proporcionais a *a) M, b) M* e *c) MlnM* (se for usado um eficiente algoritmo de classificação [47]).

7.8.3 Se o modelo é simples e as grandezas de entrada são independentes, pode-se esperar que o tempo usado no passo c) domine, e o tempo total gasto seja tipicamente de alguns segundos, para $M = 10^6$, em um computador pessoal operando em vários GHz. Caso contrário, considere-se que T_1 seja o tempo necessário para completar uma amostragem das FDPs das grandezas de entrada, e T_2 o tempo para fazer uma avaliação do modelo. Então, o tempo total pode ser tomado essencialmente como $M \times (T_1 + T_2)$. Se o modelo é complicado, o termo MT_2 é determinante.

NOTA 1 Se o modelo é simples e M é muito grande, e.g. 10^8 ou 10^9 , o tempo de classificação pode ser excessivo em comparação com o tempo gasto para fazer as M avaliações do modelo. Nesse caso, os cálculos podem ser alternativamente baseados em uma aproximação de $g_Y(\eta)$ derivada de um histograma adequado do y_r .

NOTA 2 Uma indicação do tempo de computação necessário para uma aplicação do MMC pode ser obtida da seguinte maneira. Considere um problema artificial com um modelo representado pela soma de cinco termos:

$$Y = \cos X_1 + \sin X_2 + \text{tg}^{-1}X_3 + \exp(X_4) + X_5^{1/3}.$$

Atribua uma FDP gaussiana a cada grandeza de entrada X_i . Faça $M = 10^6$ iterações de Monte Carlo. Os tempos de computação relativos para (a) gerar $5M$ números aleatórios gaussianos, (b) formar M valores do modelo e (c) classificar os M valores do modelo são, respectivamente 20 %, 20 % e 60 %, com um tempo total de computação de alguns segundos em um computador pessoal operando em vários GHz.

7.9 Procedimento adaptativo de Monte Carlo

7.9.1 Generalidades

Uma implementação básica de um procedimento adaptativo de Monte Carlo envolve a realização de um número crescente de iterações de Monte Carlo até que os vários resultados de interesse tenham se estabilizado estatisticamente. Um resultado numérico é considerado estabilizado se o dobro do desvio-padrão associado a ele for menor que a tolerância numérica (ver 7.9.2) associada à incerteza-padrão $u(y)$.

7.9.2 Tolerância numérica associada a um valor numérico

Denotando por n_{dig} o número de dígitos decimais considerados significativos em um valor numérico qualquer q , a tolerância numérica δ associada a q é obtida da seguinte forma:

- expressar q na forma $c \times 10^l$, onde c é um número inteiro com n_{dig} dígitos decimais e l um inteiro;
- assumir

$$\delta = \frac{1}{2} 10^l. \quad (18)$$

EXEMPLO 1 A estimativa da grandeza de saída para uma massa padrão de valor nominal 100 g [GUM 7.2.2] é $y = 100,021\,47$ g. A incerteza-padrão é $u(y) = 0,000\,35$ g, sendo os dois últimos dígitos considerados significativos. Assim, $n_{\text{dig}} = 2$ e $u(y)$ pode ser escrita como 35×10^{-5} g, sendo então $c = 35$ e $l = -5$. A tolerância numérica δ será, então, $\delta = \frac{1}{2} 10^{-5}$ g = 0,000 005 g.

EXEMPLO 2 Como no Exemplo 1, com a diferença de que apenas um dígito decimal em $u(y)$ é considerado significativo. Assim, $n_{\text{dig}} = 1$ e $u(y) = 0,000\,4$ g = 4×10^{-4} g, resultando em $c = 4$ e $l = -4$. Assim, $\delta = \frac{1}{2} 10^{-4}$ g = 0,000 05 g.

EXEMPLO 3 Em uma medição de temperatura, $u(y) = 2$ K. Então, $n_{\text{dig}} = 1$ e $u(y) = 2 \times 10^0$ K, resultando em $c = 2$ e $l = 0$. Assim, $\delta = \frac{1}{2} 10^0$ K = 0,5 K.

7.9.3 Objetivo do procedimento adaptativo

O objetivo do procedimento adaptativo apresentado em 7.9.4 é fornecer

- uma estimativa y de Y ,
- uma incerteza-padrão associada $u(y)$, e
- os pontos extremos inferior (y_{inf}) e superior (y_{sup}) de um intervalo de abrangência para Y correspondentes a uma probabilidade de abrangência estipulada, de modo tal que cada um destes quatro valores possa satisfazer à tolerância numérica requerida.

NOTA 1 Pela natureza estocástica do procedimento, não se pode garantir que forneça sempre tal intervalo.

NOTA 2 Com o aumento do número de iterações de Monte Carlo, y e $u(y)$ em geral “convergem” consideravelmente mais rápido do que y_{inf} e y_{sup} .

NOTA 3 Geralmente, quanto maior a probabilidade de abrangência requerida, maior é o número de iterações de Monte Carlo necessário para determinar y_{inf} e y_{sup} para uma dada tolerância numérica.

7.9.4 Procedimento adaptativo

Uma abordagem prática, envolvendo a execução de uma sequência de aplicações do MMC, é a seguinte:

- a) escolher n_{dig} como um inteiro positivo pequeno apropriado (ver 7.9.2);
- b) fazer

$$M = \max(J, 10^4)$$

onde J é o menor inteiro maior que ou igual a $100/(1 - p)$;

- c) fazer $h = 1$, que denota a primeira aplicação do MMC na sequência;
- d) realizar M iterações de Monte Carlo, como em 7.3 e 7.4;
- e) usar os M valores de modelo y_1, \dots, y_M assim obtidos para, como em 7.5 a 7.7, calcular $y^{(h)}$, $u(y^{(h)})$, $y_{\text{inf}}^{(h)}$ e $y_{\text{sup}}^{(h)}$ como uma estimativa de Y , sua incerteza-padrão associada, e os pontos extremos esquerdo e direito, respectivamente, de um intervalo de abrangência de $100p$ %, isto é, para o h -ésimo membro da sequência;
- f) se $h = 1$, somar 1 a h e voltar ao passo d);
- g) calcular o desvio-padrão s_y associado à média das estimativas $y^{(1)}, \dots, y^{(h)}$ de Y , dado por

$$s_y^2 = \frac{1}{h(h-1)} \sum_{r=1}^h (y^{(r)} - y)^2,$$

onde

$$y = \frac{1}{h} \sum_{r=1}^h y^{(r)};$$

- h) realizar cálculos análogos dessa estatística para $u(y)$, y_{inf} e y_{sup} ;
- i) usar todos os $h \times M$ valores de modelo até então disponíveis para formar $u(y)$;
- j) calcular a tolerância numérica δ associada a $u(y)$, como em 7.9.2;
- k) se algum dos valores $2s_y$, $2s_{u(y)}$, $2s_{y_{\text{inf}}}$ e $2s_{y_{\text{sup}}}$ exceder δ , aumentar h em uma unidade e retornar ao passo d);

- l) considerar o cálculo global como tendo estabilizado e usar todos os $h \times M$ valores de modelo obtidos para calcular y , $u(y)$ e um intervalo de abrangência de $100p$ %, como em 7.5 a 7.7.

NOTA 1 Normalmente o valor de n_{dig} no passo a) é escolhido como 1 ou 2.

NOTA 2 A escolha de M no passo b) é arbitrária, mas a forma proposta tem se revelado adequada na prática.

NOTA 3 No passo g), y pode ser considerado como uma realização de uma variável aleatória com desvio-padrão s_y .

NOTA 4 Os desvios-padrão formados nos passos g) e h) tendem a se reduzir de maneira proporcional a $h^{-1/2}$ (cf. 5.9.6 NOTA 2).

NOTA 5 Em situações em que não se requer um intervalo de abrangência, o teste para estabilização do cálculo no passo k) pode ser baseado apenas em $2s_y$ e $2s_{u(y)}$.

NOTA 6 O fator 2 usado no passo k) é baseado no fato de se considerarem as médias como realizações de variáveis gaussianas, correspondendo, assim, a uma probabilidade de abrangência de aproximadamente 95 %.

NOTA 7 Uma abordagem alternativa e não adaptativa para um intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 %, que pode ser obtido usando a estatística da distribuição binomial [10], é descrito a seguir. Selecionar $M = 10^5$ ou $M = 10^6$. Formar o intervalo $[y_{(r)}, y_{(s)}]$, sendo que, para $M = 10^5$, $r = 2\,420$ e $s = 97\,581$ e, para $M = 10^6$, $r = 24\,747$ e $s = 975\,254$. Este intervalo é um intervalo de abrangência estatístico de 95 % ao nível da confiança de 0,99 [GUM C.2.30] [55], ou seja, a probabilidade de abrangência não será inferior a 95 % em pelo menos 99 % das oportunidades de uso do MMC. A probabilidade de abrangência média de tal intervalo será $(s - r)/(M + 1)$, que é maior que 95 % por uma quantidade que se torna menor à medida que M é aumentado, por exemplo, 95,16 % para $M = 10^5$ e 95,05 % para $M = 10^6$. (Existem outras possibilidades para a escolha dos valores r e s , cuja soma não necessariamente tem de ser $M + 1$. Uma condição suficiente [10, seção 2.6] é que $s - r$ satisfaça

$$\sum_{j=s-r}^M {}^M C_j p^j (1-p)^{M-j} < 1 - 0,99,$$

onde

$${}^M C_j = \frac{M!}{j! (M-j)!},$$

sendo que o melhor resultado acontece quando esta desigualdade é primeiramente satisfeita.) Estes resultados podem ser estendidos a outras probabilidades de abrangência (e outras escolhas de M).

8 Validação de resultados

8.1 Validação da metodologia de incerteza do GUM usando um método de Monte Carlo

8.1.1 Espera-se sempre que a metodologia de incerteza do GUM funcione a contento em muitas circunstâncias. No entanto, determinar se todas as condições para o seu bom funcionamento são válidas (ver 5.7 e 5.8) não é uma tarefa simples. De fato, o grau de dificuldade geralmente envolvido em tal determinação pode chegar a ser consideravelmente maior do que aquele necessário para aplicar o MMC, desde que *softwares* adequados [8] estejam disponíveis. Assim, uma vez que estes condicionantes não podem ser prontamente testados, quaisquer casos em que persistam dúvidas devem ser validados. Como o domínio de validade do MMC é mais amplo do que aquele da metodologia de incerteza do GUM, recomenda-se que ambos sejam aplicados, procedendo-se então à comparação dos resultados. Caso essa comparação seja favorável, a metodologia de incerteza do GUM pode ser usada nesta ocasião e em problemas futuros suficientemente semelhantes. Caso contrário, deve-se considerar o uso do MMC ou de outra abordagem apropriada.

8.1.2 Recomenda-se, especificamente, que sejam realizadas as duas etapas a seguir, e o processo de comparação descrito em 8.1.3:

- a) aplicar a metodologia de incerteza do GUM (possivelmente com a lei de propagação de incertezas baseada em uma aproximação de ordem superior da série de Taylor) (ver [5.6]) para gerar um intervalo de abrangência $y \pm U_p$ de $100p$ % para a grandeza de saída, onde p é a probabilidade de abrangência estipulada;
- b) aplicar o procedimento de Monte Carlo adaptativo (ver 7.9.4) para obter (aproximações para) a incerteza-padrão $u(y)$ e os limites y_{inf} e y_{sup} do intervalo de abrangência requerido (probabilisticamente simétrico ou mais curto) de $100p$ % para a grandeza de saída. Ver também 8.2.

8.1.3 Um procedimento de comparação tem o seguinte objetivo: determinar, dentro de uma tolerância numérica estipulada, se há concordância entre os intervalos de abrangência obtidos pela metodologia de incerteza do GUM e pelo MMC. Essa tolerância numérica é avaliada em termos dos limites dos intervalos de abrangência, e corresponde à tolerância que se obtém ao expressar a incerteza-padrão $u(y)$ com o que pode ser considerado como um número adequado de dígitos decimais significativos (cf. 7.9.2). O procedimento é o seguinte:

- a) estabelecer uma tolerância numérica δ associada a $u(y)$ como descrito em 7.9.2;
- b) comparar os intervalos de abrangência obtidos pela metodologia de incerteza do GUM e pelo MMC para determinar se foi obtido o número necessário de dígitos decimais corretos no intervalo de abrangência fornecido pela metodologia de incerteza do GUM. Especificamente, determinar

$$d_{\text{inf}} = |y - U_p - y_{\text{inf}}|, \quad (19)$$

$$d_{\text{sup}} = |y + U_p - y_{\text{sup}}|, \quad (20)$$

isto é, as diferenças absolutas entre os respectivos limites dos dois intervalos de abrangência. Então, se tanto d_{inf} como d_{sup} não forem maiores que δ , a comparação é favorável e a metodologia de incerteza do GUM terá sido validada neste caso.

NOTA A escolha do intervalo de abrangência de $100p$ % tem influência direta na comparação. A validação se aplica, portanto, apenas à probabilidade de abrangência especificada p .

8.2 Obtenção de resultados a partir de um método de Monte Carlo para fins de validação

Quando o propósito principal do uso do MMC é a validação, como descrito em 8.1, o procedimento deve ser realizado usando um número M satisfatório de iterações de Monte Carlo (ver 7.2). Seja n_{dig} o número de dígitos decimais significativos requeridos em $u(y)$ (consultar 7.9.1) quando de uma validação da metodologia de incerteza de GUM usando MMC. Seja δ a tolerância numérica associada a $u(y)$ (ver 7.9.2). Recomenda-se, então, que seja usado um procedimento de Monte Carlo adaptativo (ver 7.9.4) para fornecer resultados do MMC com uma tolerância numérica de $\delta/5$. Tais resultados podem ser obtidos substituindo δ por $\delta/5$ no passo k) desse procedimento.

NOTA A princípio, o uso de uma tolerância numérica de $\delta/5$ requereria um valor de M da ordem de 25 vezes aquele necessário para uma tolerância numérica de δ . Um valor de M de tal ordem pode comprometer a eficiência de alguns computadores ao operar com matrizes vetoriais de dimensão M . Nesse caso, os cálculos podem ser baseados em uma aproximação de $g_Y(\eta)$ derivada de um histograma adequado de y_r , no qual as frequências de célula no histograma são atualizadas ao ritmo do processamento do cálculo de Monte Carlo. Cf. 7.8.3 NOTA 1.

9 Exemplos

9.1 Ilustrações de abordagens deste Suplemento

9.1.1 Os exemplos apresentados ilustram vários aspectos deste Suplemento. Eles mostram a aplicação da metodologia de incerteza do GUM com e sem contribuições oriundas de termos de ordem superior na aproximação da série de Taylor da função modelo. Eles também mostram os resultados correspondentes fornecidos

- a) pelo MMC usando números pré-escolhidos M de iterações de Monte Carlo,
- b) pelo procedimento adaptativo de Monte Carlo (ver 7.9.4), no qual M é determinado automaticamente, ou
- c) por ambos.

9.1.2 Alguns dos exemplos mostram ainda se os resultados do MMC fornecidos no passo b) acima validam aqueles fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM. Uma tolerância numérica δ (ver 7.9.2) associada a $u(y)$, sendo δ escolhida apropriadamente, é usada na comparação do MMC com a metodologia de incerteza do GUM. Os resultados fornecidos pelo

MMC em b) são obtidos usando uma tolerância numérica $\delta/5$ (ver 8.2). Em alguns casos, soluções são obtidas analiticamente para posterior comparação.

9.1.3 Os resultados são geralmente relatados da maneira descrita em 5.5. No entanto, para facilitar a comparação dos resultados obtidos a partir das várias abordagens, é frequentemente usada uma quantidade de dígitos decimais significativos maior do que a recomendada.

9.1.4 O gerador Mersenne Twister [34] foi usado para gerar números pseudoaleatórios a partir de uma distribuição retangular (ver C.3). Ele obtém sucesso em um teste completo para números pseudoaleatórios retirados de uma distribuição retangular [30] (ver C.3.2) e está disponível no MATLAB [36], o ambiente de programação usado para produzir os resultados aqui apresentados.

9.1.5 O primeiro exemplo (ver 9.2) constitui um modelo aditivo. Ele demonstra que os resultados do MMC e da metodologia de incerteza do GUM estão em acordo quando as condições de validade do último são atendidas (como em 5.7). O mesmo modelo, mas com diferentes FDPs atribuídas às grandezas de entrada, é também considerado para evidenciar alguns desvios quando nem todas as condições de validade são atendidas.

9.1.6 O segundo exemplo (ver 9.3) é um problema de calibração da metrologia de massa. Ele demonstra que a metodologia de incerteza do GUM é válida, neste caso, somente se forem incluídas as contribuições oriundas de termos de ordem superior na aproximação da série de Taylor da função modelo.

9.1.7 O terceiro exemplo (ver 9.4) diz respeito à medição elétrica. Ele mostra que a FDP para a grandeza de saída pode ser notavelmente assimétrica e, portanto, a metodologia de incerteza do GUM pode produzir resultados inválidos, mesmo se todos os termos de ordem superior forem levados em consideração. São tratados casos em que as grandezas de entrada são independentes e casos em que são dependentes.

9.1.8 O quarto exemplo (ver 9.5) é aquele que, no GUM, se refere à calibração de bloco-padrão [GUM H.1]. As informações ali fornecidas são referentes à interpretação das grandezas de entrada do modelo, à apropriada atribuição das FDPs para essas grandezas, e à maneira como os resultados da metodologia de incerteza do GUM e do MMC são obtidos e comparados. Além disso, este tratamento é aplicado tanto ao modelo original quanto à aproximação que é feita no GUM.

9.2 Modelo aditivo

9.2.1 Formulação

Este exemplo considera o modelo aditivo

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4, \quad (21)$$

um caso especial do modelo linear genérico considerado no GUM, para três diferentes conjuntos de FDPs $g_{X_i}(\xi_i)$ atribuídos às grandezas de entrada X_i , consideradas como independentes. Os X_i e, conseqüentemente, a grandeza de saída Y , têm dimensão 1. Para o primeiro conjunto, cada $g_{X_i}(\xi_i)$ é uma FDP gaussiana padrão (com X_i tendo esperança nula e desvio-padrão unitário). Para o segundo conjunto, cada $g_{X_i}(\xi_i)$ é uma FDP retangular, novamente com X_i tendo

esperança nula e desvio-padrão unitário. O terceiro conjunto é idêntico ao segundo, exceto que a FDP para $g_{X_4}(\xi_4)$ tem desvio-padrão igual a dez.

NOTA Estão disponíveis [13] informações adicionais sobre modelos aditivos, tais como o modelo (21), em que as FDPs são gaussianas ou retangulares ou uma combinação de ambas.

9.2.2 Grandezas de entrada com distribuição normal

9.2.2.1 É atribuída uma FDP gaussiana padrão para cada X_i . As melhores estimativas para os X_i são $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, com incertezas-padrão associadas $u(x_i) = 1$.

9.2.2.2 Os resultados obtidos encontram-se resumidos nas cinco primeiras colunas da Tabela 2, sendo expressos com três algarismos significativos para facilitar sua comparação (ver 9.1.3).

NOTA É determinado o intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 %, uma vez que se sabe que, neste caso, a FDP para Y é simétrica, como o é para os outros casos considerados neste exemplo.

9.2.2.3 A lei de propagação de incertezas [GUM 5.1.2] fornece a estimativa $y = 0,0$ de Y e incerteza-padrão associada $u(y) = 2,0$, usando uma tolerância numérica de dois dígitos decimais significativos para $u(y)$ ($\delta = 0,05$) (ver 5.5). Um intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95% para Y é $[-3,9; 3,9]$, com base em um fator de abrangência de 1,96.

9.2.2.4 A aplicação do MMC (item 7) com $M = 10^5$ iterações fornece $y = 0,0$, $u(y) = 2,0$ e o intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95% $[-3,9; 3,9]$. Duas outras aplicações do método, com $M = 10^6$ iterações, obtêm resultados concordantes dentro da tolerância numérica usada. Estas duas outras aplicações (com diferentes amostras aleatórias sendo geradas a partir das FDPs) foram feitas para demonstrar a variação nos resultados obtidos. O quarto e quinto valores numéricos de M ($1,23 \times 10^6$ e $1,02 \times 10^6$) (na Tabela 2) são os números de iterações para duas aplicações do procedimento adaptativo de Monte Carlo (ver 7.9) com o uso de uma tolerância numérica de $\delta/5$ (ver 8.2).

9.2.2.5 A FDP para Y obtida analiticamente é a FDP gaussiana com esperança zero e desvio-padrão dois.

9.2.2.6 A Figura 6 mostra a FDP (gaussiana) para Y resultante da metodologia de incerteza do GUM. Mostra também uma das aproximações (distribuição de frequência escalada (histograma) de $M = 10^6$ valores de modelo de Y), constituindo a representação discreta G (ver 7.5) para esta FDP fornecida pelo MMC. Os limites do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 % fornecidos por ambos os métodos são mostrados como linhas verticais. A FDP e a aproximação são visualmente indistinguíveis, assim como os respectivos intervalos de abrangência. Para este exemplo, tal concordância seria esperada (para um valor suficientemente grande de M), porque todas as condições são válidas para a aplicação da metodologia de incerteza do GUM (ver 5.7).

Tabela 2 - Aplicação ao modelo (21) (a) da metodologia de incerteza do GUM (MIG), (b) do MMC, e (c) de uma abordagem analítica, tendo sido atribuída a cada X_i uma FDP gaussiana padrão (9.2.2.2, 9.2.2.7, 9.2.3.4)

Método	M	y	$u(y)$	Intervalo de abrangência de 95 % probabilisticamente simétrico	d_{inf}	d_{sup}	MIG validada ($\delta = 0,05$)?
MIG		0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			
MMC	10^5	0,00	2,00	[-3,94; 3,92]			
MMC	10^6	0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			
MMC	10^6	0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			
MMC adaptativo	$1,23 \times 10^6$	0,00	2,00	[-3,92; 3,93]	0,00	0,01	Sim
MMC adaptativo	$1,02 \times 10^6$	0,00	2,00	[-3,92; 3,92]	0,00	0,00	Sim
Analítico		0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			

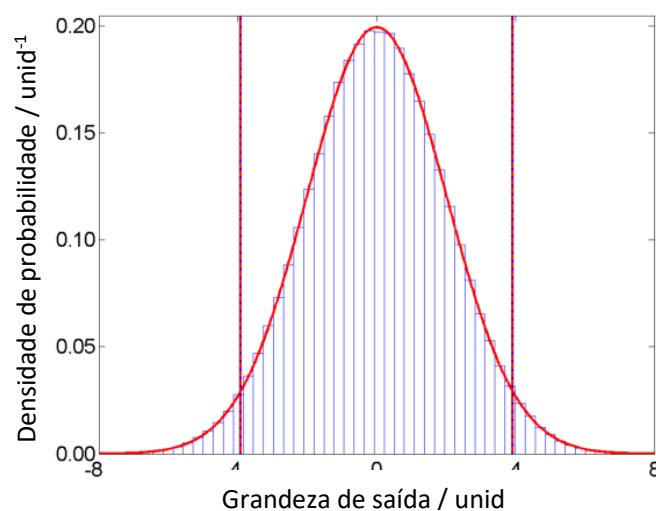


Figura 6 – Aproximações da FDP para Y referentes ao modelo (21), fornecidas (a) pela metodologia de incerteza do GUM e (b) pelo MMC, tendo sido atribuída a cada X_i uma FDP gaussiana padrão (9.2.2.6, 9.2.3.3). "unid" denota qualquer unidade

9.2.2.7 As colunas 6 a 8 da Tabela 2 também mostram os resultados da aplicação dos procedimentos de validação de 8.1 e 8.2. Usando a terminologia de 7.9.2, $n_{dig} = 2$, uma vez que são almejados dois algarismos decimais significativos em $u(y)$. Portanto, $u(y) = 2,0 = 20 \times 10^{-1}$, e, portanto, $c = 20$ e $l = -1$. Assim, de acordo com 7.9.2, a tolerância numérica é

$$\delta = \frac{1}{2} \times 10^{-1} = 0,05.$$

As magnitudes d_{inf} e d_{sup} das diferenças entre os pontos extremos (expressões (19) e (20)) são mostradas na Tabela 2 para as duas aplicações do procedimento adaptativo de Monte Carlo. É também mostrado se a metodologia de incerteza do GUM foi validada para $\delta = 0,05$.

9.2.2.8 A Figura 7 mostra o comprimento $y_{sup} - y_{inf}$ do intervalo de abrangência de 95 % para Y (ver 7.7) como uma função da probabilidade no seu limite esquerdo, determinado a partir de G . Como esperado para uma FDP simétrica, o intervalo tem o seu comprimento mais curto quando se localiza simetricamente em relação à esperança.

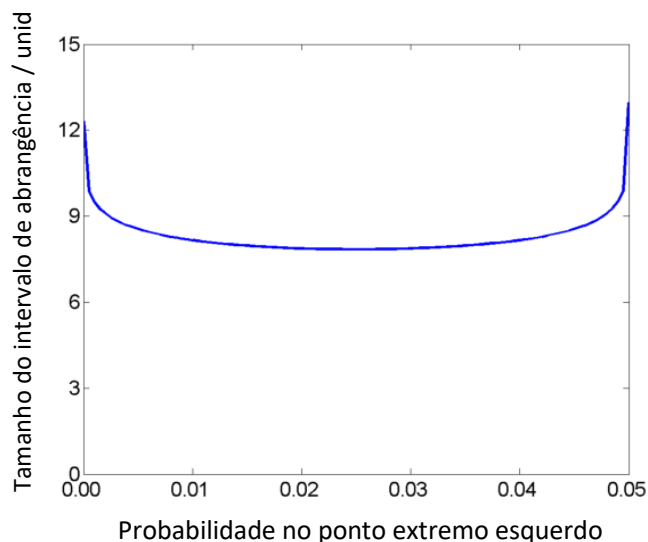


Figura 7 - O comprimento do intervalo de abrangência de 95 %, como uma função da probabilidade no seu ponto extremo esquerdo, para a representação discreta G da função distribuição obtida pela aplicação do MMC ao modelo (21) (9.2.2.8, 9.4.2.2.11)

9.2.2.9 O subitem 9.4 fornece exemplo de uma FDP assimétrica para a qual o mínimo intervalo de abrangência difere sensivelmente do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico.

9.2.3 Grandezas de entrada com distribuições retangulares de mesma largura

9.2.3.1 Uma FDP retangular, com esperança igual a zero e desvio-padrão unitário, é atribuída a cada X_i (em contraste com 9.2.2.1, em que as FDPs são gaussianas). Novamente, as melhores estimativas dos X_i são $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, com incertezas-padrão associadas $u(x_i) = 1$.

9.2.3.2 Os resultados na Tabela 3 foram obtidos seguindo etapas análogas àsquelas de 9.2.2.3 a 9.2.2.5. A solução analítica para os limites do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 %, isto é, $\pm 2\sqrt{3}[2 - (3/5)^{1/4}] \approx \pm 3,88$, foi obtida como descrito no anexo E.

Tabela 3 – Da mesma forma que na Tabela 2, porém para FDPs retangulares, com os X_i tendo as mesmas esperanças e mesmos desvios-padrão (9.2.3.2, 9.2.3.3, 9.2.3.4)

Método	M	y	$u(y)$	Intervalo de abrangência de 95 % probabilisticamente simétrico	d_{inf}	d_{sup}	MIG validada ($\delta = 0,05$)?
MIG		0,00	2,00	[-3,92; 3,92]			
MMC	10^5	0,00	2,01	[-3,90; 3,89]			
MMC	10^6	0,00	2,00	[-3,89; 3,88]			
MMC	10^6	0,00	2,00	[-3,88; 3,88]			
MMC adaptativo	$1,02 \times 10^6$	0,00	2,00	[-3,88; 3,89]	0,04	0,03	Sim
MMC adaptativo	$0,86 \times 10^6$	0,00	2,00	[-3,87; 3,87]	0,05	0,05	Não
Analítico		0,00	2,00	[-3,88; 3,88]			

9.2.3.3 A Figura 8 mostra o equivalente à Figura 6 para o presente caso. Numa comparação com a Figura 6, podem ser percebidas algumas pequenas diferenças entre as aproximações das FDPs. A metodologia de incerteza do GUM fornece exatamente a mesma FDP para Y quando as FDPs para os X_i são gaussianas ou retangulares, porque as esperanças destas grandezas são idênticas nos dois casos, assim como o são os desvios-padrão. A FDP obtida pelo MMC tem valores menores que aqueles fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM na vizinhança da esperança e, em menor grau, perto das caudas. Nos flancos, a FDP do MMC tem valores ligeiramente maiores. Os limites dos intervalos de abrangência fornecidos são novamente quase indistinguíveis visualmente, mas a Tabela 3 revela pequenas diferenças.

9.2.3.4 O intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 % determinado a partir da metodologia de incerteza do GUM é, neste caso, um pouco mais conservador do que o obtido analiticamente. Assim como para o caso de grandezas com distribuição normal, foi aplicado o procedimento de validação (colunas 6 a 8 da Tabela 3). Como antes, $n_{\text{dig}} = 2$, $u(y) = 20 \times 10^{-1}$, $c = 20$, $l = -1$ e $\delta = 0,05$. As diferenças entre os limites, d_{inf} e d_{sup} , são maiores do que no caso de grandezas normalmente distribuídas (Tabela 2). A metodologia de incerteza do GUM é validada para a primeira das duas aplicações do procedimento de Monte Carlo adaptativo. Para a segunda aplicação, ela não é validada, embora d_{inf} e d_{sup} para esta aplicação estejam próximos da tolerância numérica $\delta = 0,05$ (o que pode ser observado se forem considerados mais algarismos decimais do que na Tabela 3). Diferentes resultados de validação, como estes, são uma consequência ocasional da natureza estocástica do Método de Monte Carlo, especialmente em um caso como o aqui tratado.

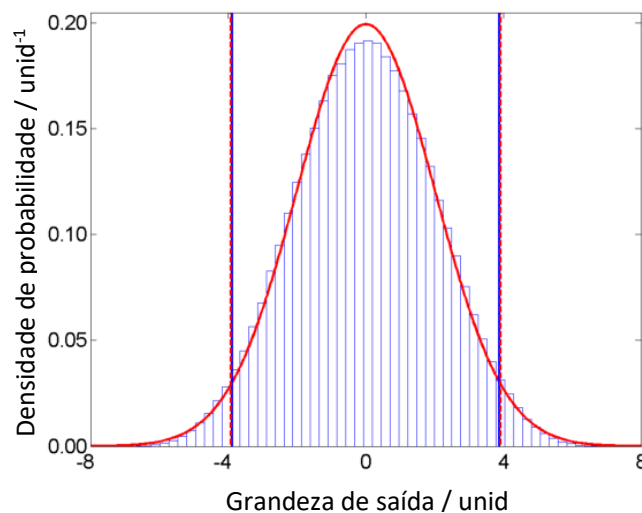


Figura 8 - Contrapartida da Figura 6 para grandezas (de entrada) com mesmas esperanças e mesmos desvios-padrão, mas com FDPs retangulares (9.2.3.3)

9.2.4 Grandezas de entrada com distribuições retangulares de larguras diferentes

9.2.4.1 Considere o exemplo de 9.2.3, exceto que X_4 tenha um desvio-padrão igual a dez em vez de um. A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos.

9.2.4.2 Os números M de iterações de Monte Carlo realizadas pelo procedimento adaptativo ($0,03 \times 10^6$ e $0,08 \times 10^6$) são muito menores dos que os correspondentes aos dois casos anteriores neste exemplo. A principal razão é que, neste caso, $\delta = 0,5$, a tolerância numérica resultante da exigência, como antes, de dois dígitos decimais significativos em $u(y)$, é dez vezes o valor anterior. Fosse usado o valor anterior, M seria da ordem de 100 vezes maior.

Tabela 4 – Da mesma forma que na Tabela 3, exceto que X_4 , a quarta grandeza de entrada, possui um desvio-padrão igual a dez, em vez de um, não sendo fornecida nenhuma solução analítica (9.2.4.1, 9.2.4.5)

Método	M	y	$u(y)$	Intervalo de abrangência de 95 % probabilisticamente simétrico	d_{inf}	d_{sup}	MIG validada ($\delta = 0,5$)?
MIG		0,0	10,1	[-19,9; 19,9]			
MMC	10^5	0,0	10,2	[-17,0; 17,0]			
MMC	10^6	0,0	10,2	[-17,0; 17,0]			
MMC	10^6	0,0	10,1	[-17,0; 17,0]			
MMC adaptativo	$0,03 \times 10^6$	0,1	10,2	[-17,1; 17,1]	2,8	2,8	Não
MMC adaptativo	$0,08 \times 10^6$	0,0	10,1	[-17,0; 17,0]	2,9	2,9	Não

9.2.4.3 A Figura 9 mostra as duas aproximações obtidas para a FDP de Y . Elas diferem sensivelmente. A predominância da FDP de X_4 é evidente. A FDP resultante para Y é semelhante àquela de X_4 , mas há um efeito nos flancos resultante das FDPs das outras grandezas de entrada X_i .

9.2.4.4 A Figura 9 mostra também os limites do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 % para Y obtido a partir dessas aproximações. O par interior de linhas verticais indica os limites do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 % determinado pelo MMC. O par externo corresponde ao resultado da metodologia de incerteza do GUM, com um fator de abrangência $k = 1,96$.

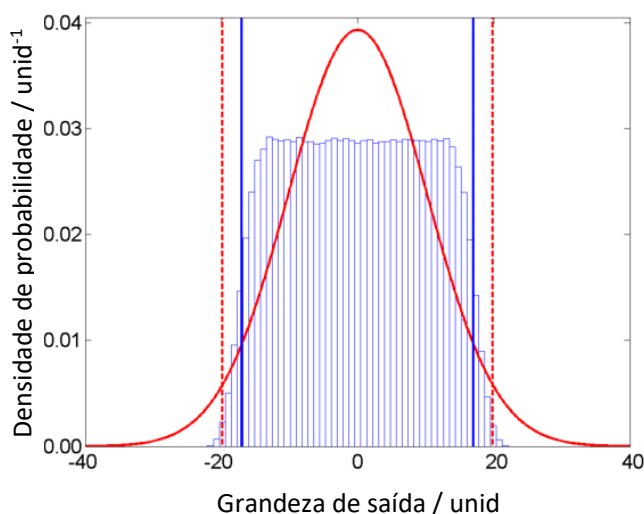


Figura 9 - Como na Figura 8, exceto que a quarta grandeza de entrada tem um desvio-padrão igual a dez, em vez da unidade (9.2.4.3, 9.2.4.4)

9.2.4.5 O intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 % determinado com base na metodologia de incerteza do GUM é, neste caso, mais conservador do que o obtido usando o MMC. Novamente, foi aplicado o procedimento de validação (Tabela 4, colunas 6 a 8). Agora, $n_{\text{dig}} = 2$, $u(y) = 1,0 \times 10^1 = 10 \times 10^0$, $c = 10$, $l = 0$ e $\delta = 1/2 \times 10^0 = 0,5$. Para as duas aplicações do procedimento adaptativo de Monte Carlo, a metodologia de incerteza do GUM não é validada. Para uma tolerância numérica de um dígito decimal significativo em $u(y)$, isto é, $n_{\text{dig}} = 1$, com $\delta = 5$, o status de validação seria positivo em ambos os casos, com os intervalos de abrangência de 95 % sendo todos iguais a $[-2 \times 10^1, 2 \times 10^1]$. Ver 4.13.

NOTA As condições para aplicação do Teorema do Limite Central não são bem atendidas nesta circunstância [GUM G.6.5] por causa do efeito dominante da FDP retangular de X_4 (ver 5.7.2). Contudo, como essas condições são, na prática, assumidas como válidas, especialmente quando se usa *software* próprio para avaliação de incertezas (cf. 9.4.2.5 NOTA 3), a assunção da aplicabilidade do teorema permite que a caracterização de Y seja feita, neste subitem, por uma FDP gaussiana para fins de comparação.

9.3 Calibração de massa

9.3.1 Formulação

9.3.1.1 Considere-se a calibração de um peso W , de densidade ρ_W , contra um peso de referência R de densidade ρ_R , com mesma massa nominal, usando uma balança operando no ar de densidade ρ_a [39]. Como ρ_W e ρ_R são geralmente diferentes, é necessário considerar os efeitos do empuxo. Aplicando o princípio de Arquimedes, o modelo assume a forma:

$$m_W(1 - \rho_a/\rho_W) = (m_R + \delta m_R)(1 - \rho_a/\rho_R), \quad (22)$$

em que δm_R é a massa de um pequeno peso de densidade ρ_R adicionado a R para estabelecer o equilíbrio com W .

9.3.1.2 É comum trabalhar em termos de massas convencionais. A massa convencional $m_{W,c}$ de W é a massa de um peso (hipotético) de densidade $\rho_0 = 8\,000 \text{ kg/m}^3$ que equilibra W no ar de densidade $\rho_{a_0} = 1,2 \text{ kg/m}^3$. Assim,

$$m_W(1 - \rho_{a_0}/\rho_W) = m_{W,c}(1 - \rho_{a_0}/\rho_0)$$

9.3.1.3 Em termos de massas convencionais $m_{W,c}$, $m_{R,c}$ e $\delta m_{R,c}$, o modelo (22) torna-se

$$m_{W,c}(1 - \rho_a/\rho_W)(1 - \rho_{a_0}/\rho_W)^{-1} = (m_{R,c} + \delta m_{R,c})(1 - \rho_a/\rho_R)(1 - \rho_{a_0}/\rho_R)^{-1} \quad (23)$$

a partir do qual, para uma aproximação adequada à maioria dos fins práticos,

$$m_{W,c} = (m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \left[1 + (\rho_a - \rho_{a_0}) \left(\frac{1}{\rho_W} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right]$$

Seja

$$\delta m = m_{W,c} - m_{\text{nom}}$$

o desvio de $m_{W,c}$ da massa nominal

$$m_{\text{nom}} = 100 \text{ g.}$$

O modelo usado neste exemplo é dado por

$$\delta m = (m_{R,c} + \delta m_{R,c}) \left[1 + (\rho_a - \rho_{a_0}) \left(\frac{1}{\rho_W} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right] - m_{\text{nom}} \quad (24)$$

NOTA A aplicação da lei de propagação de incertezas ao modelo “exato” (23) é dificultada pela complexidade algébrica das derivadas parciais. É mais fácil aplicar o MMC, isto porque precisam ser formados apenas valores do modelo.

9.3.1.4 As únicas informações disponíveis referentes a $m_{R,c}$ e $\delta m_{R,c}$ são a melhor estimativa e uma incerteza-padrão associada para cada uma dessas grandezas. Assim, seguindo 6.4.7.1, uma distribuição gaussiana é atribuída a cada uma dessas grandezas, com essas melhores estimativas sendo usadas como as esperanças das grandezas correspondentes, e as incertezas-padrão associadas como os desvios-padrão. As únicas informações disponíveis sobre ρ_a , ρ_W e ρ_R são os limites inferior e superior para cada uma dessas grandezas. Dessa maneira, seguindo 6.4.2.1, uma distribuição retangular é atribuída a cada uma dessas grandezas, com limites iguais aos limites da distribuição. A Tabela 5 resume as grandezas de entrada e as FDPs atribuídas. Na tabela, uma distribuição gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$ é descrita em termos de esperança μ e desvio-padrão σ , e uma distribuição retangular $R(a, b)$, com pontos extremos a e b ($a < b$), em termos de esperança $(a + b)/2$ e semi-largura $(b - a)/2$.

NOTA À grandeza ρ_{a_0} no modelo de calibração de massa (24) é atribuído o valor $1,2 \text{ kg/m}^3$ sem uma incerteza associada.

Tabela 5 - As grandezas de entrada X_i e as FDPs a elas atribuídas no modelo (24) de calibração de massa (9.3.1.4)

X_i	Distribuição	Parâmetros			
		Esperança μ	Desvio- padrão σ	Esperança $x = (a + b)/2$	Semi-largura $(b - a)/2$
$m_{R,c}$	$N(\mu, \sigma^2)$	100 000,000 mg	0,050 mg		
$\delta m_{R,c}$	$N(\mu, \sigma^2)$	1,234 mg	0,020 mg		
ρ_a	$R(a, b)$			1,2 kg/m ³	0,10 kg/m ³
ρ_W	$R(a, b)$			$8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
ρ_R	$R(a, b)$			$8,00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$0,05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$

9.3.2 Propagação e resumo

9.3.2.1 A metodologia de incerteza GUM e o procedimento adaptativo de Monte Carlo (ver 7.9) foram ambos usados para obter estimativas $\widehat{\delta m}$ de δm , as incertezas-padrão associadas $u(\widehat{\delta m})$ e os mínimos intervalos de abrangência de 95% para δm . Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 6, na qual MIG₁ denota metodologia de incerteza do GUM com termos de primeira ordem, MMC o procedimento de Monte Carlo adaptativo, e MIG₂ a metodologia de incerteza de GUM com termos de ordem superior.

9.3.2.2 Foram realizadas $0,72 \times 10^6$ iterações pelo procedimento adaptativo de Monte Carlo com o uso de uma tolerância numérica de $\delta/5$ (ver 8.2), com δ definido para o caso em que um dígito decimal significativo em $u(\widehat{\delta m})$ é considerado significativo (ver 9.3.2.6).

9.3.2.3 A Figura 10 mostra as aproximações da FDP para δm obtidas a partir da metodologia de incerteza do GUM com termos de primeira ordem e do MMC. A curva contínua representa uma FDP gaussiana com parâmetros fornecidos pela metodologia de incerteza GUM. O par interno de linhas verticais (pontilhadas) indica o mínimo intervalo de abrangência de 95 % para δm obtido com base nesta FDP. O histograma é a distribuição de frequência escalada obtida usando o MMC como uma aproximação para a FDP. O par externo de linhas verticais (contínuas) indica o mínimo intervalo de abrangência de 95 % para δm com base na representação discreta da função distribuição determinada como em 7.5.

Tabela 6 - Resultados da etapa de cálculo para o modelo de calibração de massa (24) (9.3.2.1, 9.3.2.6)

Método	$\widehat{\delta m}$ /mg	$u(\widehat{\delta m})$ /mg	Mínimo intervalo de abrangência de 95 % /mg	d_{inf} /mg	d_{sup} /mg	MIG validada ($\delta = 0,005$)?
MIG ₁	1,234 0	0,053 9	[1,128 5; 1,339 5]	0,045 1	0,0043 0	Não
MMC	1,234 1	0,075 4	[1,083 4; 1,382 5]			
MIG ₂	1,234 0	0,075 0	[1,085 0; 1,381 0]	0,003 6	0,001 5	Sim

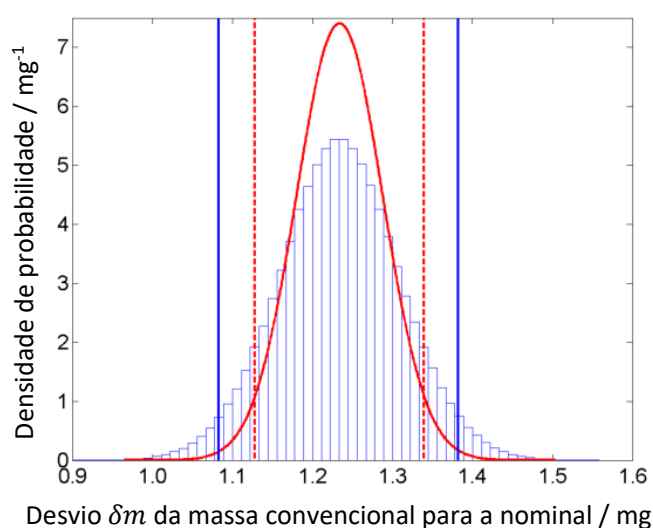


Figura 10 - Aproximações à FDP para a grandeza de saída δm obtidas usando a metodologia de incerteza GUM com termos de primeira ordem e MMC (9.3.2.3)

9.3.2.4 Os resultados mostram que, embora a metodologia de incerteza GUM (primeira ordem) e o MMC forneçam estimativas de δm em boa concordância, os valores numéricos para a incerteza-padrão associada são visivelmente diferentes. O valor (0,075 4 mg) de $u(\widehat{\delta m})$ retornado pelo MMC é 40 % maior que aquele (0,053 9 mg) obtido pela metodologia de incerteza GUM (primeira ordem). Este último é, portanto, otimista a esse respeito. Existe uma boa concordância entre $u(\widehat{\delta m})$ determinada por MMC e aquela (0,075 0 mg) fornecida pela metodologia de incerteza GUM com termos de ordem superior.

9.3.2.5 A Tabela 7 contém as derivadas parciais de primeira ordem com relação às grandezas de entrada para o modelo (24) e os coeficientes de sensibilidade, ou seja, estas derivadas avaliadas nas melhores estimativas das grandezas de entrada. Estas derivadas indicam que, para os propósitos da metodologia de incerteza da GUM com termos de primeira ordem, o modelo usado neste exemplo pode ser considerado equivalente ao modelo aditivo

$$\delta m = m_{R,c} + \delta m_{R,c} - m_{\text{nom}}.$$

O MMC não faz tal aproximação (implícita) para o modelo.

Tabela 7 - Coeficientes de sensibilidade para o modelo de calibração de massa (24) (9.3.2.5)

X_i	Derivada parcial	Coefficiente de sensibilidade
$m_{R,c}$	$1 + (\rho_a - \rho_{a0})(1/\rho_W - 1/\rho_R)$	1
$\delta m_{R,c}$	$1 + (\rho_a - \rho_{a0})(1/\rho_W - 1/\rho_R)$	1
ρ_a	$(m_{R,c} - \delta m_{R,c})(1/\rho_W - 1/\rho_R)$	0
ρ_W	$-(m_{R,c} - \delta m_{R,c})(\rho_a - \rho_{a0})/\rho_W^2$	0
ρ_R	$(m_{R,c} - \delta m_{R,c})(\rho_a - \rho_{a0})/\rho_R^2$	0

9.3.2.6 A Tabela 6 mostra também, nas três colunas mais à direita, os resultados da aplicação do procedimento de validação de 8.1 e 8.2 no caso em que um dígito decimal significativo em $u(\widehat{\delta m})$ é considerado significativo. Usando a terminologia desse subitem, $n_{\text{dig}} = 1$, uma vez que é necessária uma tolerância numérica de um dígito decimal significativo em $u(\widehat{\delta m})$. Portanto, $u(\widehat{\delta m}) = 0,08 = 8 \times 10^{-2}$, e assim c em 7.9.2 é igual a 8 e $l = -2$. Então, $\delta = 1/2 \times 10^{-2} = 0,005$. d_{inf} e d_{sup} denotam as magnitudes das diferenças (19) e (20) entre os limites, onde $\widehat{\delta m}$ corresponde a y . Na coluna final da tabela é indicado se os resultados foram validados para um dígito decimal significativo em $u(\widehat{\delta m})$. Se apenas os termos de primeira ordem forem considerados, a aplicação da metodologia de incerteza do GUM não é validada. Se os termos de ordem mais alta forem considerados [GUM 5.1.2 NOTA], a metodologia de incerteza da GUM é validada. Assim, a não-linearidade do modelo é tal que a consideração apenas de termos de primeira ordem é inadequada.

9.4 Comparação de perdas na calibração de medidor de potência de micro-ondas

9.4.1 Formulação

9.4.1.1 Durante a calibração de um medidor de potência de micro-ondas, o medidor em calibração e um medidor padrão são conectados, em sequência, a um gerador de sinais estável. As potências absorvidas pelos medidores serão em geral diferentes porque os seus coeficientes de reflexão complexos de tensão de entrada não são idênticos. A razão Y entre a potência absorvida pelo medidor em calibração (P_M) e aquela absorvida pelo medidor padrão (P_S) é [43]

$$Y = \frac{P_M}{P_S} = \frac{1 - |\Gamma_M|^2}{1 - |\Gamma_S|^2} \times \frac{|1 - \Gamma_S \Gamma_G|^2}{|1 - \Gamma_M \Gamma_G|^2}, \quad (25)$$

onde Γ_G é o coeficiente de reflexão de tensão do gerador de sinal, Γ_M aquele do medidor em calibração e Γ_S o coeficiente do medidor padrão. Essa razão de potência é um exemplo de medida de “comparação de perdas” [1,28].

9.4.1.2 Considere-se o caso em que o padrão e o gerador de sinais são não reflexivos, ou seja, $\Gamma_S = \Gamma_G = 0$, e os valores medidos são obtidos das partes real e imaginária (X_1 e X_2) de $\Gamma_M = X_1 + jX_2$, onde $j^2 = -1$. Como $|\Gamma_M|^2 = X_1^2 + X_2^2$, a fórmula (25) se torna

$$Y = 1 - X_1^2 - X_2^2. \quad (26)$$

9.4.1.3 São dadas, respectivamente, as melhores estimativas x_1 e x_2 das grandezas X_1 e X_2 da medição e as incertezas-padrão associadas $u(x_1)$ e $u(x_2)$. X_1 e X_2 geralmente não são independentes. Denota-se por $u(x_1, x_2)$ a covariância associada a x_1 e x_2 . De maneira equivalente [GUM 5.2.2], $u(x_1, x_2) = r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)$, onde $r = r(x_1, x_2)$ denota o coeficiente de correlação associado [GUM 5.2.2].

NOTA Na prática, o engenheiro elétrico pode, às vezes, ter dificuldade para quantificar a covariância. Em tais casos, a avaliação de incerteza pode ser repetida com diferentes valores numéricos para o coeficiente de correlação, a fim de estudar seu efeito. Este exemplo realiza cálculos usando coeficiente de correlação igual a zero e igual a 0,9 (cf. 9.4.1.7).

9.4.1.4 Com base em 6.4.8.1, é atribuída a $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ uma FDP gaussiana bivariada em X_1 e X_2 , com matriz de esperança e covariância

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u^2(x_1) & ru(x_1)u(x_2) \\ ru(x_1)u(x_2) & u^2(x_2) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

9.4.1.5 Como os valores de X_1 e X_2 na expressão (26) são, na prática, pequenos em comparação com a unidade, o Y resultante é próximo da unidade. Os resultados são expressos, assim, em termos da grandeza

$$\delta Y = 1 - Y = X_1^2 + X_2^2, \quad (28)$$

tomada como o modelo de medição. Por razões físicas, $0 \leq Y \leq 1$ e, portanto, $0 \leq \delta Y \leq 1$.

9.4.1.6 A determinação de uma estimativa δy de δY , a incerteza-padrão associada $u(\delta y)$, e um intervalo de abrangência para δY serão considerados para escolhas de x_1 , x_2 , $u(x_1)$, $u(x_2)$ e $r(x_1, x_2)$. Todas essas grandezas têm dimensão 1.

9.4.1.7 São considerados seis casos, sendo que em todos eles x_2 é tomado como zero e $u(x_1) = u(x_2) = 0,005$. Os três primeiros casos correspondem a tomar $x_1 = 0$, 0,001 e 0,050, cada um com $r(x_1, x_2) = 0$. Os outros três casos correspondem a tomar os mesmos valores acima para x_1 , mas com $r(x_1, x_2) = 0,9$. Os vários valores numéricos de x_1 (comparáveis aos que ocorrem na prática) são usados para investigar até que ponto os resultados obtidos diferem entre si para as abordagens consideradas.

9.4.1.8 Para os casos em que $r = r(x_1, x_2) = 0$, a matriz de covariância dada na fórmula (27) se reduz a $\text{diag}(u^2(x_1), u^2(x_2))$ e a distribuição conjunta correspondente para X_1 e X_2 ao produto de duas distribuições Gaussianas univariadas para X_i ($i = 1, 2$), com esperança x_i e desvio-padrão $u(x_i)$.

9.4.2 Propagação e resumo: covariância zero

9.4.2.1 Generalidades

9.4.2.1.1 A avaliação de incerteza é tratada pela aplicação da propagação de distribuições

- a) analiticamente (para fins de comparação),
- b) usando a metodologia de incerteza GUM, e
- c) usando o MMC.

NOTA Essas abordagens não restringem o domínio da FDP de δY a valores não maiores que a unidade. No entanto, para incertezas suficientemente pequenas $u(x_1)$ e $u(x_2)$, como aqui, a FDP de δY pode ser adequadamente aproximada por uma FDP mais simples definida para todos os valores não negativos de δY . Um tratamento rigoroso, usando inferência bayesiana [51], que se aplica independentemente das magnitudes de $u(x_1)$ e $u(x_2)$, é possível, mas está além do escopo deste Suplemento. Veja também o item 1, NOTA 2.

9.4.2.1.2 δy e $u(\delta y)$ podem geralmente ser obtidos analiticamente como a esperança e o desvio-padrão de δY , conforme a FDP de δY . Ver F.1. A FDP de δY pode ser obtida analiticamente quando $x_1 = 0$ e usada, nesse caso, para determinar, em particular, os limites do mínimo intervalo de abrangência de 95 %. Ver F.2.

9.4.2.1.3 A metodologia de incerteza do GUM com termos de primeira ordem e com termos de ordem superior é aplicada, no caso não correlacionado, para cada uma das três estimativas x_1 . Ver F.3. Em cada caso é formada uma estimativa δy de δY [GUM 4.1.4] a partir de

$$\delta y = x_1^2 + x_2^2$$

9.4.2.1.4 O MMC é aplicado, em cada caso, com $M = 10^6$ iterações.

9.4.2.2 Estimativa de entrada $x_1 = 0$

9.4.2.2.1 Para a estimativa de entrada $x_1 = 0$, termos de ordem superior devem ser usados ao aplicar a lei de propagação de incertezas, porque as derivadas parciais de δY em relação a X_1 e X_2 , avaliadas em $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$, são identicamente zero quando $x_1 = x_2 = 0$. Assim, se a lei de propagação de incertezas fosse aplicada apenas com termos de primeira ordem, a incerteza-padrão resultante seria incorretamente computada como zero.

NOTA Dificuldade semelhante surgiria para x_1 próximo de zero

9.4.2.2.2 A Figura 11 mostra as FDPs para δY determinadas pela aplicação da propagação de distribuições

- analiticamente (curva exponencialmente decrescente para $\delta Y \geq 0$, e zero para $\delta Y < 0$),
- usando a metodologia de incerteza do GUM com termos de ordem superior, a fim de caracterizar a grandeza de saída por uma FDP gaussiana (curva em forma de sino), e
- pela aplicação da propagação de distribuições usando o MMC (distribuição de frequência escalada).

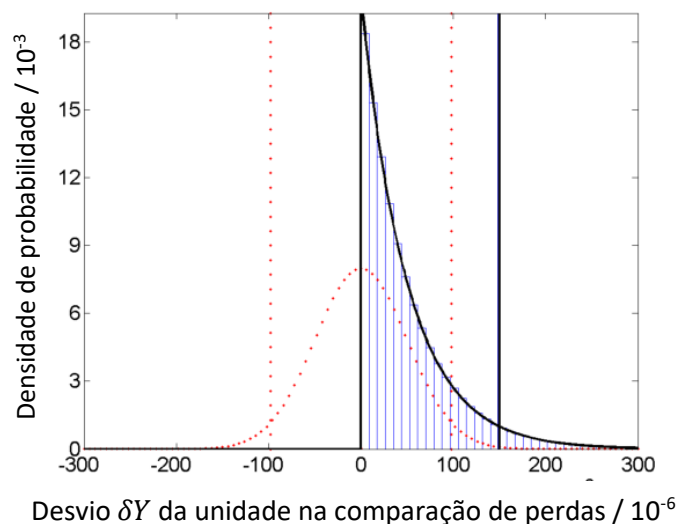


Figura 11 - Resultados para o modelo de comparação de perdas na calibração de medidor de potência no caso $x_1 = x_2 = 0$, com $u(x_1) = u(x_2) = 0,005$, e $r(x_1, x_2) = 0$ (9.4.2.2.2, 9.4.2.2.6, 9.4.2.2.9 e 9.4.2.2.11)

9.4.2.2.3 Pode ser visto na figura que o uso da metodologia de incerteza do GUM com termos de ordem superior, de modo a caracterizar a grandeza de saída por uma distribuição gaussiana, produz uma FDP que é muito diferente da solução analítica. Esta última toma a forma de uma particular distribuição qui-quadrado — soma dos quadrados de duas variáveis gaussianas padrão (ver F.2).

9.4.2.2.4 Uma vez que as derivadas parciais da função modelo (28) de ordem maior que dois são todas identicamente nulas, a solução obtida corresponde essencialmente a considerar todos os termos da série de Taylor, ou seja, a total não-linearidade do problema. Dessa maneira, com

o uso da metodologia de incerteza do GUM, a específica distribuição gaussiana assim obtida é a melhor possível para caracterizar, com tal distribuição, a grandeza de saída.

9.4.2.2.5 Pode-se concluir, portanto, que a razão para o fato de a solução baseada na metodologia de incerteza do GUM ser discrepante da solução analítica é que a grandeza de saída associada àquela metodologia é caracterizada por uma FDP gaussiana. Nenhuma FDP gaussiana, independentemente da forma como tenha sido obtida, pode representar adequadamente a solução analítica neste caso.

9.4.2.2.6 Adicionalmente, pode ser visto na Figura 11 que a FDP proveniente do MMC é consistente com a solução analítica.

9.4.2.2.7 As estimativas δy determinadas como as respectivas esperanças de δY , descritas pelas FDPs obtidas

- a) analiticamente,
- b) usando a metodologia de incerteza do GUM, e
- c) aplicando o MMC,

são dadas nas colunas 2 a 4 da linha correspondente a $x_1 = 0,000$ na Tabela 8. As colunas 5 a 8 contêm as $u(\delta y)$ correspondentes, com aquelas obtidas usando a metodologia de incerteza do GUM com termos de primeira ordem (G_1) e de ordens superiores (G_2).

Tabela 8 - Resultados da comparação de perdas, para estimativas de entrada com covariância zero associada, obtidos analiticamente (A), usando a metodologia de incerteza do GUM com termos de primeira ordem (G_1) e superiores (G_2), e o MMC (M) (9.4.2.2.7, 9.4.2.2.10, 9.4.2.3.4, 9.4.2.4.2)

x_1	Estimativa $\delta y/10^{-6}$			Incerteza-padrão $u(\delta y)/10^{-6}$				Mínimo intervalo de abrangência de 95% para $\delta Y/10^{-6}$			
	A	G	M	A	G_1	G_2	M	A	G_1	G_2	M
0,000	50	0	50	50	0	50	50	[0; 150]	[0; 0]	[-98; 98]	[0; 150]
0,010	150	100	150	112	100	112	112	-	[-96; 296]	[-119; 319]	[0; 367]
0,050	2550	2500	2551	502	500	502	502	-	[1520; 3480]	[1515; 3485]	[1590; 3543]

9.4.2.2.8 É inválida a estimativa $\delta y = 0$ obtida pela avaliação do modelo nas estimativas de entrada (GUM): a FDP correta (analítica) de δY é identicamente nula para $\delta Y < 0$; a estimativa $\delta y = 0$ situa-se no limite da parte diferente de zero daquela função. A estimativa fornecida pelo MMC está de acordo com a obtida analiticamente. A lei de propagação de incertezas baseada em termos de primeira ordem gera o já referido valor errado, zero, para $u(\delta y)$. O valor (50×10^{-6}) que se obtém aplicando-se a lei de propagação de incertezas, usando termos de ordem superior, está de acordo com os obtidos analiticamente e pelo MMC.

NOTA Os resultados obtidos de várias simulações de MMC apresentaram um espalhamento em torno de 50×10^{-6} . Quando o MMC foi novamente repetido diversas vezes com um valor maior para M , os resultados ficaram novamente espalhados em torno de 50×10^{-6} , porém com uma menor dispersão. Tais efeitos de dispersão são esperados, tendo sido observados em outros cálculos realizados com o Monte Carlo. A observação das diferenças numéricas reais exigiria que a expressão dos resultados fosse feita com mais algarismos decimais significativos.

9.4.2.2.9 A Figura 11 mostra também os menores intervalos de abrangência de 95 % para as aproximações correspondentes à função distribuição para δY . O intervalo de abrangência de 95 % fornecido pela metodologia de incerteza do GUM, e representado pelas linhas verticais pontilhadas, não é aceitável: é simétrico em relação a $\delta Y = 0$, implicando equivocadamente que existiria uma probabilidade de 50 % de que δY pudesse ser negativo. As linhas verticais cheias representam os limites do mínimo intervalo de abrangência de 95 % derivado de uma solução analítica, como descrito em F.2. Os pontos extremos do mínimo intervalo de abrangência de 95 % determinado pelo MMC são graficamente indistinguíveis daqueles referentes à solução analítica.

9.4.2.2.10 Os pontos extremos dos mínimos intervalos de abrangência referentes às incertezas-padrão, nas colunas 5 a 8 da linha correspondente a $x_1 = 0,000$ na Tabela 8, são dados nas colunas 9 a 12 da mesma tabela.

9.4.2.2.11 A Figura 12 mostra o comprimento do intervalo de abrangência de 95 % (ver 7.7) como função do valor da probabilidade à esquerda de seu ponto extremo inferior para a aproximação da FDP fornecida pelo MMC mostrado na Figura 11. O intervalo de abrangência de 95 %, neste caso, não assume seu menor comprimento quando localizado simetricamente com respeito à esperança. De fato, o mínimo intervalo de abrangência de 95 % está o mais afastado possível do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico, as probabilidades da cauda esquerda e da direita sendo 0 % e 5 %, respectivamente, em oposição a 2,5 % e 2,5 % (intervalo simétrico). Esta figura pode ser comparada com aquela (Figura 7) referente ao modelo aditivo em 9.2, para o qual a FDP para Y é simétrica em relação a sua esperança.

9.4.2.3 Estimativa de entrada $x_1 = 0,010$

9.4.2.3.1 A Figura 13 mostra, para a estimativa de entrada $x_1 = 0,010$, com coeficiente de correlação $r(x_1, x_2) = 0$, as FDPs obtidas usando-se a metodologia de incerteza do GUM com termos apenas de primeira ordem e com termos de ordem superior, e com o uso do MMC.

9.4.2.3.2 A FDP fornecida pelo MMC exibe um modesto flanco lateral à esquerda (do pico), embora truncado em zero, o menor valor numérico possível para δY . Adicionalmente, em comparação com os resultados para $x_1 = 0$, apresenta-se mais próxima da forma gaussiana das FDPs obtidas com a metodologia de incerteza do GUM. Essas FDPs gaussianas estão, por sua vez, razoavelmente próximas uma da outra, com δY tendo uma esperança de $1,0 \times 10^{-4}$ e desvios-padrão de $1,0 \times 10^{-4}$ e $1,1 \times 10^{-4}$, respectivamente.

9.4.2.3.3 A Figura 13 mostra também os pontos extremos dos menores intervalos de abrangência de 95 % obtidos pelas três abordagens. As linhas cheias verticais denotam os pontos extremos do intervalo fornecido pelo MMC, as linhas tracejadas verticais são resultantes da metodologia de incerteza do GUM com termos apenas de primeira ordem e as linhas pontilhadas verticais com termos de ordem superior. Os intervalos fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM estão deslocados para a esquerda com relação ao mínimo intervalo de abrangência de 95 % do MMC. Como consequência, eles novamente incluem valores inaceitáveis para δY . O deslocamento é de cerca de 70 % da incerteza-padrão. O intervalo obtido pelo MMC tem seu ponto extremo esquerdo em zero, o menor valor aceitável.

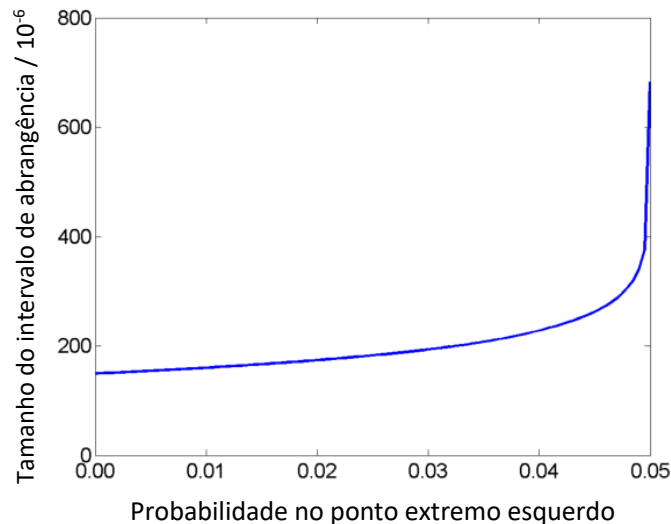


Figura 12 – Comprimento do intervalo de abrangência de 95 % em função do valor da probabilidade no seu ponto extremo esquerdo, para a aproximação de uma função distribuição obtida pela aplicação do MMC ao modelo (28) (9.4.2.2.11)

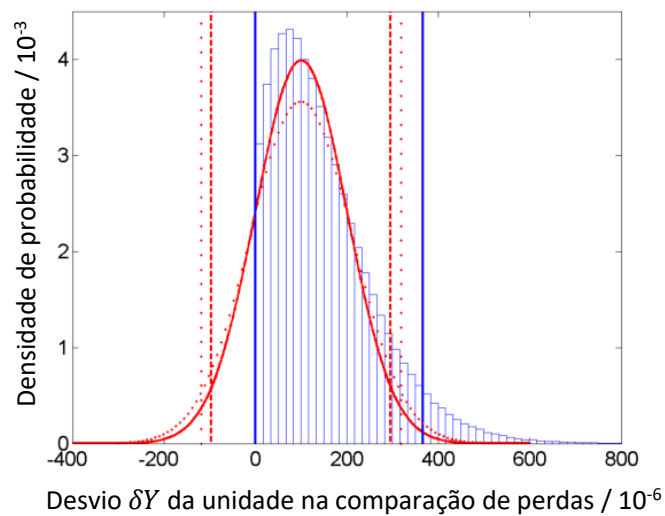


Figura 13 – Como na Figura 11, exceto que $x_1 = 0,010$, e apresentando as FDPs resultantes da metodologia de incerteza do GUM com termos apenas de primeira ordem (curva com pico mais alto) e com termos de ordem superior (curva com pico mais baixo) (9.4.2.3.1), (9.4.2.3.3), (9.4.2.4.1), (9.4.3.3)

9.4.2.3.4 Os resultados correspondentes são dados na penúltima linha da Tabela 8.

9.4.2.4 Estimativa de entrada $x_1 = 0,050$

9.4.2.4.1 A Figura 14 é similar à Figura 13, porém para $x_1 = 0,050$. Agora, as FDPs para ambas as variantes da metodologia de incerteza do GUM são praticamente indistinguíveis. Além disso, elas são agora muito semelhantes à aproximação da FDP fornecida pelo MMC. Esta FDP exhibe uma leve assimetria, mais evidenciada nas regiões dos flancos. Os intervalos de abrangência fornecidos pelas duas variantes da metodologia de incerteza do GUM são, visualmente, praticamente idênticos, porém ainda deslocados daquele fornecido pelo MMC. O deslocamento é agora cerca de 10 % da incerteza-padrão. Os intervalos fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM são, neste caso, possíveis.

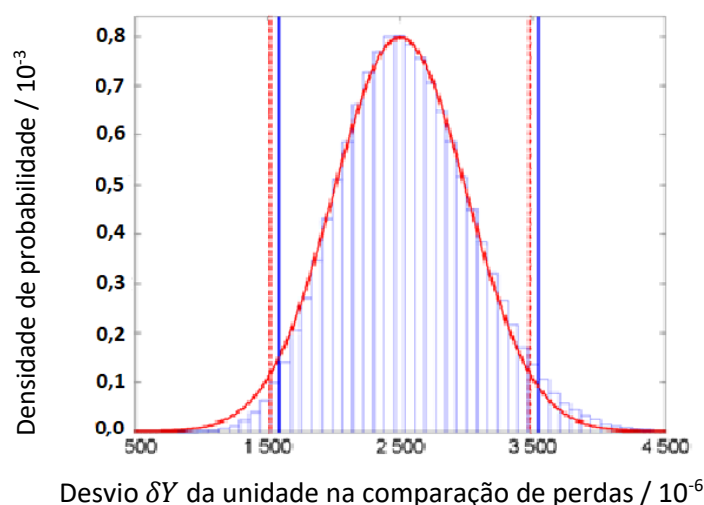


Figura 14 – Conforme a Figura 13, exceto que $x_1 = 0,050$ (9.4.2.4.1), (9.4.3.3)

9.4.2.4.2 Os resultados correspondentes são dados na última linha da Tabela 8.

9.4.2.5 Discussão

Os resultados fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM, com termos de primeira ordem e com a inclusão de termos de ordem superior, e os fornecidos pelo MMC tornam-se mais próximos entre si à medida que x_1 se afasta progressivamente do zero.

NOTA 1 Os valores numéricos $x_1 = x_2 = 0$ ficam no centro da região de interesse para o engenheiro elétrico, correspondendo à assim chamada condição “ajustada” para o medidor de energia a ser calibrado, não se constituindo, dessa forma, em caso extremo.

NOTA 2 Devido à simetria do modelo com relação a X_1 e X_2 , exatamente o mesmo efeito ocorreria se x_2 fosse usado no lugar de x_1 .

NOTA 3 Uma razão pela qual a metodologia de incerteza do GUM com termos (apenas) de primeira ordem é usada na prática é que *softwares* para a sua implementação estão em geral facilmente disponíveis: os resultados que daí se obtém podem ser aceitos, em muitos casos, sem questionamento. Para o caso em que $x_1 = x_2 = 0$ (Figura 11), a inadequação de seu uso seria evidente, porque a incerteza-padrão $u(\delta y)$ foi computada como sendo igual a zero e, conseqüentemente, qualquer intervalo de

abrangência para δY teria comprimento zero para qualquer probabilidade de abrangência. Para $x_1 \neq 0$ (ou $x_2 \neq 0$), tanto $u(\delta y)$ como o comprimento do intervalo de abrangência para δY são diferentes de zero, como o quê nenhum aviso de advertência estaria disponível sem um prévio conhecimento de valores possíveis para $u(\delta y)$ e para esse comprimento. Portanto, um perigo na implantação de um *software* baseado na metodologia de incerteza do GUM para esses cálculos é que checagens do *software* para x_1 ou x_2 suficientemente afastados do zero não indicariam tais problemas. No entanto, quando usado subsequentemente na prática para valores pequenos de x_1 ou x_2 , os resultados poderiam ser inválidos, porém provavelmente (e inadvertidamente) aceitos.

9.4.3 Propagação e resumo: covariância diferente de zero

9.4.3.1 Generalidades

9.4.3.1.1 As três abordagens usadas nos casos em que as X_i são não correlacionadas (ver 9.4.2) são agora aplicadas para os três casos correspondentes em que elas são correlacionadas, com $r(x_1, x_2) = 0,9$. Contudo, a metodologia de incerteza do GUM é utilizada com termos apenas de primeira ordem. Diferentemente dos casos em que as X_i são não correlacionadas, a metodologia de incerteza do GUM não é aplicada com termos de ordem superior, pois não é fornecida no GUM nenhuma fórmula correspondente contendo termos de ordem superior quando os x_i têm covariâncias associadas diferentes de zero (ver 5.8). Os outros aspectos são semelhantes àqueles referidos em 9.4.2.

9.4.3.1.2 Para a metodologia de incerteza do GUM com termos de primeira ordem, $u(\delta y)$ é avaliada como descrito em F.3.2. A expressão (F.7) naquele subitem fornece, para $x_2 = 0$,

$$u^2(\delta y) = 4x_1^2 u^2(x_1).$$

Consequentemente, $u(\delta y)$ não depende de $r(x_1, x_2)$ e a metodologia de incerteza do GUM com termos de primeira ordem produz resultados idênticos àqueles apresentados em 9.4.2. Particularmente, para o caso em que também $x_1 = 0$, $u(\delta y)$ é (incorretamente) calculada como sendo zero, conforme 9.4.2.2.1.

9.4.3.1.3 O MMC foi implementado pela amostragem aleatória de \mathbf{X} caracterizada por uma FDP gaussiana bivariada com a esperança e a matriz de covariância previamente especificadas (expressões (27)). Foi utilizado o procedimento descrito em C.5.

NOTA Afora a exigência de que as amostragens sejam feitas a partir de uma distribuição multivariada, a implementação do MMC para grandezas de entrada correlacionadas não é mais complicada do que quando as grandezas de entrada são não correlacionadas.

9.4.3.2 Estimativas de entrada $x_1 = 0; 0,010$ e $0,050$

9.4.3.2.1 A Tabela 9 apresenta os resultados obtidos. Aqueles provenientes do MMC indicam que embora δy não seja afetada pela correlação entre as X_i , $u(\delta y)$ é bastante influenciada, e mais ainda para pequenos valores de x_1 , o mesmo acontecendo com os intervalos de abrangência de 95 %.

Tabela 9 – Resultados da comparação de perdas para estimativas de entrada com covariância associada não nula ($r(x_1, x_2) = 0,9$) obtidos analiticamente, usando a metodologia de incerteza do GUM (MIG) e o MMC (9.4.3.2.1)

x_1	Estimativa $\delta y / 10^{-6}$			Incerteza-padrão $u(\delta y) / 10^{-6}$			Mínimo intervalo de abrangência de 95% para $\delta Y / 10^{-6}$		
	Analítico	MIG	MMC	Analítico	MIG	MMC	Analítico	MIG	MMC
0,000	50	0	50	67	0	67	–	[0; 0]	[0; 185]
0,010	150	100	150	121	100	121	–	[-96; 296]	[13; 398]
0,050	2550	2500	2551	505	500	504	–	[1520; 3480]	[1628; 3555]

9.4.3.2.2 As Figuras 15 e 16 mostram as FDPs fornecidas pela metodologia de incerteza do GUM com termos de primeira ordem (curvas em formato de sino) e pelo MMC (distribuições de frequência escaladas) nos casos $x_1 = 0,010$ e $x_1 = 0,050$, respectivamente. Os pontos extremos dos menores intervalos de abrangência de 95 % fornecidos pelas duas abordagens são também mostrados, para a metodologia de incerteza do GUM em linhas pontilhadas, e para o MMC em linhas cheias verticais.

NOTA A rigor, as condições sob as quais δY pode ser caracterizado por uma FDP gaussiana não se mantém quando se segue uma aplicação da metodologia de incerteza do GUM nessa circunstância (ver 5.8) [GUM G.6.6]. Entretanto, esta FDP e os pontos extremos correspondentes ao intervalo de abrangência de 95 % são mostrados porque tal caracterização é comumente usada.

9.4.3.3 Discussão

No caso em que $x_1 = 0,010$ (Figura 15), o efeito da correlação muda claramente os resultados fornecidos pelo MMC (comparar com a Figura 13). Não somente a FDP (aproximação) tem o formato alterado, mas também o intervalo de abrangência correspondente não mais tem seu ponto extremo esquerdo em zero. No caso em que $x_1 = 0,050$ (Figura 16), são menos óbvias as diferenças entre os resultados obtidos para os casos em que as grandezas de entrada são correlacionadas e não correlacionadas (comparar com a Figura 14).

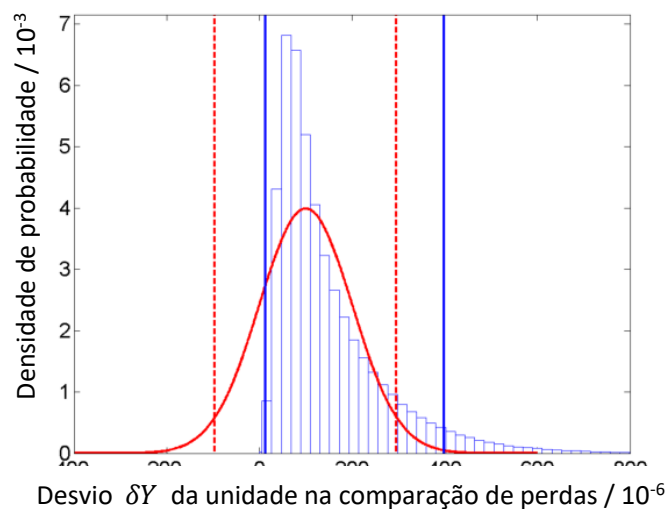


Figura 15 – Resultados para o modelo de comparação de perdas em uma calibração de medidor de potência no caso em que $x_1 = 0,010$, $x_2 = 0$, com $u(x_1) = u(x_2) = 0,005$ e $r(x_1, x_2) = 0,9$ (9.4.3.2.2, 9.4.3.3)

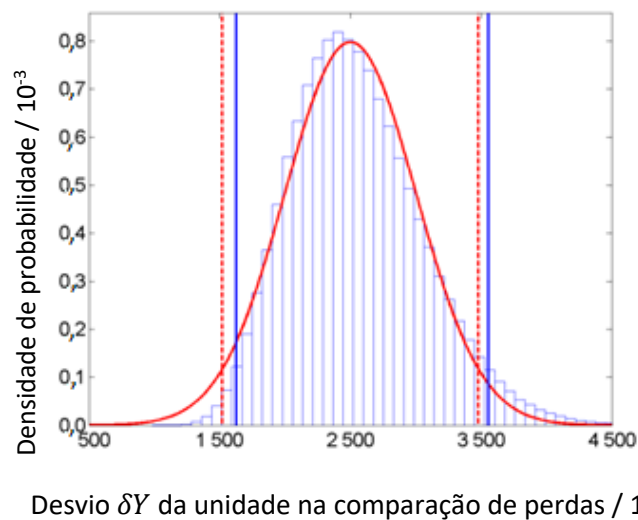


Figura 16 – Como na Figura 15, exceto que $x_1 = 0,050$ (9.4.3.2.2, 9.4.3.3)

9.5 Calibração de blocos-padrão

9.5.1 Formulação: modelo

9.5.1.1 O comprimento de um bloco-padrão de valor nominal de 50 mm é determinado comparando-o com o de um padrão de referência conhecido, com o mesmo comprimento nominal. A saída direta da comparação entre os dois blocos-padrão é a diferença d entre seus comprimentos, dada por

$$d = L(1 + \alpha\theta) - L_s(1 + \alpha_s\theta_s), \quad (29)$$

onde L é o comprimento a 20 °C do bloco-padrão em calibração, L_s é o comprimento do padrão de referência a 20 °C conforme indicado no seu certificado de calibração, α e α_s são os coeficientes de expansão térmica, respectivamente, do bloco em calibração e do padrão de referência, e θ e θ_s são os também respectivos desvios de temperatura com relação à temperatura de referência de 20 °C.

NOTA 1 Bloco-padrão é a tradução aqui usada para os termos ingleses *gauge block* e *end gauge* (no GUM).

NOTA 2 O símbolo L para comprimento de um bloco-padrão é usado neste Suplemento em lugar do símbolo l usado no GUM para essa grandeza.

9.5.1.2 Da expressão (29), a grandeza de saída L é dada por

$$L = \frac{L_s(1 + \alpha_s\theta_s) + d}{1 + \alpha\theta}, \quad (30)$$

a partir da qual, segundo uma aproximação adequada para a maioria dos fins práticos,

$$L = L_s + d + L_s(\alpha_s\theta_s - \alpha\theta). \quad (31)$$

Se a diferença de temperatura entre o bloco-padrão em calibração e o padrão de referência é escrita como $\delta\theta = \theta - \theta_s$, e a diferença entre os respectivos coeficientes de expansão térmica como $\delta\alpha = \alpha - \alpha_s$, os modelos (30) e (31) se tornam, respectivamente,

$$L = \frac{L_s[1 + \alpha_s(\theta - \delta\theta)] + d}{1 + (\alpha_s + \delta\alpha)\theta} \quad (32)$$

e

$$L = L_s + d - L_s(\theta\delta\alpha + \alpha_s\delta\theta). \quad (33)$$

9.5.1.3 A diferença d entre os comprimentos do bloco-padrão em calibração e do padrão de referência é determinada como a média de uma série de cinco indicações dessa diferença (obtidas independentemente) usando um comparador calibrado. Essa diferença pode ser expressa como

$$d = D + d_1 + d_2, \quad (34)$$

onde D é uma grandeza cuja realização corresponde à média das cinco indicações, e d_1 e d_2 são grandezas que descrevem, respectivamente, os efeitos aleatórios e sistemáticos associados ao uso do comparador.

9.5.1.4 A grandeza θ , que representa o desvio de temperatura do bloco-padrão em calibração, com relação à temperatura de referência (20 °C), pode ser expressa como

$$\theta = \theta_0 + \Delta, \quad (35)$$

onde θ_0 é uma grandeza que representa o desvio médio de temperatura do bloco-padrão com relação a 20 °C e Δ é uma grandeza que descreve uma variação cíclica do desvio de temperatura de θ_0 .

9.5.1.5 Substituindo as expressões (34) e (35) nas expressões (32) e (33), e trabalhando com a grandeza δL , que representa o desvio de L do comprimento nominal

$$L_{\text{nom}} = 50 \text{ mm}$$

do bloco-padrão, resulta

$$\delta L = \frac{L_s[1 + \alpha_s(\theta_0 + \Delta - \delta\theta)] + D + d_1 + d_2}{1 + (\alpha_s + \delta\alpha)(\theta_0 + \Delta)} - L_{\text{nom}} \quad (36)$$

e

$$\delta L = L_s + D + d_1 + d_2 - L_s[\delta\alpha(\theta_0 + \Delta) + \alpha_s\delta\theta] - L_{\text{nom}} \quad (37)$$

como modelos para o problema de medição.

9.5.1.6 O tratamento dado aqui ao problema de medição é feito em termos dos modelos (36) e (37) com grandeza de saída δL e grandezas de entrada $L_s, D, d_1, d_2, \alpha_s, \theta_0, \Delta, \delta\alpha$ e $\delta\theta$. Ele difere daquele dado no exemplo H.1 do GUM, em que os modelos (34) e (35) acima são tratados como submodelos para os modelos (32) e (33), ou seja, a metodologia de incerteza do GUM é aplicada a (34) e (35), com os resultados obtidos sendo utilizados para fornecer informações sobre as grandezas de entrada d e θ nos modelos (32) e (33). Este tratamento dado aqui evita ter de usar os resultados obtidos a partir do MMC aplicado aos submodelos (34) e (35) como subsídio de informação sobre as distribuições para as grandezas de entrada d e θ nas expressões (32) e (33).

9.5.2 Formulação: atribuição das FDPs

9.5.2.1 Generalidades

As informações disponíveis sobre cada grandeza de entrada nos modelos (36) e (37) são fornecidas nos subitens a seguir. Essas informações são extraídas da descrição dada no GUM e, para cada informação, é identificada a subseção do GUM da qual o item foi extraído. É também fornecida uma interpretação, para cada informação, em termos de atribuição de uma distribuição a cada grandeza. A Tabela 10 resume as atribuições feitas.

Tabela 10 – FDPs atribuídas a grandezas de entrada para os modelos de blocos-padrão (36) e (37) com base em informações disponíveis (9.5.2.1). A Tabela 1 fornece informações gerais sobre essas FDPs

Grandeza	FDP	Parâmetros					
		μ	σ	ν	a	b	d
L_s	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	50 000 623 nm	25 nm	18			
D	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	215 nm	6 nm	24			
d_1	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	0 nm	4 nm	5			
d_2	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	0 nm	7 nm	8			
α_s	$R(a, b)$				$9,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$13,5 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	
θ_0	$N(\mu, \sigma^2)$	$-0,1^\circ\text{C}$	$0,2^\circ\text{C}$				
Δ	$U(a, b)$				$-0,5 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$0,5 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	
$\delta\alpha$	$\text{CTrap}(a, b, d)$				$-1,0 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$1,0 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$0,1 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
$\delta\theta$	$\text{CTrap}(a, b, d)$				$-0,050 \text{ }^\circ\text{C}$	$0,050 \text{ }^\circ\text{C}$	$0,025 \text{ }^\circ\text{C}$

9.5.2.2 Comprimento L_s do padrão de referência

9.5.2.2.1 Informação

O certificado de calibração para o padrão de referência fornece $\hat{L}_s = 50,000\ 623$ mm como seu comprimento a $20 \text{ }^\circ\text{C}$ [GUM H.1.5]. Fornece $U_p = 0,075 \text{ } \mu\text{m}$ como a incerteza expandida do padrão de referência e afirma que ela foi obtida usando um fator de abrangência $k_p = 3$ [GUM H.1.3.1]. O certificado indica que o número efetivo de graus de liberdade associado com a incerteza-padrão combinada, a partir da qual a incerteza expandida citada foi obtida, é $\nu_{\text{eff}}(u(\hat{L}_s)) = 18$ [GUM H.1.6].

9.5.2.2.2 Interpretação

Atribuir a L_s uma distribuição- t escalada e deslocada $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ (ver 6.4.9.7) com

$$\mu = 50\ 000\ 623 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{U_p}{k_p} = \frac{75}{3} \text{ nm} = 25 \text{ nm}, \quad \nu = 18.$$

9.5.2.3 Média das diferenças de comprimento D

9.5.2.3.1 Informação

A média \hat{D} das cinco indicações da diferença de comprimento entre o bloco-padrão sendo calibrado e o padrão de referência é 215 nm [GUM H.1.5]. O desvio-padrão experimental agrupado que caracteriza a comparação de L e L_s foi determinado a partir de 25 indicações, obtidas independentemente, da diferença de comprimento de dois blocos-padrão, sendo igual a 13 nm [GUM H.1.3.2].

9.5.2.3.2 Interpretação

Atribuir uma distribuição-t escalada e deslocada $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ (ver 6.4.9.2 e 6.4.9.6) para D , com

$$\mu = 215 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{13}{\sqrt{5}} \text{ nm} = 6 \text{ nm}, \quad \nu = 24.$$

9.5.2.4 Efeito aleatório d_1 do comparador

9.5.2.4.1 Informação

De acordo com o certificado de calibração do comparador usado para comparar L com L_S , a incerteza associada devida a efeitos aleatórios é 0,01 μm para uma probabilidade de abrangência de 95 %, e é obtida de seis indicações independentes [GUM H.1.3.2].

9.5.2.4.2 Interpretação

Atribuir uma distribuição-t escalada e deslocada $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ (ver 6.4.9.7) para d_1 , com

$$\mu = 0 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{U_{0,95}}{k_{0,95}} = \frac{10}{2,57} \text{ nm} = 4 \text{ nm}, \quad \nu = 5.$$

Aqui, $k_{0,95}$ é obtido da tabela G.2 do GUM com $\nu = 5$ graus de liberdade e $p = 0,95$.

9.5.2.5 Efeito sistemático d_2 do comparador

9.5.2.5.1 Informação

A incerteza do comparador devida a efeitos sistemáticos é dada no certificado como 0,02 μm ao “nível de três sigmas” [GUM H.1.3.2]. Esta incerteza pode ser considerada confiável a 25 % e, portanto, o número de graus de liberdade é $\nu_{\text{eff}}(u(\widehat{d}_2)) = 8$ [GUM H.1.6].

9.5.2.5.2 Interpretação

Atribuir uma distribuição-t escalada e deslocada $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ (ver 6.4.9.7) para d_2 , com

$$\mu = 0 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{U_p}{k_p} = \frac{20}{3} \text{ nm} = 7 \text{ nm}, \quad \nu = 8.$$

9.5.2.6 Coeficiente de expansão térmica α_s

9.5.2.6.1 Informação

O coeficiente de expansão térmica do padrão de referência é dado como $\widehat{\alpha}_s = 11,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ com possíveis valores desta grandeza representados por uma distribuição retangular com limites $\pm 2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ [GUM H.1.3.3].

9.5.2.6.2 Interpretação

Atribuir uma distribuição retangular $R(a, b)$ (ver 6.4.2) para α_s , com limites

$$a = 9,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \quad b = 13,5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

NOTA Não há informações sobre a confiabilidade dos limites e, portanto, uma distribuição retangular com limites exatamente conhecidos é atribuída. Tal informação pode ter sido omitida da descrição no GUM porque o coeficiente de sensibilidade correspondente é zero, e assim a grandeza não contribui em uma aplicação da metodologia de incerteza do GUM baseada apenas em termos de primeira ordem.

9.5.2.7 Desvio médio de temperatura θ_0

9.5.2.7.1 Informação

A temperatura da bancada de ensaio é relatada como $(19,9 \pm 0,5) \text{ } ^\circ\text{C}$. O desvio médio de temperatura $\widehat{\theta}_0 = -0,1 \text{ } ^\circ\text{C}$ é relatado como tendo uma incerteza-padrão associada, devida à incerteza associada à temperatura média da bancada de ensaio, de $u(\widehat{\theta}_0) = 0,2 \text{ } ^\circ\text{C}$ [GUM H.1.3.4].

9.5.2.7.2 Interpretação

Atribuir uma distribuição gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$ (ver 6.4.7) para θ_0 , com

$$\mu = -0,1 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad \sigma = 0,2 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

NOTA Não há informações sobre a origem da avaliação da incerteza e, portanto, uma distribuição gaussiana é atribuída. Ver também a NOTA em 9.5.2.6.2 sobre essas informações.

9.5.2.8 Efeito Δ de variação cíclica de temperatura

9.5.2.8.1 Informação

A temperatura da bancada de ensaio é relatada como $(19,9 \pm 0,5) \text{ } ^\circ\text{C}$. O deslocamento máximo declarado de $0,5 \text{ } ^\circ\text{C}$ para Δ é dito representar a amplitude de uma variação aproximadamente cíclica de temperatura sob um sistema termostático. A variação cíclica da temperatura resulta numa distribuição em forma de U (arco seno) [GUM H.1.3.4].

9.5.2.8.2 Interpretação

Atribuir uma distribuição arco seno $U(a, b)$ (ver 6.4.6) para Δ , com limites

$$a = -0,5 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad b = 0,5 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

NOTA Não há informações sobre a confiabilidade dos limites e, assim, uma distribuição em forma de U com limites exatamente conhecidos é atribuída. Como observado na NOTA de 9.5.2.6.2, tal informação pode ter sido omitida da descrição no GUM.

9.5.2.9 Diferença $\delta\alpha$ entre os coeficientes de expansão

9.5.2.9.1 Informação

Os limites estimados na variabilidade de $\delta\alpha$ são $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, com $\delta\alpha$ tendo igual probabilidade dentro daqueles limites [GUM H.1.3.5]. Estes limites são considerados confiáveis em 10 %, resultando em $\nu(u(\widehat{\delta\alpha})) = 50$ [GUM H.1.6].

9.5.2.9.2 Interpretação

Atribuir a $\delta\alpha$ uma distribuição retangular com limites prescritos inexatos (ver 6.4.3), com

$$a = -1,0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \quad b = 1,0 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \quad d = 0,1 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}.$$

A confiabilidade declarada de 10% nos limites estimados fornece a base para este valor de d .

9.5.2.10 Diferença $\delta\theta$ de temperatura

9.5.2.10.1 Informação

Embora se espere que o padrão de referência e o bloco-padrão em calibração estejam na mesma temperatura, a diferença de temperatura $\delta\theta$ podia estar, com igual probabilidade, em qualquer lugar no intervalo estimado de $-0,05 \text{ } ^\circ\text{C}$ a $0,05 \text{ } ^\circ\text{C}$ [GUM H.1.3.6]. Supõe-se- que esta diferença seja confiável em apenas 50%, resultando em $\nu(u(\widehat{\delta\theta})) = 2$ [GUM H.1.6].

9.5.2.10.2 Interpretação

Atribuir uma distribuição retangular com limites prescritos inexatos (ver 6.4.3) para $\delta\theta$, com

$$a = -0,050 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad b = 0,050 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad d = 0,025 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

A confiabilidade declarada de 50 % fornece a base para este valor de d .

9.5.3 Propagação e resumo

9.5.3.1 A metodologia de incerteza do GUM

A aplicação da metodologia de incerteza da GUM baseia-se

- numa aproximação da série de Taylor de primeira ordem ao modelo (36) ou (37),
- na utilização da fórmula de Welch-Satterthwaite para avaliar o número efetivo de graus de liberdade (arredondado para o inteiro próximo inferior) associado à incerteza obtida pela lei de propagação de incertezas, e
- na atribuição de uma distribuição- t escalada e deslocada, com o número de graus de liberdade obtido acima, para a grandeza de saída.

9.5.3.2 Método de Monte Carlo (MMC)

A aplicação do MMC

- requer amostragens de distribuição retangular (ver 6.4.2.4 e C.3.3), distribuição gaussiana (ver 6.4.7.4 e C.4), distribuição- t (ver 6.4.9.5 e C.6), distribuição em forma de U (ver 6.4.6.4), e distribuição retangular com limites prescritos inexatos (ver 6.4.3.4), e
- implementa o MMC adaptativo (ver 7.9) com uma tolerância numérica ($\delta = 0,5$) instituída para fornecer $n_{\text{dig}} = 2$ dígitos decimais significativos na incerteza-padrão.

9.5.4 Resultados

9.5.4.1 A Tabela 11 apresenta os resultados obtidos para o modelo aproximado (37) utilizando a informação resumida na Tabela 10. A Figura 17 mostra as FDPs para δL obtidas a partir da aplicação da metodologia de incerteza do GUM (curva sólida) e do MMC (distribuição de frequência escalada). A distribuição obtida a partir da metodologia de incerteza do GUM é uma distribuição- t com $\nu = 16$ graus de liberdade. Os pontos extremos dos menores intervalos de abrangência de 99 % para δL , obtidos a partir das FDPs, e indicados como linhas verticais, são visualmente indistinguíveis.

9.5.4.2 $1,26 \times 10^6$ iterações foram realizadas pelo procedimento de Monte Carlo adaptativo. Os cálculos foram realizados também para uma probabilidade de abrangência de 95 %, para a qual foram executadas $0,53 \times 10^6$ iterações.

Tabela 11 – Resultados obtidos para o modelo aproximado (37) utilizando as informações resumidas na Tabela 10 (9.5.4.1, 9.5.4.3)

Método	$\widehat{\delta L}$ /nm	$u(\widehat{\delta L})$ /nm	Mínimo intervalo de abrangência de 99 % para δL / nm
MIG	838	32	[745; 931]
MMC	838	36	[745; 932]

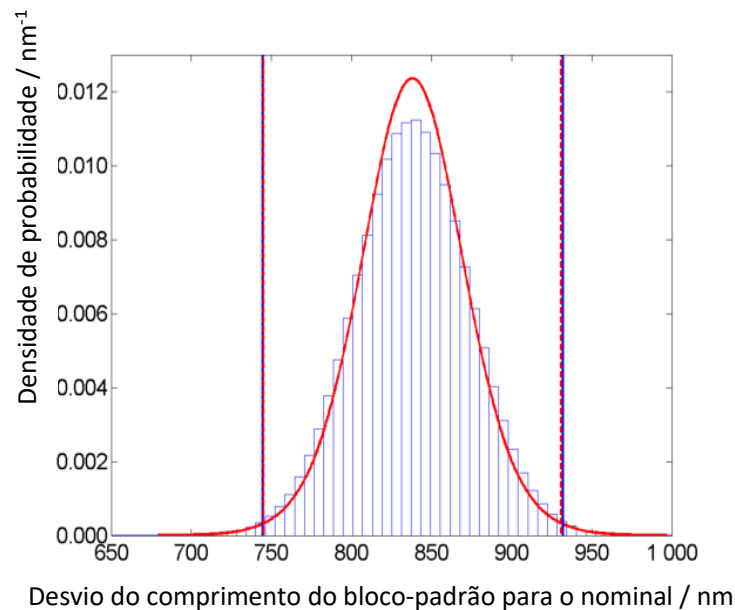


Figura 17 - FDPs para δL obtidas usando a metodologia de incerteza do GUM (curva contínua em forma de sino) e MMC (histograma escalonado) para o modelo aproximado (37) usando as informações resumidas na Tabela 10 (9.5.4.1)

9.5.4.3 Os resultados obtidos para o modelo não-linear (36) são idênticos aos resultados na Tabela 11 para o número de dígitos decimais lá citados.

9.5.4.4 Há algumas modestas diferenças nos resultados obtidos. $u(\widehat{\delta L})$ foi 4 nm maior para a aplicação do MMC que para a aplicação da metodologia de incerteza do GUM. A largura do intervalo de abrangência de 99 % para δL foi 1 nm maior. Estes resultados aplicam-se igualmente ao modelo não-linear e ao modelo aproximado. Quanto à importância dessas diferenças, ela deve ser julgada levando-se em conta a aplicação que se pretende dar aos resultados.

Anexo A

Perspectiva histórica

A.1 O GUM é um documento bastante abrangente, cobrindo muitos aspectos da avaliação de incerteza. Embora não refira explicitamente o uso de um método de Monte Carlo, tal uso foi reconhecido durante a elaboração do GUM. O esboço do documento ISO/IEC/OIML/BIPM (Primeira Edição) de junho de 1992, produzido pela ISO/TAG 4/WG 3, afirma [G.1.5]:

Se a relação entre Y e suas grandezas de entrada não é linear, ou se os valores disponíveis para os parâmetros que caracterizam as probabilidades dos X_i (esperança, variância, momentos superiores) são apenas estimativas e são eles próprios caracterizados por distribuições de probabilidade, e uma expansão de série de Taylor de primeira ordem da relação não é uma aproximação aceitável, a distribuição de Y não pode ser expressa como uma convolução. Neste caso, uma abordagem numérica (tal como cálculos de Monte Carlo) será em geral necessária e a avaliação é computacionalmente mais difícil.

A.2 Na versão publicada do GUM, este subitem (G.1.5) foi modificado para ser lido como:

Se a relação funcional entre Y e suas grandezas de entrada é não-linear e se uma expansão de primeira ordem da série de Taylor da relação não é uma aproximação aceitável (ver 5.1.2 e 5.1.5), então a distribuição de probabilidade de Y não pode ser obtida pela convolução das distribuições das grandezas de entrada. Em tais casos, outros métodos, analíticos ou numéricos, são requeridos.

A.3 A interpretação feita aqui desta reformulação é que “outros métodos analíticos ou numéricos” englobam qualquer outra abordagem apropriada. Esta interpretação é consistente com a do Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia dos Estados Unidos – NIST [50]:

[6.6] A política do NIST prevê exceções, como a seguir (ver Anexo C):

Entende-se que qualquer método estatístico válido, que seja tecnicamente justificado sob as circunstâncias existentes, pode ser usado para determinar o equivalente de u_i , u_c ou U . Além disso, reconhece-se que acordos internacionais, nacionais ou contratuais dos quais o NIST é parte podem ocasionalmente exigir algum desvio da política do NIST. Em qualquer desses casos, o relatório de incerteza deve documentar o que foi feito e porque foi feito.

JCGM 101:2008

Anexo B**Coefficientes de sensibilidade e balanços de incerteza**

B.1 Nem a propagação de distribuições nem sua implementação usando o MMC proveem coeficientes de sensibilidade [GUM 5.1.3]. Contudo, mantendo todas as grandezas de entrada, menos uma de interesse, fixadas em suas melhores estimativas, o MMC pode ser usado para fornecer, de acordo com o modelo tratado, a FDP para a grandeza de saída tendo apenas aquela grandeza de entrada como uma variável [8]. A razão entre o desvio-padrão dos valores resultantes do modelo (cf. 7.6) e a incerteza-padrão associada à melhor estimativa da grandeza de entrada de interesse pode ser tomada como um coeficiente de sensibilidade (relativo a essa grandeza). Essa razão corresponde àquela que seria obtida levando-se em consideração todos os termos de ordem superior na expansão da série de Taylor do modelo usado. Esta abordagem pode ser vista como uma generalização da fórmula de derivada parcial aproximada usada no GUM [GUM 5.1.3 Nota 2]. Tanto o valor dos coeficientes de sensibilidade como o valor das contribuições de cada grandeza de entrada para a incerteza associada à estimativa da grandeza de saída serão em geral diferentes daqueles obtidos com o GUM.

B.2 Em muitos contextos de medição é prática comum listar os componentes de incerteza ($u_i(y) = |c_i| u(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, onde c_i é o i -ésimo coeficiente de sensibilidade e $u(x_i)$ a incerteza-padrão associada à i -ésima estimativa de entrada x_i) que contribuem para a incerteza-padrão $u(y)$. Geralmente estes componentes são apresentados em uma tabela, o “balanço de incerteza”. Essa prática pode ser útil para identificar os termos dominantes que contribuem para a incerteza $u(y)$ associada à estimativa da grandeza de saída. No entanto, nos casos em que a (implementação válida da) propagação de distribuições seja mais apropriada, um balanço de incerteza deve ser considerado como uma ferramenta qualitativa.

Anexo C

Amostragens a partir de distribuições de probabilidade

C.1 Generalidades

C.1.1 Este anexo fornece informações técnicas relativas à amostragem a partir de distribuições de probabilidade. Tal amostragem constitui uma parte central do uso do MMC como uma implementação da propagação de distribuições. Uma biblioteca digital de funções matemáticas [38] e um repositório de *software* relevante [37] também podem ser consultados.

C.1.2 Um gerador para qualquer distribuição, como aquelas consideradas em 6.4 (ver também a Tabela 1), pode em princípio ser obtido a partir da sua função distribuição, juntamente com o uso de um gerador para a distribuição retangular, como indicado em C.2. Um gerador para uma distribuição retangular é fornecido em C.3.3. Para algumas distribuições, como a distribuição gaussiana e a distribuição-*t*, é mais eficiente usar geradores especificamente desenvolvidos, como os fornecidos neste anexo. A subseção 6.4 também fornece orientação sobre amostragem a partir de distribuições de probabilidade.

NOTA Geradores diferentes daqueles fornecidos neste anexo podem ser usados. Sua qualidade estatística deve ser testada antes do uso. Um recurso de teste está disponível para geradores de números pseudoaleatórios para a distribuição retangular. Ver C.3.2.

C.2 Distribuições genéricas

Uma amostragem de qualquer função distribuição contínua univariada, estritamente crescente, $G_X(\xi)$ pode ser realizada pela transformação de uma amostragem a partir de uma distribuição retangular:

- a) amostrando um número aleatório ρ da distribuição retangular $R(0,1)$;
- b) determinando ξ que satisfaça $G_X(\xi) = \rho$.

NOTA 1 A inversão requerida na etapa b), que calcula $\xi = G_X^{-1}(\rho)$, pode ser realizada analiticamente. Caso contrário, pode ser efetuada numericamente.

EXEMPLO Como um exemplo de inversão analítica, considere que X tem uma FDP exponencial com esperança $x (> 0)$, ou seja, $g_X(\xi) = \exp(-\xi/x)/x$, para $\xi \geq 0$, e zero em outros casos (ver 6.4.10). Então, por integração, $G_X(\xi) = 1 - \exp(-\xi/x)$, para $\xi \geq 0$, e zero em outros casos. Daí $\xi = -x \ln(1 - \rho)$. Este resultado pode ser levemente simplificado usando o fato de que se uma variável Q segue a distribuição retangular $R(0,1)$, então $1 - Q$ também o faz. Portanto, $\xi = -x \ln \rho$.

NOTA 2 Em geral, ξ pode ser determinado numericamente resolvendo-se o problema “zero-de-uma-função” $G_X(\xi) - \rho = 0$. Limites superiores e inferiores para ξ são normalmente encontrados facilmente, caso em que um algoritmo de escalonamento, tal como bissecção ou, mais eficientemente, uma combinação de interpolação linear e bissecção [11], por exemplo, podem ser usados para determinar ξ .

NOTA 3 Se o gerador de números pseudoaleatórios para a distribuição retangular for usado como base para gerar números de outra distribuição, uma amostragem de ρ igual a zero ou igual a um pode causar falha desse último gerador. Um exemplo é a distribuição exponencial (ver 6.4.10). Sua FDP (expressão (9)) não é definida para ρ igual a zero ou um. O uso do gerador dado em C.3.3 não daria origem a uma falha desse tipo.

C.3 Distribuição retangular

C.3.1 Generalidades

C.3.1.1 A capacidade de gerar números pseudoaleatórios a partir de uma distribuição retangular é fundamental por si só, e também como base para gerar números pseudoaleatórios a partir de qualquer distribuição (ver C.2, C.4 e C.6) usando um algoritmo ou fórmula apropriados. Quanto a este último aspecto, a qualidade dos números gerados a partir de uma distribuição não-retangular depende daquela do gerador de números a partir de uma distribuição retangular e das propriedades do algoritmo empregado. Espera-se, portanto, que a qualidade dos números gerados a partir de uma distribuição não-retangular esteja relacionada àquela dos números gerados a partir da distribuição retangular. Somente um gerador que forneça fidedignamente números distribuídos de forma retangular, usado em conjunto com um bom algoritmo, pode constituir um autêntico gerador de números distribuídos não-retangularmente.

C.3.1.2 Portanto, é importante que o recurso que embasa a geração de números retangularmente distribuídos seja eficaz [31]. A menos que o usuário tenha certeza de sua procedência, um gerador não deve ser usado até que testes adequados tenham sido realizados. Caso contrário, resultados não confiáveis podem ser obtidos. Recomenda-se o uso de uma ferramenta de teste [30]. Em C.3.3 é fornecido um procedimento para gerar números retangularmente distribuídos que demonstrou bom desempenho nestes testes e que pode ser facilmente implementado.

C.3.1.3 A Tabela C.1 define aspectos relevantes do funcionamento de um procedimento para gerar números pseudoaleatórios a partir da distribuição retangular $R(0, 1)$, especificando os parâmetros de entrada, entrada-saída e de saída associados a sua determinação.

NOTA 1 O uso, na Tabela C-1, de sementes já usadas anteriormente, pode levar à produção da mesma sequência de números aleatórios. Fazer isso é importante como parte do teste de regressão de *software*, usado para verificar a consistência dos resultados produzidos usando o *software* com aqueles de versões anteriores.

NOTA 2 Alguns geradores de números pseudoaleatórios fornecem uma única amostragem em cada chamada. Outros fornecem várias amostragens.

Tabela C.1 – Geração de números pseudoaleatórios a partir de uma distribuição retangular (C.3.1.3, C.3.2.2)

Parâmetro de entrada	
q	Número de números pseudoaleatórios que se pretende gerar
Parâmetro de entrada-saída	
t	Vetor coluna de parâmetros, alguns dos quais podem ser necessários como grandezas de entrada, e que podem ser alterados como parte do cálculo. Valores subsequentes desses parâmetros geralmente não são de interesse imediato para o usuário. Os parâmetros são necessários para ajudar a controlar o processo pelo qual os números pseudoaleatórios são gerados. Eles podem ser entendidos como variáveis globais, não aparecendo explicitamente como parâmetros do procedimento. Um ou mais desses parâmetros podem compor uma semente, usada para iniciar a sequência de números aleatórios produzidos por chamadas sucessivas do procedimento
Parâmetro de saída	
z	Vetor coluna de q amostragens a partir da distribuição retangular $R(0, 1)$

C.3.1.4 Um número pseudoaleatório x extraído de $R(a, b)$ é obtido como $a + (b - a)z$, onde z é um número pseudoaleatório amostrado a partir de $R(0, 1)$.

C.3.2 Testes de aleatoriedade

C.3.2.1 Qualquer gerador de números pseudoaleatórios a ser usado deve

- possuir boas propriedades estatísticas,
- ser prontamente implementado em qualquer linguagem de programação, e
- fornecer os mesmos resultados para a mesma semente em qualquer computador.

É também desejável que seja compacto, com uma implementação razoavelmente direta. Um gerador que chega perto de satisfazer a esses requisitos é aquele devido a Wichmann e Hill [52, 53]. Ele tem sido usado em muitas áreas, incluindo cálculos de incerteza. No entanto, seu comprimento de ciclo (o número de números aleatórios gerados antes de a sequência ser repetida) é 2^{31} , considerado atualmente inadequado para alguns problemas. Além disso, nem todas as suas propriedades estatísticas foram aprovadas [35]. E ainda, o gerador foi projetado para computadores de 16 bits, enquanto hoje computadores de 32 e 64 bits são quase universalmente usados.

NOTA O período da sequência de números produzida por um gerador de números pseudoaleatórios é o número de números consecutivos na sequência antes de serem repetidos.

C.3.2.2 Um teste extensivo das propriedades estatísticas de qualquer gerador é realizado pelo pacote de testes TestU01 [30]. Este pacote é muito detalhado, com muitos testes específicos, incluindo o chamado Grande Compressão (*Big Crush*). Vários geradores que passam no teste *Big Crush* são listados por Wichmann e Hill [54]. Um gerador de Wichmann-Hill aprimorado (ver C.3.3) também passa no teste e possui as seguintes propriedades [54]:

-
- a) pode ser codificado facilmente em qualquer linguagem de programação. Não depende da manipulação de bits usada por alguns geradores,
 - b) o estado (a quantidade de informação preservada pelo gerador entre chamadas) é pequeno e fácil de ser manejado (ver o parâmetro t na Tabela C.1),
 - c) pode ser facilmente usado para fornecer múltiplas sequências necessárias para aplicações altamente paralelas, uma característica que provavelmente estará presente em futuros cálculos de incerteza, e
 - d) há variantes do gerador para computadores de 32 e 64 bits.

C.3.3 Procedimento para gerar números pseudoaleatórios a partir de uma distribuição retangular

C.3.3.1 O gerador de Wichmann-Hill aprimorado, assim como o anterior, é uma combinação de geradores congruentes. O novo gerador combina quatro desses geradores (enquanto a versão anterior combinava três) e tem um período de 2^{121} , aceitável para qualquer aplicação concebível.

C.3.3.2 A Tabela C.2 define o gerador aprimorado de Wichmann-Hill para produzir números pseudoaleatórios a partir de $R(0, 1)$ para um computador de 32 bits.

C.3.3.3 No gerador da Tabela C.2, para computadores de 64 bits, a etapa a) do Cálculo, incluindo (i) e (ii), deve ser substituída pela etapa mais simples:

- a) Para $j = 1, \dots, 4$, calcule $i_j = (a_j \times i_j) \bmod d_j$

Tabela C.2 – O gerador aprimorado de Wichmann-Hill para números pseudoaleatórios (C.3.3.2, C.3.3.3) a partir de uma distribuição retangular no intervalo (0, 1) para computadores de 32 bits. $\lfloor w \rfloor$ indica o maior número inteiro não maior que w . $i_j \bmod b_j$ denota o resto da divisão de i_j por b_j

Parâmetro de entrada	
Nenhum	
Parâmetro de entrada-saída	
i_1, i_2, i_3, i_4	Parâmetros inteiros requeridos como grandezas de entrada e que são alterados pelo procedimento. Estabeleça-os como números inteiros entre 1 e 2 147 483 647 antes da primeira chamada. Não os modifique entre as chamadas. Valores subsequentes desses parâmetros geralmente não são de interesse do usuário. Os parâmetros fornecem a base pela qual os números pseudoaleatórios são gerados. Eles podem ser entendidos como variáveis globais e, portanto, não aparecem explicitamente como parâmetros do procedimento.
Constante	
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$	Vetores de constantes inteiras de dimensão 1×4 , onde $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_4)$, etc, dados por: $\mathbf{a} = (11\ 600, 47\ 003, 23\ 000, 33\ 000)$, $\mathbf{b} = (185\ 1247, 45\ 688, 93\ 368, 65\ 075)$, $\mathbf{c} = (10\ 379, 10\ 479, 19\ 423, 8\ 123)$, $\mathbf{d} = 2\ 147\ 483\ 123 \times (1, 1, 1, 1) + (456, 420, 300, 0)$. Sem alterações entre as chamadas
Parâmetro de saída	
r	Número pseudoaleatório amostrado a partir de $R(0, 1)$
Cálculo	
a)	Para $j = 1, \dots, 4$: i) Calcule $i_j = a_j \times (i_j \bmod b_j) - c_j \times \lfloor i_j/b_j \rfloor$ ii) Se $i_j < 0$, substitua i_j por $i_j + d_j$
b)	Calcule $w = \sum_{j=1}^4 i_j/d_j$
c)	Calcule $r = w - \lfloor w \rfloor$

C.4 Distribuição gaussiana

O procedimento apresentado na Tabela C.3 provê amostragens da distribuição gaussiana $N(0,1)$ usando a transformada de Box-Muller [3]. Uma amostragem para uma distribuição Gaussiana $N(\mu, \sigma^2)$ é dada por $\mu + \sigma z$, onde z é uma amostragem a partir de $N(0, 1)$.

Tabela C.3 - Gerador de números pseudoaleatórios gaussianos de Box-Muller (C.4)

Parâmetro de entrada	
Nenhum	
Parâmetro de saída	
z_1, z_2	Duas amostragens de uma distribuição gaussiana padrão obtidas independentemente,
Cálculo	
a)	Gere valores aleatórios r_1 e r_2 independentemente a partir da distribuição retangular $R(0,1)$
b)	Calcule $z_1 = \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2)$ e $z_2 = \sqrt{-2 \ln r_1} \sin(2\pi r_2)$

C.5 Distribuição gaussiana multivariada

C.5.1 A distribuição multivariada mais importante é a distribuição gaussiana multivariada (ou conjunta) $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$, onde $\boldsymbol{\mu}$ é um vetor de esperanças de dimensão $n \times 1$ e \mathbf{V} é a matriz de covariâncias de dimensão $n \times n$.

C.5.2 Amostragens a partir de $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ [45, 49] podem ser obtidas empregando o procedimento da Tabela C.4.

NOTA 1 Se \mathbf{V} é definida positiva (ou seja, todos os seus autovalores são estritamente positivos), o fator \mathbf{R} de Cholesky é único [23, pág. 204].

NOTA 2 Se \mathbf{V} não é definida positiva, talvez devido a erros de arredondamento numérico ou outras fontes, \mathbf{R} pode não existir. Além disso, nos casos em que um ou mais dos autovalores de \mathbf{V} são muito pequenos (mas positivos), a implementação do *software* do algoritmo de fatoração de Cholesky utilizado pode ser incapaz de obter \mathbf{R} devido aos efeitos de erros de ponto flutuante. Em qualquer destas situações, recomenda-se que \mathbf{V} seja “reparada”, isto é, que seja feita a menor alteração possível de \mathbf{V} , de maneira tal que o fator \mathbf{R} de Cholesky para a matriz modificada seja bem definido. O fator resultante é exato para uma matriz de covariâncias que esteja numericamente próxima da matriz \mathbf{V} original. Um procedimento simples de reparo está disponível [49, pág. 322] para esse propósito, estando incorporado no gerador MULTNORM [45].

NOTA 3 Se \mathbf{V} é definida semi-positiva, a decomposição em autovalores $\mathbf{V} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^T$ pode ser obtida, sendo \mathbf{Q} uma matriz ortogonal e $\boldsymbol{\Lambda}$ uma matriz diagonal. Então, $\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\mathbf{Q}^T$ pode ser usada para a obtenção de amostragens a partir de $N(\mathbf{0}, \mathbf{V})$, mesmo que \mathbf{V} seja posto deficiente.

Tabela C.4 - Um gerador de números aleatórios gaussiano multivariado (C.5.2)

Parâmetro de entrada	
n	Dimensão da distribuição gaussiana multivariada
$\boldsymbol{\mu}$	Vetor de esperanças de dimensão $n \times 1$
\mathbf{V}	Matriz de covariâncias de dimensão $n \times n$
q	Quantidade de números pseudoaleatórios gaussianos multivariados a serem gerados
Parâmetro de saída	
\mathbf{X}	Matriz de dimensão $n \times q$, cuja j -ésima coluna é uma amostragem da distribuição gaussiana multivariada
Cálculo	
a) Obtenha o fator de Cholesky \mathbf{R} de \mathbf{V} , isto é, a matriz triangular superior satisfazendo $\mathbf{V} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$. (Para gerar q números pseudoaleatórios é necessário executar esta fatoração matricial uma vez somente). b) Gere uma matriz \mathbf{Z} de variáveis gaussianas padrão de dimensão $n \times q$ c) Obtenha $\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}^T + \mathbf{R}^T \mathbf{Z},$ onde $\mathbf{1}$ denota um vetor de unidades (1) de dimensão $q \times 1$	

C.5.3 A Figura C.1 mostra 200 pontos gerados usando o gerador MULTNORM [45] a partir de $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$, onde

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2,0 \\ 3,0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 2,0 & 1,9 \\ 1,9 & 2,0 \end{bmatrix}$$

isto é, no qual as duas grandezas em questão estão positivamente correlacionadas. Geradores similares estão disponíveis em outras referências [12].

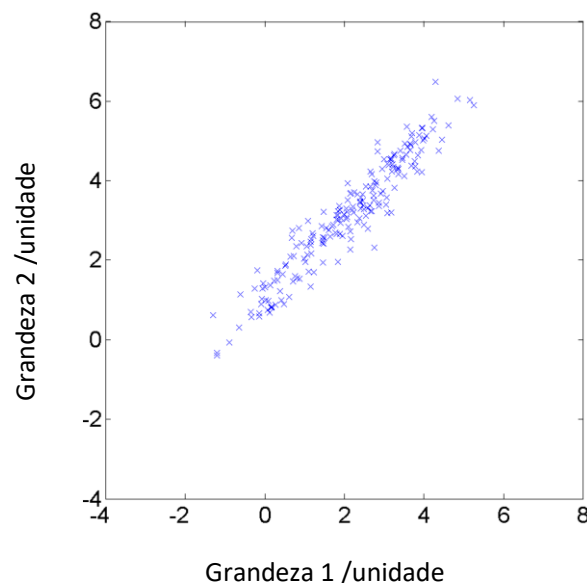


Figura C.1 - Pontos amostrados a partir de uma distribuição gaussiana bivariada com correlação positiva (C.5.3, C.5.4)

C.5.4 Na Figura C.1, os pontos abrangem uma elipse inclinada alongada. Se os elementos fora da diagonal de V fossem substituídos por zero, os pontos abrangeriam um círculo. Se os elementos da diagonal fossem desiguais e os elementos fora da diagonal mantidos com valor zero, os pontos abrangeriam uma elipse cujos eixos seriam paralelos aos eixos do gráfico. Se os elementos fora da diagonal fossem negativos e, portanto, as grandezas relacionadas se correlacionassem negativamente, o eixo maior da elipse teria um gradiente negativo e não positivo, como na Figura C.1.

C.6 Distribuição- t

O procedimento na Tabela C.5 apresenta um método [29], [44, pág. 63] para obter amostragens a partir da distribuição- t com ν graus de liberdade.

Tabela C.5 – Um gerador de números pseudoaleatórios com distribuição- t (C.6)

Parâmetro de entrada	
ν	Número de graus de liberdade
Parâmetro de saída	
t	Amostragem de uma distribuição- t com ν graus de liberdade
Cálculo	
	a) Gere, independentemente, duas amostras r_1 e r_2 a partir da distribuição retangular $R(0,1)$ b) Se $r_1 < 1/2$, obtenha $t = 1/(4r_1 - 1)$ e $v = r_2/t^2$; noutro caso, obtenha $t = 4r_1 - 3$ e $v = r_2$ c) Se $v < 1 - t /2$ ou $v < (1 + t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$, aceite t como uma amostragem da distribuição- t ; de outra forma, repita o procedimento a partir da etapa a)

NOTA ν deve ser maior que dois para que o desvio-padrão da distribuição- t com ν graus de liberdade seja finito.

Anexo D

Aproximação contínua para a função distribuição da grandeza de saída

D.1 Por vezes é útil trabalhar com uma aproximação contínua, digamos $\tilde{G}_Y(\eta)$, para a função distribuição da grandeza de saída Y , em vez da representação discreta \mathbf{G} vista em 7.5.

NOTA Trabalhar com uma aproximação contínua significa, por exemplo, que

- amostragem a partir da função distribuição pode ser realizada sem a necessidade de arredondamento, como no caso discreto, e
- métodos numéricos que necessitam de continuidade para sua operação podem ser usados para determinar o mínimo intervalo de abrangência.

D.2 Para obter $\tilde{G}_Y(\eta)$, considere a representação discreta $\mathbf{G} = \{y_{(r)}, r = 1, \dots, M\}$ de $G_Y(\eta)$ vista em 7.5.1, após substituir, se necessário (passo b), valores de modelo replicados de $y_{(r)}$ do referido subitem. Execute, então, as seguintes etapas:

- atribua probabilidades acumulativas uniformemente espaçadas $p_r = (r - 1/2)/M$, $r = 1, \dots, M$ aos $y_{(r)}$ [8]. Os valores numéricos p_r , $r = 1, \dots, M$, são os pontos médios de M intervalos de probabilidade contíguos de largura $1/M$ entre zero e um;
- obtenha $\tilde{G}_Y(\eta)$ como a função (contínua) estritamente crescente, linear em segmentos, ligando os M pontos $(y_{(r)}, p_r)$, $r = 1, \dots, M$:

$$\tilde{G}_Y(\eta) = \frac{r-1/2}{M} + \frac{\eta - y_{(r)}}{M(y_{(r+1)} - y_{(r)})}, \quad y_{(r)} \leq \eta \leq y_{(r+1)}, \quad r = 1, \dots, M - 1. \quad (\text{D.1})$$

NOTA A expressão acima (D.1) fornece uma base conveniente para amostragem a partir de $\tilde{G}_Y(\eta)$ como subsídio a um estágio posterior de avaliação de incerteza. Ver C.2 para amostragem inversa a partir de uma função distribuição. Algumas bibliotecas e pacotes de *softwares* fornecem ferramentas úteis para interpolação de segmentos lineares. Uma vez que $\tilde{G}_Y(\eta)$ é linear em segmentos, sua inversa também o é, e tais ferramentas podem ser prontamente aplicadas.

D.3 A Figura D.1 ilustra $\tilde{G}_Y(\eta)$ obtida usando o MMC baseado em $M = 50$ valores amostrados a partir de uma FDP gaussiana $g_Y(\eta)$ com Y tendo esperança 3 e desvio-padrão 1.

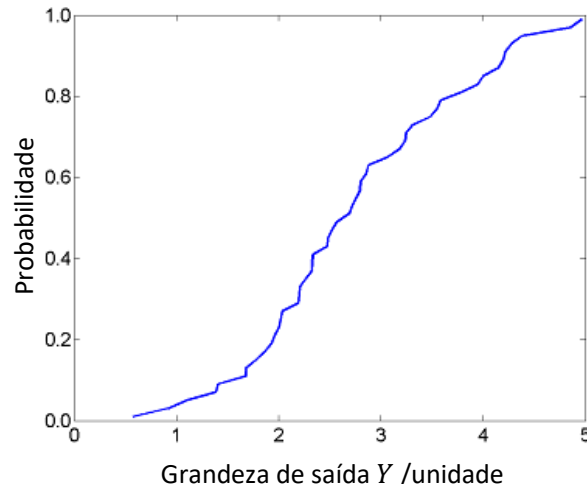


Figura D.1 – Uma aproximação $\tilde{G}_Y(\eta)$ para a função distribuição $G_Y(\eta)$ (D.3). “Unidade” denota unidade arbitrária

D.4 Considere $\tilde{g}_Y(\eta) = \tilde{G}'_Y(\eta)$, com $\tilde{G}_Y(\eta)$ dada pela expressão (D.1). A função $\tilde{g}_Y(\eta)$ é constante em segmentos, com pontos de descontinuidade em $\eta = y_{(1)}, \dots, y_{(M)}$. A esperança \tilde{y} e o desvio-padrão $u(\tilde{y})$ de Y , descritos por $\tilde{g}_Y(\eta)$, são tomados, respectivamente, como uma estimativa de Y e como a incerteza-padrão associada com essa estimativa. \tilde{y} e $u(\tilde{y})$ são dados por

$$\tilde{y} = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M y_{(r)} \tag{D.2}$$

e

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{1}{M} \left(\sum_{r=1}^M y_{(r)} - \tilde{y} \right)^2 - \frac{1}{6} \sum_{r=1}^{M-1} (y_{(r+1)} - y_{(r)})^2, \tag{D.3}$$

onde a dupla aspa no símbolo do somatório indica que o primeiro e o último termos na soma devem ser tomados com peso 0,5.

NOTA Para um valor numérico suficientemente grande de M (por exemplo, 10^5 , ou maior), \tilde{y} e $u(\tilde{y})$ obtidos usando as fórmulas (D.2) e (D.3) seriam geralmente indistinguíveis, para fins práticos, daqueles obtidos usando as fórmulas (16) e (17), respectivamente.

D.5 Seja α qualquer valor entre zero e $1 - p$, onde p é a probabilidade de abrangência requerida (por exemplo, 0,95). Os pontos extremos de um intervalo de abrangência de $100p$ % podem ser obtidos de $\tilde{G}_Y(\eta)$ por interpolação linear inversa. Para determinar o ponto extremo inferior y_{inf} tal que $\alpha = \tilde{G}_Y(y_{\text{inf}})$, identifique o índice r para o qual os pontos $(y_{(r)}, p_r)$ e $(y_{(r+1)}, p_{r+1})$ satisfaçam

$$p_r \leq \alpha < p_{r+1}.$$

Então, pela interpolação linear inversa,

$$y_{\text{inf}} = y_{(r)} + (y_{(r+1)} - y_{(r)}) \frac{\alpha - p_r}{p_{r+1} - p_r}$$

De modo similar, o ponto extremo superior y_{sup} , determinado de modo que $p + \alpha = \tilde{G}_Y(y_{\text{sup}})$, é calculado como

$$y_{\text{sup}} = y_{(s)} + (y_{(s+1)} - y_{(s)}) \frac{p + \alpha - p_s}{p_{s+1} - p_s},$$

onde o índice s é tal que os pontos $(y_{(s)}, p_s)$ e $(y_{(s+1)}, p_{s+1})$ satisfazem à inequação

$$p_s \leq p + \alpha < p_{s+1}.$$

D.6 A escolha de $\alpha = 0,025$ produz o intervalo de abrangência definido pelos quantis 0,025 e 0,975. Essa escolha fornece para Y o intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 %.

D.7 O mínimo intervalo de abrangência pode geralmente ser obtido de $\tilde{G}_Y(\eta)$ pela determinação de α de tal modo que $\tilde{G}_Y^{-1}(p + \alpha) - \tilde{G}_Y^{-1}(\alpha) = H(\alpha)$, digamos, seja um mínimo. Uma abordagem numérica direta para determinar esse mínimo é avaliar $H(\alpha)$ para um número grande $\{\alpha_k\}$ de valores de α , uniformemente espaçados entre zero e $1 - p$, e escolher, dentro do grupo $\{\alpha_k\}$, aquele valor α_ℓ que leva ao elemento com menor valor dentro do conjunto $\{H(\alpha_k)\}$.

D.8 O cálculo de um intervalo de abrangência é facilitado se pM é um inteiro. Neste caso, o valor numérico de α , tal que $H(\alpha)$ seja um mínimo, é igual a r^*/M , onde r^* é o índice r tal que a largura do intervalo $y_{(r+pM)} - y_r$, para $r = 1, \dots, (1 - p)M$, tenha o menor valor possível.

Anexo E

Intervalo de abrangência para a convolução quádrupla de uma distribuição retangular

E.1 Em 9.2.3.2 é reportada a solução analítica

$$\pm 2\sqrt{3}[2 - (3/5)^{1/4}] \approx \pm 3,88. \quad (\text{E.1})$$

Ela constitui os pontos extremos do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 % para a grandeza de saída Y em um modelo aditivo contendo quatro grandezas de entrada com esperanças zero e desvios-padrão unitários, cujas FDPs, por sua vez, são distribuições retangulares idênticas. Esse resultado é tratado neste anexo.

E.2 A distribuição retangular $R(a, b)$ (ver 6.4.2) assume o valor constante $(b - a)^{-1}$ para $a \leq \rho \leq b$, sendo zero fora desse intervalo. A n -ésima convolução de $R(0, 1)$ é o B-spline $B_n(\rho)$ de ordem n (grau $n - 1$) com nós $0, \dots, n$ [46]. Uma expressão explícita é [6]

$$B_n(\rho) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{r=0}^n {}^n C_r (-1)^r (\rho - r)_+^{n-1},$$

onde ${}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, $z_+ = \max(z, 0)$.

Em particular,

$$B_4(\rho) = \frac{1}{6} \rho^3, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

(com expressões polinomiais cúbicas diferentes para $B_4(\rho)$ em outros intervalos entre nós adjacentes), e conseqüentemente

$$\int_0^1 B_4(\rho) d\rho = \left[\frac{1}{24} \rho^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24} \approx 0,0417.$$

E.3 O ponto extremo à esquerda y_{inf} do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 % recai entre zero e a unidade, uma vez que

$$0,025 = \frac{1}{40} < \frac{1}{24}$$

da área sob a FDP situa-se à esquerda de y_{inf} , a qual é, desse modo, dada por

$$\int_0^{y_{\text{inf}}} B_4(\rho) d\rho = \frac{1}{24} y_{\text{inf}}^4 = \frac{1}{40},$$

isto é,

$$y_{\text{inf}} = (3/5)^{1/4}.$$

Por simetria, o ponto extremo à direita é

$$y_{\text{sup}} = 4 - (3/5)^{1/4}.$$

Dessa forma, o intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 % é

$$[(3/5)^{1/4}, 4 - (3/5)^{1/4}] \equiv 2 \pm (2 - (3/5)^{1/4}).$$

O intervalo de abrangência correspondente para a convolução quádrupla da FDP retangular $R(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (a qual tem esperança zero e desvio-padrão unitário) é obtido com o deslocamento desse resultado em duas unidades e multiplicando-o por $2\sqrt{3}$ unidades, produzindo a expressão (E.1).

Anexo F

O problema da comparação de perdas

Este anexo trata de alguns detalhes do problema da comparação de perdas (ver 9.4). O subitem F.1 fornece a esperança e o desvio-padrão de δY (ver 9.4.2.1.2). O subitem F.2 fornece, analiticamente, a FDP para δY quando $x_1 = x_2 = r(x_1, x_2) = 0$ (ver 9.4.2.1.2). O subitem F.3 aplica a metodologia de incerteza do GUM para grandezas de entrada não correlacionadas e correlacionadas (ver 9.4.2.1.3 e 9.4.3.1.1).

F.1 Esperança e desvio-padrão obtidos analiticamente

F.1.1 A variância de uma grandeza X pode ser expressa em termos de esperanças como [42, página 124]

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Assim,

$$E(X^2) = [E(X)]^2 + V(X) = x^2 + u^2(x)$$

onde x é a melhor estimativa de X e $u(x)$ a incerteza-padrão associada com x . Com isso, para o modelo (28), viz. $\delta Y = 1 - Y = X_1^2 + X_2^2$,

$$\delta y = E(\delta Y) = x_1^2 + x_2^2 + u^2(x_1) + u^2(x_2).$$

Este resultado aplica-se

- a) independentemente de quais FDPs são atribuídas a X_1 e X_2 , e
- b) com X_1 e X_2 independentes ou não.

F.1.2 A incerteza-padrão associada com δy pode ser obtida de

$$u^2(\delta y) = u^2(x_1^2) + u^2(x_2^2) + 2u(x_1^2, x_2^2),$$

onde, para $i = 1$ e $i = 2$, $u^2(x_i^2) = V(X_i^2)$, e $u(x_1^2, x_2^2) = \text{Cov}(X_1^2, X_2^2)$. Então, aplicando o Teorema de Price para distribuições gaussianas [40, 41],

$$u^2(\delta y) = 4u^2(x_1)x_1^2 + 4u^2(x_2)x_2^2 + 2u^4(x_1) + 2u^4(x_2) + 4u^2(x_1, x_2) + 8u(x_1, x_2)x_1x_2. \quad (\text{F.1})$$

Considerando $x_2 = 0$ e $u(x_2) = u(x_1)$, e substituindo $u(x_1, x_2)$ por $r(x_1, x_2)u^2(x_1)$,

$$u(\delta y) = 2 \{x_1^2 + [1 + r^2(x_1, x_2)]u^2(x_1)\}^{1/2}u(x_1).$$

F.1.3 Quando X_1 e X_2 não são correlacionadas, isto é, $u(x_1, x_2) = 0$, a expressão (F.1) torna-se

$$u^2(\delta y) = 4u^2(x_1)x_1^2 + 4u^2(x_2)x_2^2 + 2u^4(x_1) + 2u^4(x_2). \quad (\text{F.2})$$

A expressão (F.2) pode ser conferida pela aplicação da fórmula (10) do GUM [GUM 5.1.2] e da fórmula que se lhe segue [GUM 5.1.2 NOTA].

F.2 Solução analítica para estimativa do zero do coeficiente de reflexão de tensão com covariância associada zero

F.2.1 Para o caso $x_1 = x_2 = r(x_1, x_2) = 0$ e $u(x_1) = u(x_2)$, a FDP $g_Y(\eta)$ para Y pode ser obtida analiticamente. É importante ter uma solução desse tipo para fins adicionais de validação. Nas circunstâncias acima,

$$\delta Y = u^2(x_1) \left[\frac{X_1^2}{u^2(x_1)} + \frac{X_2^2}{u^2(x_2)} \right].$$

F.2.2 O termo entre colchetes é a soma, digamos Z , dos quadrados de duas grandezas independentes, cada uma distribuída como uma FDP gaussiana padrão. Assim, a soma será uma distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade [42, página 177], de modo que

$$\delta Y = u^2(x_1)Z,$$

onde Z tem FDP

$$g_Z(z) = \chi_2^2(z) = e^{-z/2}/2.$$

F.2.3 A aplicação de uma fórmula geral [42, páginas 57-61] para a FDP $g_Y(\eta)$ de uma função diferenciável e estritamente decrescente de uma variável (aqui Z) com uma FDP especificada fornece

$$g_Y(\eta) = \frac{1}{u^2(x_1)} \chi_2^2\left(\frac{\eta}{u^2(x_1)}\right) = \frac{1}{2u^2(x_1)} \exp\left(-\frac{\eta}{2u^2(x_1)}\right), \quad \eta \geq 0$$

F.2.4 A esperança de δY é dada por

$$\delta y = E(\delta Y) = \int_0^\infty \eta g_Y(\eta) d\eta = 2u^2(x_1)$$

e a variância

$$u^2(\delta y) = V(\delta Y) = \int_0^\infty (\eta - y)^2 g_Y(\eta) d\eta = 4u^4(x_1),$$

isto é, o desvio-padrão é $2u^2(x_1)$, resultados consistentes com aqueles do subitem F.1.

F.2.5 Por integração, a função distribuição correspondente é

$$G_Y(\eta) = 1 - \exp\left(-\frac{\eta}{2u^2(x_1)}\right), \quad \eta \geq 0.$$

F.2.6 Seja δy_α aquele η na expressão (F.3) que corresponde a $G_Y(\eta) = \alpha$ para qualquer α que satisfaz $0 \leq \alpha \leq 1 - p$. Então

$$\delta y_\alpha = -2u^2(x_1) \ln(1 - \alpha)$$

e um intervalo de abrangência de 100p % para δY (ver 7.7) é

$$[\delta y_\alpha, \delta y_{p+\alpha}] \equiv [-2u^2(x_1)\ln(1 - \alpha), -2u^2(x_1)\ln(1 - p - \alpha)] \quad (\text{F.4})$$

com comprimento

$$H(\alpha) = -2u^2(x_1)\ln\left(1 - \frac{p}{1 - \alpha}\right).$$

F.2.7 O mínimo intervalo de abrangência de 100p % é obtido pela determinação do valor de α que minimiza $H(\alpha)$ (ver 5.3.4). Como $H(\alpha)$ é uma função estritamente crescente de α para $0 \leq \alpha \leq 1 - p$, $H(\alpha)$ é minimizado quando $\alpha = 0$. Assim, o mínimo intervalo de abrangência de 100p % para δY é:

$$[0, -2u^2(x_1) \ln(1 - p)].$$

Para $u(x_1) = 0,005$, o mínimo intervalo de abrangência de 95 % é

$$[0; \quad 0,000 \ 149 \ 8].$$

F.2.8 O intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de 95 % para δY é obtido fazendo $\alpha = (1 - p)/2$ (ver 5.3.3):

$$[-2u^2(x_1) \ln 0,975; \quad -2u^2(x_1) \ln 0,025] = [0,000 \ 001 \ 3; \quad 0,000 \ 184 \ 4],$$

o qual é 20 % maior que o mínimo intervalo de abrangência de 95 %.

NOTA A análise acima é indicativa de uma abordagem analítica que pode ser aplicada a alguns problemas desse tipo. Neste caso particular, os resultados poderiam de fato ter sido obtidos mais diretamente, já que $G_Y(\eta)$ é estritamente crescente e o mínimo intervalo de abrangência estará sempre na região de maior densidade.

F.3 Metodologia de incerteza do GUM aplicada ao problema da comparação de perdas

F.3.1 Grandezas de entrada não correlacionadas

F.3.1.1 O problema da comparação de perdas, considerado em 9.4, tem como modelo de medição

$$\delta Y = f(\mathbf{X}) = f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2,$$

onde a X_1 e X_2 estão associadas FDPs gaussianas com esperanças x_1 e x_2 e variâncias $u^2(x_1)$ e $u^2(x_2)$, respectivamente.

F.3.1.2 A aplicação do subitem 5.1.1 do GUM fornece

$$\delta y = x_1^2 + x_2^2$$

como a estimativa de δY . As únicas derivadas parciais do modelo, não-trivialmente diferentes de zero são, para $i = 1$ e 2 ,

$$\frac{\delta f}{\delta X_i} = 2X_i, \quad \frac{\delta^2 f}{\delta X_i^2} = 2.$$

F.3.1.3 Então, a aplicação do subitem 5.1.2 do GUM fornece, para a incerteza-padrão $u(\delta y)$,

$$u^2(\delta y) = \left[\left(\frac{\delta f}{\delta X_1} \right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\delta f}{\delta X_2} \right)^2 u^2(x_2) \right] \Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} = 4x_1^2 u^2(x_1) + 4x_2^2 u^2(x_2), \quad (\text{F.5})$$

com base em uma aproximação da série de Taylor de primeira ordem para $f(\mathbf{X})$. Se a não-linearidade de f for significativa [GUM 5.1.2 NOTA], o termo

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\delta^2 f}{\delta X_1^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta X_2^2} \right] \Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{x}} u^2(x_1) u^2(x_2)$$

precisa ser acrescentado à fórmula (F.5), caso em que esta fórmula se torna

$$u^2(\delta y) = 4x_1^2 u^2(x_1) + 4x_2^2 u^2(x_2) + 4u^2(x_1)u^2(x_2). \quad (\text{F.6})$$

F.3.1.4 Um intervalo de abrangência de 95 % para δY é dado por

$$\delta y \pm 2u(\delta y),$$

como consequência de δy ter uma FDP gaussiana.

F.3.2 Grandezas de entrada correlacionadas

F.3.2.1 Quando as grandezas de entrada são correlacionadas, a matriz de incerteza associada com as melhores estimativas das grandezas de entrada é dada em (27).

F.3.2.2 A aplicação do subitem 5.2.2 do GUM fornece

$$\begin{aligned}
 u^2(\delta y) &= \left[\left(\frac{\delta f}{\delta X_1} \right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\delta f}{\delta X_2} \right)^2 u^2(x_2) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\delta f}{\delta X_1} \frac{\delta f}{\delta X_2} r(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) \right] \Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}} \\
 &= 4x_1^2 u^2(x_1) + 4x_2^2 u^2(x_2) + 8r(x_1, x_2) x_1 x_2 u(x_1) u(x_2).
 \end{aligned}
 \tag{F.7}$$

Anexo G

Glossário dos símbolos principais

A	variável aleatória que representa o limite inferior de uma distribuição retangular com limites prescritos não exatos
a	limite inferior de um intervalo em que se sabe que uma variável aleatória está contida
a	ponto central do intervalo em que se sabe que está contido o limite inferior A de uma distribuição retangular com limites prescritos não exatos
B	variável aleatória que representa o limite superior de uma distribuição retangular com limites prescritos não exatos
b	limite superior de um intervalo em que se sabe que uma variável aleatória está contida
b	ponto central do intervalo em que se sabe que está contido o limite superior B de uma distribuição retangular com limites prescritos não exatos
$C\text{Trap}(a, b, d)$	distribuição retangular com limites prescritos não exatos (distribuição-trapezoidal curvilínea) com parâmetros a , b e d
$\text{Cov}(X_i, X_j)$	covariância de duas variáveis aleatórias X_i e X_j
c	número inteiro com n_{dig} dígitos decimais
c_i	i -ésimo coeficiente de sensibilidade, obtido como a derivada parcial do modelo de medição f com relação à i -ésima grandeza de entrada X_i , avaliada na estimativa vetorial \mathbf{x} da grandeza de entrada vetorial \mathbf{X}
d	semi-largura dos intervalos em que se sabe que estão contidos o limite inferior A e o limite superior B de uma distribuição retangular com limites prescritos não exatos
d_{sup}	valor absoluto da diferença entre os pontos extremos superiores dos intervalos de abrangência obtidos pela metodologia de incerteza do GUM e pelo Método de Monte Carlo
d_{inf}	valor absoluto da diferença entre os pontos extremos inferiores dos intervalos de abrangência obtidos pela metodologia de incerteza do GUM e pelo Método de Monte Carlo
e	base dos logaritmos naturais
$E(X)$	Esperança de uma variável aleatória X
$E(\mathbf{X})$	Esperança vetorial de uma variável aleatória vetorial \mathbf{X}
$E(X^r)$	r -ésimo momento de uma variável aleatória X
$\text{Ex}(\lambda)$	distribuição exponencial com parâmetro λ
f	modelo matemático de medição, expresso como uma relação funcional entre uma grandeza de saída Y e as grandezas de entrada X_1, \dots, X_N das quais Y depende

G	representação discreta da função distribuição $G_Y(\eta)$ para a grandeza de saída Y a partir de um procedimento de Monte Carlo
$G(\alpha, \beta)$	distribuição gama com parâmetros α e β
$g_X(\xi)$	função densidade de probabilidade com variável ξ para a grandeza de entrada X
$g_X(\xi)$	função densidade de probabilidade conjunta (multivariada) com variável vetorial ξ para a grandeza de entrada vetorial \mathbf{X}
$g_{X_i}(\xi_i)$	função densidade de probabilidade com variável ξ_i para a grandeza de entrada X_i
$G_Y(\eta)$	função distribuição com variável η para a grandeza de saída Y
$\tilde{G}_Y(\eta)$	aproximação contínua da função distribuição $G_Y(\eta)$ para a grandeza de saída Y
$g_Y(\eta)$	função densidade de probabilidade com variável η para a grandeza de saída Y
$\tilde{g}_Y(\eta)$	derivada de $\tilde{G}_Y(\eta)$ com respeito a η , a qual provê uma aproximação numérica para a função densidade de probabilidade $g_Y(\eta)$ para a grandeza de saída Y
J	o menor inteiro maior que ou igual a $100/(1 - p)$
k_p	fator de abrangência correspondente à probabilidade de abrangência p
ℓ	um número inteiro quando da representação de um valor numérico como $c \times 10^\ell$, onde c é um número inteiro com n_{dig} dígitos decimais
M	número de iterações de Monte Carlo
N	número de grandezas de entrada X_1, \dots, X_N
$N(0,1)$	distribuição gaussiana padrão
$N(\mu, \sigma^2)$	distribuição gaussiana com parâmetros μ e σ^2
$N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$	distribuição gaussiana multivariada com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e \mathbf{V}
n	número de indicações em uma série
n_{dig}	número de dígitos decimais tomados como significativos num valor numérico
$\text{Pr}(z)$	probabilidade do evento z
p	probabilidade de abrangência
q	parte inteira de $pM + 1/2$
q	número de objetos contados numa amostra de tamanho especificado
R	matriz triangular superior
$R(0,1)$	distribuição retangular padrão, no intervalo $[0, 1]$
$R(a, b)$	distribuição retangular no intervalo $[a, b]$
$r(x_i, x_j)$	coeficiente de correlação associado com as estimativas x_i e x_j das grandezas de entrada X_i e X_j
s	desvio-padrão de uma série de n indicações x_1, \dots, x_n
s_p	desvio-padrão <small>agrupado</small> obtido de várias séries de indicações

T	sobrescrito que denota uma matriz transposta
s_z	desvio-padrão associado com a média z dos valores $z^{(1)}, \dots, z^{(h)}$ em um procedimento adaptativo de Monte Carlo, com z podendo denotar uma estimativa y da grandeza de saída Y , a incerteza-padrão $u(y)$ associada com y , ou o ponto extremo esquerdo y_{inf} ou o ponto extremo direito y_{sup} de um intervalo de abrangência para Y .
$T(a, b)$	distribuição-triangular no intervalo $[a, b]$
$\text{Trap}(a, b, \beta)$	distribuição-trapezoidal, com parâmetro β , no intervalo $[a, b]$
t_ν	distribuição-t centralizada com número de graus de liberdade igual a ν
$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	distribuição-t escalada e deslocada com parâmetros μ e σ^2 e número de graus de liberdade igual a ν
$U(0, 1)$	distribuição arco seno padrão (em forma de U) no intervalo $[0, 1]$
$U(a, b)$	distribuição arco seno (em forma de U) no intervalo $[a, b]$
U_p	incerteza expandida correspondente a uma probabilidade de abrangência p
U_x	matriz de incerteza associada com o vetor de estimativas \mathbf{x} do vetor de grandezas de entrada \mathbf{X} .
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	vetor $(u(x_1), \dots, u(x_N))^T$ de incertezas-padrão associado ao vetor de estimativas \mathbf{x} da grandeza de entrada vetorial \mathbf{X}
$u(x_i)$	incerteza-padrão associada à estimativa x_i da grandeza de entrada X_i
$u(x_i, x_j)$	covariância associada às estimativas x_i e x_j das grandezas de entrada X_i e X_j
$u(y)$	incerteza-padrão associada à estimativa y da grandeza de saída Y
$u(\tilde{y})$	incerteza-padrão associada a \tilde{y}
$u_c(y)$	incerteza-padrão combinada associada à estimativa y da grandeza de saída Y
$u_i(y)$	i -ésima componente de incerteza da incerteza-padrão $u(y)$ associada à estimativa y da grandeza de saída Y
V	matriz de covariância (de variância-covariância)
$V(X)$	variância de uma variável aleatória X
$V(\mathbf{X})$	matriz de covariância para a variável aleatória vetorial \mathbf{X}
w	semi-largura $(b - a)/2$ de um intervalo $[a, b]$
X	grandeza de entrada, assumida como uma variável aleatória
\mathbf{X}	vetor $(X_1, \dots, X_N)^T$ de grandezas de entrada, assumidas como variáveis aleatórias, das quais a grandeza de saída Y depende
X_i	i -ésima grandeza de entrada, assumida como uma variável aleatória, da qual a grandeza de saída Y depende
x	estimativa (esperança) de X
\mathbf{x}	vetor de estimativas (vetor de esperanças) $(x_1, \dots, x_N)^T$ de \mathbf{X}

x	média de uma série de n indicações x_1, \dots, x_n
x_i	estimativa (esperança) de X_i
x_i	i -ésima indicação numa série
$x_{i,r}$	r -ésima iteração de Monte Carlo a partir da função densidade de probabilidade de X_i
x_r	r -ésima iteração de Monte Carlo, contendo valores $x_{1,r}, \dots, x_{N,r}$, gerados a partir das funções densidade de probabilidade para as N grandezas de entrada X_1, \dots, X_N , ou a partir da função densidade de probabilidade conjunta para \mathbf{X}
Y	grandezza de saída (escalar) assumida como uma variável aleatória
y	estimativa (esperança) de Y
\tilde{y}	estimativa de Y , obtida como a média de M valores do modelo y_r a partir de um processo de Monte Carlo ou como a esperança de Y caracterizado pela função densidade de probabilidade $\tilde{g}_Y(\eta)$
y_{sup}	ponto extremo superior de um intervalo de abrangência para Y
y_{inf}	ponto extremo inferior de um intervalo de abrangência para Y
y_r	r -ésimo valor do modelo $f(\mathbf{x}_r)$
$y(r)$	r -ésimo valor do modelo após a disposição dos y_r em ordem crescente
$z^{(h)}$	h -ésimo valor em um procedimento adaptativo de Monte Carlo, onde z pode denotar uma estimativa y da grandezza de saída Y , a incerteza-padrão $u(y)$ associada a y , ou o ponto extremo inferior y_{inf} ou o ponto extremo superior y_{sup} de um intervalo de abrangência para Y
α	valor de probabilidade
α	parâmetro de uma distribuição gama
β	parâmetro de uma distribuição-trapezoidal, igual à razão entre a semi-largura do topo do trapezoide e a semi-largura da base
β	parâmetro de uma distribuição gama
$\Gamma(z)$	função gama com variável z
δ	tolerância numérica associada com um valor numérico
$\delta(z)$	função delta de Dirac com variável z
η	variável referente aos valores possíveis da grandezza de saída Y
λ_1	semi-largura do topo do trapezoide para uma distribuição-trapezoidal
λ_2	semi-largura da base do trapezoide para uma distribuição-trapezoidal
μ	esperança de uma grandezza caracterizada por uma distribuição de probabilidade
ν	número de graus de liberdade de uma distribuição-t ou de uma distribuição qui-quadrado
ν_{eff}	número efetivo de graus de liberdade associado à incerteza-padrão $u(y)$

ν_p	número de graus de liberdade associado a uma incerteza-padrão agrupada s_p obtida de diversas séries de indicações
ξ	variável que descreve os possíveis valores de uma variável aleatória X
$\boldsymbol{\xi}$	variável vetorial $(\xi_1, \dots, \xi_N)^T$ que descreve os possíveis valores de uma grandeza de entrada vetorial \mathbf{X}
ξ_i	variável que descreve os possíveis valores da grandeza de entrada X_i
σ	desvio-padrão de uma grandeza caracterizada por uma distribuição de probabilidade
σ^2	variância (desvio-padrão ao quadrado) de uma grandeza caracterizada por uma distribuição de probabilidade
Φ	fase de uma grandeza que evolui ciclicamente de forma sinusoidal
χ^2_ν	distribuição qui-quadrado com um número de graus de liberdade igual a ν

Bibliografia

- [1] Beatty, R. W. Insertion loss concepts. *Proc. IEEE* 52 (1964), 663–671.
- [2] Berthouex, P. M., and Brown, L. C. *Statistics for Environmental Engineers*. CRC Press, USA, 1994.
- [3] Box, G. E. P., and Muller, M. A note on the generation of random normal variates. *Ann. Math. Statist.* 29 (1958), 610–611.
- [4] Chan, A., Golub, G., and LeVeque, R. Algorithms for computing the sample variance: analysis and recommendations. *Amer. Stat.* 37 (1983), 242–247.
- [5] Conte, S. D., and de Boor, C. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach*. McGraw-Hill, 1972.
- [6] Cox, M. G. The numerical evaluation of B-splines. *J. Inst. Math. Appl.* 10 (1972), 134–149.
- [7] Cox, M. G., and Harris, P. M. Software specifications for uncertainty evaluation. Tech. Rep. DEM-ES-010, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2006.
- [8] Cox, M. G., and Harris, P. M. SSfM Best Practice Guide No. 6, Uncertainty evaluation. Tech. Rep. DEM-ES-011, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2006.
- [9] Cox, M. G., and Siebert, B. R. L. The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty. *Metrologia* 43 (2006), S178–S188.
- [10] David, H. A. *Order Statistics*. Wiley, New York, 1981.
- [11] Dekker, T. J. Finding a zero by means of successive linear interpolation. In *Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra* (London, 1969), B. Dejon and P. Henrici, Eds., Wiley Interscience.
- [12] Devroye, L. *Non-Uniform Random Number Generation*. Springer, New York, 1986.
- [13] Dietrich, C. F. *Uncertainty, Calibration and Probability*. Adam Hilger, Bristol, UK, 1991.
- [14] Dowson, D. C., and Wragg, A. Maximum entropy distributions having prescribed first and second order moments. *IEEE Trans. IT* 19 (1973), 689–693.
- [15] EA. Expression of the uncertainty of measurement in calibration. Tech. Rep. EA-4/02, European Cooperation for Accreditation, 1999.
- [16] Elster, C. Calculation of uncertainty in the presence of prior knowledge. *Metrologia* 44 (2007), 111–116.
- [17] EURACHEM/CITAC. Quantifying uncertainty in analytical measurement. Tech. Rep. Guide CG4, EURACHEM/CITEC, 2000. Second edition.
- [18] Evans, M., Hastings, N., and Peacock, B. *Statistical distributions*. Wiley, 2000.
- [19] Frenkel, R. B. Statistical background to the ISO ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’. Tech. Rep. Monograph 2, NML Technology Transfer Series, Publication number TIP P1242, National Measurement Laboratory, CSIRO, Australia, 2002.
- [20] Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., and Rubin, D. B. *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall, London, 2004.
- [21] Gleser, L. J. Assessing uncertainty in measurement. *Stat. Sci.* 13 (1998), 277–290.

-
- [22] Hall, B. D., and Willink, R. Does “Welch-Satterthwaite” make a good uncertainty estimate? *Metrologia* 38 (2001), 9–15.
- [23] Higham, N. J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. SIAM, Philadelphia, 1996.
- [24] ISO. ISO 3534-1. *Statistics — Vocabulary and symbols — Part 1: Probability and general statistical terms*. International Standards Organization, Geneva. JCGM 2008
- [25] Jaynes, E. T. *Information theory and statistical mechanics*. *Phys. Rev* 106 (1957), 620–630.
- [26] Jaynes, E. T. Where do we stand on maximum entropy? In *Papers on Probability, Statistics, and Statistical Physics* (Dordrecht, The Netherlands, 1989), R. D. Rosenkrantz, Ed., Kluwer Academic, pp. 210–314. <http://bayes.wustl.edu/etj/articles/stand.on.entropy.pdf>.
- [27] Kacker, R., and Jones, A. On use of Bayesian statistics to make the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement consistent. *Metrologia* 40 (2003), 235–248.
- [28] Kerns, D. M., and Beatty, R. W. *Basic Theory of Waveguide Junctions and Introductory Microwave Network Analysis*. Pergamon Press, London, 1967.
- [29] Kinderman, A., Monahan, J., and Ramage, J. Computer methods for sampling from Student’s t-distribution. *Math. Comput* 31 (1977), 1009–1018.
- [30] L’Ecuyer, P., and Simard, R. TestU01: A software library in ANSI C for empirical testing of random number generators. <http://www.iro.umontreal.ca/~simardr/testu01/tu01.html>.
- [31] Leydold, J. Automatic sampling with the ratio-of-uniforms method. *ACM Trans. Math. Software* 26 (2000), 78–98.
- [32] Lira, I. *Evaluating the Uncertainty of Measurement. Fundamentals and Practical Guidance*. Institute of Physics, Bristol, UK, 2002.
- [33] Lira, I. H., and Wooger, W. Bayesian evaluation of the standard uncertainty and coverage probability in a simple measurement model. *Meas. Sci. Technol.* 12 (2001), 1172–1179.
- [34] Matsumoto, M., and Nishimura, T. Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Trans. Modeling and Computer Simulation* 8 (1998), 3–30.
- [35] McCullough, B. D., and Wilson, B. *On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 2003. Computational Statistics and Data Analysis* (2004).
- [36] Moler, C. B. *Numerical computing with MATLAB*. SIAM, Philadelphia, 2004.
- [37] Netlib. The Netlib repository of freely available software, documents, and databases of interest to the numerical, scientific computing, and other communities contains facilities for sampling from probability distributions, <http://www.netlib.org>.
- [38] NIST. The NIST Digital Library of Mathematical Functions contains facilities for sampling from probability distributions, <http://dlmf.nist.gov>.
- [39] OIML. *Conventional value of the result of weighing in air*. Tech. Rep. OIML D 28, Organisation Internationale de Métrologie Légale, Paris, 2004.
- [40] Papoulis, A. On an extension of Price’s theorem. *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-11 (1965).
- [41] Price, R. A useful theorem for nonlinear devices having Gaussian inputs. *IEEE Trans. Inform. Theory* IT-4 (1958), 69–72.

-
- [42] Rice, J. R. *Mathematical Statistics and Data Analysis*, second ed. Duxbury Press, Belmont, Ca., USA, 1995.
- [43] Ridler, N. M., and Salter, M. J. Propagating S-parameter uncertainties to other measurement quantities. In 58th ARFTG (Automatic RF Techniques Group) Conference Digest (2001).
- [44] Robert, C. P., and Casella, G. *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [45] Salter, M. J., Ridler, N. M., and Cox, M. G. Distribution of correlation coefficient for samples taken from a bivariate normal distribution. Tech. Rep. CETM 22, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2000.
- [46] Schoenberg, I. J. Cardinal interpolation and spline functions. *J. Approx. Theory* 2 (1969), 167–206.
- [47] Scowen, R. S. QUICKERSORT, Algorithm 271. *Comm. ACM* 8 (1965), 669.
- [48] Shannon, C. E. A mathematical theory of information. *Bell Systems Tech. J.* 27 (1948), 623–656.
- [49] Strang, G., and Borre, K. *Linear Algebra, Geodesy and GPS*. Wiley, Wellesley-Cambridge Press, 1997.
- [50] Taylor, B. N., and Kuyatt, C. E. Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of NIST measurement results. Tech. Rep. TN1297, National Institute of Standards and Technology, USA, 1994.
- [51] Weise, K., and Wöger, W. A Bayesian theory of measurement uncertainty. *Meas. Sci. Technol.* 3 (1992), 1–11.
- [52] Wichmann, B. A., and Hill, I. D. Algorithm AS183. An efficient and portable pseudo-random number generator. *Appl. Statist.* 31 (1982), 188–190.
- [53] Wichmann, B. A., and Hill, I. D. Correction. algorithm AS183. An efficient and portable pseudo-random number generator. *Appl. Statist.* 33 (1984), 123.
- [54] Wichmann, B. A., and Hill, I. D. Generating good pseudo-random numbers. *Computational Statistics and Data Analysis* 51 (2006), 1614–1622.
- [55] Willink, R. Coverage intervals and statistical coverage intervals. *Metrologia* 41 (2004), L5–L6.
- [56] Wöger, W. Probability assignment to systematic deviations by the Principle of Maximum Entropy. *IEEE Trans. Instr. Measurement* IM-36 (1987), 655–658.p
- [57] Avaliação de dados de medição: Guia para a expressão de incerteza de medição – GUM 2008. Duque de Caxias, RJ: INMETRO/CICMA/SEPIN, 2012,
http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/gum_final.pdf
- [58] Vocabulário Internacional de Metrologia: Conceitos fundamentais e gerais e termos associados (VIM 2012). Duque de Caxias, RJ : INMETRO, 2012.
http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/vim_2012.pdf

Índice alfabético

A

- algoritmo de ordenação** — **sorting algorithm**..... 7.5.1, 7.8.2
aproximação da série de Taylor — **Taylor series approximation** 4.9, 5.4.1, 5.6.2, 5.11.4, 8.1.2, 9.1.1, 9.1.6, B.1, F.3.1.3
aproximação de diferenças finitas — **finite difference approximation**..... 5.8.1
assimetria — **skewness**..... 7.5.1, 9.4.2.4.1
avaliações de incerteza do Tipo A e do Tipo B — **evaluations of uncertainty**..... 5.1.2, 5.11.2, 5.11.4, 6.1.3, 6.4.9.4

C

- calibração** — **calibration**
certificado — **certificate**..... 6.4.3.4, 6.4.9.7, 9.5.2.2.1, 9.5.2.4.1, 9.5.2.5.1
bloco-padrão — **gauge block**..... 9.5
massa — **mass**..... 9.3
medidor de energia de microondas — **microwave power meter**..... 9.4
coeficiente de correlação — **correlation coefficient**..... 9.4.1.3, 9.4.2.3.1
coeficientes de sensibilidade — **sensitivity coefficients**..... 5.4.3, 5.6.3, 5.11.4, 5.11.6, 9.3.2.5, 9.5.2.6.2, B
confiabilidade da incerteza; ver incerteza-padrão — **reliability of uncertainty; see standard uncertainty**
conhecimento (informação) — **knowledge**
sobre uma grandeza, incompleto — **about a quantity, incomplete**..... 6.3.2
sobre uma grandeza, prévio — **about a quantity, prior**..... 5.11.2
sobre uma grandeza de entrada — **about an input quantity** .. 5.1.1, 6.1.6
convolução — **convolution**..... 6.4.4.2, A.1, E
covariância — **covariance**..... 3.10, 3.11, 5.6.3, 9.4.1.3, 9.4.3, 9.4.3.1.3, C.5

D

- decomposição de Cholesky** — **Cholesky decomposition**..... 6.4.8.4, C.5.2
derivada parcial — **partial derivative**..... 5.6.3, 5.8.1, 5.11.4, 5.11.6, 9.3.1.3, 9.3.2.5, 9.4.2.2.1, 9.4.2.2.4, B.1, F.3.1.2
desvio-padrão — **standard deviation**..... 3.8, 5.1.1, 5.3.1, 5.6.2, 5.6.3
de um conjunto de indicações — **of a set of indications**..... 5.11.2
de valores de modelo amostrados — **of sampled model values**..... 7.6
agrupado — **pooled**..... 6.4.9.6
dígitos decimais significativos — **significant decimal digits**..... .1, 3.20, 4.13, 5.5.2, 6.4.3.4, 7.2.1, 7.6, 7.9.2, 8.1.3, 8.2, 9.1.3
distribuição arco seno — **arc sine distribution**..... 6.4.6
distribuição atribuída a uma grandeza — **assignment to a quantity**..... 6.4.6.1, 9.5.2.8.2
esperança e variância — **expectation and variance**..... 6.4.6.3
função densidade de probabilidade — **probability density function**..... 6.4.6.2
amostragem a partir de — **sampling from**..... 6.4.6.4
distribuição de Cauchy — **Cauchy distribution**..... 5.1.1
distribuição de Erlang — **Erlang distribution**..... 6.4.11.4

distribuição de Poisson — Poisson distribution.....	6.4.11.1
distribuição de probabilidade — probability distribution.....	3.1
de cálculos de incerteza anteriores — from previous uncertainty calculations	6.5
conjunta — joint.....	3.1
multivariada — multivariate	3.1
amostragem a partir de — sampling from	C, 7.3
univariada — univariate	3.1
distribuição em forma de U . . ver distribuição arco seno — U-shaped distribution. . . . see arc sine distribution	
distribuição exponencial — exponential distribution	6.4.10, 6.4.11.4, C.2
atribuição a uma grandeza — assignment to a quantity	6.4.10.1
esperança e variância — expectation and variance.....	6.4.10.3
função densidade de probabilidade — probability density function	6.4.10.2
amostragem a partir de — sampling from.....	6.4.10.4
distribuição gama — gamma distribution.....	6.4.11
atribuição a uma grandeza . assignment to a quantity	6.4.11.1
esperança e variância — expectation and variance	6.4.11.3
função densidade de probabilidade — probability density function ..	6.4.11.2
amostragem a partir de — sampling from	6.4.11.4
distribuição gaussiana — Gaussian distribution.	3.4, 5.6-5.8, 5.11.6, 6.4.7, 9.2.2, 9.4.1.8, 9.4.2.2.5, 9.4.2.3.2, D.3
atribuição a uma grandeza — assignment to a quantity.....	6.4.7.1, 9.3.1.4, 9.5.2.7.2, F.3.1.1
esperança e variância — expectation and variance.....	6.4.7.3
função densidade de probabilidade — probability density function	3.4, 6.4.7.2
amostragem a partir de — sampling from	6.4.7.4, C.4
distribuição gaussiana multivariada — multivariate Gaussian distribution.....	6.4.8, 9.4.3.1.3
atribuição a uma grandeza vetorial — assignment to a vector quantity.....	6.4.8.1, 9.4.1.4
matriz de esperança e covariância — expectation and covariance matrix.....	6.4.8.3
função densidade de probabilidade — probability density function.....	6.4.8.2
amostragem a partir de — sampling from.....	6.4.8.4, C.5
distribuição normal — normal distribution.....	3.4
distribuição qui-quadrado — chi-squared distribution.....	6.4.11.4, 9.4.2.2.3, F.2.2
distribuição retangular — rectangular distribution.....	6.4.2, 9.2.3, 9.2.4, C.2, E
atribuição a uma grandeza — assignment to a quantity.....	6.4.2.1, 9.3.1.4, 9.5.2.6.2
esperança e variância — expectation and variance.....	6.4.2.3
função densidade de probabilidade — probability density function	6.4.2.2
amostragem a partir de — sampling from.....	6.4.2.4, 9.1.4, C.3
distribuição retangular com limites prescritos não exatos — rectangular distribution with i nexactly prescribed limits.....	6.4.3
atribuição a uma grandeza — assignment to a quantity.....	6.4.3.1, 9.5.2.9.2, 9.5.2.10.2
esperança e variância — expectation and variance.....	6.4.3.3
função densidade de probabilidade — probability density function.....	6.4.3.2
amostragem a partir de — sampling from.....	6.4.3.4

distribuição-t — t-distribution.	3.5, 6.4.9
atribuição a uma grandeza — assignment to a quantity	6.4.9.2, 6.4.9.7, 9.5.2.2.2, 9.5.2.3.2, 9.5.2.4.2, 9.5.2.5.2
esperança e variância — expectation and variance.	6.4.9.4
função densidade de probabilidade — probability density function	3.5, 6.4.9.3
amostragem a partir de — sampling from.	6.4.9.5, C.6
distribuição-trapezoidal — trapezoidal distribution	6.4.4
atribuição a uma grandeza — assignment to a quantity.	6.4.4.1
esperança e variância — expectation and variance.	6.4.4.3
função densidade de probabilidade — probability density function.	6.4.4.2
amostragem a partir de — sampling from.	6.4.4.4
distribuição-trapezoidal curvilínea . . ver distribuição retangular com limites prescritos não exatos — curvilinear trapezoid distribution. see rectangular distribution with inexactly prescribed limits	
distribuição-triangular — triangular distribution.	6.4.5
atribuição a uma grandeza — assignment to a quantity	6.4.5.1
esperança e variância — expectation and variance.	6.4.5.3
função densidade de probabilidade — probability density function.	6.4.5.2
amostragem a partir de — sampling from.	6.4.5.4

E

elemento de probabilidade — probability element.	3.3
esperança — expectation.	3.6, 4.1, 4.3, 4.8, 5.1.1, 5.3.1, 5.6.2, 5.6.3, 5.9.6, 6.4.1, 7.5.1, 7.6, 9.2.3.3 9.3.1.4, 9.4.1.4, 9.4.1.8, 9.4.2.1.2, 9.4.2.2.7, 9.4.2.2.11, 9.4.2.3.2, 9.4.3.1.3, C.2, D.3, D.4, E.3, F.1.1, F.2.4, F.3.1.1
estágios de avaliação de incerteza — stages of uncertainty evaluation	5.1.1, 5.6.1
formulação — formulation	5.1.1, 5.1.3
propagação — propagation	5.1.1, 5.1.3, 5.4, 5.4.3, 5.6.1, 5.6.3, 5.9
resumindo — summarizing	5.1.1, 5.1.3, 5.3, 5.6.1, 5.6.3, 5.9
Estimativa de uma grandeza de saída do método de Monte Carlo — Estimate of output quantity from Monte Carlo method.	7.6
estimativa de uma grandeza de saída — estimate of output quantity.	5.1.1, 5.3.1, 5.5.1, 5.11.4, 5.11.6, 9.4.2.2.7, B.2
da metodologia de incerteza do GUM — from GUM uncertainty framework.	4.10, 5.6.2, 5.6.3, 9.4.2.1.3, 9.4.2.2.8, F.3.1.2
do método de Monte Carlo — from Monte Carlo method.	5.9.6, 7.9.4, 9.4.2.2.8, D.4

F

FDP . . ver função densidade de probabilidade (FDP) — PDF . . see probability density function (PDF)	
fator de abrangência — coverage factor.	5.3.3, 5.11.6, 6.4.9.7, 9.2.2.3, 9.2.4.4, 9.5.2.2.1
formulação . . ver estágios da avaliação da incerteza — formulation . . see stages of uncertainty evaluation	
fórmula de Welch-Satterthwaite — Welch-Satterthwaite formula.	5.6.3, 5.7.2, 5.11.6, 6.4.9.4, 9.5.3.1
função distribuição — distribution function.	3.2, 4.2, 5.3.6, 6.5
para grandeza de saída — for output quantity.	D, 5.2, 5.9.1, 5.11.4, 7.5, 9.3.2.3, 9.4.2.2.9
função densidade de probabilidade (FDP) — probability density function (PDF).	3.3, 4.2, 4.3, 4.15
assimétrica — asymmetric	5.3.4, 5.3.6

para grandezas de entrada — for input quantities	5.1.1, 5.1.2, 5.4.4, 5.6.2, 5.11.2, 5.11.4, 6, 6.1.3, 6.1.5, 6.2-6.4, 7.3, 7.4.1, 7.6, 7.8.1
para grandezas de saída — for output quantity	D, 5.1.1, 5.2, 5.4.4, 5.6.2, 5.7.2, 5.11.2, 5.11.4, 7.2.1, 7.5.2, B.1
conjunta — joint	4.4, 4.5, 5.1.1, 6.1.2, 6.1.4, 6.4.8.2, 6.4.8.4, 7.3, 7.8.1, 9.4.1.8
amostragem a partir de — sampling from	C, 7.3, 9.2.2.4
simétrica — symmetric	5.3.3, 5.3.5, 9.2.2.8
função gama — gamma function	3.5, 6.4.9.3

G

gerador de números retangularmente distribuídos — rectangular number generator	
qualidade de um — quality of	C.3.1.1
recomendado — recommended	C.3.3
grandezas de entrada — input quantities	4.1, 5.1.1
grandezas de entrada correlacionadas — correlated input quantities	5.6.3, 9.4.3, C.5.3, F.3.2
grandezas de saída — output quantity	4.1, 5.1.1
grau de confiança — degree of belief	5.1.2
Guia para a expressão de incerteza de medição (GUM) — Guide to the expression of uncertainty in Measurement (GUM)	2, 3, 4.15, 5.6.1, A
GUM . . <i>ver</i> Guia para a expressão de incerteza de medição (GUM) — GUM . . see Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)	

I

incerteza expandida — expanded uncertainty	5.3.3, 5.6.3, 6.4.9.7, 5.2.2.1
incerteza mútua — mutual uncertainty	3.11, 5.6.3
incerteza-padrão — standard uncertainty	4.10, 5.1.1, 5.1.2, 5.3.1, 5.5.1, 5.11.2, 5.11.5, 5.11.6, 8.1.3
na metodologia de incerteza do GUM — from GUM uncertainty framework	5.6.2, 5.6.3
no método de Monte Carlo — from Monte Carlo method	5.9.6, 7.6
confiabilidade da — reliability of	6.4.9.4
incerteza-padrão combinada — combined standard uncertainty	4.10
indicações, análise de uma série de — indications, analysis of a series of	5.11.2, 6.1.3, 6.2.1, 6.2.2, 6.3.1, 6.4.9.2 6.4.9.4, 6.4.9.6, 9.5.1.3, 9.5.2.3.1, 9.5.2.4.1
intervalo bayesiano — Bayesian interval	3.12
intervalo de abrangência — coverage interval	3.12, 4.11, 5.1.1, 5.3.2, 5.5.1, 5.11.4, 5.11.6, 8.1.2, 8.1.3, D.5, E, F.2.6, F.3.1.4
da estrutura de incerteza do GUM — from GUM uncertainty framework	5.6.2, 5.6.3, 5.7.2, 5.8.2
do método de Monte Carlo — from Monte Carlo method	5.9.6, 7.2.1, 7.6, 7.7
largura do — length of	3.14, 9.2.2.8, 9.4.2.2.11
probabilisticamente simétrico — probabilistically symmetric	3.15, 5.3.3, 5.3.5, 5.3.6, 5.5.1, 7.9.4, 8.1.2, 9.2.2.3, 9.2.2.4, 9.2.2.6, 9.2.2.9, 9.2.3.2, 9.2.3.4, 9.2.4.4, 9.2.4.5, 9.4.2.2.11, D.6, E.1, F.2.8
mais curto — shortest	3.16, 5.3.4-5.3.6, 5.5.1, 8.1.2, 9.2.2.9, 9.3.2.1, 9.3.2.3, 9.4.2.1.2, 9.4.2.2.9, 9.4.2.2.11, 9.4.2.3.3 9.4.3.2.2, 9.5.4.1, D.7, D.8, F.2.7, F.2.8
estatístico — statistical	7.9.4
intervalo de credibilidade — credible interval	3.12

M

matriz de covariância — covariance matrix.....	3.11, 4.4, 6.4.8.3, 9.4.1.4, 9.4.1.8, 9.4.3.1.3, C.5
matriz de incerteza — uncertainty matrix	3.11, 6.4.8.1, F.3.2.1
matriz de variância-covariância — variance-covariance matrix.....	3.11
média — average	
de uma série de indicações — of a set of indications.....	5.11.2, 6.4.9.2, 6.4.9.4, 9.5.1.3, 9.5.2.3.1
de valores de modelo amostrados — of sampled model values.....	7.6
melhor estimativa — best estimate	
a partir de um certificado de calibração — from a calibration certificate.....	6.4.9.7
de uma grandeza de entrada não negativa — of a non-negative input quantity.....	6.4.10.1
de uma grandeza de entrada vetorial — of a vector input quantity.....	6.4.8.1
de uma grandeza de entrada — of an input quantity	5.6.2, 5.11.2, 5.11.5, 6.4.7.1, 6.4.9.4, 9.2.2.1, 9.2.3.1, 9.3.1.4, 9.4.1.3
método de Monte Carlo (MMC) — Monte Carlo method (MCM) ...	3.19, 4.15, 5.2, 5.4.1, 5.9, 6.5, 7, 8.1.1, A.1, B.1, C.1.1, D.3
procedimento adaptativo — adaptive procedure	7.9
comparação com a metodologia de incerteza do GUM — comparison with GUM uncertainty framework	5.11
tempo de computação — computation time.....	7.8
condições de aplicação — conditions for application	5.10
exemplo — example.....	9.1 a 9.5
número de tentativas — number of trials	7.2, 7.9.1
amostragem a partir de distribuições de probabilidade — sampling from probability distributions.....	7.3
metodologia de incerteza do GUM (MIG) — GUM uncertainty framework (GUF) ..	1, 3.18, 4.15, 5.1.2, 5.4.2, 5.6, 5.10.2, F.3
comparação com o método de Monte Carlo — comparison with a Monte Carlo method.....	5.11
condições para modelos lineares — conditions for linear models.....	5.7
condições para modelos não-lineares — conditions for non-linear models	5.8
exemplo — example.....	9.1 a 9.5
validação da — validation of	8.1, 9.1.2, 9.2.2.7, 9.2.3.4, 9.2.4.5, 9.3.2.6
com termos de ordem superior — with higher-order terms.....	5.8.1, 8.1.2, 9.1.1, 9.3.2.1, 9.3.2.6, 9.4.2.1.3, 9.4.2.2.1
MIG ... <i>ver</i> metodologia de incerteza do GUM (MIG) — GUF. ... see GUM uncertainty framework (GUF)	
MMC ... <i>ver</i> método de Monte Carlo (MMC) — MCM. ... see Monte Carlo method (MCM)	
moda — mode	5.3.4, 5.10.1, 7.5.1
modelo de medição — model of measurement.....	1, 4.1, 5.1.1
aditivo — additive	9.2.1
calibração de bloco-padrão — calibration of gauge block	9.5.1.5
calibração de padrões de massa — calibration of mass standards.....	9.3.1.3
calibração de medidor de potência de microondas — calibration of microwave power meter	9.4.1.5
linear — linear	5.4.2, 5.7
não-linear — non-linear.....	5.4.4, 5.8
momento — moment	3.9

N

- nível da confiança** — level of confidence. 3.13, 4.11, 7.9.4
- número de graus de liberdade** — degrees of freedom 3.5, 5.6.2, 5.6.3, 5.7.2, 5.11.5, 6.4.3.3, 6.4.9.2, 6.4.9.4, 6.4.9.5
7.6, 9.5.2.4.2, 9.5.2.5.1, 9.5.4.1, C.6, F.2.2
- efetivo** — effective 5.6.3, 5.7.2, 5.11.6, 6.4.9.4, 6.4.9.7, 9.5.2.2.1, 9.5.3.1
- de um desvio-padrão agrupado** — of a pooled standard deviation 6.4.9.6

P

- princípio de máxima entropia** — principle of maximum entropy. 6.1.1, 6.3, 6.4.2.1, 6.4.3.1, 6.4.6.1, 6.4.7.1, 6.4.10.1
- probabilidade** — probability 3.1, 3.2, 5.1.2, 5.11.2, 7.5.1, 9.2.2.8, 9.4.2.2.9, 9.4.2.2.11, 9.5.2.9.1, 9.5.2.10.1, D.2
- probabilidade de abrangência** — coverage probability 3.13, 4.11, 5.1.1, 5.3.2, 5.5.1, 5.6.3, 5.9.6, 7.2.1, 7.7.2, 7.9.3,
8.1.2, 8.1.3, D.5
- problemas de avaliação de incerteza (*discussão*)** — uncertainty evaluation problems. 1
- propagação. . . . ver etapas de avaliação de incerteza** — propagation . . . see stages of uncertainty evaluation
- propagação de distribuições** — propagation of distributions 3.17, 5.2, 5.4, 5.9.6
- analítica** — analytical 5.4.1, 9.4.2.1.1, 9.4.2.2.2
- implementações de** — implementations of 5.4
- propagação de incertezas** — propagation of uncertainty. 3.18, 4.9, 5.4.1, 5.6.2, 5.7.1, 5.8.1, 5.11.2, 5.11.6, 7.4.2, 8.1.2,
9.2.2.3, 9.3.1.3, 9.4.2.2.1, 9.4.2.2.8

R

- reportando resultados** — reporting the results. 1, 5.5, 9.1.3
- resumindo. . . . ver estágios da avaliação de incerteza** — summarizing. . . see stages of uncertainty evaluation

T

- teorema de Bayes** — Bayes' theorem. 6.1.1, 6.2, 6.4.9.2, 6.4.11.1
- teorema do limite central** — central limit theorem. 5.7.2, 5.11.6, 9.2.4.5
- testes de aleatoriedade** — tests of randomness. 7.3, C.3.2.2
- tolerância numérica** — numerical tolerance 3.20, 5.1.3, 7.2.1, 7.2.3, 7.9.1, 7.9.2, 7.9.4, 8.1.3, 8.2, 9.1.2, 9.2.2.3,
9.2.2.4, 9.2.2.7, 9.2.4.2, 9.2.4.5, 9.3.2.2, 9.3.2.6, 9.5.3.2

V

- variância** — variance 3.7, 4.3, 5.3.1
- de um conjunto de indicações** — of a set of indications 6.4.9.2
- variável aleatória** — random variable. 3.1, 4.1, 4.3, 5.6.3, 5.9.6, 6.2.1, 6.2.2, 7.9.4
- VIM. . . ver: .Vocabulário Internacional de Metrologia: Conceitos fundamentais e gerais e termos associados (VIM) —**
VIM. . . see International vocabulary of basic and general terms in metrology (VIM)
- Vocabulário Internacional de Metrologia: conceitos fundamentais e gerais, e termos associados (VIM) 2, 3, 4.15**

Notas dos Tradutores

NT 01

Introdução – NOTA 2)

A tradução desta NOTA 2 é fiel ao original, porém cabe salientar que a metodologia de incerteza do GUM, diferentemente do que nela é dito, não tem, em princípio, limitações, desde que todos os termos significativos de ordem superior sejam incluídos na expansão da série de Taylor para a expressão de $u_c^2(y)$ [ver GUM 5.1.2, Equação (10) e H.1]. Na realidade, o texto refere, de maneira pouco clara, uma limitação associada ao tratamento que é dado no exemplo H.1 do GUM. Porém, mesmo neste caso, o tratamento é correto, pois os termos desconsiderados são pouco significativos.

NT 02

(pag. 10)

As referências genéricas ao GUM foram aqui atualizadas, e são referidas à última versão brasileira do GUM (JCGM 100: 2008), de 2012, que pode ser baixada em http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes_avulsas.asp

NT 03

(item 3.12)

A definição apresentada no VIM é mais abrangente: [VIM:2.36] “Intervalo, baseado na informação disponível, que contém o conjunto de **valores verdadeiros** de um **mensurando**, com uma probabilidade determinada.”.

NT 04

(item 4.11)

Segundo o item 6.2.2 do GUM, o termo nível de confiança é somente aplicável a intervalos definidos por U quando certas condições são atendidas, incluindo a de que todos os componentes de incerteza que contribuem para $u_c(y)$ sejam obtidos de avaliações do Tipo A [GUM 6.2.2].