

**Avaliação de dados de medição
— Suplemento 2 do “Guia para a expressão de
incerteza de medição” — Extensão a um número
qualquer de grandezas de saída**

Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO)



Primeira edição brasileira do documento JCGM 102 2011

Tradução autorizada pelo BIPM da primeira edição internacional (2011) do documento ***Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities***

Maio/2024

Primeira edição do documento original: 2011

Copyright 2024 by INMETRO

Avaliação de dados de medição — Suplemento 2 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Extensão a um número qualquer de grandezas de saída

Grupo de trabalho para tradução do JCGM 102:2011

Criação: Ordem de Serviço nº 07/2022/Dimci - Inmetro - 09/09/2022

Coordenação: Antonio Carlos Baratto	Dimci/Dmtic/Inmetro
Jailton Carreteiro Damasceno	Dimci/Dimat/Inmetro
Júlio Dutra Brionizio	Dimci/Dimec/Inmetro
Paulo Paschoal Borges	Dimci/Dimqt/Inmetro
Paulo Roberto Guimarães Couto	Dimci/Dimec/Inmetro
Ricardo Luis d’Ávila Villela	Dimci/Diavi/Inmetro

Primeira edição brasileira do JCGM 102:2011

(Tradução autorizada pelo BIPM da primeira edição internacional do documento *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities*

Inmetro
Brasília - DF
2024

© 2024 Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (INMETRO)

Qualquer parte desta publicação pode ser reproduzida, desde que citada a fonte.

Avaliação de dados de medição — Suplemento 2 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Extensão a um número qualquer de grandezas de saída

Título original em inglês:

Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities

Inmetro

Márcio André Oliveira Brito

Presidente do Inmetro

Luiz Fernando Rust da Costa Carmo

Diretor de Metrologia Científica, Industrial e Tecnologia

Desenvolvimento e Edição

Antonio Carlos Baratto

Coordenador da Tradução e Formatação

Capa - Divisão de Comunicação Social (Dicom)

Disponível também em: < <https://www.gov.br/inmetro/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/documentos-tecnicos-em-metrologia> >

Catálogo elaborado pelo Serviço de Documentação e Informação do Inmetro

XXXX Avaliação de dados de medição — Suplemento 2 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Extensão a um número qualquer de grandezas de saída. Duque de Caxias, RJ: INMETRO/CICMA/SEPIN, 2024

xxx p.

Inclui índice

Traduzido de: Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities – JCGM 102:2011.

ISBN: xxx-xx-xxxxx-xx-x

1. Metrologia científica. 2. Incerteza de medição. 3. Grandezas de saída. 4. modelos multivariados

I. INMETRO II. Título

Apresentação

O Grupo de Trabalho 1 do Comitê Conjunto para Guias em Metrologia (*The Working Group 1 of the Joint Committee for Guides in Metrology* – JCGM), órgão assessor do Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), publica uma série de documentos com a referência genérica: *Avaliação de dados de medição*. Essa série é composta pelo GUM (**Guide to the expression of uncertainty in measurement**) e por diversos suplementos que o complementam. Cinco desses suplementos foram já concluídos, aprovados e publicados, havendo ainda outros em diferentes estágios de preparação. Os suplementos auxiliam a interpretação do GUM, aprimoram seu emprego nas áreas tradicionais e ampliam as possibilidades de aplicação em áreas por ele ainda não abrangidas, ou em que seu uso se encontra em estágio ainda incipiente.

Este Suplemento (JCGM 102:2011) é o quarto a ser traduzido no Brasil. Estende e aprimora a abordagem de modelos de medição multivariados, isto é, modelos com um número plural de grandezas de saída, os quais são tratados de maneira pouco aprofundada no GUM em apenas dois exemplos: H.2 e H.3.

O Inmetro se constitui como o principal repositório do saber e do fazer metrológico no Brasil. Sendo este um componente fundamental da sua ampla missão institucional, deve ele incluir, complementarmente, um ingente esforço de disseminação dessa Ciência para o âmbito da Sociedade. Com mais essa publicação, que ora colocamos à disposição da sociedade, avulta em mim a certeza de que estamos cumprindo adequadamente também esse importante papel – o de divulgadores e incentivadores da já extensa cultura metrológica no Brasil.

Márcio André Oliveira Brito

Presidente do Inmetro

Maio de 2024

JCGM 102:2011**Avaliação de dados de medição — Suplemento 2 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Extensão a um número qualquer de grandezas de saída.**

Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities

Évaluation des données de mesure – Supplément 2 du “Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure” – Extension à un nombre quelconque de grandeurs de sortie

Primeira edição (original)

2011

Primeira edição brasileira

2024

Documento produzido pelo Grupo de Trabalho 1 do Comitê Conjunto para Guias em Metrologia (JCGM/WG 1)

Os direitos autorais sobre este documento são compartilhados pelas organizações membro do JCGM (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML).

Muito embora a versão eletrônica deste documento esteja disponível gratuitamente no site do Inmetro (www.inmetro.gov.br), os direitos autorais correspondentes são compartilhados conjuntamente pelas organizações membro do JCGM, sendo de sua propriedade, e protegidos internacionalmente, todos os respectivos logotipos e emblemas. Terceiros não podem reescrever ou renomear, emitir ou vender cópias ao público, difundi-las ou usá-las on-line. Para qualquer uso comercial, reprodução ou tradução deste documento e/ou dos logotipos, emblemas, publicações ou outras criações nele contidos, deverá ser obtida autorização prévia assinada pelo Presidente do Inmetro.



Joint Committee for Guides in Metrology
Comitê Conjunto para Guias em Metrologia

JCGM
102
2011

**Avaliação de dados de medição — Suplemento 2
do “Guia para a expressão de incerteza de
medição” — Extensão a um número qualquer de
grandezas de saída**

**Evaluation of measurement data – Supplement 2 to
the “Guide to the expression of uncertainty in
measurement” – Extension to any number of output
quantities**

**Évaluation des données de mesure – Supplément 2
du “Guide pour l’expression de l’incertitude de
mesure” – Extension à un nombre quelconque de
grandeurs de sortie**

Os direitos autorais sobre este documento orientador do JCGM são compartilhados pelas organizações membro do JCGM (BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP e OIML).

Direitos autorais

Mesmo se versões eletrônicas estiverem gratuitamente disponíveis em endereços eletrônicos de uma ou mais organizações membro do JCGM, direitos autorais, econômicos e morais relacionados a todas as publicações do JCGM são internacionalmente protegidos. O JCGM não permite que, sem sua autorização escrita, terceiros reescrevam ou repaginem edições, vendam cópias ao público, divulguem ou usem *on-line* suas publicações. Outrossim, o JCGM também se contrapõe a distorções, acréscimos ou mutilações em suas publicações, incluindo seus títulos, lemas e logomarcas, ou aqueles de suas organizações membro.

Versões oficiais e traduções

As únicas versões oficiais dos documentos são aquelas publicadas pelo JCGM nos idiomas originais.

As publicações do JCGM podem ser traduzidas para outros idiomas que não aqueles em que os documentos foram originalmente publicados pelo JCGM. Permissão do JCGM deve ser obtida antes de uma tradução ser feita. Todas as traduções devem respeitar os formatos originais e oficiais das expressões e unidades (sem qualquer conversão para outras expressões e unidades), e conter a seguinte declaração (a ser traduzida para o idioma em questão):

Todos os produtos do JCGM são protegidos internacionalmente por direitos autorais. Esta tradução do documento original do JCGM foi realizada com a permissão do JCGM. O JCGM mantém direitos autorais integrais, protegidos internacionalmente, sobre a formatação e o conteúdo deste documento e sobre os títulos, lemas e logomarcas do JCGM. As organizações membro do JCGM também mantêm direitos integrais protegidos internacionalmente sobre seus títulos, lemas e logomarcas incluídos nas publicações do JCGM. A única versão oficial é o documento publicado pelo JCGM, nos idiomas originais.

O JCGM não assume qualquer responsabilidade pela relevância, exatidão, completeza ou qualidade das informações e materiais disponibilizados em qualquer tradução. Uma cópia da tradução deve ser fornecida ao JCGM por ocasião da publicação.

Reprodução

As publicações do JCGM podem ser reproduzidas desde que seja obtida permissão escrita do JCGM. Uma amostra de qualquer documento reproduzido deverá ser providenciada ao JCGM por ocasião da reprodução, e deverá conter a seguinte declaração:

Este documento é reproduzido com a permissão do JCGM, o qual mantém direitos autorais integrais protegidos internacionalmente sobre a formatação e o conteúdo deste documento e sobre os títulos, lemas e logomarcas do JCGM. As organizações membro do JCGM também mantêm direitos integrais protegidos internacionalmente sobre seus títulos, lemas e logomarcas incluídos nas publicações do JCGM. As únicas versões oficiais são as versões originais dos documentos publicadas pelo JCGM.

Responsabilidade

O JCGM e suas organizações membro publicaram este documento para aumentar o acesso a informação sobre metrologia. Envidarão esforços para atualizá-lo regularmente, mas não podem garantir sua correção a todo o momento e não poderão ser responsabilizados por qualquer prejuízo direto ou indireto que possa resultar de seu uso. Qualquer referência a produtos comerciais de qualquer tipo (incluindo, mas não restritivamente, qualquer *software*, dados ou *hardware*) ou indicações para endereços eletrônicos na internet, sobre os quais o JCGM e suas organizações membro não têm nenhum controle e pelos quais não assumem qualquer responsabilidade, não implicam aprovação, endosso ou recomendação pelo JCGM e suas organizações membro.

Sumário	(NUMERAÇÃO PROVISÓRIA)	Página
Prefácio da primeira edição brasileira		4
Prefácio (da primeira edição original)		5
Introdução		6
1 Escopo		7
2 Referências normativas		8
3 Termos e definições		8
4 Convenções e notação		10
5 Princípios básicos		14
5.1 Generalidades		14
5.2 Principais etapas de avaliação de incerteza		14
5.3 Funções densidade de probabilidade para grandezas de entrada		14
5.3.1 Generalidades		14
5.3.2 Distribuições-t multivariadas		14
5.3.3 Construção de funções densidade de probabilidade multivariadas		14
5.4 Propagação de distribuições		14
5.5 Obtenção de informações resumidas		14
5.6 Implementação da propagação de distribuições		14
6 A metodologia de incerteza do GUM		14
6.1 Generalidades		14
6.2 Propagação de incerteza para modelos de medição multivariados implícitos		14
6.2.1 Generalidades		14
6.2.2 Exemplos		14
6.3 Informação - Resumo		14
6.3.1 Generalidades		14
6.3.2 Exemplos		14
6.4 Propagação de incerteza para modelos que envolvem grandezas complexas		14
6.5 Regiões de abrangência para uma grandeza de saída vetorial		14
6.5.1 Generalidades		14
6.5.2 Caso bivariado		14
6.5.3 Caso multivariado		14
6.5.4 Região de abrangência para a esperança de uma distribuição Gaussiana multivariada		14
7 Método de Monte Carlo		20
7.1 Generalidades		20
7.2 Número de iterações de Monte Carlo		20
7.3 Obtenção de amostras de distribuições de probabilidade		20
7.4 Avaliação da grandeza de saída vetorial		20
7.5 Representação discreta da função distribuição para a grandeza de saída		20
7.6 Estimativa da grandeza de saída e a matriz de tolerância associada		20
7.7 Região de abrangência para uma grandeza de saída vetorial		20
7.7.1 Generalidades		20

7.7.2	Região de abrangência hiperelipsoidal	20
7.7.3	Região de abrangência hiper-retangular	20
7.3.4	Região de abrangência mínima	20
7.8	Procedimento adaptativo de Monte Carlo	20
7.8.1	Generalidades	20
7.8.2	Tolerância numérica associada com um valor numérico	20
7.8.3	Procedimento adaptativo	20
8	Validação da metodologia de incerteza do GUM usando um método de Monte Carlo	30
9	Exemplos	20
9.1	Ilustrações de aspectos deste Suplemento	20
9.2	Modelo de medição aditivo	20
9.2.1	Formulação	20
9.2.2	Propagação e resumo: caso 1	20
9.2.3	Propagação e resumo: caso 2	20
9.2.4	Propagação e resumo: caso 3	20
9.3	Transformação do sistema de coordenadas	20
9.3.1	Formulação	20
9.3.2	Propagação e resumo: covariância zero	20
9.3.3	Propagação e resumo: covariância não zero	20
9.3.4	Discussão	20
9.4	Medição simultânea de resistência e reatância	20
9.4.1	Formulação	20
9.4.2	Propagação e resumo	20
9.5	Medição de temperatura Celsius usando um termômetro de resistência	20
9.5.1	Generalidades	20
9.5.2	Medição de apenas uma única temperatura Celsius	20
9.5.3	Medição de diversas temperaturas Celsius	20
Anexos		
A (informativo)	Derivadas de funções de medição multivariadas complexas	99
B (informativo)	Avaliação de coeficientes de sensibilidade e matriz de covariância para modelos de medição multivariados	99
C (informativo)		
C.1	Generalidades	00
C.2	Solução analítica para um caso especial	00
C.3	Aplicação da abordagem de incerteza do GUM	00
D	Glossário dos principais símbolos	00
Bibliografia		00
Índice alfabético (e correspondentes expressões em inglês)		99
Notas dos tradutores (NTs)		100

Prefácio da primeira edição brasileira

O presente Suplemento é parte de uma série de documentos correlatos do JCGM, designados genericamente sob o título unificador **Avaliação de dados de medição**. Esta série é composta, até a presente data, pelos seguintes documentos:

JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM) (ver Capítulo 2). [Avaliação de dados de medição — Guia para a expressão de incerteza de medição (GUM)],

JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method (ver Capítulo 2). [Avaliação de dados de medição — Suplemento 1 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Propagação de distribuições usando um método de Monte Carlo],

JCGM 102:2011. Evaluation of measurement data — Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Extension to any number of output quantities. [Avaliação de dados de medição — Suplemento 2 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Extensão a um número qualquer de grandezas de saída] (este documento),

JCGM GUM-6:2020. Guide to the expression of uncertainty in measurement — Part 6: Developing and using measurement models,

JCGM 104:2009. Evaluation of measurement data — An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents. [Avaliação de dados de medição — Uma Introdução ao “Guia para a expressão de incerteza de medição” e documentos correlatos],

JCGM 105. Evaluation of measurement data — Concepts and basic principles,

JCGM 106:2012. Evaluation of measurement data — The role of measurement uncertainty in conformity assessment, [Avaliação de dados de medição — O papel da incerteza de medição na avaliação da conformidade],

JCGM 107. Evaluation of measurement data — Applications of the least-squares method,

Dentre os documentos acima citados, seis podem ser obtidos no site do BIPM, sendo que quatro deles foram já traduzidos e publicados pelo Inmetro (JCGM 100:2008, JCGM 101:2011, JCGM 104:2009 e JCGM 106:2012). Os suplementos JCGM 105, JCGM 107 encontram-se em diferentes estágios de desenvolvimento.

Este Suplemento 2 descreve uma generalização do método de Monte Carlo apresentado no Suplemento 1, o qual, da mesma maneira que o próprio GUM, aborda apenas modelos com uma única grandeza de saída escalar. Trata-se, neste presente Suplemento, de estender a metodologia do Suplemento 1 para obter uma representação discreta da distribuição de probabilidade conjunta para as grandezas de saída de um modelo multivariado. Essa representação discreta é então usada para fornecer estimativas das grandezas de saída, permitindo então uma avaliação das incertezas padrão e das covariâncias associadas a essas estimativas. É de se esperar que um uso adequado do método de Monte Carlo forneça resultados válidos mesmo em casos em que a aplicabilidade da abordagem de incerteza do GUM seja questionável, isto é, casos em que (a) a linearização do modelo fornece uma representação inadequada, ou (b) a distribuição de probabilidade para a grandeza (ou grandezas) de saída se afasta sensivelmente de uma distribuição gaussiana (multivariada).

Para uma melhor compreensão do texto ou do contexto, em algumas passagens mais problemáticas julgamos conveniente remeter o leitor para o final do documento, onde se apresentam algumas notas explicativas (NT – Nota dos Tradutores). No entanto, com o fito de propiciar uma leitura mais suave e sem interrupções dispersivas, tentou-se evitar uma profusão de NTs. Optou-se, assim, quando necessária uma melhor explicação do contexto, e sempre que possível e mais conveniente, por

acrescentar um texto curto (por vezes uma única palavra) complementar ou explicativo, na cor vermelha, em vez de uma NT adicional.

Nos casos em que o documento informa que um texto (em geral uma definição) é retirado de uma referência, e tendo sido esta já traduzida por órgão oficial brasileiro, optou-se por adotar o correspondente texto da tradução brasileira *ipsis litteris*. Neste caso, o documento então referido é o documento brasileiro. Quando é mencionado que o texto em questão é uma adaptação de algum documento, procedeu-se com o trabalho normal de tradução do trecho adaptado.

Achamos por bem justapor, aos termos e expressões constantes do Índice Alfabético, os respectivos e correspondentes termos e expressões do índice alfabético original. Os termos em Português estão em fonte Times New Roman negrito. Os termos correspondentes em Inglês estão em fonte Arial Narrow. Isso foi feito com o objetivo de facilitar aos leitores, sempre que julguem necessário ou apropriado, proceder à verificação especulativa ou crítica da tradução aqui utilizada para importantes termos ou conceitos.

Textos formatados em vermelho, ou são acréscimos legítimos ao documento original, ou serão reconsiderados após finalizada a Consulta Pública. Assim também a numeração de páginas do próprio documento.

Os tradutores

Março/2024

Prefácio

Em 1997, as sete organizações internacionais que haviam anteriormente (1993) elaborado o “Guia para a expressão de incerteza de medição (GUM)” e o “Vocabulário internacional de metrologia - conceitos fundamentais e gerais e termos associados” (VIM) criaram um Comitê Conjunto para Guias em Metrologia (*Joint Committee for Guides in Metrology* – JCGM), presidido pelo Diretor do Bureau Internacional de Pesos e Medidas (*Bureau International des Poids et Mesures* - BIPM)). O JCGM assumiu a responsabilidade por estes dois documentos do Grupo Consultivo Técnico 4 da ISO (*ISO Technical Advisory Group* - TAG4).

O JCGM é formado pelo BIPM conjuntamente com a Comissão Eletrotécnica Internacional (*International Electrotechnical Commission* – IEC), a Federação Internacional de Química Clínica e Medicina Laboratorial (*International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine* – IFCC), a Cooperação Internacional para Acreditação de Laboratórios (*International Laboratory Accreditation Cooperation* – ILAC), a Organização Internacional de Normalização (*International Organization for Standardization* – ISO), a União Internacional de Química Pura e Aplicada (*International Union of Pure and Applied Chemistry* – IUPAC), a União Internacional de Física Pura e Aplicada (*International Union of Pure and Applied Physics* – IUPAP) e a Organização Internacional de Metrologia Legal (*International Organization of Legal Metrology* – OIML).

O JCGM possui dois Grupos de Trabalho. O Grupo de Trabalho 1, "Expressão de incerteza em medição", tem a incumbência de promover o uso do GUM e preparar Suplementos e outros documentos para a sua ampla aplicação. O Grupo de Trabalho 2, "Grupo de Trabalho para o Vocabulário internacional de termos fundamentais e gerais em metrologia (VIM)", tem a incumbência de revisar e promover o uso do VIM.

Documentos como este são planejados para agregar valor ao GUM, fornecendo orientações sobre aspectos da avaliação e do uso de incerteza de medição que não são tratados de forma explícita no GUM. Essas orientações serão sempre, e tanto quanto possível, consistentes com a base probabilística geral do GUM.

O presente Suplemento 2 ao GUM foi elaborado pelo Grupo de Trabalho 1 do JCGM, tendo recebido a contribuição de cuidadosas revisões por parte das organizações membro do JCGM e de Institutos Nacionais de Metrologia.

Introdução

O “Guia para a expressão de incerteza de medição” (GUM) [JCGM 100:2008] apresenta um tratamento ligado mais estreitamente a modelos com uma única grandeza de saída escalar. Contudo, modelos com mais de uma grandeza de saída estão também presentes na Metrologia. O GUM inclui exemplos, da metrologia elétrica, com três grandezas de saída [JCGM 100:2008 H.2], e da metrologia térmica, com duas grandezas de saída [JCGM 100:2008 H.3]. Este Suplemento ao GUM faz uma abordagem de modelos de medição multivariados, isto é, modelos com qualquer número de grandezas de saída. Frequentemente, tais grandezas são mutuamente correlacionadas, ao dependerem de grandezas de entrada comuns. Uma generalização da metodologia de incerteza do GUM [JCGM 100:2008 5] é usada para prover estimativas das grandezas de saída, das incertezas padrão associadas às estimativas, e das covariâncias associadas a pares de estimativas. As grandezas de entrada ou de saída no modelo de medição podem ser reais ou complexas.

O Suplemento 1 do GUM [JCGM 101:2008] trata da propagação de distribuições de probabilidade [JCGM 101: 2008:5] por meio de um modelo de medição como base para a avaliação da incerteza de medição, sendo sua implementação feita por um método de Monte Carlo [JCGM 101:2008 7]. Assim como o GUM, ele se preocupa apenas com modelos com uma única grandeza de saída escalar [JCGM 101:2008 1].

Este presente Suplemento apresenta uma generalização do método de Monte Carlo, o qual, no caso, é usado para obter uma representação discreta da distribuição de probabilidade conjunta para as grandezas de saída de um modelo multivariado. A representação discreta é então usada para fornecer estimativas das grandezas de saída, e as incertezas padrão e covariâncias associadas àquelas estimativas. Espera-se que o uso apropriado do método de Monte Carlo forneça resultados válidos quando a aplicabilidade da abordagem de incerteza do GUM seja questionável, isto é, quando (a) a linearização do modelo fornece uma representação inadequada, ou (b) a distribuição de probabilidade para a grandeza (ou grandezas) de saída se afasta consideravelmente de uma distribuição Gaussiana (multivariada).

É fornecida também orientação para a determinação de uma região de abrangência para as grandezas de saída de um modelo multivariado, a contrapartida de um intervalo de abrangência para uma única grandeza de saída escalar, correspondente a uma probabilidade de abrangência estipulada. A orientação inclui a provisão de regiões de abrangência que assumem as formas de hiperelipsóides ou de hiper-retângulos. Descreve-se também um procedimento de cálculo que utiliza resultados fornecidos pelo método de Monte Carlo para obter uma aproximação para a menor região de abrangência.

Avaliação de dados de medição — Suplemento 2 do “Guia para a expressão de incerteza de medição” — Extensão a um número qualquer de grandezas de saída

1 Escopo

Este Suplemento do “Guia para a expressão da incerteza de medição” (GUM) trata de modelos de medição tendo qualquer número de grandezas de entrada (como no GUM e no seu Suplemento 1) e qualquer número de grandezas de saída. As grandezas envolvidas podem ser reais ou complexas. Duas abordagens são consideradas para o tratamento de tais modelos. A primeira abordagem é uma generalização da metodologia de incerteza do GUM. A segunda é um método de Monte Carlo como uma implementação da propagação de distribuições. Espera-se que o uso apropriado do método de Monte Carlo forneça resultados válidos quando a aplicabilidade da metodologia de incerteza do GUM for questionável.

A abordagem baseada na metodologia de incerteza do GUM é aplicável quando as grandezas de entrada são resumidas (como no GUM) em termos de estimativas (por exemplo, valores medidos) e incertezas padrão associadas a essas estimativas e, quando apropriado, covariâncias associadas a pares dessas estimativas. Fórmulas e procedimentos são fornecidos para obter estimativas das grandezas de saída e para avaliar as incertezas e covariâncias-padrão associadas. Variantes das fórmulas e procedimentos referem-se a modelos para os quais as grandezas de saída (a) podem ser expressas diretamente em termos das grandezas de entrada como funções de medição, e (b) são obtidas através da resolução de um modelo de medição, que liga implicitamente as grandezas de entrada e de saída.

As contrapartidas das fórmulas no GUM para a incerteza padrão associada a uma estimativa da grandeza de saída seriam algebricamente incômodas. Tais fórmulas são fornecidas de forma mais compacta em termos de matrizes e vetores, cujos elementos contêm variâncias (incertezas padrão ao quadrado), covariâncias e coeficientes de sensibilidade. Uma vantagem dessa forma de apresentação é que essas fórmulas podem ser prontamente implementadas em muitas linguagens de computador e sistemas que suportam a álgebra matricial.

O método de Monte Carlo é baseado (i) na atribuição de distribuições de probabilidade às grandezas de entrada no modelo de medição [JCGM 101:2008 6], (ii) na determinação de uma representação discreta da distribuição de probabilidade (conjunta) para as grandezas de saída, e (iii) na determinação, a partir desta representação discreta, de estimativas das grandezas de saída e a subsequente avaliação das incertezas e covariâncias-padrão associadas. Esta abordagem constitui uma generalização do método de Monte Carlo apresentado no Suplemento 1 do GUM, o qual se aplica a uma única grandeza escalar de saída.

Para uma probabilidade de abrangência prescrita, este Suplemento pode ser usado para fornecer uma região de abrangência para as grandezas de saída de um modelo multivariado, a contrapartida de um intervalo de abrangência para uma única grandeza de saída escalar. A provisão de regiões de abrangência inclui aquelas que assumem a forma de um hiperelipsóide ou um hiper-retângulo. Essas regiões de abrangência são produzidas a partir dos resultados das duas abordagens aqui descritas. Um procedimento para fornecer uma aproximação para a menor região de abrangência, obtida a partir dos resultados fornecidos pelo método de Monte Carlo, também é dado.

Este Suplemento contém exemplos detalhados para ilustrar as orientações fornecidas.

Este presente documento é um Suplemento do GUM e deve ser usado em conjunto com ele e com o Suplemento 1 do GUM. O público deste Suplemento é o mesmo do GUM e seus Suplementos. Veja também JCGM 104.

2 Referências normativas

Os seguintes documentos referenciados são indispensáveis para a aplicação deste documento. Para referências datadas, aplica-se apenas a edição citada. Para referências não datadas, aplica-se a edição mais recente do documento referenciado (incluindo quaisquer alterações). **Estão indicados os documentos já traduzidos e publicados oficialmente, os quais podem ser baixados no site do Inmetro.**

JCGM 100:2008. Guia para a expressão de incerteza de medição (GUM). **Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM).**

JCGM 101:2008. Avaliação de dados de medição — Suplemento 1 do “Guia para a expressão da incerteza de medição” — Propagação de distribuições usando um método de Monte Carlo. **Evaluation of measurement data. Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method.**

JCGM 104:2009. Avaliação de dados de medição — Uma introdução ao “Guia para a expressão da incerteza de medição” e documentos relacionados. **Evaluation of measurement data |— An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents.**

JCGM 200:2008. Vocabulário Internacional de Metrologia—Conceitos Básicos e Gerais e Termos Associados (VIM). **International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM3).**

3 Termos e definições

Para efeitos deste Suplemento, aplicam-se as definições do GUM e do VIM, salvo indicação em contrário. Algumas das definições mais relevantes desses documentos, adaptadas ou generalizadas quando necessário, são fornecidas abaixo. Outras definições, especialmente importantes para este Suplemento, são dadas também, incluindo definições retiradas ou adaptadas de outras fontes.

Um glossário dos principais símbolos usados é fornecido no anexo D.

3.1

grandeza real

grandeza cujo valor numérico é um número real

3.2

grandeza complexa

grandeza cujo valor numérico é um número complexo

NOTA Uma grandeza complexa Z pode ser representada por duas grandezas reais na forma cartesiana

$$\mathbf{Z} \equiv (Z_R, Z_I)^T = Z_R + iZ_I,$$

onde T significa “transposta”, $i^2 = -1$ e Z_R e Z_I são, respectivamente, as partes real e imaginária de Z , ou na forma polar

$$\mathbf{Z} \equiv (Z_r, Z_\theta)^T = Z_r(\cos Z_\theta + i \sin Z_\theta) = Z_r e^{iZ_\theta},$$

onde Z_r e Z_θ são, respectivamente, a magnitude e a fase de $\mathbf{Z}$.

3.3

grandeza vetorial

conjunto de grandezas dispostas como uma matriz contendo uma única coluna

3.4

grandeza vetorial real

grandeza vetorial com componentes reais

EXEMPLO Uma grandeza vetorial real $\mathbf{X}$ contendo N grandezas reais $X_1, \dots, X_N$ expressa como uma matriz de dimensão $N \times 1$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} = (X_1, \dots, X_N)^T.$$

3.5

grandeza vetorial complexa

grandeza vetorial com componentes complexos

EXEMPLO Uma grandeza vetorial real $\mathbf{Z}$ contendo N grandezas complexas $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N$ expressa como uma matriz de dimensão $N \times 1$:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z}_N \end{bmatrix} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_N)^\top.$$

3.6

mensurando vetorial

grandeza vetorial que se pretende medir

NOTA Generalizado de JCGM 200:2008 definição 2.3.

3.7

modelo de medição

modelo

relação matemática entre todas as grandezas que se sabe estarem envolvidas numa medição

NOTA 1 Adaptado de JCGM 200:2008 definição 2.48.

NOTA 2 Uma forma geral de um modelo de medição é a equação $h(Y, X_1, \dots, X_N) = 0$, onde Y , a grandeza de saída no modelo de medição, é o mensurando, cujo valor deve ser inferido de informações sobre as grandezas de entrada $X_1, \dots, X_N$ no modelo de medição.

NOTA 3 Nos casos em que há duas ou mais grandezas de saída em um modelo de medição, o modelo de medição consiste em mais de uma equação.

3.8

modelo de medição multivariado

modelo multivariado

modelo de medição em que há um número qualquer de grandezas de saída

NOTA 1 A forma geral de um modelo de medição multivariado é composta pelas equações

$$h_1(Y_1, \dots, Y_m, X_1, \dots, X_N) = 0, \dots, \quad h_m(Y_1, \dots, Y_m, X_1, \dots, X_N) = 0,$$

onde $Y_1, \dots, Y_m$, as grandezas de saída, m em número, no modelo de medição multivariado, constituem o mensurando, cujos valores devem ser inferidos a partir de informações sobre as grandezas de entrada $X_1, \dots, X_N$ no modelo de medição multivariado.

NOTA 2 Uma representação vetorial da forma geral do modelo de medição multivariado é

$$\mathbf{h}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0,$$

onde $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^\top$ e $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m)^\top$ são matrizes de dimensões $m \times 1$.

NOTA 3 Se, na NOTA 1, m , o número de grandezas de saída, for unitário, o modelo é conhecido como modelo de medição univariado.

3.9

função de medição multivariada

função multivariada

função, em um modelo de medição multivariado, para o qual as grandezas de saída são expressas em termos das grandezas de entrada

NOTA 1 Generalizado de JCGM 200:2008 definição 2.49.

NOTA 2 Se um modelo de medição $h(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0$ pode ser explicitamente escrito como $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$, onde $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ são as grandezas de entrada e $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ são as grandezas de saída, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^T$ é a função de medição multivariada. De forma mais geral, $\mathbf{f}$ pode simbolizar um algoritmo, gerando para valores de grandezas de entrada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$ um conjunto único correspondente de valores de grandezas de saída $y_1 = f_1(\mathbf{x}), \dots, y_m = f_m(\mathbf{x})$.

NOTA 3 Se, na nota 2, m , o número de grandezas de saída, for unitário, a função é conhecida como uma função de medição univariada.

3.10

modelo de medição real

modelo real

modelo de medição, geralmente multivariado, envolvendo grandezas reais

3.11

modelo de medição complexo

modelo complexo

modelo de medição, geralmente multivariado, envolvendo grandezas complexas

3.12

modelo de medição de vários estágios

modelo de vários estágios

modelo de medição, geralmente multivariado, consistindo em uma sequência de submodelos, nos quais as grandezas de saída de um submodelo tornam-se grandezas de entrada para um submodelo subsequente

NOTA Somente no estágio final de um modelo de medição de vários estágios pode ser necessário considerar uma região de abrangência para as grandezas de saída com base na função densidade de probabilidade conjunta para essas grandezas.

EXEMPLO Uma instância comum em metrologia é o seguinte par de submodelos de medição no contexto de calibração. O primeiro submodelo possui grandezas de entrada cujos valores medidos são fornecidos por padrões de medição e valores de indicação correspondentes, e como grandezas de saída os parâmetros em uma função de calibração. Este submodelo especifica a maneira pela qual as grandezas de saída são obtidas a partir das grandezas de entrada, por exemplo, resolvendo um problema de mínimos quadrados. O segundo submodelo tem como grandezas de entrada os parâmetros na função de calibração e uma grandeza realizada por um valor de indicação adicional, e como grandeza de saída a grandeza correspondente a essa grandeza de entrada.

3.13

função distribuição conjunta

função distribuição

função que fornece, para cada valor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^\top$, a probabilidade de que cada elemento X_i da variável aleatória $\mathbf{X}$ seja menor que, ou igual a ξ_i

NOTA A distribuição conjunta para a variável aleatória $\mathbf{X}$ é denotada por $G_{\mathbf{X}}(\xi)$, onde

$$G_{\mathbf{X}}(\xi) = \Pr(X_1 \leq \xi_1, \dots, X_N \leq \xi_N).$$

3.14

função densidade de probabilidade conjunta

função densidade de probabilidade

função não negativa $g_{\mathbf{X}}(\xi)$ que satisfaz

$$G_{\mathbf{X}}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi_1} \dots \int_{-\infty}^{\xi_N} g_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}) \, dz_N \dots dz_1$$

3.15

função densidade de probabilidade marginal

para uma variável aleatória X_i , um componente de $\mathbf{X}$ tendo função densidade de probabilidade $g_{\mathbf{X}}(\xi)$, a função densidade de probabilidade para X_i apenas é:

$$g_{X_i}(\xi_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g_{\mathbf{X}}(\xi) \, d\xi_N \dots d\xi_{i+1} d\xi_{i-1} \dots d\xi_1$$

NOTA Quando os componentes X_i de $\mathbf{X}$ são independentes,

$$g_{\mathbf{X}}(\xi) = g_{X_1}(\xi_1) g_{X_2}(\xi_2) \dots g_{X_N}(\xi_N).$$

3.16

esperança

propriedade de uma variável aleatória X_i , uma componente de $\mathbf{X}$ com função densidade de probabilidade $g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$, dada por

$$E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) d\xi_N \dots d\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_i g_{X_i}(\xi_i) d\xi_i$$

NOTA 1 Generalizado de JCGM 101:2008 definição 3.6.

NOTA 2 A esperança da variável aleatória $\mathbf{X}$ é $E(\mathbf{X}) = (E(X_1), \dots, E(X_N))^T$, uma matriz de dimensão $N \times 1$.

3.17

variância

propriedade de uma variável aleatória X_i , uma componente de $\mathbf{X}$ com função densidade de probabilidade $g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$, dada por

$$V(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\xi_i - E(X_i)]^2 g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) d\xi_N \dots d\xi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi_i - E(X_i)]^2 g_{X_i}(\xi_i) d\xi_i$$

NOTA Generalizado de JCGM 101:2008 definição 3.7.

3.18

covariância

propriedade de um par de variáveis aleatórias X_i e X_j , componentes de $\mathbf{X}$ com função densidade de probabilidade $g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$, dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_i, X_j) &= \text{Cov}(X_j, X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} [\xi_i - E(X_i)][\xi_j - E(X_j)] g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) d\xi_N \dots d\xi_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\xi_i - E(X_i)][\xi_j - E(X_j)] g_{X_i, X_j}(\xi_i, \xi_j) d\xi_i d\xi_j \end{aligned}$$

onde $g_{X_i, X_j}(\xi_i, \xi_j)$ é a função densidade de probabilidade (FDP) conjunta para as duas variáveis aleatórias X_i e X_j .

NOTA 1 Generalizado de JCGM 101:2008 definição 3.10.

NOTA 2 A matriz de covariância da variável aleatória $\mathbf{X}$ é $\mathbf{V}(\mathbf{X})$, uma matriz semidefinida positiva simétrica de dimensão $N \times N$ contendo as covariâncias $\text{Cov}(X_i, X_j)$. Certas operações envolvendo $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ requerem definitividade positiva.

3.19

correlação

propriedade de um par de variáveis aleatórias X_i e X_j , componentes de $\mathbf{X}$ com função densidade de probabilidade $g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$, dada por

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = \text{Corr}(X_j, X_i) = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{V(X_i)V(X_j)}}$$

NOTA $\text{Corr}(X_i, X_j)$ é uma grandeza de dimensão um.

3.20

matriz de covariância de medição

matriz de covariância

matriz semidefinida positiva simétrica de dimensão $N \times N$ associada a uma estimativa de uma grandeza vetorial real de dimensão $N \times 1$, contendo em sua diagonal os quadrados das incertezas padrão associadas aos respectivos componentes da estimativa da grandeza, e, em suas posições não diagonais, as covariâncias associadas aos pares de componentes dessa estimativa

NOTA 1 Adaptado de JCGM 101:2008 definição 3.11.

NOTA 2 Uma matriz de covariância $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ de dimensão $N \times N$ associada à estimativa $\mathbf{x}$ de uma grandeza $\mathbf{X}$ tem a representação

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} u(x_1, x_1) & \cdots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & \cdots & u(x_N, x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^2(x_1) & \cdots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & \cdots & u^2(x_N) \end{bmatrix},$$

onde $u(x_i, x_i) = u^2(x_i)$ é a variância (incerteza padrão ao quadrado) associada a x_i e $u(x_i, x_j)$ é a covariância associada a x_i e x_j . Quando os elementos X_i e X_j de $\mathbf{X}$ não são correlacionados, $u(x_i, x_j) = 0$.

NOTA 3 No Suplemento 1 do GUM [JCGM 101:2008], a matriz de covariância de medição é chamada de matriz de incerteza.

NOTA 4 Algumas dificuldades numéricas podem ocasionalmente surgir ao trabalhar com matrizes de covariância. Por exemplo, uma matriz de covariância $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ associada a uma estimativa vetorial $\mathbf{x}$ pode não ser definida positiva. Essa possibilidade pode ser resultado da forma como $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ foi calculada. Como consequência, o fator de Cholesky de $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ pode não existir. O fator de Cholesky é usado para trabalhar numericamente com $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ [7]; veja também o anexo B. Além disso, a variância associada a uma combinação linear dos elementos de $\mathbf{x}$ pode ser negativa, quando, de outra forma, seria de se esperar que fosse pequena e positiva. Em tal situação, existem procedimentos para “reparar” $\mathbf{U}_{\mathbf{x}}$ de modo que a matriz de covariância reparada seja definida positiva. Como resultado, o fator de Cholesky existiria e as variâncias de tais combinações lineares seriam positivas conforme o esperado. Tal procedimento é dado, na referência [27], pela seguinte variante. Forme a autodecomposição

$$\mathbf{U}_{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\text{T}},$$

onde $\mathbf{Q}$ é ortonormal e $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal dos autovalores de $\mathbf{U}_x$. Construa uma nova matriz diagonal, $\mathbf{D}'$ por exemplo, que seja igual a $\mathbf{D}$, mas com elementos menores que $d_{\min}$ substituídos por $d_{\min}$. Aqui, $d_{\min}$ é igual ao produto do arredondamento da unidade do computador usado e o maior elemento de $\mathbf{D}$. Cálculos subsequentes usariam uma matriz de covariância reparada $\mathbf{U}'_x$ formada por

$$\mathbf{U}'_x = \mathbf{Q}\mathbf{D}'\mathbf{Q}^\top.$$

NOTA 5 Certas operações envolvendo $\mathbf{U}_x$ requerem definitividade positiva.

3.21

matriz de correlação

matriz semidefinida positiva simétrica de dimensão $N \times N$ associada a uma estimativa de uma grandeza vetorial real de dimensão $N \times 1$, contendo as correlações associadas a pares de componentes da estimativa

NOTA 1 Uma matriz de correlação $\mathbf{R}_x$ de dimensão $N \times N$ associada à estimativa $\mathbf{x}$ de uma grandeza $\mathbf{X}$ tem a representação

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r(x_1, x_1) & \cdots & r(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r(x_N, x_1) & \cdots & r(x_N, x_N) \end{bmatrix},$$

onde $r(x_i, x_i) = 1$, e $r(x_i, x_j)$ é a correlação associada a x_i e x_j . Quando os elementos X_i e X_j de $\mathbf{X}$ não são correlacionados, $r(x_i, x_j) = 0$.

NOTA 2 As correlações também são conhecidas como coeficientes de correlação.

NOTA 3 $\mathbf{R}_x$ está relacionado a $\mathbf{U}_x$ (veja 3.20) por

$$\mathbf{U}_x = \mathbf{D}_x \mathbf{R}_x \mathbf{D}_x,$$

onde $\mathbf{D}_x$ é uma matriz diagonal de dimensão $N \times N$ com elementos diagonais $u(x_1), \dots, u(x_N)$. O elemento (i, j) de $\mathbf{U}_x$ é dado por

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j)u(x_i)u(x_j).$$

NOTA 4 Uma matriz de correlação $\mathbf{R}_x$ é definida positiva ou singular, se e somente se a matriz de covariância $\mathbf{U}_x$ correspondente for definida positiva ou singular, respectivamente. Certas operações envolvendo $\mathbf{R}_x$ requerem definitividade positiva.

NOTA 5 Ao apresentar valores numéricos dos elementos fora da diagonal de uma matriz de correlação, o arredondamento para três casas decimais geralmente é suficiente. No entanto, se a matriz de correlação estiver próxima de ser singular, mais dígitos decimais precisam ser retidos para evitar dificuldades numéricas ao usar a matriz correlação como entrada para uma avaliação de incerteza. O número de dígitos decimais a ser retido depende da natureza do cálculo subsequente, mas, como orientação, pode ser tomado como o número de dígitos decimais necessários para representar o menor autovalor da matriz de correlação com dois dígitos decimais significativos. Para uma matriz de correlação de dimensão 2×2 , os autovalores $\lambda_{\max}$ e $\lambda_{\min}$ são $1 \pm |r|$, o menor, $\lambda_{\min}$, sendo $1 - |r|$, onde r é o elemento fora da diagonal da matriz. Se uma matriz de correlação for singular antes do arredondamento, o arredondamento para zero reduz o risco de que a matriz arredondada não seja semidefinida positiva.

3.22

matriz de sensibilidade

matriz de derivadas parciais de primeira ordem para um modelo de medição real em relação às grandezas de entrada ou às grandezas de saída, avaliadas nas estimativas dessas grandezas

NOTA Para N grandezas de entrada e m grandezas de saída, a matriz de sensibilidade com relação a $\mathbf{X}$ tem dimensão $m \times N$ e aquela com relação a $\mathbf{Y}$ tem dimensão $m \times m$.

3.23

intervalo de abrangência

intervalo contendo o valor verdadeiro da grandeza com uma probabilidade declarada, com base nas informações disponíveis

NOTA 1 Adaptado de JCGM 101:2008 definição 3.12.

NOTA 2 O intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico para uma grandeza escalar é o intervalo tal que a probabilidade de que o valor verdadeiro da grandeza seja menor que o menor valor no intervalo é igual à probabilidade de que o valor verdadeiro da grandeza seja maior que o maior valor no intervalo [adaptado de JCGM 101:2008 3.15].

NOTA 3 O menor intervalo de abrangência para uma grandeza é o intervalo de menor comprimento entre todos os intervalos de abrangência para aquela grandeza com a mesma probabilidade de abrangência [adaptado de JCGM 101:2008 3.16].

3.24

região de abrangência

região contendo o valor verdadeiro da grandeza vetorial com uma probabilidade declarada, com base nas informações disponíveis

3.25

probabilidade de abrangência

probabilidade de que o valor verdadeiro da grandeza esteja contido em um intervalo de abrangência ou região de abrangência especificados

NOTA 1 Adaptado de JCGM 101:2008 definição 3.13.

NOTA 2 A probabilidade de abrangência é, por vezes, chamada de “nível de confiança” [JCGM 100:2008 6.2.2].

3.26

menor região de abrangência

região de abrangência para uma grandeza vetorial com (hiper-)volume mínimo entre todas as regiões de abrangência para essa grandeza com a mesma probabilidade de abrangência

NOTA Para uma única grandeza escalar, a menor região de abrangência é o menor intervalo de abrangência para a grandeza. Para uma grandeza bivariada, é a região de abrangência com a menor área entre todas as regiões de abrangência para aquela grandeza com a mesma probabilidade de abrangência.

3.27

distribuição gaussiana multivariada

distribuição de probabilidade de uma variável aleatória $\mathbf{X}$ de dimensão $N \times 1$ tendo a função densidade de probabilidade conjunta

$$g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}[\det(\mathbf{V})]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

NOTA $\boldsymbol{\mu}$ é a esperança e $\mathbf{V}$ é a matriz de covariância de $\mathbf{X}$, que deve ser definida positiva.

3.28

distribuição- t multivariada

distribuição de probabilidade de uma variável aleatória $\mathbf{X}$ de dimensão $N \times 1$ tendo a função densidade de probabilidade conjunta

$$g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\Gamma(\frac{\nu + N}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})(\pi\nu)^{N/2}} \times \frac{1}{[\det(\mathbf{V})]^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{\nu}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1}(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})\right]^{-(\nu+N)/2},$$

com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{V}$ e ν , onde $\mathbf{V}$ é simétrico positivo definido e

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z > 0,$$

é a função gama

NOTA 1 A distribuição- t multivariada é baseada na observação de que se uma variável aleatória vetorial $\mathbf{Q}$ de dimensão $N \times 1$ e uma variável aleatória escalar W são independentes e têm, respectivamente, uma distribuição gaussiana com esperança zero e matriz de covariância definida positiva $\mathbf{V}$ de dimensão $N \times N$, e uma distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade, e $(\nu/W)^{1/2} \mathbf{Q} = \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}$, então $\mathbf{X}$ tem a distribuição de probabilidade dada.

NOTA 2 $g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})$ não é fatorável no produto de N funções densidade de probabilidade mesmo quando $\mathbf{V}$ é uma matriz diagonal. Geralmente, os componentes de $\mathbf{X}$ são variáveis aleatórias estatisticamente dependentes.

EXEMPLO Quando $N = 2$, $\nu = 5$ e $\mathbf{V}$ é a matriz identidade de dimensão 2×2 , a probabilidade de que $X_1 > 1$ é de 18 %, enquanto a probabilidade condicional de que $X_1 > 1$ dado que $X_2 > 2$ é de 26 %.

4 Convenções e notações

Considerando os propósitos deste documento, são adotadas as seguintes convenções e notações.

4.1 No GUM [JCGM 100:2008 4.1.1 nota 1], para economia de notação, o mesmo símbolo (maiúsculas) é usado para

- (i) a grandeza (física), que se supõe ter um valor verdadeiro essencialmente único, e
- (ii) a variável aleatória correspondente.

NOTA A variável aleatória tem funções diferentes nas avaliações de incerteza Tipo A e Tipo B. Em uma avaliação de incerteza do Tipo A, a variável aleatória representa “... o resultado possível de uma observação da grandeza”. Em uma avaliação de incerteza do Tipo B, a distribuição de probabilidade para a variável aleatória descreve o estado de conhecimento sobre a grandeza.

Essa ambiguidade no símbolo é inofensiva na maioria das circunstâncias.

Neste Suplemento, assim como no Suplemento 1, para as grandezas de entrada sujeitas a uma avaliação de incerteza Tipo A, o mesmo símbolo (maiúsculo) é usado para três conceitos, a saber

- a) a grandeza,
- b) a variável aleatória que representa o resultado possível de uma observação da grandeza, e
- c) a variável aleatória cuja distribuição de probabilidade descreve o estado de conhecimento sobre a grandeza.

Essa ambiguidade adicional entre duas variáveis aleatórias distintas não está presente no GUM e é uma fonte potencial de mal-entendidos. Em particular, pode-se acreditar que o procedimento de Monte Carlo adotado neste Suplemento, bem como no Suplemento 1, está de acordo com o procedimento sugerido na nota do item 4.1.4 do GUM. Embora os dois procedimentos sejam análogos em princípio, na medida em que ambos se baseiam na avaliação repetida do modelo para valores de grandeza de entrada individuais extraídos de uma distribuição de probabilidade, eles são diferentes na prática, pois as tomadas de valores são feitas a partir de diferentes distribuições. Na nota do item 4.1.4 do GUM, as tomadas de valores são feitas a partir da distribuição de frequência para a variável aleatória b). Nos Suplementos, as tomadas de valores são feitas a partir da distribuição de probabilidade para a variável aleatória c). A primeira abordagem não é recomendada na maioria das situações experimentais [2].

4.2 As grandezas de entrada em um modelo de medição são genericamente denotadas por $X_1, \dots, X_N$, e coletivamente por $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$, uma matriz de dimensão $N \times 1$, com T denotando “transposta”.

4.3 Da mesma forma, as grandezas de saída em um modelo de medição são genericamente denotadas por $Y_1, \dots, Y_m$, e coletivamente por $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$, uma matriz de dimensão $m \times 1$.

4.4 Quando os Y_i são expressos diretamente como fórmulas em $\mathbf{X}$, o modelo de medição pode ser escrito como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad (1)$$

onde $\mathbf{f}$ é a função de medição multivariada. Equivalentemente (ver 3.9), o modelo de medição pode ser expresso como

$$Y_1 = f_1(\mathbf{X}), \quad \dots, \quad Y_m = f_m(\mathbf{X}),$$

onde $f_1(\mathbf{X}), \dots, f_m(\mathbf{X})$ são componentes de $\mathbf{f}(\mathbf{X})$.

4.5 Quando os Y_i não são expressos diretamente como fórmulas em $\mathbf{X}$, o modelo de medição é representado pela equação

$$\mathbf{h}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0, \tag{2}$$

ou, de forma equivalente (ver 3.8), por

$$h_1(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0, \quad \dots, \quad h_m(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0.$$

4.6 Uma estimativa de $\mathbf{X}$ é denotada por $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^\top$, uma matriz de dimensão $N \times 1$. A matriz de covariância associada a $\mathbf{x}$ é denotada por $\mathbf{U}_x$, uma matriz de dimensão $N \times N$ (ver 3.20).

4.7 Uma estimativa de $\mathbf{Y}$ é denotada por $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^\top$, uma matriz de dimensão $m \times 1$. A matriz de covariância associada a $\mathbf{y}$ é denotada por $\mathbf{U}_y$, uma matriz de dimensão $m \times m$.

NOTA $\mathbf{U}_y$ é a contraparte, para m grandezas de saída, da variância $u^2(y)$ associada a y no contexto dos modelos de medição univariada do GUM e GUM Suplemento 1. No GUM, $u(y)$ é denotado por $u_c(y)$, o subscrito “c” denotando combinado. Assim como no Suplemento 1, o uso de “c” neste contexto é considerado supérfluo pelas razões expostas em 4.10 daquele Suplemento. Consequentemente, “c” também não é usado neste Suplemento.

4.8 Quando as estimativas das grandezas de saída em um modelo de medição forem usadas individualmente, cada uma dessas grandezas pode ser considerada como a grandeza de saída no modelo de medição univariado (escalar) correspondente. Quando as grandezas de saída forem consideradas juntas, usadas, por exemplo, em um cálculo subsequente, quaisquer correlações associadas a pares de estimativas das grandezas de saída precisam ser levadas em consideração.

4.9 O símbolo adotado para a incerteza padrão associada a um valor de grandeza x é $u(x)$. Quando o contexto é tal que não há possibilidade de mal-entendidos, a notação alternativa u_x pode ser adotada. A notação alternativa não é recomendada quando um valor de grandeza é indexado ou adornado de outra forma, por exemplo x_i ou $\hat{x}$.

4.10 $\mathbf{x}$ pode ser descrito como “estimativas das grandezas de entrada” ou “uma estimativa da grandeza de entrada (vetorial)”. A última descrição é usada mormente neste Suplemento (e similarmente para as grandezas de saída).

4.11 Como nas subseções 4.2 a 4.10, uma grandeza é geralmente indicada por uma letra maiúscula e uma estimativa ou algum valor fixo da grandeza (como a esperança) pela letra minúscula correspondente. Embora valiosa para considerações genéricas, tal notação é bastante inapropriada para grandezas físicas, devido ao uso estabelecido de símbolos específicos, por exemplo T para temperatura termodinâmica e t para tempo. Portanto, em alguns dos exemplos, uma notação diferente é usada, na qual uma grandeza é denotada por seu símbolo convencional e sua esperança ou uma estimativa dela

por esse símbolo adornado com $\wedge$. Por exemplo, a grandeza que representa a amplitude de uma corrente alternada (exemplo 1 de 6.2.2) é denotada por I e uma estimativa de I por $\hat{I}$ [JCGM 101:2008 4.8].

4.12 Uma exceção é feita no uso dos símbolos frequentemente usados para função densidade de probabilidade (FDP) e função distribuição. O GUM usa o símbolo genérico f para se referir a um modelo e a uma FDP. Alguma confusão surge no GUM como consequência desse uso. A situação neste Suplemento é diferente. Os conceitos de função de medição, FDP e função distribuição são fundamentais para seguir e implementar as orientações fornecidas. Portanto, no lugar dos símbolos f e F para denotar uma FDP e uma função distribuição, respectivamente, são usados os símbolos g e G . Esses símbolos são indexados adequadamente para denotar a grandeza em questão. O símbolo f é reservado para uma função de medição. Contrapartes vetoriais desses símbolos também são usadas.

4.13 Uma PDF é atribuída a uma grandeza, que pode ser uma única grandeza escalar X ou uma grandeza vetorial $\mathbf{X}$. No caso escalar, a FDP para X é denotada por $g_X(\xi)$, onde ξ é uma variável que descreve os possíveis valores de X . Este X é considerado como uma variável aleatória com esperança $E(X)$ e variância $V(X)$.

4.14 No caso vetorial, a FDP para $\mathbf{X}$ é denotada por $g_X(\xi)$, onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)^\top$ é uma variável que descreve os possíveis valores da grandeza $\mathbf{X}$. Este $\mathbf{X}$ é considerado como uma variável aleatória com esperança $E(\mathbf{X})$ e variância $V(\mathbf{X})$.

4.15 Analogamente, no caso escalar, a FDP de Y é denotada por $g_Y(\eta)$ e, no caso vetorial, a FDP de $\mathbf{Y}$ é denotada por $g_Y(\eta)$.

4.16 Conforme Resolução 10 da 22ª CGPM (2003) “... o símbolo para o marcador decimal deve ser o ponto na linha ou a vírgula na linha ...”. O JCGM decidiu adotar, em seus documentos em inglês, o ponto na linha. **Na presente versão brasileira adotou-se a vírgula na linha.**

5 Princípios básicos

5.1 Generalidades

5.1.1 No GUM [JCGM 100:2008 4.1], um sistema de medição é modelado em termos de uma função envolvendo grandezas reais de entrada $X_1, \dots, X_N$ e uma grandeza de saída real Y na forma da expressão (1), ou seja, $Y = f(\mathbf{X})$, onde $\mathbf{X} \equiv (X_1, \dots, X_N)^\top$ é referido como a grandeza de entrada vetorial real. Esta função é conhecida como uma função de medição univariada real (ver 3.9 nota 3).

5.1.2 Na prática, nem todos os sistemas de medição encontrados podem ser modelados como uma função de medição em uma única grandeza de saída escalar. Esses sistemas podem, em vez disso, envolver

- a) um número de grandezas de saída $Y_1, \dots, Y_m$ (denotado coletivamente pela grandeza de saída vetorial real $\mathbf{Y} \equiv (Y_1, \dots, Y_m)^\top$), assumindo a forma (1), ou seja, $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$, ou
- b) a forma mais geral de modelo de medição, assumindo a forma (2), ou seja, $\mathbf{h}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0$.

5.1.3 Além disso, alguns ou todos os componentes de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ podem corresponder a componentes (parte real e parte imaginária, ou magnitude e fase) de grandezas de entrada complexas. Portanto, todos

os modelos de medição podem ser considerados (sem perda de generalidade) como reais. No entanto, um tratamento mais simples do que o tratamento correspondente envolvendo partes reais e imaginárias se aplica ao caso complexo [14]. O tratamento fornece expressões matriciais sucintas para a lei de propagação de incerteza quando aplicada a modelos de medição com grandezas complexas (modelos complexos). Ver [6.4](#) e anexo A.

5.1.4 Este Suplemento do GUM considera os modelos de medição mais gerais em [5.1.2](#) e [5.1.3](#).

5.2 Principais etapas da avaliação da incerteza

5.2.1 As principais etapas da avaliação da incerteza constituem formulação, propagação e resumo:

a) *Formulação:*

- 1) definir a grandeza de saída Y , a grandeza que se pretende medir (o vetor mensurando);
- 2) determinar a grandeza de entrada X da qual Y depende;
- 3) desenvolver uma função de medição [f em (1)] ou modelo de medição (2) relacionando X e Y ;
- 4) com base no conhecimento disponível, atribuir FDPs — gaussianas (normais), retangulares (uniformes), etc. — aos componentes de X . Alternativamente, atribuir uma FDP conjunta aos componentes de X que não são independentes dos pares;

b) *Propagação:*

propagar, por meio do modelo, as FDPs atribuídas para os componentes de X , para obter a FDP (conjunta) para Y ;

c) *Resumo:*

use a FDP de Y para obter

- 1) a esperança de Y , tomada como uma estimativa y de Y ,
- 2) a matriz de covariância de Y , tomada como a matriz de covariância U_y associada a y , e
- 3) uma região de abrangência contendo Y com uma probabilidade especificada p (a probabilidade de abrangência).

5.2.2 Os passos da etapa de formulação são realizados pelo metrologista. A orientação sobre a atribuição de FDPs (passo 4 da etapa a) em 5.2.1) é fornecida no Suplemento 1 do GUM para alguns casos comuns e em 5.3. As etapas de propagação e resumo, b) e c), para as quais orientações detalhadas são aqui fornecidas, não requerem informações metrológicas adicionais e, em princípio, podem ser executadas com qualquer tolerância numérica necessária para o problema especificado na etapa de formulação.

NOTA Uma vez realizada a etapa de formulação a) em 5.2.1, a FDP para Y é completamente especificada matematicamente, mas geralmente o cálculo da esperança, da matriz de covariância e de regiões de abrangência requerem métodos numéricos que envolvem um grau de aproximação.

5.3 Funções densidade de probabilidade para as grandezas de entrada

5.3.1 Generalidades

O Suplemento 1 do GUM fornece orientação sobre a atribuição, em algumas circunstâncias comuns, de FDPs às grandezas de entrada X_i na etapa de formulação da avaliação da incerteza [JCGM 101:2008 6]. A única distribuição multivariada considerada no Suplemento 1 do GUM é a gaussiana multivariada [JCGM 101:2008 6.4.8]. Essa distribuição é atribuída à grandeza de entrada $\mathbf{X}$ quando a estimativa $\mathbf{x}$ e a matriz de covariância associada $\mathbf{U}_x$ constituem a única informação disponível sobre $\mathbf{X}$. Uma outra distribuição multivariada, a distribuição- t multivariada, é descrita em 5.3.2. Essa distribuição surge quando uma série de valores indicados, considerada como sendo obtida independentemente de uma grandeza vetorial com esperança desconhecida e matriz de covariância desconhecida com uma distribuição gaussiana multivariada, é a única informação disponível sobre $\mathbf{X}$. Ver também 6.5.4.

5.3.2 Distribuição- t multivariada

5.3.2.1 Suponha que uma série de n valores indicados $x_1, \dots, x_n$, cada um de dimensão $N \times 1$, está disponível, com $n > N$, considerada como tendo sido obtida independentemente de uma grandeza com esperança desconhecida $\boldsymbol{\mu}$ e matriz de covariância $\boldsymbol{\Sigma}$ de dimensão $N \times N$ tendo a distribuição gaussiana multivariada $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. A grandeza de entrada desejada $\mathbf{X}$ de dimensão $N \times 1$ é tomada como sendo igual a $\boldsymbol{\mu}$. Então, atribuindo uma distribuição *a priori* conjunta não informativa a $\boldsymbol{\mu}$ e $\boldsymbol{\Sigma}$, e usando o teorema de Bayes, a FDP marginal (conjunta) para $\mathbf{X}$ é uma distribuição- t multivariada $t_\nu(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{S}/n)$ com $\nu = n - N$ graus de liberdade [11], onde

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n}(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n), \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\nu}[(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_1 - \bar{\mathbf{x}})^\top + \dots + (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}})^\top].$$

NOTA A distribuição *a priori* pode ser atribuída de outras formas, o que influenciaria os graus de liberdade ou mesmo a distribuição.

5.3.2.2 A FDP para $\mathbf{X}$ é

$$g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(\nu/2)(\pi\nu)^{N/2}} \times [\det(\mathbf{S}/n)]^{-1/2} \left[1 + \frac{1}{\nu}(\boldsymbol{\xi} - \bar{\mathbf{x}})^\top \left(\frac{\mathbf{S}}{n}\right)^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \bar{\mathbf{x}}) \right]^{-n/2},$$

onde $\Gamma(z)$ é a função gama com argumento z .

5.3.2.3 $\mathbf{X}$ possui esperança e matriz de covariância

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{V}(\mathbf{X}) = \frac{\nu}{\nu - 2} \frac{\mathbf{S}}{n},$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{X})$ é definido apenas para $\nu > 1$ (ou seja, para $n > N + 1$) e $\mathbf{V}(\mathbf{X})$ apenas para $\nu > 2$ (ou seja, para $n > N + 2$).

5.3.2.4 Para realizar uma amostragem a partir de $t_\nu(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{S}/n)$, tome aleatoriamente N valores z_i , $i = 1, \dots, N$, da distribuição gaussiana padrão $N(0, 1)$ e um único valor aleatório w de χ_ν^2 , a distribuição qui-quadrado com ν graus de liberdade e obtenha

$$\xi = \bar{x} + Lz\sqrt{\frac{v}{w}}, \quad z = (z_1, \dots, z_N)^T,$$

onde L é a matriz triangular inferior de dimensão $N \times N$ dada pela decomposição de Cholesky $S/n = LL^T$ [13].

NOTA A matriz L pode ser determinada como na referência [13], por exemplo.

5.3.3 Construção de funções densidade de probabilidade multivariadas

Quando as grandezas de entrada $X_1, \dots, X_N$ estão correlacionadas, as informações que normalmente estão disponíveis sobre elas são as formas de suas FDPs (por exemplo, uma é gaussiana, outra é retangular, etc), estimativas $x_1, \dots, x_N$, usadas como suas esperanças, incertezas-padrão associadas $u(x_1), \dots, u(x_N)$, usadas como seus desvios-padrão, e covariâncias associadas aos pares de x_i . Um dispositivo matemático conhecido como *cópula* [20] pode ser usado para produzir uma FDP para X consistente com tais informações. Tal FDP não é única.

5.4 Propagação de distribuições

5.4.1 A Figura 1 (esquerda) apresenta uma ilustração de um modelo de medição no qual existem $N = 3$ grandezas de entrada mutuamente independentes $X = (X_1, X_2, X_3)^T$ e $m = 2$ grandezas de saída $Y = (Y_1, Y_2)^T$. A função de medição é $f = (f_1, f_2)^T$. Para $i = 1, 2, 3$, X_i é atribuído à FDP $g_{X_i}(\xi_i)$, e Y é caracterizado pela FDP conjunta $g_Y(\eta) \equiv g_{Y_1, Y_2}(\eta_1, \eta_2)$. A Figura 1 (à direita) adapta este exemplo para o caso em que X_1 e X_2 são mutuamente dependentes e caracterizados pela FDP conjunta $g_{X_1, X_2}(\xi_1, \xi_2)$.

5.4.2 Pode haver uma grandeza de saída adicional, por exemplo Q , dependente de Y . Y seria considerado como uma grandeza de entrada para um outro modelo de medição representado em termos de uma função de medição t , digamos:

$$Q = t(Y).$$

Como exemplo, Y pode ser o vetor de massas em um conjunto de padrões de massa, e Q a soma de alguns deles.

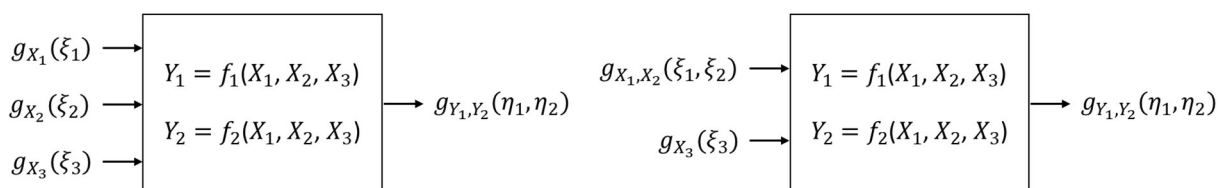


Figura 1 — Propagação de distribuições para $N = 3$ grandezas de entrada e $m = 2$ grandezas de saída quando as grandezas de entrada X_1 , X_2 e X_3 são mutuamente independentes e (à direita) quando X_1 e X_2 são mutuamente dependentes (5.4.1)

5.4.3 A composição das funções de medição f e t , que são consideradas como submodelos, gera Q como uma função de X . Pode, no entanto, ser desejável manter os submodelos individuais quando eles se relacionam com estágios funcionalmente distintos. Esses dois submodelos constituem uma instância de um modelo de vários estágios (ver 3.12).

5.4.4 O caso em que o estágio final de um modelo de vários estágios tem uma grandeza de saída que é uma grandeza escalar singela, sendo essa grandeza a única grandeza de saída de interesse, pode ser tratado usando o Suplemento 1 do GUM.

5.5 Obtendo informações resumidas

5.5.1 Uma estimativa y da grandeza de saída Y é a esperança $E(Y)$. A matriz de covariância U_y associada a y é a matriz de covariância $V(Y)$.

5.5.2 Para uma probabilidade de abrangência p , uma região de abrangência R_Y para Y satisfaz

$$\int_{R_Y} g_Y(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} = p.$$

NOTA 1 Embora variáveis aleatórias correspondentes a algumas grandezas possam ser caracterizadas por distribuições que não possuem esperança ou matriz de covariância (ver, por exemplo, 5.3.2), uma região de abrangência para Y sempre existe.

NOTA 2 Geralmente há mais de uma região de abrangência para uma probabilidade de abrangência p declarada.

5.5.3 Não existe contrapartida multivariada direta do intervalo de abrangência probabilisticamente simétrico de $100p$ % considerado no Suplemento 1 do GUM. Existe, no entanto, uma contrapartida do menor intervalo de abrangência de $100p$ %. É a região de abrangência de $100p$ % para Y de menor hipervolume.

5.6 Implementações da propagação de distribuições

5.6.1 A propagação de distribuições pode ser implementada de várias formas:

- métodos analíticos, os quais fornecem uma representação matemática da FDP para Y ;
- propagação de incerteza baseada na substituição do modelo por uma aproximação da série de Taylor de primeira ordem (uma generalização do tratamento no GUM [JCGM 100:2008 5.1.2]) – a lei (geral) de propagação de incerteza;
- métodos numéricos [JCGM 100:2008 G.1.5] que implementam a propagação de distribuições, especificamente utilizando o método de Monte Carlo (MMC).

NOTA 1 Soluções expressas analiticamente são ideais porque não introduzem nenhuma aproximação. No entanto, elas são aplicáveis apenas em casos simples. Esses métodos não serão mais considerados neste Suplemento, exceto nos exemplos para fins comparativos.

NOTA 2 O MMC, como aqui tratado, é considerado como um meio para fornecer uma representação numérica da distribuição para uma grandeza de saída vetorial, em vez de um método de simulação propriamente dito. No contexto da etapa de propagação da avaliação da incerteza, o problema a ser resolvido é determinístico, não havendo nenhum processo físico aleatório a ser simulado.

5.6.2 Na propagação de incertezas, a estimativa $x = E(X)$ de X e a matriz de covariância associada $U_x = V(X)$ são propagadas através (de uma linearização) do modelo de medição. Este Suplemento fornece procedimentos para fazer isso para os vários tipos de modelo considerados.

5.6.3 A Figura 2 (esquerda) ilustra a lei (geral) de propagação de incerteza para um modelo de medição com $N = 3$ grandezas de entrada mutuamente independentes $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top$ e $m = 2$ grandezas de saída $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^\top$. $\mathbf{X}$ é estimado por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ com incertezas padrão associadas $u(x_1)$, $u(x_2)$ e $u(x_3)$. $\mathbf{Y}$ é estimado por $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^\top$ com matriz de covariância associada $\mathbf{U}_y$. A Figura 2 (direita) se aplica quando X_1 e X_2 são mutuamente dependentes com covariância $u(x_1, x_2)$ associada às estimativas x_1 e x_2 .

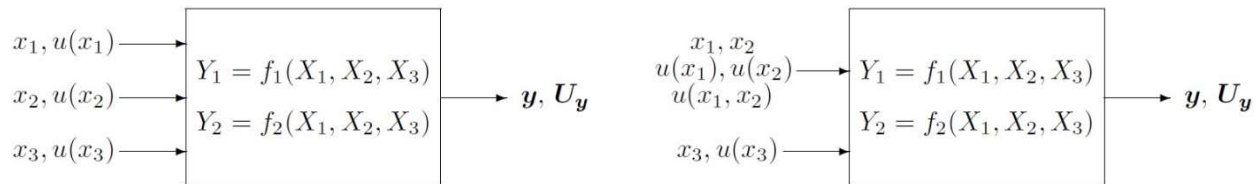


Figura 2 -- Lei geral da propagação de incerteza para $N = 3$ grandezas de entrada mutuamente independentes X_1 , X_2 e X_3 e $m = 2$ (quase invariavelmente) grandezas de saída mutuamente dependentes, e (direita) como esquerda, mas para X_1 e X_2 mutuamente dependentes (5.6.3)

5.6.4 No MMC, uma representação discreta da distribuição de probabilidade (conjunta) para $\mathbf{X}$ é propagada através do modelo de medição para obter uma representação discreta da distribuição de probabilidade (conjunta) para $\mathbf{Y}$ a partir da qual a informação resumida é determinada.

6 Metodologia de incerteza do GUM

6.1 Geral

6.1.1 A propagação de incertezas para modelos de medição que são mais gerais do que a forma $Y = f(\mathbf{X})$ tratada no GUM está descrita abaixo (ver 6.2 e 6.3). Embora tais modelos de medição não sejam diretamente considerados no GUM, os mesmos princípios subjacentes podem ser utilizados para propagar estimativas das grandezas de entrada e as incertezas associadas às estimativas através do modelo de medição para obter estimativas das grandezas de saída e as incertezas associadas. Expressões matemáticas para a avaliação de incerteza são declaradas utilizando a notação de matriz-vetor, em vez dos somatórios subscritos dados no GUM, porque geralmente tais expressões são mais compactas e mais naturalmente implementadas em modernos pacotes de *software* e linguagens de programação.

6.1.2 Para a aplicação da lei de propagação de incerteza, são utilizadas as mesmas informações referentes às grandezas de entrada, como tratadas no GUM para o modelo de medição univariado:

- uma estimativa $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^\top$ da grandeza de entrada $\mathbf{X}$;
- a matriz de covariância $\mathbf{U}_x$ associada a $\mathbf{x}$ contendo as covariâncias $u(x_i, x_j)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, associada a x_i e x_j .

6.1.3 A descrição da propagação de incerteza dada em 6.2 e 6.3 é para modelos de medição reais, incluindo modelos de medição complexos que são expressos em termos de grandezas reais. Um tratamento para modelos de medição complexos é dado em 6.4. Veja também 5.1.3.

6.1.4 Em 6.5 é descrita a forma de obtenção de uma região de abrangência para uma grandeza de saída vetorial.

6.2 Propagação de incerteza para modelos de medição multivariados explícitos

6.2.1 Geral

6.2.1.1 Um modelo de medição multivariado explícito especifica uma relação entre uma grandeza de saída $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^\top$ e uma grandeza de entrada $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^\top$ e assume a forma

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)^\top,$$

Onde $\mathbf{f}$ denota a função de medição multivariada.

NOTA Qualquer função particular $f_j(\mathbf{X})$ pode depender de apenas um subconjunto de $\mathbf{X}$, com cada X_i aparecendo em pelo menos uma função.

6.2.1.2 Dada uma estimativa x de $\mathbf{X}$, uma estimativa $\mathbf{Y}$ é

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

6.2.1.3 A matriz de covariância de dimensão $m \times m$ associada a $\mathbf{y}$ é

$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} u(y_1, y_1) & \dots & u(y_1, y_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(y_m, y_1) & \dots & u(y_m, y_m) \end{bmatrix},$$

onde $cov(y_j, y_j) = u^2(y_j)$ e é dado por

$$\mathbf{U}_y = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^\top,$$

Onde $\mathbf{C}_x$ é a matriz de sensibilidade de dimensão $m \times N$ dada pela avaliação

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial X_N} \end{bmatrix}$$

em $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ [19, página 29].

6.2.2 Exemplos

EXEMPLO 1 *Resistência e reatância de um elemento de circuito* [JCGM 100:2008 H.2]

A resistência R e a reatância X de um elemento de circuito são determinadas medindo-se a amplitude V de uma diferença de potencial alternada senoidal a ele aplicada, a amplitude I da corrente alternada que passa por ele e o ângulo de fase ϕ entre as duas. O modelo de medição bivariado para R e X em termos de V , I e ϕ é

$$R = f_1(V, I, \phi) = \frac{V}{I} \cos \phi, \quad X = f_2(V, I, \phi) = \frac{V}{I} \sin \phi. \quad (4)$$

Em termos de notação geral, $N = 3$, $m = 2$, $\mathbf{X} \equiv f_2(V, I, \phi)^\top$ e $\mathbf{Y} \equiv (R, X)^\top$.

Uma estimativa $\mathbf{y} \equiv (\hat{R}, \hat{X})^\top$ de resistência e reatância é obtida avaliando as expressões (4) em uma estimativa $\mathbf{x} \equiv (\hat{V}, \hat{I}, \hat{\phi})^\top$ da grandeza de entrada $\mathbf{X}$.

A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ de dimensão 2×2 associada a $\mathbf{y}$ é dada pela fórmula (3), onde $\mathbf{C}_x$ é a matriz de sensibilidade de dimensão 2×3 dada pela avaliação

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial V} & \frac{\partial f_1}{\partial I} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V} & \frac{\partial f_2}{\partial I} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \phi}{I} & -\frac{V \cos \phi}{I^2} & -\frac{V \sin \phi}{I} \\ \frac{\sin \phi}{I} & -\frac{V \sin \phi}{I^2} & \frac{V \cos \phi}{I} \end{bmatrix}$$

em $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, e $\mathbf{U}_x$ é a matriz de covariância de dimensão 3×3 associada a $\mathbf{x}$.

NOTA No GUM, a reatância é denotada por X , que é a notação utilizada aqui. A reatância X , um componente da grandeza de saída vetorial $\mathbf{Y}$, não deve ser confundida com $\mathbf{X}$, a grandeza de entrada vetorial.

EXEMPLO 2 *Coefficiente de reflexão medido por um refletômetro de micro-onda (abordagem 1)*

O coeficiente de reflexão (complexo) Γ medido por um refletômetro de micro-ondas calibrado, como um analisador de rede automático, é dado pelo modelo de medição complexo

$$\Gamma = \frac{aW+b}{cW+1}, \quad (5)$$

onde W é o coeficiente de reflexão (complexo) não corrigido e a , b e c são os coeficientes de calibração (complexos) que caracterizam o refletômetro [10, 16, 26].

Em termos de notação geral e trabalhando com partes real e imaginária das grandezas envolvidas, $N = 8$, $m = 2$, $\mathbf{X} \equiv (a_R, a_I, b_R, b_I, c_R, c_I, W_R, W_I)^\top$ e $\mathbf{Y} \equiv (\Gamma_R, \Gamma_I)^\top$.

Uma estimativa $\mathbf{y} \equiv (\hat{\Gamma}_R, \hat{\Gamma}_I)^\top$ do coeficiente de reflexão (complexo) é dada pelas partes real e imaginária do lado direito da expressão (5) avaliada na estimativa $\mathbf{x}$ da grandeza de entrada $\mathbf{X}$.

A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ de dimensão 2×2 associada a $\mathbf{y}$ é dada pela fórmula (3), onde $\mathbf{C}_x$ é a matriz de sensibilidade de dimensão 2×8 dada pela avaliação

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma_R}{\partial a_R} & \frac{\partial \Gamma_R}{\partial a_I} & \frac{\partial \Gamma_R}{\partial b_R} & \frac{\partial \Gamma_R}{\partial b_I} & \frac{\partial \Gamma_R}{\partial c_R} & \frac{\partial \Gamma_R}{\partial c_I} & \frac{\partial \Gamma_R}{\partial W_R} & \frac{\partial \Gamma_R}{\partial W_I} \\ \frac{\partial \Gamma_I}{\partial a_R} & \frac{\partial \Gamma_I}{\partial a_I} & \frac{\partial \Gamma_I}{\partial b_R} & \frac{\partial \Gamma_I}{\partial b_I} & \frac{\partial \Gamma_I}{\partial c_R} & \frac{\partial \Gamma_I}{\partial c_I} & \frac{\partial \Gamma_I}{\partial W_R} & \frac{\partial \Gamma_I}{\partial W_I} \end{bmatrix}$$

em $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, e $\mathbf{U}_x$ é a matriz de covariância de dimensão 8×8 associada a $\mathbf{x}$.

EXEMPLO 3 *Calibração de padrões de massa*

Este exemplo constitui uma amostragem de um modelo multiestágio (ver 3.12, 5.4.2 e 5.4.3).

Um conjunto de q padrões de massa de valores de massa desconhecidos $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_q)^\top$ é calibrado por comparação com um quilograma de referência, utilizando um comparador de massa, um peso de sensibilidade para determinar a sensibilidade do comparador e um número de instrumentos auxiliares como um termômetro, um barômetro e um higrômetro para determinar a correção associada ao empuxo do ar. O quilograma de referência e o peso de sensibilidade têm massas m_R e m_S , respectivamente. A calibração é realizada por meio da execução, de acordo com um procedimento de medição adequado, de um número k suficiente de comparações entre grupos de padrões, produzindo diferenças aparentes no ar $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_k)^\top$. Correções de empuxo $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_k)^\top$ correspondentes são calculadas. Diferenças de massa $\mathbf{X}$ no vácuo são obtidas a partir do submodelo $\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{W})$, onde $\mathbf{W} = (m_R, m_S, \boldsymbol{\delta}^\top, \mathbf{b}^\top)^\top$.

Uma estimativa $\mathbf{y} \equiv (\hat{m}_1, \dots, \hat{m}_q)^\top$ das massas $\mathbf{m}$ é tipicamente dada pela solução de mínimos quadrados do sistema de equações sobre determinado $\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{X}$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz de dimensão $k \times q$ com elementos iguais a +1, -1 ou zero, de acordo com os padrões de massa envolvidos em cada comparação, e respeitando as incertezas associadas à estimativa $\mathbf{x}$ de $\mathbf{X}$. Com esta escolha, a estimativa $\mathbf{y}$ é dada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{U}_y \mathbf{A}^\top \mathbf{U}_x^{-1} \mathbf{x}, \quad (6)$$

onde a matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ de dimensão $q \times q$ associada a $\mathbf{y}$ é dada por $\mathbf{U}_y = (\mathbf{A}^\top \mathbf{U}_x^{-1} \mathbf{A})^{-1}$. $\mathbf{U}_x$ é a matriz de covariância de dimensão $k \times k$ associada a $\mathbf{x}$. Uma descrição mais detalhada do submodelo, bem como um procedimento para obter $\mathbf{U}_x$ em termos de $\mathbf{U}_w$, a matriz de covariância associada à estimativa $\mathbf{w}$ de $\mathbf{W}$, está disponível em [3].

O modelo de medição multivariado para este exemplo pode ser expresso como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}_y \mathbf{A}^\top \mathbf{U}_x^{-1} \mathbf{X},$$

onde a função de medição é $\mathbf{U}_y \mathbf{A}^\top \mathbf{U}_x^{-1} \mathbf{X}$. Em termos de notação geral, $N = k$, $m = q$ e $\mathbf{Y} \equiv \mathbf{m}$.

NOTA Computacionalmente, é mais eficiente obter a estimativa proporcionada pela fórmula (6) usando um algoritmo baseado em fatoração ortogonal [13], do que utilizar esta fórmula explícita.

6.3 Propagação de incerteza para modelos de medição multivariados implícitos

6.3.1 Geral

6.3.1.1 Um modelo de medição multivariado implícito especifica uma relação entre uma grandeza de saída $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^\top$ e uma grandeza de entrada $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^\top$, e assume a forma

$$\mathbf{h}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m)^\top.$$

6.3.1.2 Dada uma estimativa $\mathbf{x}$ de $\mathbf{X}$, uma estimativa $\mathbf{y}$ de $\mathbf{Y}$ é dada pela solução do sistema de equações

$$\mathbf{h}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (7)$$

NOTA O sistema de equações (7) geralmente deve ser resolvido numericamente para $\mathbf{y}$, utilizando, por exemplo, o método de Newton [12] ou uma variante desse método, partindo de uma aproximação $\mathbf{y}^{(0)}$ para a solução.

6.3.1.3 A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ de dimensão $m \times m$ associada a $\mathbf{y}$ é avaliada a partir do sistema de equações

$$\mathbf{C}_y \mathbf{U}_y \mathbf{C}_y^\top = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^\top, \quad (8)$$

onde $\mathbf{C}_y$ é a matriz de sensibilidade de dimensão $m \times m$ contendo as derivadas parciais $\partial h_\ell / \partial Y_j$, $\ell = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$ e $\mathbf{C}_x$ é a matriz de sensibilidade de dimensão $m \times N$ contendo as derivadas parciais $\partial h_\ell / \partial X_i$, $\ell = 1, \dots, m, i = 1, \dots, N$, todas as derivadas sendo avaliadas em $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$.

NOTA 1 A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ na expressão (8) não é definida se $\mathbf{C}_y$ é singular.

NOTA 2 A expressão (8) é obtida de forma similar à expressão (3), com o uso do teorema da função implícita.

6.3.1.4 Formalmente, as matrizes de covariância $\mathbf{U}_x$ e $\mathbf{U}_y$ são relacionadas por

$$\mathbf{U}_y = \mathbf{C} \mathbf{U}_x \mathbf{C}^\top, \quad (9)$$

onde

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{C}_x, \quad (10)$$

é uma matriz de coeficientes de sensibilidade de dimensão $m \times N$.

6.3.1.5 O Anexo B contém um procedimento para formar $\mathbf{U}_y$. Não é recomendado que $\mathbf{U}_y$ seja obtido diretamente avaliando a expressão (10) e depois a expressão (9); tal procedimento é menos estável numericamente.

6.3.2 Exemplos

EXEMPLO 1 *Conjunto de pressões geradas por uma balança de pressão*

A pressão p gerada por uma balança de pressão é implicitamente definida pela equação

$$p = \frac{m_w(1 - \rho_a/\rho_w)g_\ell}{A_0(1 + \lambda_p)(1 + \alpha\delta\theta)}, \quad (11)$$

onde m_w é a massa total aplicada, ρ_a e ρ_w são, respectivamente, as densidades do ar e das massas aplicadas, g_ℓ é a aceleração local devida à gravidade, A_0 é a área efetiva da seção transversal da balança na pressão zero, λ é o coeficiente de distorção do conjunto pistão-cilindro, α é o coeficiente de expansão térmica e $\delta\theta$ é o desvio da temperatura de referência de 20 °C [17].

Considere que $p_1, \dots, p_q$ denotam as pressões geradas, respectivamente, para as massas aplicadas $m_{w,1}, \dots, m_{w,q}$ e os desvios de temperatura $\delta\theta_1, \dots, \delta\theta_q$.

Em termos de notação geral, $N = 6 + 2q$, $m = q$, $\mathbf{X} \equiv (A_0, \lambda, \alpha, \delta\theta_1, m_{w,1}, \dots, \delta\theta_q, m_{w,q}, \rho_a, \rho_w, g_\ell)^\top$ e $\mathbf{Y} \equiv (p_1, \dots, p_q)^\top$.

$\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são relacionados pelo modelo de medição

$$h_j(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = A_0 p_j (1 + \lambda p_j) (1 + \alpha \delta\theta_j) - m_{w,j} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w}\right) g_\ell = 0, \quad j = 1, \dots, q. \quad (12)$$

Uma estimativa $\hat{p}_j$ de p_j é obtida resolvendo uma equação da forma (12) usando estimativas de A_0 , λ , α , $\delta\theta_j$, $m_{w,j}$, ρ_a , ρ_w e g_ℓ . No entanto, as estimativas resultantes possuem covariâncias associadas porque todas elas (estimativas) dependem das grandezas medidas A_0 , λ , α , ρ_a , ρ_w e g_ℓ .

A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ de dimensão $q \times q$ associada a $\mathbf{y} \equiv (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_q)^\top$ é avaliada a partir da expressão (8), onde $\mathbf{C}_y$ é a matriz de sensibilidade de dimensão $q \times q$ contendo as derivadas parciais $\partial h_\ell / \partial Y_j$, $\ell = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, q$ e $\mathbf{C}_x$ é a matriz de dimensão $q \times (6 + 2q)$ contendo as derivadas parciais $\partial h_\ell / \partial X_i$, $\ell = 1, \dots, q$, $i = 1, \dots, 6 + 2q$, ambas avaliadas em $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, e $\mathbf{U}_x$ é a matriz de covariância de dimensão $(6 + 2q) \times (6 + 2q)$ associada a $\mathbf{x}$.

NOTA 1 Uma função de medição [dando $Y_j (\equiv p_j)$ explicitamente como uma função de $\mathbf{X}$] pode ser determinada neste caso como a solução de uma equação quadrática. Tal forma não é necessariamente estável numericamente. Além disso, modelos de medição envolvendo adicionais potências de ordem superior de p são às vezes utilizados [9]. A determinação de uma expressão explícita não é geralmente possível em tal caso.

NOTA 2 Existe mais de uma forma de expressar o modelo de medição (12). Por exemplo, no lugar da forma (12), o modelo baseado em igualar a zero a diferença entre os lados esquerdo e direito do modelo (11) poderia ser utilizado. A eficiência e a estabilidade da solução numérica do modelo de medição dependem da escolha feita.

NOTA 3 Podem também ser analisados modelos mais completos para a pressão gerada por uma balança de pressão [17], incluindo, por exemplo, uma correção que leva em conta os efeitos da tensão superficial.

NOTA 4 Nem todas as grandezas de entrada aparecem em todas as equações, com a j -ésima equação envolvendo apenas A_0 , λ , α , $\delta\theta_j$, $m_{w,j}$, ρ_a , ρ_w e g_ℓ .

EXEMPLO 2 *Coeficiente de reflexão medido por um refletômetro de micro-onda (abordagem 2)*

Uma outra abordagem para o exemplo 2 dado em 6.2.2 é relacionar a grandeza de entrada $\mathbf{X} \equiv (a_R, a_I, b_R, b_I, c_R, c_I, W_R, W_I)^\top$ e a grandeza de saída $\mathbf{Y} \equiv (\Gamma_R, \Gamma_I)^\top$ utilizando o modelo de medição bivariado

$$h_1(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0, \quad h_2(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = 0, \quad (13)$$

onde $h_1(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ e $h_2(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ são, respectivamente, as partes real e imaginária de

$$(c\mathbf{W} + 1)\mathbf{\Gamma} - (a\mathbf{W} + b).$$

Uma vantagem dessa abordagem é que o cálculo das derivadas e, portanto, dos coeficientes de sensibilidade é mais direto.

Uma estimativa $\mathbf{y} \equiv (\hat{\Gamma}_R, \hat{\Gamma}_I)^\top$ do coeficiente de reflexão (complexo) é dada ajustando $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ nas equações (13) e resolvendo-as numericamente.

A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ de dimensão 2×2 associada a $\mathbf{y}$ é avaliada a partir da expressão (8), onde $\mathbf{C}_y$ é a matriz de sensibilidade de dimensão 2×2 contendo as derivadas parciais $\partial h_\ell / \partial Y_j$, $\ell = 1, 2$, $j = 1, 2$ e $\mathbf{C}_x$ é a matriz de sensibilidade de dimensão 2×8 contendo as derivadas parciais $\partial h_\ell / \partial X_i$, $\ell = 1, 2$, $j = 1, \dots, 8$, ambas avaliadas em $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, e $\mathbf{U}_x$ é a matriz de covariância de dimensão 8×8 associada a $\mathbf{x}$.

EXEMPLO 3 *Calibração do refletômetro*

A calibração de um refletômetro (exemplo 2 do 6.2.2) é normalmente realizada medindo valores $\mathbf{W}$ do coeficiente de reflexão não corrigido correspondente a uma série de padrões com coeficientes de reflexão $\mathbf{\Gamma}$. Três padrões são frequentemente utilizados, fornecendo as três equações simultâneas (complexas)

$$(c\mathbf{W}_j + 1)\mathbf{\Gamma}_j - (a\mathbf{W}_j + b) = 0, \quad (14)$$

para $j = 1, 2, 3$. A separação dessas equações em partes real e imaginária dá origem a seis equações lineares simultâneas que são resolvidas para as estimativas de partes real e imaginária dos coeficientes de calibração $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ dando estimativas de partes real e imaginária dos coeficientes de reflexão não corrigidos $\mathbf{W}_j$ e dos coeficientes de reflexão $\mathbf{\Gamma}_j$ para os padrões.

Em termos de notação geral, $N = 12$, $m = 6$,

$$\mathbf{X} \equiv (W_{1,R}, W_{1,I}, \Gamma_{1,R}, \Gamma_{1,I}, W_{2,R}, W_{2,I}, \Gamma_{2,R}, \Gamma_{2,I}, W_{3,R}, W_{3,I}, \Gamma_{3,R}, \Gamma_{3,I})^\top \quad \text{e} \quad \mathbf{Y} \equiv (a_R, a_I, b_R, b_I, c_R, c_I)^\top.$$

As grandezas de entrada e saída são relacionadas por um modelo de medição multivariado, onde, para $j = 1, 2, 3$, $h_{2j-1}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ e $h_{2j}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ são, respectivamente, as partes real e imaginária do lado esquerdo da expressão (14).

Uma estimativa $\mathbf{y} \equiv (\hat{a}_R, \hat{a}_I, \hat{b}_R, \hat{b}_I, \hat{c}_R, \hat{c}_I)^\top$ dos coeficientes de calibração (complexos) é dada utilizando as estimativas de $\mathbf{W}_j$ e $\mathbf{\Gamma}_j$ nas equações (14) e resolvendo essas equações numericamente.

A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ de dimensão 6×6 associada a $\mathbf{y}$ é avaliada a partir da expressão (8), onde $\mathbf{C}_y$ é a matriz de sensibilidade de dimensão 6×6 contendo as derivadas parciais $\partial h_\ell / \partial Y_j$, $\ell = 1, \dots, 6$, $j = 1, \dots, 6$, e $\mathbf{C}_x$ é a matriz de sensibilidade de dimensão 6×12 contendo as derivadas parciais $\partial h_\ell / \partial X_i$, $\ell = 1, \dots, 6$, $i = 1, \dots, 12$, ambas avaliadas em $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, e $\mathbf{U}_x$ é a matriz de covariância de dimensão 12×12 associada a $\mathbf{x}$.

NOTA 1 Se um sistema computacional capaz de operar com grandezas complexas estiver disponível, a separação dessas equações em partes real e imaginária é desnecessária. As equações podem ser resolvidas “diretamente” para $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

NOTA 2 A j -ésima equação envolve apenas as quatro grandezas de entrada $W_{j,R}, W_{j,I}, \Gamma_{j,R}$ e $\Gamma_{j,I}$.

6.4 Propagação de incerteza para modelos envolvendo grandezas complexas

O Anexo A cobre a determinação algebricamente eficiente das derivadas parciais de primeira ordem de funções de medição multivariadas complexas. Essas derivadas são necessárias em uma particularização da lei de propagação de incerteza para tais modelos. O tratamento pode ser estendido para modelos de medição multivariados complexos em geral.

EXEMPLO *Coeficiente de reflexão medido por um refletômetro de micro-onda (abordagem 3)*

Considere novamente o exemplo 2 dado em 6.2.2.

A grandeza de saída complexa $Y \equiv \Gamma$ está relacionada à grandeza de entrada complexa $X = (X_1, \dots, X_4)^T \equiv (a, b, c, W)^T$ pelo modelo de medição (5). Utilizando o anexo A, C_X , uma matriz de sensibilidade de dimensão 2×8 , é dada avaliando

$$C_X = [C_a \quad C_b \quad C_c \quad C_W],$$

com

$$C_t = M \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right), \quad t \equiv a, b, c, W,$$

na estimativa x de X . Por exemplo, uma vez que

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial b} = \frac{1}{cW+1}, \quad (15)$$

o uso adicional do anexo A resulta em

$$C_b = \begin{bmatrix} Q_R & -Q_I \\ Q_I & Q_R \end{bmatrix},$$

onde Q_R e Q_I denotam as partes real e imaginária, respectivamente, do lado direito da expressão (15).

A matriz de covariância U_y de dimensão 2×2 associada a $y \equiv \hat{\Gamma}$, onde

$$U_y = \begin{bmatrix} u(\hat{\Gamma}_R, \hat{\Gamma}_R) & u(\hat{\Gamma}_R, \hat{\Gamma}_I) \\ u(\hat{\Gamma}_I, \hat{\Gamma}_R) & u(\hat{\Gamma}_I, \hat{\Gamma}_I) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u^2(\hat{\Gamma}_R) & u(\hat{\Gamma}_R, \hat{\Gamma}_I) \\ u(\hat{\Gamma}_I, \hat{\Gamma}_R) & u^2(\hat{\Gamma}_I) \end{bmatrix},$$

é avaliada com a expressão (A.1 - anexo A), sendo U_x a matriz de covariância (dimensão 8×8) associada a x .

6.5 Região de abrangência para uma grandeza de saída vetorial

6.5.1 Geral

6.5.1.1 Em metrologia elétrica, por exemplo, é adequado tratar uma grandeza de saída vetorial como uma entidade única e, ao lidar com resumos da distribuição de probabilidade conjunta para essa grandeza, manter tanta informação quanto possível.

6.5.1.2 Dada uma estimativa y da grandeza de saída $Y = (Y_1, \dots, Y_m)^T$, sua matriz de covariância associada U_y e uma probabilidade de abrangência p , é necessário especificar uma região R_Y no espaço m -dimensional que contém Y com probabilidade p .

6.5.1.3 Se $\mathbf{y}$ e $\mathbf{U}_y$ constituem a única informação disponível sobre $\mathbf{Y}$, a FDP gaussiana $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$, de acordo com o princípio de máxima entropia, é utilizada para descrever o estado de conhecimento de $\mathbf{Y}$ [JCGM 101:2008 6.4.8].

NOTA Esta escolha de FDP, dentro da metodologia de incerteza do GUM, é consistente com a caracterização de uma única grandeza de saída escalar Y por uma FDP gaussiana univariada quando os graus de liberdade associados são infinitos.

6.5.1.4 Em geral, uma vez estabelecida a FDP para $\mathbf{Y}$, tanto a probabilidade de abrangência para uma região de abrangência específica como uma região de abrangência para uma probabilidade de abrangência específica podem ser determinadas. Esse é um procedimento simples quando se trata de uma FDP gaussiana (ver 6.5.2, 6.5.3 e 6.5.4). Para outras FDPs, um método numérico como o método de Monte Carlo (ver 7) é útil para obter soluções aproximadas que são aceitáveis para fins práticos.

6.5.1.5 A determinação de uma região de abrangência para uma grandeza bivariada (ver 6.5.2) é utilizada para motivar o tratamento para o caso multivariado mais geral (ver 6.5.3). Considera-se também a determinação de uma região de abrangência para uma grandeza que representa a média de um conjunto de valores de indicação considerados como aleatórios produzidos independentemente da distribuição gaussiana multivariada (ver 6.5.4).

6.5.2 Caso bivariado

6.5.2.1 O problema de especificação de regiões de abrangência bivariadas explana os aspectos que distinguem a determinação de regiões de abrangência multivariadas da determinação do caso univariado. Considere um ponto $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ no plano com coordenadas retangulares Y_1 (abscissa) e Y_2 (ordenada). Ambas as coordenadas de $\mathbf{Y}$ são medidas com o mesmo instrumento calibrado. A informação sobre $\mathbf{Y}$ constitui estimativas y_1 e y_2 das coordenadas, incertezas padrão $u(y_1)$ e $u(y_2)$ associadas às estimativas, bem como a covariância $u(y_1, y_2)$ devida ao uso do mesmo instrumento na obtenção das estimativas.

6.5.2.2 No contexto da metodologia de incerteza do GUM, como não há outras informações, a FDP conjunta $g_{Y_1, Y_2}(\eta_1, \eta_2)$ que caracteriza $\mathbf{Y}$ é a FDP gaussiana bivariada $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$ (ver 6.5.1.3) com

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} u^2(y_1) & u(y_1, y_2) \\ u(y_2, y_1) & u^2(y_2) \end{bmatrix}.$$

6.5.2.3 Duas regiões de abrangência particulares são consideradas:

a) Uma elipse centrada em $\mathbf{y}$ [19, página 38]:

$$(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})^T \mathbf{U}_y^{-1} (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}) = k_p^2, \quad (16)$$

com k_p uma constante determinada de modo que a área sob a FDP sobre a região elíptica seja igual a p . Com esta abordagem, a dependência mútua de Y_1 e Y_2 é levada em consideração.

Quando $\mathbf{Y}$ é caracterizado por uma distribuição de probabilidade gaussiana (bivariada), a grandeza

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{y})^T \mathbf{U}_y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{y}) \quad (17)$$

é caracterizada por uma distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade. Segue-se que k_p^2 é dado por um ponto percentual superior desta distribuição qui-quadrado e satisfaz

$$p = \Pr(X_2^2 \leq k_p^2),$$

onde χ_2^2 possui uma distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade. Para a probabilidade de abrangência $p = 0,95$, $k_p = 2,45$ (ver 6.5.3);

b) Um retângulo centrado em $\mathbf{y}$ com lados paralelos aos eixos e iguais aos comprimentos dos intervalos de abrangência determinados separadamente para Y_1 e Y_2 . O intervalo de abrangência para Y_1 é determinado a partir da FDP para Y_1 dado pela marginalização:

$$g_{Y_1}(\eta_1) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{Y_1, Y_2}(\eta_1, \eta_2) d\eta_2, \quad (18)$$

independentemente do estado de conhecimento de Y_2 e similarmente para o intervalo de abrangência para Y_2 . Os intervalos de abrangência $y_j \pm k_q u(y_j)$ são determinados para a probabilidade de abrangência

$$q = 1 - (1 - p)/2 = (1 + p)/2. \quad (19)$$

Este retângulo constitui uma região de abrangência para $\mathbf{Y}$ correspondente a uma probabilidade de abrangência de pelo menos p [5].

Quando $\mathbf{Y}$ é caracterizado por uma distribuição de probabilidade gaussiana (bivariada), a distribuição marginal (18) para Y_1 é gaussiana, assim como para Y_2 . Segue-se que k_q é dado por um ponto percentual superior da distribuição gaussiana padrão e satisfaz

$$q = \Pr(|Z| \leq k_q),$$

onde Z tem a distribuição gaussiana padrão $N(0, 1)$. Para a probabilidade de abrangência $p = 0,95$, os intervalos de abrangência são $y_j \pm k_q u(y_j)$, para $j = 1, 2$, com $q = 0,975$ e $k_q = 2,24$ (ver 6.5.3).

NOTA 1 No contexto da metodologia de incerteza do GUM, a região de abrangência elíptica dada em a) é a menor região de abrangência de $100p\%$.

NOTA 2 Quando Y_1 e Y_2 são mutuamente independentes, q na expressão (19) pode ser substituído por $q = p^{1/2}$.

EXEMPLO 1 Considere uma grandeza bivariada $\mathbf{Y}$ caracterizada pela distribuição de probabilidade gaussiana $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$, onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} 2,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3 (esquerda) mostra regiões de abrangência elíptica e retangular de 95% para $\mathbf{Y}$, obtidas como em a) e b). Também são mostrados 1000 pontos representando amostras aleatórias dessa distribuição de probabilidade. A elipse é a menor região de abrangência para a probabilidade de abrangência estipulada. Dos 1000 pontos, 950 estão contidos dentro da região de abrangência elíptica, que possui área de 26,6 unidades², e 953 dentro da região retangular, que possui área de 28,4 unidades².

EXEMPLO 2 Considere uma grandeza bivariada $\mathbf{Y}$ caracterizada pela distribuição de probabilidade gaussiana $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$, onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} 2,0 & 1,9 \\ 1,9 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3 (à direita) mostra regiões de abrangência elíptica e retangular de 95% para $\mathbf{Y}$, obtidas como em a) e b). Ao contrário do exemplo 1, as grandezas dos componentes Y_1 e Y_2 de $\mathbf{Y}$ são (positivamente) correlacionadas. Dos 1000 pontos, 957 estão contidos dentro da região de abrangência elíptica, que possui área de 11,8 unidades²,

e 972 dentro da região retangular, que possui área de 40,1 unidades², indicando que a probabilidade de abrangência para a região retangular é superior a 0,95. A região retangular, cuja forma não reflete as grandezas dos componentes correlacionados e a distribuição dos pontos aleatórios, pode ser considerada inadequada como região de abrangência para $\mathbf{Y}$. Um retângulo com lados paralelos aos eixos da elipse teria área menor e poderia ser considerado mais adequado, mas poderia ser inconveniente, pois seria expresso em termos de variáveis que seriam artificiais em termos de aplicação.

6.5.2.4 Exemplos adicionais de regiões de abrangência para grandezas de saída de modelos de medição bivariados são dados no item 9.

6.5.3 Caso multivariado

Para mais de duas grandezas, regiões de abrangência não são mais facilmente visualizáveis, mas podem ser construídas de forma análoga às descritas em a) e b) de 6.5.2.3 para o caso bivariado. Uma região R_Y no espaço m -dimensional da grandeza de saída $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$ é necessária de modo que a probabilidade de que $\mathbf{Y}$ esteja em R_Y seja igual à probabilidade de abrangência estipulada p . As duas formas seguintes de R_Y , análogas às descritas em a) e b) de 6.5.2.3, podem ser consideradas:

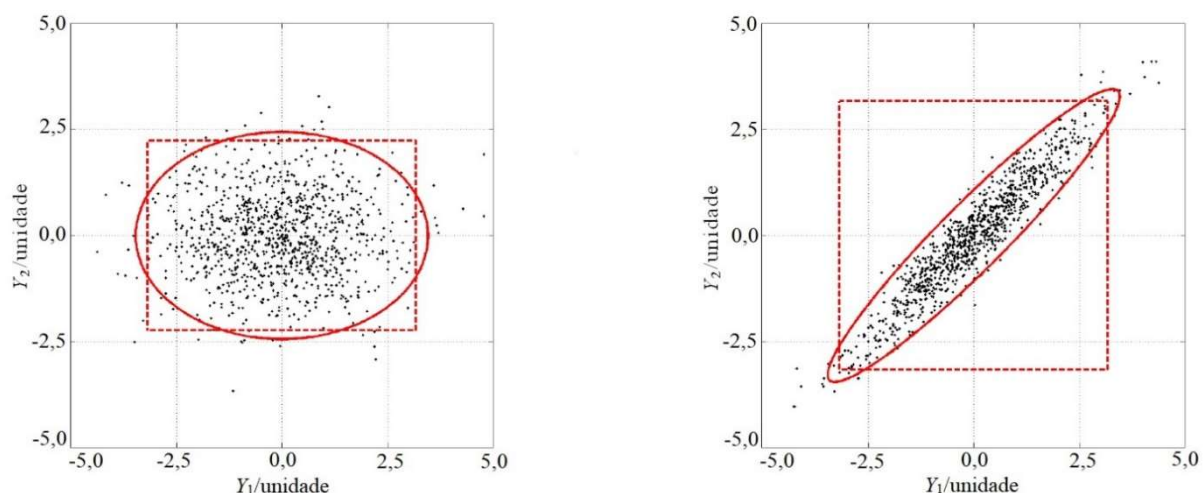


Figura 3 – Regiões de abrangência elíptica e retangular para uma grandeza bivariada $\mathbf{Y}$ caracterizada por uma distribuição de probabilidade gaussiana para a qual as grandezas dos componentes Y_1 e Y_2 são mutuamente independentes e (à direita) correlacionadas (6.5.2.3 exemplos 1 e 2)

- a) Um hiperelipsoide (ou elipse multivariada) em m dimensões dado pela expressão (16).

Quando $\mathbf{Y}$ é caracterizado por uma distribuição de probabilidade gaussiana (multivariada), a grandeza (17) é caracterizada por uma distribuição qui-quadrado com m graus de liberdade. Segue que k_p^2 é dado por um ponto percentual superior desta distribuição qui-quadrado e satisfaz

$$p = \Pr(\chi_m^2 \leq k_p^2),$$

Onde χ_m^2 tem uma distribuição qui-quadrado com m graus de liberdade. A Tabela 1 fornece valores para o fator de abrangência k_p para a probabilidade de abrangência $p = 0,95$ e m grandezas gaussianas avaliadas conjuntamente para uma seleção de valores de m .

Tabela 1 – Fatores de abrangência para regiões de abrangência hiperelipsoidal para probabilidade de abrangência $p = 0,95$ (6.5.2 e 6.5.3)

m	k_p	m	k_p	m	k_p	m	k_p
1	1,96	6	3,55	11	4,44	20	5,60
2	2,45	7	3,75	12	4,59	25	6,14
3	2,80	8	3,94	13	4,73	30	6,62
4	3,08	9	4,11	14	4,87	40	7,47
5	3,33	10	4,28	15	5,00	50	8,22

b) Um hiper-retângulo (ou retângulo multivariado) em m dimensões centralizado em $\mathbf{y}$ com lados iguais aos comprimentos dos intervalos de abrangência determinados separadamente para Y_j , $j = 1, \dots, m$. Os intervalos de abrangência são determinados para a probabilidade de abrangência $q = 1 - (1 - p)/m$. Este hiper-retângulo constitui uma região de abrangência para $\mathbf{Y}$ correspondente a uma probabilidade de abrangência de pelo menos p [5]. O intervalo de abrangência para cada Y_j é calculado após marginalização.

Quando $\mathbf{Y}$ é caracterizado por uma distribuição de probabilidade gaussiana (multivariada), a distribuição marginal para cada Y_j é gaussiana. Segue-se que o fator de abrangência k_q é dado por um ponto percentual superior da distribuição gaussiana padrão conforme b) de 6.5.2.3. A Tabela 2 fornece valores para k_q para a probabilidade de abrangência $p = 0,95$ e m grandezas gaussianas avaliadas conjuntamente para uma seleção de valores de m .

Tabela 2 – Como a tabela 1, mas para regiões de abrangência hiper-retangular (6.5.2 e 6.5.3)

m	k_p	m	k_p	m	k_p	m	k_p
1	1,96	6	2,64	11	2,84	20	3,02
2	2,24	7	2,69	12	2,87	25	3,09
3	2,39	8	2,73	13	2,89	30	3,14
4	2,50	9	2,77	14	2,91	40	3,23
5	2,58	10	2,81	15	2,94	50	3,29

NOTA 1 Para o caso univariado ($m = 1$), a expressão (16) se reduz a

$$(\eta - y)^2 = k_p^2 u_y^2,$$

dando

$$\eta = y \pm k_p u_y,$$

os pontos finais de um intervalo de abrangência para Y . Para a probabilidade de abrangência $p = 0,95$, $k_p = 1,96$ (tabela 1).

NOTA 2 Quando os Y_j são mutuamente independentes, q pode ser substituído por $q = p^{1/m}$.

6.5.4 Região de abrangência para a esperança de uma distribuição gaussiana multivariada

Considere n vetores $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, cada um de dimensão $m \times 1$, com $n > m$, correspondendo a valores de indicação repetidos de uma grandeza multivariada $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)^T$. Suponha que $y_1, \dots, y_n$ podem ser considerados como realizações de vetores aleatórios independentes $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$, cada um

caracterizado por uma distribuição de probabilidade gaussiana multivariada com esperança μ e matriz de covariância Σ . Defina a média e a matriz de covariância

$$\mathbf{A} = \frac{1}{n}(\mathbf{Y}_1 + \cdots + \mathbf{Y}_n), \quad \mathbf{V} = \frac{1}{n}[(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{A})(\mathbf{Y}_1 - \mathbf{A})^\top + \cdots + (\mathbf{Y}_n - \mathbf{A})(\mathbf{Y}_n - \mathbf{A})^\top],$$

de dimensões $m \times 1$ e $m \times m$, respectivamente. Então, a variável randômica

$$\frac{n-m}{m}(\mathbf{A} - \mu)^\top \mathbf{V}^{-1}(\mathbf{A} - \mu)$$

tem uma distribuição $F_{m,n-m}$ [19, Corolário 3.5.2.1], a assim chamada distribuição de Fisher-Snedecor com m e $n - m$ graus de liberdade.

NOTA A contrapartida deste resultado para uma grandeza univariada é a seguinte: para variáveis aleatórias independentes $Y_1, \dots, Y_n$, cada uma caracterizada por uma distribuição de probabilidade gaussiana univariada com esperança μ e variância σ^2 , $(n - 1)^{1/2}(\bar{Y} - \mu)/S$ tem uma distribuição-t com $n - 1$ graus de liberdade, onde agora

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n), \quad S^2 = \frac{1}{n}[(Y_1 - \bar{Y})^2 + \cdots + (Y_n - \bar{Y})^2].$$

EXEMPLO Considere $n = 12$ valores de indicação repetidos na forma de pares, representando valores medidos de frações volumétricas de microclina (A_1) e biotita (A_2) em uma fina seção cortada de granito G-2 [4, 25]. A Figura 4 mostra esses pares como pontos, juntamente com uma região de abrangência elíptica de 95% para a esperança de uma grandeza $\mathbf{A}$ de dimensão 2×1 . A esperança e a matriz de covariância para os valores de indicação são

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 27,0 \\ 6,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1,202 & -0,396 \\ -0,396 & 0,381 \end{bmatrix}.$$

O 95º percentil da distribuição $F_{2,10}$ é 4,10. Uma região de abrangência de 95% para $\mathbf{A}$ é a elipse com a equação

$$(\mathbf{A} - \mathbf{a})^\top \mathbf{v}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{a}) = 4,10 \times \frac{2}{12-2}.$$

O pequeno número de valores de indicação impede qualquer avaliação crítica e significativa se as suposições valem para validar esta região de abrangência.

DEVEMOS COLOCAR A FIGURA 4 AQUI ?????

7 Método de Monte Carlo

7.1 Geral

7.1.1 Este item fornece informações sobre a implementação do método de Monte Carlo (MMC) para a propagação de distribuições: consulte o procedimento dado em [7.1.7](#), que é apresentado esquematicamente na Figura 5.

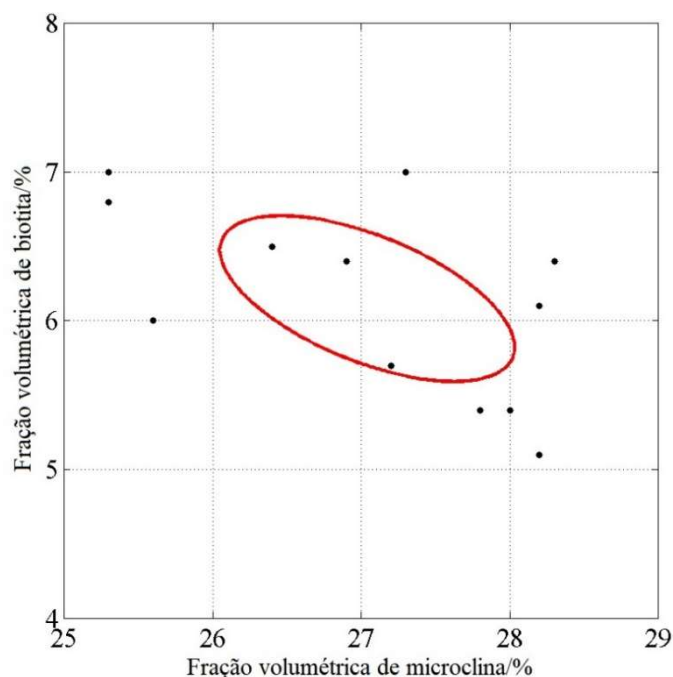


Figura 4 – Doze valores de indicação na forma de pares e região de abrangência elíptica de 95% para a esperança tomada como a média desses pares (exemplo [6.5.4](#))

7.1.2 O MMC fornece uma abordagem geral para obter uma representação numérica aproximada $\mathbf{G}$, digamos, da função distribuição $G_Y(\boldsymbol{\eta})$ para $\mathbf{Y}$ [18, página 75]. A essência da abordagem é a realização de repetidas amostragens das FDPs para os X_i (ou FDP conjunta para $\mathbf{X}$) e a avaliação da grandeza de saída vetorial em cada caso.

7.1.3 Como $G_Y(\boldsymbol{\eta})$ codifica todas as informações conhecidas sobre $\mathbf{Y}$, qualquer propriedade de $\mathbf{Y}$, como esperança, variâncias, covariâncias e regiões de abrangência, pode ser aproximada utilizando $\mathbf{G}$. A qualidade desses resultados calculados geralmente melhora com o número de amostragens.

7.1.4 O conjunto de valores da grandeza de saída obtidos em [7.1.2](#) é formado por amostragens independentes da distribuição de probabilidade conjunta para $\mathbf{Y}$. Esperanças, variâncias (e momentos superiores) e covariâncias podem ser determinados diretamente a partir desses valores. A determinação das regiões de abrangência requer que esses valores sejam analisados de uma forma apropriada (ver [7.7](#)).

7.1.5 Considere que y_r , para $r = 1, \dots, M$, representa valores das grandezas de saída em [7.1.4](#). A esperança $\mathbf{E}(\mathbf{Y})$ e a variância $\mathbf{V}(\mathbf{Y})$ de $\mathbf{Y}$ podem ser aproximadas utilizando $\mathbf{y}_r$. Em geral, os momentos de $\mathbf{Y}$ (incluindo $\mathbf{E}(\mathbf{Y})$ e $\mathbf{V}(\mathbf{Y})$) são aproximados pelos momentos desses valores. Considere que $M_{\mathbf{y}_0}$ indica o número de $\mathbf{y}_r$ para o qual cada componente não é maior do que o componente correspondente de $\mathbf{y}_0$, sendo este qualquer vetor numérico prescrito de dimensão $m \times 1$. A probabilidade $\Pr(\mathbf{Y} \leq \mathbf{y}_0)$

é aproximada por M_{y_0}/M . Desta forma, $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M$ fornece uma representação discreta da função distribuição $G_Y(\boldsymbol{\eta})$.

7.1.6 $\mathbf{G}$, a saída primária do MMC, constitui a matriz de dimensão $m \times M$ dada por

$$\mathbf{G} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M).$$

7.1.7 O MMC como uma implementação da propagação de distribuições quando $\mathbf{Y}$ pode ser explicitamente expresso em termos de $\mathbf{X}$, onde M é fornecido antecipadamente (ver 7.8, caso contrário), é mostrado esquematicamente na figura 5. O MMC pode ser descrito como um procedimento passo a passo:

- selecione o número M de iterações de Monte Carlo a serem feitas. Ver 7.2;
- gere M vetores, por amostragens aleatórias das FDPs atribuídas às grandezas de entrada X_i (ou a FDP conjunta para $\mathbf{X}$), como realizações do (conjunto de N) X_i . Ver 7.3;
- para cada vetor, calcule o valor correspondente de $\mathbf{Y}$, resultando em M valores da grandeza de saída vetorial. Ver 7.4;
- tome a representação $\mathbf{G}$ da função distribuição para $\mathbf{Y}$ como o conjunto de M valores da grandeza de saída vetorial. Ver 7.5;
- use $\mathbf{G}$ para formar uma estimativa $\mathbf{y}$ de $\mathbf{Y}$ e a matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ associada a $\mathbf{y}$. Ver 7.6;
- use $\mathbf{G}$ para formar uma região de abrangência apropriada para $\mathbf{Y}$, para uma probabilidade de abrangência estipulada p . Ver 7.7.

NOTA Matematicamente, a média dos valores da grandeza de saída vetorial M é uma realização de uma variável randômica com esperança $\mathbf{E}(\mathbf{Y})$ e variância $\mathbf{V}(\mathbf{Y})/M$. Assim, pode-se esperar que a proximidade da concordância entre esta média e $\mathbf{E}(\mathbf{Y})$ seja proporcional a $M^{-1/2}$.

7.1.8 A eficácia do MMC para determinar $\mathbf{y}$, $\mathbf{U}_y$ e uma região de abrangência para $\mathbf{Y}$ depende do uso de um valor adequadamente grande de M em 7.1.7 (item a). Orientação sobre como obter tal valor e, mais geralmente, sobre a implementação de MMC, está disponível em [8]. Ver também 7.2 e 7.8.

7.2 Número de iterações de Monte Carlo

7.2.1 Um valor de M , o número de iterações no Monte Carlo, ou seja, o número de valores da grandeza de saída vetorial, precisa ser selecionado. Este pode ser escolhido *a priori*, caso em que não haverá controle direto sobre a qualidade dos resultados numéricos fornecidos pelo MMC. A razão é que o número de iterações necessárias para fornecer esses resultados com uma tolerância numérica prescrita dependerá da “forma” da FDP para a grandeza de saída e da probabilidade de abrangência requerida. Além disso, os cálculos são de natureza estocástica, sendo baseados em amostragens aleatórias.

7.2.2 Como não há garantia de que qualquer número específico pré-escolhido será bem-satisfatório, um procedimento que seleciona M de forma adaptativa, ou seja, conforme as iterações progridem, pode ser utilizado. O subitem 7.8 fornece tal procedimento, sendo uma sua propriedade o fato de que o número de iterações realizadas é economicamente consistente com a esperança de se alcançar uma tolerância numérica requerida.

NOTA Se o modelo for complicado, por exemplo, envolvendo a solução de um modelo de elementos finitos, em função do grande tempo computacional, pode ser que não seja possível utilizar um valor de M suficientemente grande para obter um adequado conhecimento distribucional da grandeza de saída. Nesse caso, uma abordagem aproximada seria considerar $g_Y(\boldsymbol{\eta})$ como gaussiano (conforme o GUM) e proceder da seguinte forma. Um valor relativamente pequeno de M , 50 ou 100, por exemplo, seria utilizado. A média e a matriz de covariância dos M valores resultantes de $\mathbf{Y}$ seriam tomadas como $\mathbf{y}$ e $\mathbf{U}_y$, respectivamente. Com esta informação, uma FDP gaussiana $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$ seria atribuída para caracterizar o conhecimento de $\mathbf{Y}$ [JCGM 101:2008 6.4.7] e calculada uma região de abrangência desejada para $\mathbf{Y}$. Embora o uso de um valor pequeno de M seja inevitavelmente menos confiável do que o de um valor grande, uma vez que não fornece uma aproximação à FDP para $\mathbf{Y}$, ele leva em conta a não-linearidade do modelo.

7.3 Realização de amostragens de distribuições de probabilidade

7.3.1 Em uma implementação de MMC, M vetores $(x_r, r = 1, \dots, M)$ são amostrados das FDPs $g_{X_i}(\xi_i)$ para as grandezas de entrada $X_1, \dots, X_N$. Quando apropriado, amostragens podem ser feitas a partir da FDP (multivariada) conjunta $g_X(\boldsymbol{\xi})$.

7.3.2 Recomendações sobre a maneira como essas amostragens podem ser obtidas para as distribuições mais comuns, incluindo retangular, gaussiana, distribuição-t e gaussiana multivariada, são fornecidas no Suplemento 1 do GUM [JCGM 101:2008 6.4; JCGM 101:2008 anexo C]. É possível amostrar aleatoriamente a partir de qualquer outra distribuição [JCGM 101:2008 C.2]. Algumas dessas distribuições podem ser aproximações de distribuições baseadas em resultados de Monte Carlo provenientes de um prévio cálculo de incerteza [JCGM 101:2008 6.5; JCGM 101:2008 D].

7.3.3 Um procedimento para realizar amostragens de um outro tipo de distribuição multivariada, a distribuição-t multivariada, é descrito em 5.3.2.4.

NOTA Para que os resultados do MMC sejam estatisticamente válidos, é necessário que os geradores de números pseudo-aleatórios, utilizados para realizar amostragens a partir das distribuições estipuladas, tenham propriedades adequadas. Alguns testes de aleatoriedade dos números produzidos por um gerador são indicados no Suplemento 1 do GUM, em C.3.2.

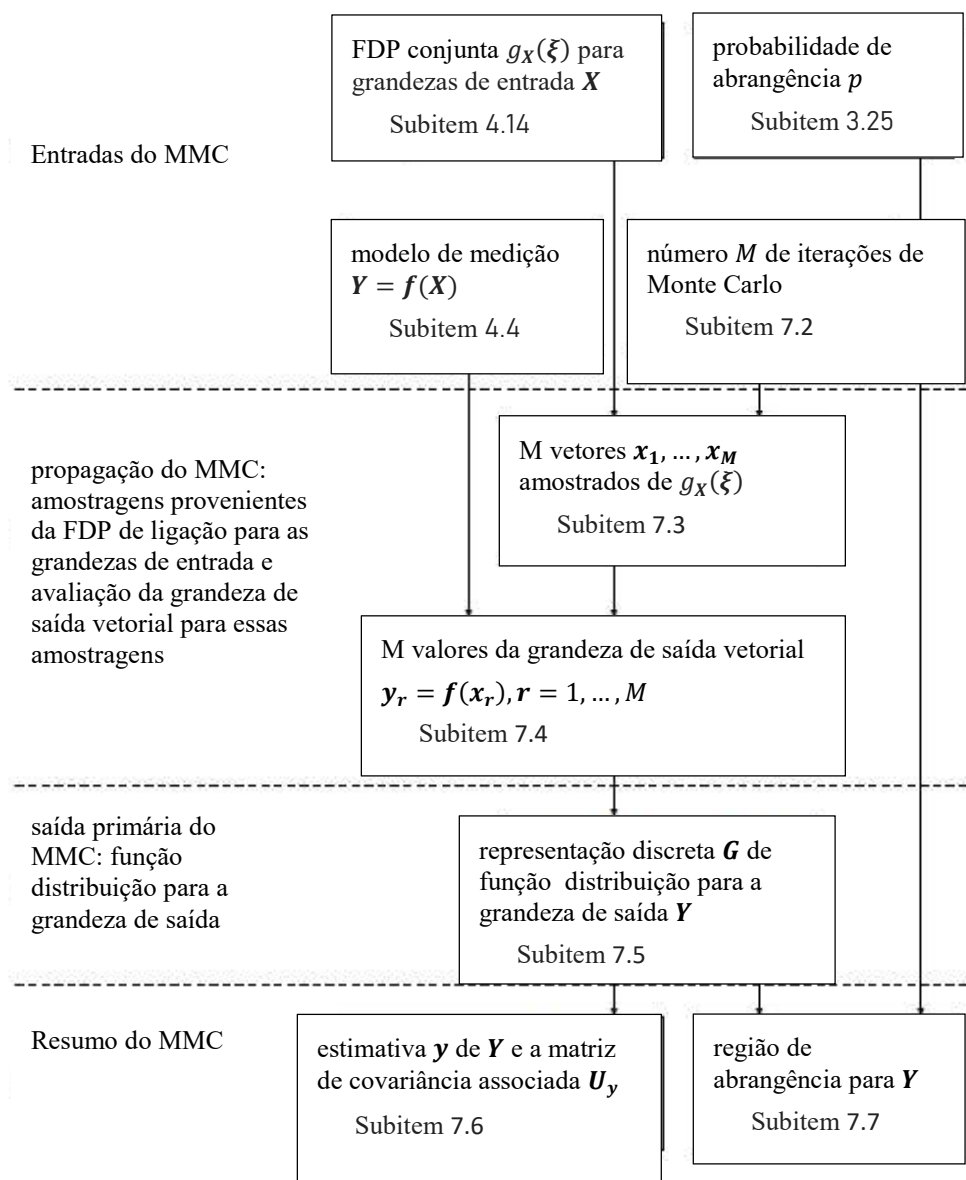


Figura 5 – Propagação e etapas resumidas de avaliação de incerteza utilizando o MMC para implementar a propagação de distribuições quando a grandeza de saída vetorial pode ser explicitamente expressa em termos das grandezas de entrada (7.1.7).

7.4 Avaliação da grandeza de saída vetorial

7.4.1 A grandeza de saída vetorial é avaliada para cada uma das amostragens M das FDPs para as N grandezas de entrada. Especificamente, denotam-se as M amostragens por $x_1, \dots, x_M$, cada uma de dimensão $N \times 1$, onde a r -ésima amostragem x_r contém $x_{1,r}, \dots, x_{N,r}$, com $x_{i,r}$ sendo uma amostragem da FDP para X_i . Quando o modelo de medição é explícito, os valores da grandeza de saída vetorial são

$$y_r = f(x_r), r = 1, \dots, M.$$

NOTA A função de medição e avaliações derivadas são realizadas nas estimativas das grandezas de entrada quando se aplica a lei de propagação de incerteza usando derivadas exatas. As avaliações da função de medição somente são feitas quando se aplica a lei de propagação de incerteza usando aproximações numéricas (diferença finita) para as derivadas. Essas avaliações são feitas, se a recomendação do GUM é adotada [JCGM 100:2008 subitem 5.1.3 nota 2], nas estimativas das grandezas de entrada e em pontos perturbados por $u(x_i)$ e $-u(x_i)$ de cada estimativa individual x_i por vez. Com o MMC, as avaliações da função de medição são feitas na vizinhança dessas estimativas, isto é, em pontos que podem mesmo estar distantes várias incertezas padrão dessas estimativas. O fato de que as avaliações da função de medição são feitas em pontos diferentes de acordo com a abordagem usada pode levantar questões referentes ao procedimento numérico usado para avaliar a função, por exemplo, assegurando sua convergência (onde esquemas iterativos são usados) e estabilidade numérica. Convém que o usuário se assegure de que, quando apropriado, os métodos numéricos usados para avaliar a função de medição são válidos para uma região suficientemente grande que contenha essas estimativas. Apenas ocasionalmente se espera que este aspecto seja crítico.

7.4.2 As modificações necessárias são feitas no subitem 7.4.1 se X_i não são independentes e, portanto, se atribui a eles uma FDP conjunta.

7.4.3 As modificações necessárias são feitas no subitem 7.4.1 se o modelo de medição é implícito. Os valores y_r da grandeza de saída vetorial são obtidos como soluções para as equações

$$h(y_r, x_r) = 0, r = 1, \dots, M.$$

7.5 Representação discreta da função distribuição para a grandeza de saída

Uma representação discreta da função distribuição para uma grandeza de saída vetorial é formada a partir de M valores da grandeza de saída vetorial obtida no subitem 7.4. Em geral, esta representação é uma matriz $\mathbf{G}$ de dimensão $m \times M$ cuja r -ésima coluna é o r -ésimo valor da grandeza de saída vetorial. Para um modelo univariado, $\mathbf{G}$ é um vetor de linha.

NOTA 1 A j -ésima linha de $\mathbf{G}$ fornece uma representação discreta de uma aproximação para a distribuição marginal para Y_j .

NOTA 2 A matriz $\mathbf{G}$ tem uma interpretação gráfica para $m = 1, 2, 3$. Considere $m = 2$ e, para $r = 1, \dots, M$, plote um ponto no plano Y_1, Y_2 tendo coordenadas correspondentes a dois elementos na coluna r de $\mathbf{G}$. Para M suficientemente grande, a densidade local de pontos em qualquer região pequena do plano será aproximadamente proporcional à densidade de probabilidade local.

NOTA 3 Uma variedade de informação pode ser deduzida de $\mathbf{G}$ tais como momentos de ordem elevada. Entretanto, somente a esperança e variância usadas como uma estimativa de $\mathbf{Y}$ e uma aproximação à matriz de covariância associada, respectivamente, são para ser usadas como a base para a propagação de incerteza em um estágio posterior para a avaliação de incerteza [JCGM 100:2008 0.4] no contexto da estrutura de incerteza do GUM.

NOTA 4 Se $\mathbf{Y}$ é para se tornar uma grandeza vetorial de entrada para um cálculo de incerteza posterior, amostragens randômicas de sua distribuição de probabilidade é prontamente realizada amostrando-se randomicamente através de $\mathbf{y}_r$, $r = 1, \dots, M$, (ou equivalentemente a partir das colunas de $\mathbf{G}$) com igual probabilidade [JCGM 101:2008, subitem 6.5].

7.6 Estimativa da grandeza de saída e matriz de covariância associada

A média e a matriz de covariância,

$$\tilde{\mathbf{y}} = \frac{1}{M}(\mathbf{y}_1 + \dots + \mathbf{y}_M), \quad \mathbf{U}_{\tilde{\mathbf{y}}} = \frac{1}{M-1}[(\mathbf{y}_1 - \tilde{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_1 - \tilde{\mathbf{y}})^T + \dots + (\mathbf{y}_M - \tilde{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_M - \tilde{\mathbf{y}})^T],$$

são tomadas, respectivamente, como uma estimativa $\mathbf{y}$ de $\mathbf{Y}$ e a matriz de covariância $\mathbf{U}_{\mathbf{y}}$ associada a $\mathbf{y}$.

NOTA Não importando se o modelo de medição seja linear ou não-linear, no limite quando M tende ao infinito, $\tilde{\mathbf{y}}$ se aproxima em probabilidade de $\mathbf{E}(\mathbf{f}(\mathbf{X}))$ quando o último existir.

7.7 Região de abrangência para uma grandeza de saída vetorial

7.7.1 Generalidades

Existem, de maneira bem aberta, muitas formas de regiões de abrangência 100p% para $\mathbf{Y}$. Três formas de regiões de abrangência são dadas aqui, que estão sendo consideradas por terem valor prático. Contudo, outros tipos de regiões de abrangências podem algumas vezes ser úteis em circunstâncias particulares. Cada forma de região de abrangência abordada é baseada em $\mathbf{G}$, isto é, um grupo M de pontos $\mathbf{y}_r$ amostrados aleatoriamente através de uma FDP para $\mathbf{Y}$, tal como obtido com um método de Monte Carlo (ver 7.5). As formas de regiões de abrangência consideradas são constituídas como a seguir:

- Região de abrangência hiperelipsoidal, que será próxima à menor região de abrangência para $\mathbf{Y}$ quando, em boa aproximação, a FDP para $\mathbf{Y}$ é gaussiana;
- Região de abrangência hiper-retangular, que tem uma interpretação simples, mas se apresentando, em geral, pessimisticamente muito grande;
- Região de mínima abrangência, que em geral não tem qualquer definição geométrica particular e é obtida para um grau de aproximação que depende de M .

7.7.2 Região de abrangência hiperelipsoidal

Uma região de abrangência 100p % hiperelipsoidal para $\mathbf{Y}$ é

$$(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})^T \mathbf{U}_{\mathbf{y}}^{-1} (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}) = k_p^2, \quad (20)$$

onde $\mathbf{y}$ especifica sua localização, $\mathbf{U}_{\mathbf{y}}$ especifica sua forma, e k_p especifica seu tamanho. Um procedimento para determinar tal região de abrangência está a seguir:

- Transforme os pontos $\mathbf{y}_r$, denotando os pontos transformados por $(\mathbf{y}_r')$, de acordo com

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{y}_r - \mathbf{y}), \quad r = 1, \dots, M, \quad (21)$$

Onde $\mathbf{L}$ é a menor matriz triangular de dimensão $m \times m$, dada pela decomposição de Cholesky $\mathbf{U}_y = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$;

b) Classifique os pontos transformados $\mathbf{y}_r$ de acordo com o valor crescente de d_r , onde

$$d_r^2 = \mathbf{y}_r^T \mathbf{y}_r = \sum_{j=1}^m y_{j,r}^2 \quad r = 1, \dots, M;$$

c) Use os pontos transformados $\mathbf{y}_r$ para determinar o fator de abrangência k_p tal que uma fração p de $\mathbf{y}_r$ satisfaça $d_r < k_p$;

d) Tome o hiperelipsoide definido pela equação (20) como o limite de uma região de abrangência 100p % para $\mathbf{Y}$.

NOTA 1 Este procedimento é baseado na referência [1], em que dados multidimensionais são agrupados usando a métrica

$$(\mathbf{y}_r - \boldsymbol{\alpha})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}_r - \boldsymbol{\alpha}),$$

com $\boldsymbol{\alpha}$ denotando uma estatística de localização e $\boldsymbol{\Sigma}$ uma estatística de dispersão. A escolha feita aqui é que $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{y}$ e $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U}_y$. O procedimento é também baseado na transformação dos pontos de modo que os pontos transformados tenham uma matriz de covariância igual à matriz identidade, não havendo assim nenhuma correlação associada com os pontos transformados. Os pontos podem então ser classificados. Os pontos $\mathbf{y}_r$, que podem ser considerados como um agrupamento de pontos centrado em $\mathbf{y}$, aproximam-se da distribuição para $\mathbf{Y}$, como consequência da abordagem usada para obtê-los. Uma região de abrangência pode ser definida pelo hiperelipsoide centrado em $\mathbf{y}$ e que (justamente) contém 100p % desses $\mathbf{y}_r$.

NOTA 2 A extensão para a qual a região de abrangência obtida é apropriada depende do contexto. Pode ser inapropriada se a distribuição de pontos $\mathbf{y}_r$ diferiu apreciavelmente da FDP gaussiana multivariada.

NOTA 3 A matriz $\mathbf{L}$ na etapa a) pode ser determinada como na referência [13], por exemplo. Ver exemplo.

NOTA 4 Este procedimento leva em conta a dependência mútua entre pares de componentes de $\mathbf{Y}$.

NOTA 5 Para um modelo de medição complicado, por exemplo, envolvendo um cálculo de elemento finito, devido ao grande tempo de computação pode não ser possível usar um valor suficientemente grande de M para obter um conhecimento distribucional adequado da grandeza de saída. Em tal caso, uma abordagem aproximada seria considerar a distribuição para $\mathbf{Y}$ como gaussiana e proceder conforme a seguir. Um valor relativamente pequeno de M , digamos 50 ou 100, seria usado. A média e a matriz de covariância dos M valores resultantes de $\mathbf{Y}$ seriam tomadas como $\mathbf{y}$ e $\mathbf{U}_y$, respectivamente. Dada esta informação, uma FDP gaussiana com esperança $\mathbf{y}$ e matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ seria usada para caracterizar o conhecimento de $\mathbf{Y}$, e uma região de abrangência seria igualmente calculada para $\mathbf{Y}$. Embora este uso de um valor pequeno de M seja inevitavelmente menos confiável do que aquele para um valor grande em que não fornece uma aproximação para a FDP para $\mathbf{Y}$, ele não leva em conta a não linearidade do modelo. A Tabela 1 fornece valores de k_p para a probabilidade de abrangência $p = 0,95$ em função de m , o número de grandezas de saída sob a hipótese de $\mathbf{Y}$ ser gaussiana.

EXEMPLO Considere o modelo de medição

$$Y_1 = X_1 + X_3, \quad Y_2 = X_2 + X_3, \quad (22)$$

Onde as grandezas de entrada X_1 e X_2 são para cada uma atribuída uma distribuição gaussiana $N(0,0,1)$, e a X_3 é atribuída uma distribuição retangular $R(-(3 \times 1,9)^{1/2}, (3 \times 1,9)^{1/2})$, e as grandezas são independentes (aos pares). As esperanças das grandezas de entrada X_i são $x_i = 0$, $i = 1,2,3$, com variâncias associadas $u^2(x_i) = 0,1$, $i = 1,2$, e $u^2(x_3) = 1,9$. Então, como no exemplo 2 de 6.5.2.3, $Y = (Y_1, Y_2)^T$ tem esperança e matriz de covariância

$$y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_y = \begin{bmatrix} 2,0 & 1,9 \\ 1,9 & 2,0 \end{bmatrix}.$$

Os y_r° na etapa a) são formados usando L^{-1} , onde, para três casas decimais,

$$L = \begin{bmatrix} 1,414 & 1,344 \\ 0,000 & 0,442 \end{bmatrix}, \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} 0,707 & -2,151 \\ 0,000 & 2,265 \end{bmatrix}.$$

A Figura 6 (à esquerda) mostra 1 000 pontos de amostragens aleatórias provenientes da distribuição de probabilidade para Y definida pelo modelo de medição (22) e as distribuições de probabilidade gaussianas acima para as grandezas de entrada X_i , $i = 1,2,3$. A região de abrangência elíptica para 95 % para Y baseada na caracterização de Y pela distribuição bivariada gaussiana $N(y, U_y)$ (como em a) do subitem 6.5.2.3) é apresentada pela linha tracejada. Esta região tem área de 11,8 unidade², $k_p = 2,45$ e contém 968 dos 1 000 pontos. A região de abrangência elíptica determinada com base nas 1 000 amostragens (como no procedimento acima) é apresentada pela linha cheia. Esta região tem área de 10,6 unidade², $k_p = 2,33$, isto é, levemente menor do que a região obtida sob a hipótese gaussiana, e, pela construção, contém exatamente 950 pontos.

O modelo de medição (22) é considerado com mais detalhes no item 9, e exemplos posteriores de regiões de abrangência para grandezas de saída em modelos de medição bivariada são também dados no item 9.

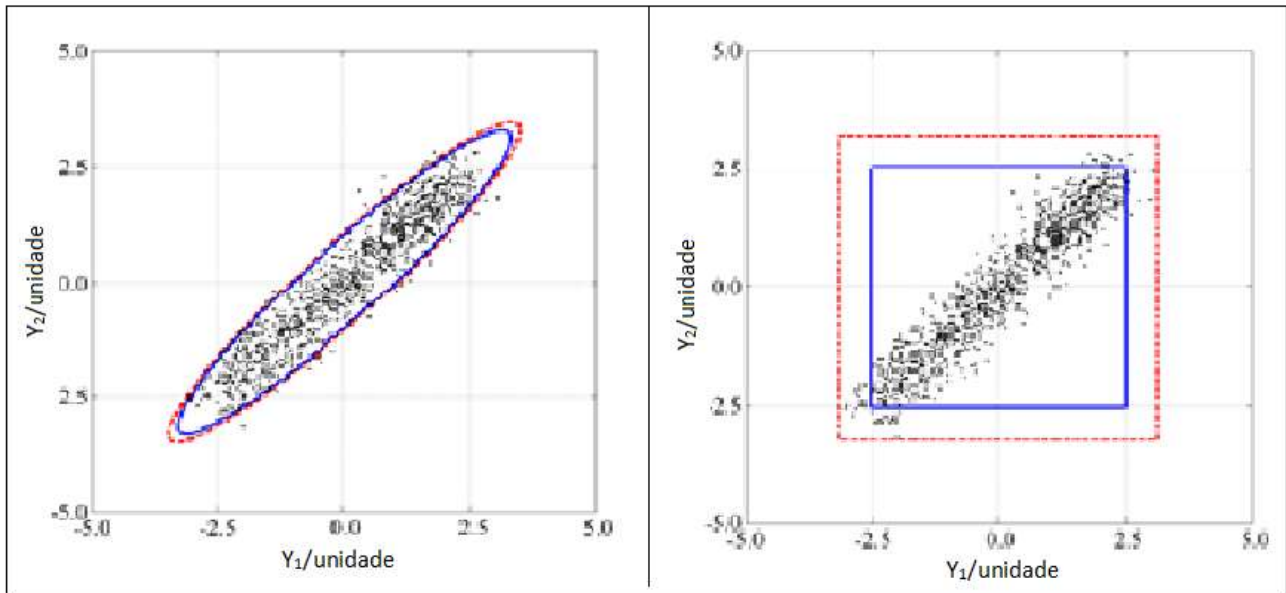


Figura 6 – Regiões de abrangência elípticas baseadas no item 6.5.2.3 a) e 7.7.2, e (à direita) regiões de abrangência retangulares baseadas em 6.5.2.3 b) e 7.7.3 (exemplo 7.7.2 e exemplo 7.7.3)

7.7.3 Região de abrangência hiper-retangular

Uma região de abrangência 100p% hiper-retangular para Y é

$$y_j \pm k_q u(y_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad (23)$$

onde $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ especifica sua localização, $\mathbf{u}(\mathbf{y}) = (u(y_1), \dots, u(y_m))^T$ especifica sua forma, e k_q especifica seu tamanho. Um procedimento para determinação de tal região de abrangência está a seguir:

- Transforme os pontos $\mathbf{y}_r$ de acordo com a expressão (21), denotando os pontos transformados por $\mathbf{y}_r^\circ$, onde $\mathbf{L}$ é agora a matriz diagonal de dimensão $m \times m$ com elementos diagonais $u(y_1), \dots, u(y_m)$;
- Ordene os pontos transformados $\mathbf{y}_r^\circ$ de acordo com valores crescentes de d_r , onde agora

$$d_r = \max_{j=1, \dots, m} |y_{j,r}^\circ|, \quad r = 1, \dots, M;$$
- Use o $\mathbf{y}_r^\circ$ ordenado para determinar o fator de abrangência k_q tal que uma fração p de $\mathbf{y}_r^\circ$ satisfaça $d_r < k_q$;
- Tome o hiper-retângulo definido pela expressão (23) conforme o limite de uma região de abrangência 100p% para $\mathbf{Y}$.

NOTA Com esta abordagem, não é levada em conta a mútua dependência entre pares de componentes de $\mathbf{Y}$.

EXEMPLO A Figura 6 (à direita) mostra os mesmos 1 000 pontos conforme os da Figura 6 (à esquerda). A região de abrangência retangular de 95 % para $\mathbf{Y}$ baseada na caracterização Y_j , $j = 1, 2$, pela distribuição gaussiana $N(y_j, u^2(y_j))$, e ignorando a correlação associada a y_1 e a y_2 (conforme em b) do subitem **6.5.2.3**), é apresentada pela linha tracejada. Esta região tem área de 40,1 unidade², $k_p = 2,24$ e contém todos os 1 000 pontos. A região de abrangência retangular determinada tendo como base as 1 000 amostragens (conforme no procedimento acima) é apresentada por uma linha cheia. Esta região tem área de 25,5 unidade², $k_p = 1,78$, isto é, é menor do que a região obtida sob a hipótese gaussiana, e, pela construção, contém exatamente 950 pontos.

7.7.4 Região de abrangência mínima

Um procedimento que fornece uma aproximação da menor região de abrangência 100p % é como a seguir:

- Construa uma região (hiper-)retangular no espaço das grandezas de saída;
- Subdivida esta região retangular em uma rede de pequenos retângulos;
- Atribua cada valor de grandeza de saída a um pequeno retângulo contido na rede;
- Use a fração de valores da grandeza de saída atribuída para cada retângulo como a probabilidade aproximada de que $\mathbf{Y}$ caia naquele retângulo;
- Liste os retângulos em termos de probabilidade decrescente;
- Forme a soma acumulativa de probabilidades para estes retângulos listados, parando quando esta soma não seja menor do que p ;
- Tome o grupo correspondente de retângulos como definição da menor região de abrangência.

NOTA 1 O procedimento é baseado na referência [20] e consiste em subdividir o espaço das grandezas de saída em um pequeno número de (hiper-)retângulos, aproximando a probabilidade de que $\mathbf{Y}$ caia em cada retângulo pequeno pela proporção de valores da grandeza de saída atribuída para aquele retângulo, e

aproximando a menor região de abrangência pelo menor grupo de tais retângulos que contenham $100p\%$ dos valores das grandezas de saída.

NOTA 2 A região retangular na etapa a) deve justamente conter todos os y_r .

NOTA 3 A estreiteza da rede em b) influencia a região de abrangência aproximada produzida.

NOTA 4 A qualidade da aproximação geralmente melhora com M . Para atingir uma suficientemente boa aproximação, particularmente para um número de grandezas de saída maior do que cerca de dois ou três, pode-se necessitar de um valor muito grande de M .

NOTA 5 A região assim obtida pode ser desvinculada, particularmente se M for insuficientemente grande.

NOTA 6 A etapa d) estabelece a probabilidade para cada retângulo ser a frequência relativa dos valores da grandeza de saída atribuída àquele retângulo. Uma região de abrangência que é menos desvinculada e possuindo um limite plano seria esperado ser obtida se a etapa d) fosse substituída pelo uso de uma aproximação mais sofisticada para a densidade de probabilidade [23].

NOTA 7 Algumas das probabilidades aproximadas na etapa d) podem ser iguais em valor. Em tal situação, a ordem dos itens na lista na etapa e) não é única. Como consequência, uma região de abrangência aproximada diferente poderia ser obtida para cada ordenação possível.

NOTA 8 No caso bivariado ($m = 2$), as etapas de a) até d) são também executadas nos estágios iniciais de um típico algoritmo de contorno usado na visualização de uma aproximação para a FDP para Y (ver 9.1.6).

EXEMPLO Considere o mesmo problema como no exemplo do subitem 7.7.2. A Figura 7 mostra aproximações para a menor região de abrangência a 95 %, obtida usando o procedimento deste subitem, baseada em um grupo de retângulos pequenos formando uma rede de 10×10 e (à direita) uma rede de 100×100 . A região de abrangência na Figura 7 (à esquerda) relaciona 1 000 pontos aleatoriamente amostrados provenientes de FDP para Y , tem área de 11,3 unidade² e contém 955 dos pontos. A região de abrangência na Figura 7 (à direita) relaciona 1 000 000 pontos aleatoriamente amostrados provindos de FDP para Y , tem área de 9,4 unidade² e contém 950 074 dos pontos. Para comparação, em cada figura, a região de abrangência elíptica a 95 % para Y baseada no procedimento do subitem 7.7.2 é mostrada pela linha cheia.

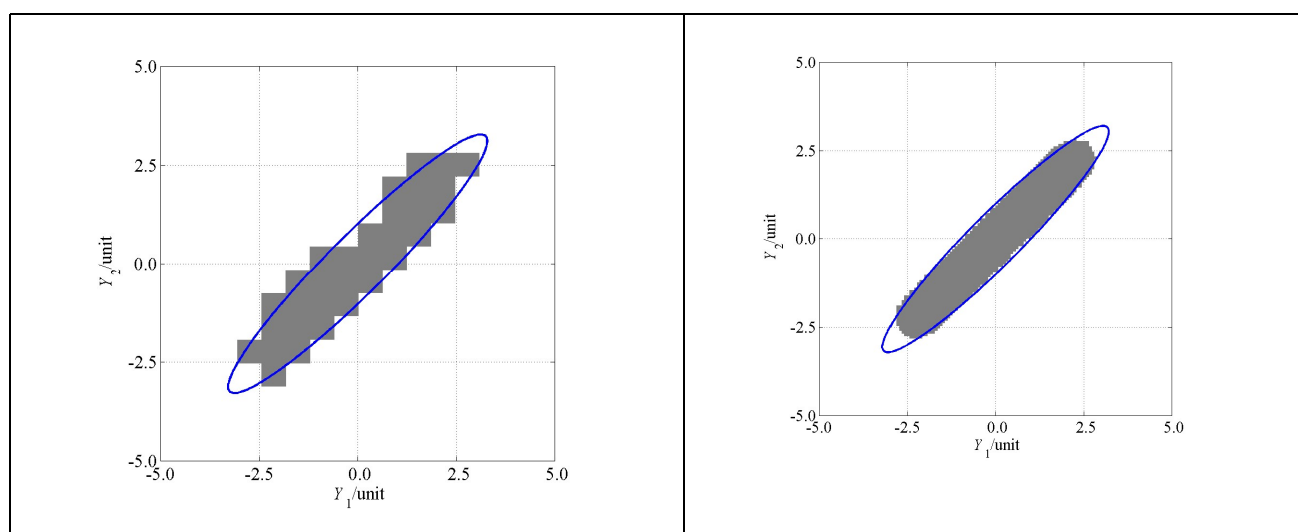


Figura 7 — Regiões de abrangência elípticas baseadas no subitem 7.7.2 e aproximações para a menor região de abrangência baseadas no subitem 7.7.4 para uma rede 10×10 e 1 000 pontos aleatoriamente amostrados provenientes de FDP para Y , e (à direita) para uma rede de 100×100 e 1 000 000 de pontos (exemplo 7.7.4)

Figura (nome nos eixos - colocar em português)

7.8 Procedimento adaptativo de Monte Carlo

7.8.1 Generalidades

7.8.1.1 A eficácia do MMC para determinar estimativas $\mathbf{y}$ das grandezas de saída $\mathbf{Y}$, a matriz de covariância associada $\mathbf{U}_y$ e uma região de abrangência para $\mathbf{Y}$ depende do uso de um valor suficientemente grande para o número M de iterações de Monte Carlo. Um valor para M pode ser escolhido *a priori* como no subitem 7.2. Alternativamente, um procedimento Monte Carlo adaptativo pode ser usado, o qual envolve realizar um número crescente de iterações de Monte Carlo até que os vários resultados de interesse se estabilizem no sentido estatístico. Um resultado numérico é considerado estabilizado se o dobro do desvio-padrão a ele associado for menor que uma tolerância numérica estipulada (ver 7.8.2).

7.8.1.2 O objetivo do procedimento adaptativo informado em 7.8.3 é fornecer

- uma estimativa $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$ de $\mathbf{Y}$,
- um vetor $\mathbf{u}(\mathbf{y}) = (u(y_1), \dots, u(y_m))^T$ de incertezas padrão associadas com as estimativas,
- uma matriz definida $\mathbf{R}_y$ de dimensão $m \times m$ de coeficientes de correlação $r_{ij} = r(y_i, y_j)$ associados com os pares das estimativas, e
- um fator de abrangência k_p que define uma região de abrangência de $100p$ % para $\mathbf{Y}$ na forma de um hiperelipsoide em m dimensões, de maneira que cada um desses valores atenda a uma tolerância numérica estipulada.

NOTA 1 Pela sua natureza estocástica, o procedimento não pode ser garantia de encontrar essas tolerâncias.

NOTA 2 Geralmente, quanto maior for a probabilidade de abrangência p , maior será o número de iterações de Monte Carlo necessário para determinar k_p para uma dada tolerância numérica.

NOTA 3 As incertezas padrão $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ e matriz de correlação $\mathbf{R}_y$ juntas determinam a matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ associada às estimativas $\mathbf{y}$ (ver 3.21 nota 3 e 7.8.2.4).

NOTA 4 Quando uma região de abrangência está para ser determinada que não está na forma de um hiperelipsoide em m dimensões, um teste para estabilização pode ser feito em termos dos parâmetros definidores da região. Por exemplo, para uma região de abrangência na forma de um hiper-retângulo em m dimensões, um teste poderia ser feito em termos de fator de abrangência k_p definindo a região e uma tolerância numérica associada com k_p . O procedimento apresentado em 7.8.3 é adequadamente modificado.

NOTA 5 Quando uma região de abrangência não é requerida, é realizado um número crescente de iterações de Monte Carlo até que se estabilizem a estimativa $\mathbf{y}$, as incertezas padrão associadas $\mathbf{u}(\mathbf{y})$ e a matriz de correlação $\mathbf{R}_y$.

NOTA 6 Quando existem dependências entre as grandezas de saída, $\mathbf{R}_y$ pode não ser definida positiva. Ver 9.4 (particularmente, 9.4.2.3 NOTA 2) para um exemplo.

7.8.2 Tolerância numérica associada a um valor numérico

7.8.2.1 Considere denotar n_{dig} como o número de dígitos decimais significativos considerado relevante em um valor numérico z . A tolerância numérica δ associada a z é dada como segue:

- a) expresse z na forma $c \times 10^\ell$, onde c é um n_{dig} dígito decimal inteiro e ℓ um inteiro;
- b) Tome

$$\delta = \frac{1}{2} 10^\ell .$$

7.8.2.2 Para $j = 1, \dots, m$, a tolerância numérica δ_j usada para testar a estabilização da estimativa y_j de Y_j e a incerteza padrão $u(y_j)$ associada a y_j no procedimento adaptativo de **7.8.3** é calculada em termos de um número de dígitos decimais significativos considerado como relevante no valor de $u(y_j)$.

7.8.2.3 A tolerância numérica ρ usada para testar a estabilização da matriz R_y de coeficientes de correlação r_{ij} associados à estimativa y é calculada em termos de um número de dígitos decimais significativos em λ_{max} , o maior “autovalor” de R_y (ver **3.21** NOTA 3).

7.8.2.4 A matriz R_y seria frequentemente usada em uma avaliação subsequente de incerteza. Comumente, esta avaliação relacionaria a uma grandeza escalar Q expressa como alguma combinação linear

$$Q = c_1 Y_1 + \dots + c_m Y_m = c^T Y$$

do Y_i . Usando

$$U_y = D_y R_y D_y$$

(ver **3.21** nota 3), a incerteza padrão $u(q)$ associada à estimativa

$$q = c^T y$$

de Q é dado por

$$u^2(q) = c^T U_y c = d^T R_y d ,$$

onde

$$d = D_y c .$$

7.8.2.5 A exatidão numérica de $u(q)$ depende de R_y e d , o último dependendo de D_y e, portanto, $u(y) = (u(y_1), \dots, u(y_m))^T$.

7.8.2.6 Para avaliações de incertezas subsequentes que são mais complicadas, tais como as envolvendo cálculo de mínimos quadrados usando explicitamente ou implicitamente o inverso de U_y , seria necessário utilizar um teste de estabilização diferente. Para um cálculo de mínimos quadrados, seria apropriado calcular ρ em **7.8.2.3** em termos de um número de dígitos decimais significativos no menor “autovalor” de R_y (ver também **3.21** nota 5): a sensibilidade da solução para o problema de mínimos quadrados depende do número de condição $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ de R_y . Assim, de modo a reduzir o número de iterações de Monte Carlo, convém que uma parametrização daquele problema seja usada que torne o número de condição tão pequeno quanto razoavelmente possível.

7.8.2.7 A tolerância numérica κ_p usada para teste de estabilização do fator de abrangência k_p é calculada em termos de um número de dígitos decimais significativos considerado como relevante no valor de k_p .

7.8.2.8 Para uma avaliação de incerteza subsequente baseada no uso de $\mathbf{G}$ (ver 7.5) como uma aproximação para a função distribuição de $\mathbf{Y}$, convém que seja assegurada que esta representação discreta é adequada para o propósito, especialmente quando uma região de abrangência está para ser fornecida. Sugestão detalhada sobre este aspecto está além do escopo deste Suplemento.

7.8.3 Procedimento adaptativo

Uma abordagem prática sugerida, envolvendo realizar uma sequência de aplicações de MMC, é fornecida a seguir:

- considere n_{dig} como um apropriado inteiro pequeno e positivo (ver 7.8.2);
- considere $M = \max(J, 10^4)$, onde J é o inteiro menor maior ou igual a $100/(1 - p)$;
- considere $h = 1$, denotando a primeira aplicação do MMC na sequência;
- realize M iterações de Monte Carlo, conforme nos subitens 7.3 e 7.4;
- use M valores vetoriais das grandezas de saída $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M$ assim obtidos para calcular $\mathbf{y}^{(h)}$, $\mathbf{u}(\mathbf{y}^{(h)})$, $\mathbf{R}_y^{(h)}$ e $\kappa_p^{(h)}$ como uma estimativa de $\mathbf{Y}$, as incertezas padrão associadas, a matriz de correlação associada e um fator de abrangência para uma região de abrangência de 100p%, respectivamente, i. e., para o h -ésimo membro da sequência;

f) se $h \leq 10$, aumente h de um e retorne à etapa d);

g) para $j = 1, \dots, m$, calcule o desvio-padrão s_{y_j} associado à média dos estimados $y_j^{(1)}, \dots, y_j^{(h)}$ de $\mathbf{Y}_j$, dado por

$$s_{y_j}^2 = \frac{1}{h(h-1)} \sum_{r=1}^h \left(y_j^{(r)} - y_j \right)^2, \quad y_j = \frac{1}{h} \sum_{r=1}^h y_j^{(r)};$$

- calcule a contraparte dessa estatística para os componentes de $\mathbf{u}(\mathbf{y}^{(h)})$ e para λ_{max} e $k_p^{(h)}$;
- use todos os valores disponíveis do modelo $h \times M$ até então para formar valores para $\mathbf{u}(\mathbf{y})$, $\mathbf{R}_y$ e k_p ;
- para $j = 1, \dots, m$, calcule as tolerâncias numéricas δ_j associadas a $u(y_j)$ como nos subitens 7.8.2.1 e 7.8.2.2;
- calcule a tolerância numérica ρ associada à matriz $\mathbf{R}_y$ de coeficientes de correlação como nos subitens 7.8.2.1 e 7.8.2.3;
- calcule a tolerância numérica κ_p associada com k_p conforme nos subitens 7.8.2.1 e 7.8.2.7;
- se para qualquer $j = 1, \dots, m$, $2s_{y_j}$ ou $2s_{u(y_j)}$, excede δ_j , ou $2s_{\lambda_{max}}$ excede ρ , ou $2s_{k_p}$ excede κ_p , aumente h de um e retorne à etapa d);
- considere o cálculo geral como tendo estabilizado, e use todos os valores das grandezas de saída do vetor $h \times M$ obtido para calcular $\mathbf{y}$, $\mathbf{U}_y$ e o fator de abrangência k_p para uma região de abrangência 100p%, como nos subitens 7.6 e 7.7.

NOTA 1 Para a convergência (estocástica) do procedimento adaptativo, a esperança e a matriz de covariância de $\mathbf{Y}$ devem existir.

NOTA 2 A escolha de M na etapa b) é arbitrária, mas tem sido considerada adequada na prática.

NOTA 3 O uso inicial de dez aplicações de MMC com M iterações nas etapas de d) a f) ajuda a evitar convergência prematura do procedimento, e, além do mais, torna mais razoável a suposição implicada pela nota 6. Uma mudança similar à contraparte desse procedimento quando há uma grandeza de saída escalar simples [JCGM 101:2008 7.9.4] melhoraria também o desempenho do esquema para alguns problemas.

NOTA 4 Na etapa g), y_j é considerado como uma realização de uma variável randômica com desvio-padrão s_{yj} .

NOTA 5 Os desvios padrão formados nas etapas g) e h) tendem a reduzir a $h^{-1/2}$ de maneira proporcional (ver nota em 7.1.7).

NOTA 6 O fator 2 usado na etapa m) é baseado em relação a médias como realizações de variáveis gaussianas e corresponde a uma probabilidade de abrangência de aproximadamente 95 %.

NOTA 7 A referência [28] considera melhoramentos ao procedimento adaptativo do Suplemento 1 do GUM [JCGM 101:2008 7.9].

8 Validação da metodologia de incerteza do GUM usando um método de Monte Carlo

8.1 Pode-se esperar que a metodologia (generalizada) de incerteza do GUM (MIG) funcione bem em muitas circunstâncias. No entanto, nem sempre é simples uma determinação sobre se todas as condições para a sua aplicação são válidas [JCGM 101:2008 5.7, JCGM 101:2008 5.8]. De fato, o grau de dificuldade aí envolvido é em geral consideravelmente maior do que o necessário para aplicar o MMC, assumindo-se que um software adequado esteja disponível [8]. Portanto, uma vez que essas circunstâncias não podem ser prontamente testadas, convém que quaisquer casos de dúvida sejam validados. Dado que o domínio de validade para o MMC é mais amplo do que aquele para a metodologia de incerteza do GUM, recomenda-se que tanto a metodologia de incerteza do GUM como o MMC sejam aplicados, e os resultados comparados. Caso a comparação seja favorável, a metodologia de incerteza do GUM pode ser utilizada nesta ocasião, e também para problemas suficientemente similares no futuro. Caso contrário, dever-se-á considerar a utilização do MMC, ou outra abordagem apropriada.

8.2 Especificamente, é recomendado que as etapas a) e b) abaixo e o processo de comparação em 8.3 sejam realizados:

- a) aplicar a metodologia de incerteza do GUM (ver item 6) para obter (i) uma estimativa $\mathbf{y}^{MIG}$ de $\mathbf{Y}$, (ii) as incertezas padrão $\mathbf{u}(\mathbf{y}^{MIG})$ associadas a $\mathbf{y}^{MIG}$, (iii) a matriz de correlação $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}^{MIG}$ associada a $\mathbf{y}^{MIG}$, e (iv) o fator de abrangência κ_p^{MIG} definindo uma região de abrangência de 100p % para $\mathbf{Y}$ na forma de uma hiperelipsoide em m dimensões.
- b) aplicar o procedimento adaptativo de Monte Carlo (ver 7.8.3) para fornecer, de modo similar, $\mathbf{y}^{MMC}$, $\mathbf{u}(\mathbf{y}^{MMC})$, $\mathbf{R}_{\mathbf{y}}^{MMC}$ e κ_p^{MMC} .

8.3 O objetivo do procedimento de comparação é determinar se os resultados fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM e do MMC concordam dentro de uma tolerância numérica estipulada. O procedimento é como segue:

- a) considere n_{dig} como um pequeno inteiro positivo apropriado (ver 7.8.2);
- b) para $j = 1, \dots, m$, calcule as tolerâncias numéricas δ_j associadas a $u(y_j)$ como em 7.8.2.1 e 7.8.2.2;
- c) calcule a tolerância numérica ρ associada à matriz $\mathbf{R}_y$ de coeficientes de correlação como em 7.8.2.1 e 7.8.2.3;
- d) calcule a tolerância numérica κ_p associada a k_p como em 7.8.2.1 e 7.8.2.7;
- e) compare as estimativas, as incertezas padrão associadas e os coeficientes de correlação, e os fatores de abrangência obtidos usando a metodologia de incerteza do GUM e o MMC para determinar se o número requerido de dígitos decimais corretos foi obtido nos resultados fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM. Especificamente, determine,

$$d_{y_j} = |y_j^{MIG} - y_j^{MMC}|, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$d_{u(y_j)} = |u(y_j^{MIG}) - u(y_j^{MMC})|, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$d_{\lambda_{max}} = |\lambda_{max}^{MIG} - \lambda_{max}^{MMC}|,$$

$$d_{k_p} = |k_p^{MIG} - k_p^{MMC}|,$$

isto é, as diferenças absolutas dos resultados numéricos respectivos. Assim, se para todo $j = 1, \dots, m$, d_{y_j} e $d_{u(y_j)}$ não são maiores do que δ_j ; $d_{\lambda_{max}}$ não é maior do que ρ ; e d_{k_p} não é maior do que κ_p , a comparação é favorável e a metodologia de incerteza do GUM foi neste exemplo validada.

NOTA 1 A escolha de região de abrangência de $100p$ % influenciará a comparação. Contudo, a validação se aplica somente para a probabilidade de abrangência p e para a região de abrangência especificadas.

NOTA 2 Em situações em que a região de abrangência não é requerida, o teste na etapa d) pode ser baseado somente em d_{y_j} , $d_{u(y_j)}$ e $d_{\lambda_{max}}$. Em casos em que se determina que a região de abrangência não está na forma de um hiperelipsoide em m dimensões, um teste pode ser feito em termos dos parâmetros que definem a região. Por exemplo, para uma região de abrangência na forma de um hiper-retângulo em m dimensões, um teste pode ser realizado em termos do fator de abrangência k_q que define a região e uma tolerância numérica κ_q associada a k_q .

NOTA 3 Convém que um número suficiente de iterações de Monte Carlo M seja executado para obter os resultados do MMC para o propósito de validar aqueles resultados provenientes da metodologia de incerteza do GUM. É recomendado que as tolerâncias numéricas estabelecidas no procedimento adaptativo de 7.8 não sejam maiores do que um quinto das tolerâncias numéricas respectivas usadas no procedimento de validação [JCGM 101:2008 8.2]. Alternativamente, o número de dígitos decimais significativos estabelecido no procedimento adaptativo pode ser definido maior do que o número de dígitos definido no procedimento de validação.

9 Exemplos

9.1 Ilustrações de aspectos deste Suplemento

9.1.1 O primeiro exemplo (ver [9.2](#)) é um modelo de medição linear em que as grandezas de saída do modelo de medição dependem de um efeito comum e de efeitos que são diferentes para diferentes grandezas de saída. Este é um exemplo para o qual soluções analíticas estão disponíveis em alguns casos especiais.

9.1.2 O segundo exemplo (ver [9.3](#)) é um modelo de medição não-linear a respeito da transformação de uma representação cartesiana (em termos de partes real e imaginária) de uma grandeza complexa para uma representação polar (em relação à magnitude e fase) da grandeza. Este é um exemplo para o qual soluções analíticas em alguns casos especiais estão disponíveis.

9.1.3 O terceiro exemplo (ver [9.4](#)), constituindo um modelo de medição não-linear posterior, é aquele que, no GUM, está relacionado com medições simultâneas de resistência e reatância [JCGM 100:2008 H.2]. O exemplo ilustra o tratamento de uma série de valores de indicação simultâneos de uma grandeza vetorial que foram obtidos independentemente.

9.1.4 O quarto exemplo (ver [9.5](#)) está relacionado com a medição de temperatura Celsius usando um termômetro de resistência. O exemplo ilustra o tratamento de um modelo de medição univariado e um modelo de medição multivariado.

9.1.5 Muitas das figuras usadas para ilustrar os resultados para os exemplos são melhor vistas em cores. Nas figuras que mostram contornos, os contornos de uma cor comum correspondem ao mesmo valor de contorno. A correspondência entre contornos de mesma cor para gráficos de contorno dentro da mesma figura é aplicada em todo este Suplemento, a menos que uma afirmação em contrário seja feita. Quando duas ou mais figuras são usadas para comparar resultados, tais como aqueles da metodologia de incerteza do GUM e de um método Monte Carlo, os mesmos eixos são geralmente usados. Há algumas exceções quando as FDPs, etc, para os métodos são muito diferentes.

9.1.6 Como a saída primária do MMC é o conjunto de M valores da grandeza vetorial $\mathbf{Y}$, reunidos na matriz $\mathbf{G}$ de dimensão $m \times M$ (ver [7.1.6](#)), é geralmente desejável resumi-los por uma aproximação à função densidade de probabilidade correspondente, e desenhar esta função por suas linhas de contorno. As figuras nesta cláusula mostram tais linhas de contorno em casos em que a grandeza de saída é de dimensão $m = 2$. Convém que as linhas de contorno sejam desenhadas de modo que garanta que, conforme o número M de tentativas a partir da distribuição de probabilidade da grandeza de saída cresça bastante, elas converjam para os contornos da correspondente função densidade de probabilidade: fazer isso requer apropriada suavidade das linhas [22, 24]. Alguns diagramas de contorno mostrados nesta cláusula são computados diretamente a partir de uma aproximação à função densidade de probabilidade correspondente. Para outros, um apropriado algoritmo de suavidade é aplicado e o contorno de suavização é desenhado. Em um exemplo (figura 10) são mostrados contornos suavizados e não suavizados para indicar o efeito do algoritmo de suavidade.

9.2 Modelo de medição aditivo

9.2.1 Formulação

Este exemplo (compare com o exemplo em [7.7.2](#)) considera o modelo de medição aditivo (linear) bivariado

$$Y_1 = X_1 + X_3 \quad Y_2 = X_2 + X_3 \quad (24)$$

para três grupos diferentes de FDPs $g_{X_i}(\xi_i)$ atribuídas às grandezas de entrada X_i , consideradas independentes. O modelo de medição tem três grandezas de entrada X_1 , X_2 e X_3 , com X_3 representando um efeito que é comum às grandezas de saída Y_1 e Y_2 , e os efeitos de X_1 e X_2 sendo diferentes para Y_1 e Y_2 . Para o primeiro grupo de FDPs de entrada (ver 9.2.2), cada $g_{X_i}(\xi_i)$ é escolhido para ser uma distribuição gaussiana padrão com X_1 tendo esperança zero e desvio-padrão unitário. O segundo grupo de FDPs (ver 9.2.3) é idêntico ao primeiro, porém $g_{X_3}(\xi_3)$ é uma distribuição retangular, também com X_3 tendo esperança zero e desvio-padrão unitário. O terceiro grupo de FDPs (ver 9.2.4) é idêntico ao segundo, exceto que X_3 tem um desvio-padrão igual a três, representando um efeito comum dominante.

9.2.2 Propagação e resumo: caso 1

9.2.2.1 Caracterize cada X_i por uma distribuição gaussiana padrão. As estimativas das grandezas X_i são $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, com incertezas padrão associadas $u(x_i) = 1$. Os resultados obtidos da aplicação da metodologia de incerteza do GUM (ver 6) e do MMC (ver 7) estão resumidos na tabela 3 e nas figuras 8 a 10. Alguns resultados na tabela são relatados com quatro dígitos decimais significativos de modo a facilitar comparações.

Tabela 3 – Aplicação da metodologia de incerteza do GUM (MIG) e do MMC ao modelo aditivo (24), com cada X_i caracterizado pela distribuição padrão gaussiana (subitem 9.2.2)

Método	M	y_1	y_2	$u(y_1)$	$u(y_2)$	$r(y_1, y_2)$	k_p	k_q
MIG		0,000	0,000	1,414	1,414	0,500	2,45	2,24
MMC	1×10^5	0,003	0,005	1,412	1,408	0,498	2,45	2,22
MMC	1×10^6	0,000	0,000	1,416	1,415	0,500	2,45	2,21
MMC	1×10^7	0,000	0,000	1,414	1,414	0,500	2,45	2,21
MMC adaptativo	$0,35 \times 10^6$	0,001	-0,001	1,417	1,417	0,502	2,45	2,22
MMC adaptativo	$0,45 \times 10^7$	0,001	-0,001	1,416	1,414	0,501	2,45	2,21

9.2.2.2 A metodologia de incerteza do GUM (generalizada) fornece a estimativa $\mathbf{y} = (0,0)^T$ de $\mathbf{Y}$. A matriz de covariância associada a essa estimativa é

$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

obtida pela aplicação da fórmula (3), isto é $\mathbf{U}_y = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^T$, com

$$\mathbf{U}_x = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O coeficiente de correlação associado às estimativas $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ (ver 3.21) é $r(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = 0,5$. Regiões de abrangência de 95 % para $\mathbf{Y}$ são definidas com as formas de uma elipse e de um retângulo,

respectivamente, com fatores de abrangência $k_p = 2,45$ (tabela 1) e $k_q = 2,24$ (tabela 2). Esses resultados estão resumidos na linha 1 (MIG) da tabela 3. No contexto da metodologia de incerteza do GUM, dada a informação disponível, $\mathbf{Y}$ é caracterizada pela FDP bivariada gaussiana $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$.

9.2.2.3 A aplicação do MMC com, respectivamente, $M = 10^5$, 10^6 e 10^7 iterações dá os resultados resumidos nas linhas 2 a 4 (MMC) da tabela 3. O quarto e o quinto valores numéricos de M ($0,35 \times 10^6$ e $0,45 \times 10^6$) dados nas linhas 5 e 6 (MMC Adaptativo) da tabela são os números de iterações realizadas por duas aplicações do procedimento adaptativo de Monte Carlo (ver 7.8.3) com n_{dig} , o número de dígitos decimais significativos considerados relevantes no valor numérico de um resultado, igual a três (ver nota 3 de 8.3). Para as aplicações do procedimento adaptativo, é necessário que todos os resultados, ou sejam, y_1 , y_2 , $u(y_1)$, $u(y_2)$, $r(y_1, y_2)$, k_p e k_q , tenham-se estabilizado, num sentido estatístico.

9.2.2.4 A FDP para $\mathbf{Y}$ obtida analiticamente é a FDP Gaussiana bivariada $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$ com $\mathbf{y}$ e $\mathbf{U}_y$ dados em 9.2.2.2.

9.2.2.5 A Figura 8 (esquerda) mostra os contornos da FDP Gaussiana bivariada para $\mathbf{Y}$ obtida a partir da metodologia de incerteza do GUM (ou obtida analiticamente). Os contornos assumem a forma de elipses com equações

$$(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y})^T \mathbf{U}_y^{-1} (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{y}) = k^2$$

para vários valores de k . A Figura 8 (direita) mostra os contornos da aproximação para a FDP para $\mathbf{Y}$ obtida a partir da aplicação do MMC com $M = 10^7$ iterações. A FDP aproximada é descrita pelos números de valores de modelo do cálculo de Monte Carlo contidos em cada célula de uma malha (adequadamente grande) definida no domínio de $\mathbf{Y}$, com cada número dimensionado (pelo mesmo fator de escala) para que o volume sob a FDP (considerado como constante em cada célula) seja igual a unidade. Um algoritmo de contorno é usado para determinar contornos a partir desta descrição da FDP aproximada para os mesmos valores de k usados para definir as elipses na figura 8 (esquerda). Os contornos da figura 8 (direita) não são suavizados (ver 9.1.6).

NOTA A Figura 8 e os gráficos de contorno subsequentes incluem uma barra colorida indicando as alturas do contorno de acordo com um código de cores.

9.2.2.6 A Figura 9 mostra a FDP marginal $N(y_1, u^2(y_1))$ para Y_1 resultante da metodologia de incerteza do GUM. Ela também mostra a FDP aproximada fornecida pelo MMC com $M = 10^7$ iterações. A aproximação é exibida como uma distribuição de frequência em escala (histograma) dos valores do modelo para Y_1 a partir do cálculo de Monte Carlo. Essas duas FDPs são quase indistinguíveis a olho nu. Resultados comparáveis seriam obtidos para Y_2 .

9.2.2.7 A Figura 10 (esquerda) mostra os contornos da aproximação da FDP para $\mathbf{Y}$ fornecida pelo MMC com $0,45 \times 10^6$ iterações. Os contornos são consideravelmente menos “suaves” do que os da figura 8 (à direita) obtidos a partir de um número muito maior de iterações. A Figura 10 (à direita) fornece um exemplo de suavização de contorno (ver 9.1.6).

NOTA Um grande valor para o número M de iterações de Monte Carlo e uma discretização fina do domínio de $\mathbf{Y}$, geralmente são necessários para garantir que os contornos em uma representação gráfica da FDP

aproximada para $\mathbf{Y}$ obtida usando MMC sejam suaves. Um efeito semelhante surge para uma única grandeza de saída escalar, onde um valor grande para M e muitas classes (ou compartimentos) geralmente são necessários para garantir que a FDP aproximada exibida como um histograma (ou distribuição de frequência em escala) seja suave.

9.2.2.8 O procedimento de validação da cláusula 8 é aplicado para validar os resultados obtidos com a metodologia de incerteza do GUM contra aqueles das duas aplicações do cálculo adaptativo de Monte Carlo. O procedimento é aplicado fazendo n_{dig} , o número de dígitos decimais considerados significativos no valor numérico de um resultado, igual a dois. Neste caso, as tolerâncias numéricas associadas aos resultados são, respectivamente,

$$\delta_1 = \delta_2 = 0,05, \quad \rho = 0,05, \quad \kappa_p = \kappa_q = 0,05.$$

Os resultados obtidos da metodologia de incerteza do GUM foram validados em ambos exemplos. Com exceção de κ_q , a concordância entre os resultados seria esperada porque todas as condições são válidas para a aplicação da metodologia de incerteza do GUM. A avaliação de κ_q na metodologia de incerteza do GUM não leva em consideração a dependência mútua entre Y_1 e Y_2 (ver 6.5.2.3). No entanto, os valores de κ_q obtidos estão de acordo com o número requerido de casas decimais significativas.

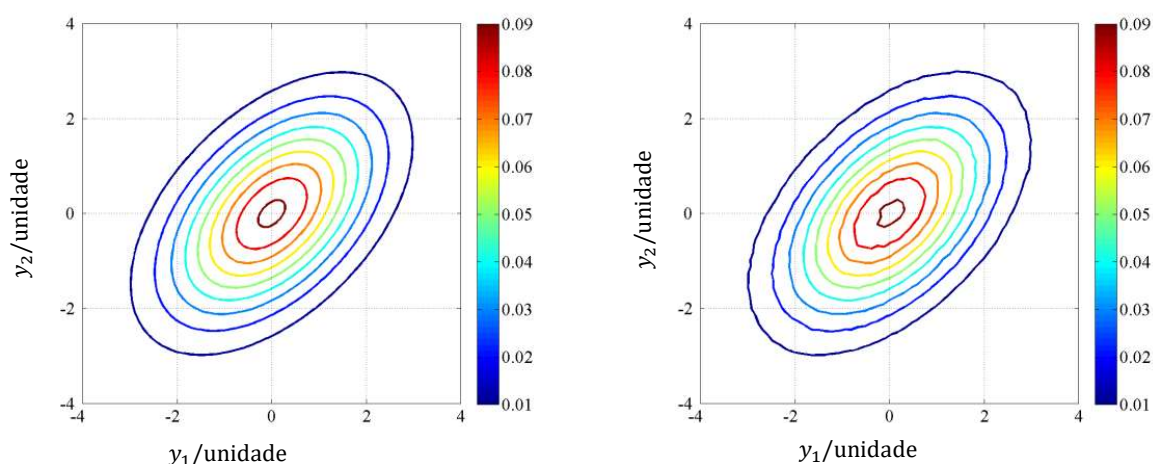


Figura 8 — Contornos das FDPs conjuntas para as grandezas de saída no modelo de medição aditivo (24) fornecido pela metodologia de incerteza do GUM e (à direita) MMC sem suavização de contorno, onde as grandezas de entrada no modelo de medição são caracterizadas por distribuições gaussianas padrão (9.2.2)

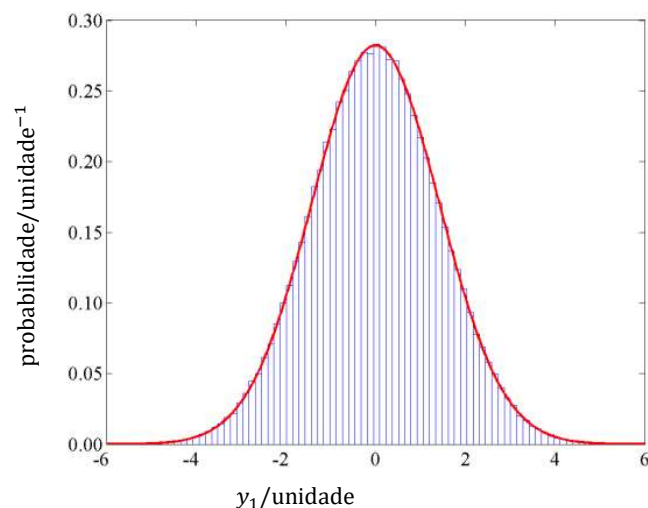


Figura 9 — Como a figura 8, mas mostrando o FDP marginal para Y_1 (9.2.2)

9.2.3 Propagação e resumo: caso 2

9.2.3.1 Este caso é idêntico àquele de 9.2.2, exceto que X_3 é caracterizado por uma distribuição retangular de forma que X_3 tem uma esperança de zero e um desvio-padrão de unidade. Novamente, as estimativas do X_i são $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, com incertezas padrão associadas $u(x_i) = 1$. Os resultados da aplicação da metodologia de incerteza do GUM (consulte 6) e MMC (consulte 7) estão resumidos na tabela 4 e nas figuras 11 e 12.

9.2.3.2 A metodologia de incerteza do GUM fornece exatamente a mesma FDP (gaussiana bivariada) para Y (figura 11, esquerda) quando a FDP para X_3 é gaussiana (como em 9.2.2) ou retangular (como aqui), porque as esperanças das grandezas de entrada são idênticas, assim como os desvios padrão, nos dois casos. Como o modelo de medição depende linearmente das grandezas de entrada, não há aproximação envolvida na aplicação da lei de propagação da incerteza para obter uma estimativa y de Y e a matriz de covariância associada $\mathbf{U}_y$. No entanto, a FDP fornecida pela metodologia de incerteza do GUM não é a mesma que a solução analítica, pois esta depende da distribuição usada para caracterizar X_3 , e não apenas da esperança e desvio-padrão da grandeza.

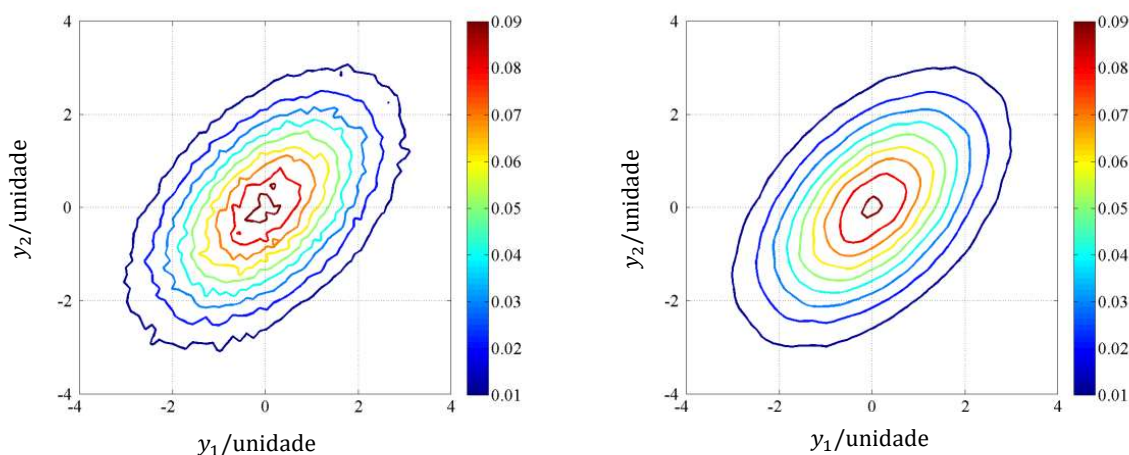


Figura 10 — Contornos da FDP conjunta para as grandezas de saída no modelo de medição aditivo (24) fornecido pelo procedimento MMC adaptativo e (à direita) com suavização de contorno, onde as grandezas de entrada no modelo são caracterizadas por distribuições gaussianas padrão (9.2.2)

Tabela 4 — Como a tabela 3, exceto que X_3 é caracterizado por uma distribuição retangular (9.2.3)

Método	M	y_1	y_2	$u(y_1)$	$u(y_2)$	$r(y_1, y_2)$	k_p	k_q
MIG		0,000	0,000	1,414	1,414	0,500	2,45	2,24
MMC	1 x10 ⁵	0,008	0,010	1,414	1,410	0,500	2,38	2,15
MMC	1 x10 ⁶	0,001	0,001	1,414	1,414	0,499	2,38	2,15
MMC	1 x10 ⁷	0,000	0,000	1,414	1,414	0,500	2,38	2,15
MMC Adapt	0,36x10 ⁶	0,000	-0,002	1,413	1,414	0,500	2,38	2,15
MMC Adapt	0,35x10 ⁶	0,002	-0,001	1,418	1,415	0,502	2,38	2,15

9.2.3.3 A Figura 11 (à direita) e a figura 12 mostram a influência da distribuição usada para caracterizar X_3 nas aproximações para, respectivamente, a FDP para Y e a FDP marginal para Y_1 obtidas do MMC.

9.2.3.4 O procedimento de validação da cláusula 8 é novamente aplicado (ver 9.2.2). Neste caso, os valores para y_1 , y_2 , $u(y_1)$, $u(y_2)$ e $r(y_1, y_2)$ obtidos da metodologia de incerteza do GUM foram validados em relação aos obtidos das duas aplicações do procedimento adaptativo de Monte Carlo, mas os valores de k_p e k_q não foram validados.

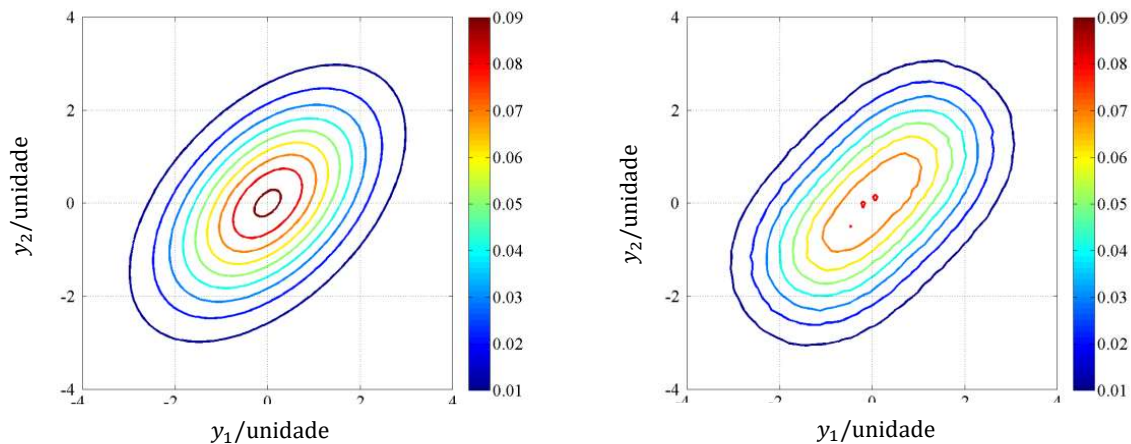


Figura 11 — Equivalente da figura 8 para uma grandeza de entrada X_3 caracterizada por uma distribuição retangular (9.2.3)

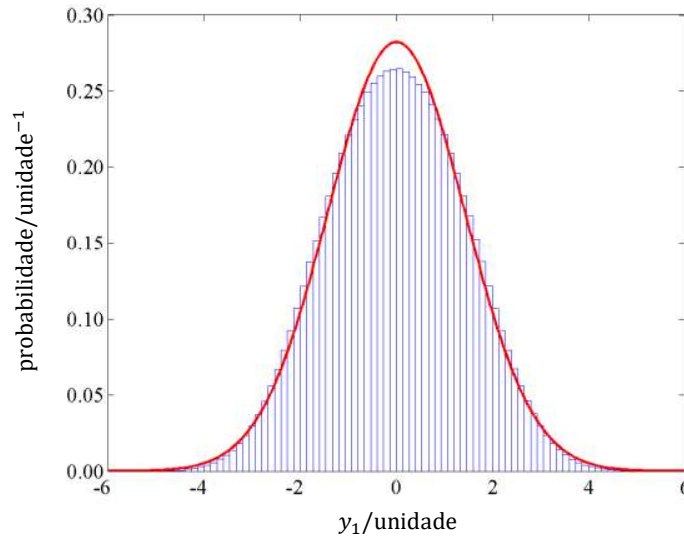


Figura 12 — Equivalente da figura 9 para uma grandeza de entrada X_3 caracterizada por uma distribuição retangular (9.2.3)

9.2.4 Propagação e resumo: caso 3

9.2.4.1 Considere o exemplo de 9.2.3, exceto que X_3 agora tem um desvio-padrão de três em vez de unidade. Os resultados da aplicação da metodologia de incerteza do GUM (ver 6) e MMC (ver 7) estão resumidos na tabela 5 e nas figuras 13 e 14.

Tabela 5 — Como a tabela 4, exceto que X_3 tem um desvio-padrão de três (9.2.4)

Método	M	y_1	y_2	$u(y_1)$	$u(y_2)$	$r(y_1, y_2)$	k_p	k_q
MIG		0,000	0,000	3,162	3,162	0,900	2,45	2,24
MMC	1 x10 ⁵	0,023	0,025	3,159	3,157	0,900	2,28	1,87
MMC	1 x10 ⁶	0,003	0,002	3,161	3,161	0,900	2,28	1,87
MMC	1 x10 ⁷	0,000	0,000	3,162	3,161	0,900	2,28	1,87
MMC Adapt	1,49x10 ⁶	0,002	0,002	3,163	3,162	0,900	2,28	1,87
MMC Adapt	1,85x10 ⁶	0,001	0,001	3,163	3,162	0,900	2,28	1,87

9.2.4.2 A metodologia de incerteza do GUM fornece a estimativa $\mathbf{y} = (0, 0)^T$ de $\mathbf{Y}$. A matriz de covariância associada a esta estimativa é

$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 10 \end{bmatrix},$$

obtida pela aplicação da fórmula (3) com

$$\mathbf{U}_x = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O coeficiente de correlação associado às estimativas y_1 e y_2 é $r(y_1, y_2) = 0,9$. As regiões de abrangência de 95% para $\mathbf{Y}$ que assumem as formas de uma elipse e de um retângulo são definidas,

respectivamente, pelos fatores de abrangência $k_p = 2,45$ (tabela 1) e $k_q = 2,24$ (tabela 2). Esses resultados são resumidos na linha 1 (MIG) da tabela 5. No contexto da metodologia de incerteza do GUM, dada a informação disponível sobre $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}$ é caracterizado pela FDP gaussiana bivariada $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$, cujos contornos são mostrados na figura 13 (esquerda). Há uma correlação mais forte entre Y_1 e Y_2 neste exemplo, em comparação com os exemplos anteriores, porque a contribuição relativa do efeito comum X_3 para as incertezas associadas às estimativas de Y_1 e Y_2 é maior.

9.2.4.3 A Figura 13 (à direita) e a Figura 14 mostram a maior influência (em comparação com os resultados de 9.2.3) da distribuição usada para caracterizar X_3 nas aproximações para, respectivamente, a FDP para $\mathbf{Y}$ e a FDP marginal para Y_1 obtidas do MMC.

9.2.4.4 O procedimento de validação da cláusula 8 é novamente aplicado (ver 9.2.2 e 9.2.3). Neste caso, os valores para y_1 , y_2 , $u(y_1)$, $u(y_2)$ e $r(y_1, y_2)$ obtidos da metodologia de incerteza do GUM foram validados em relação aos obtidos das duas aplicações do procedimento adaptativo de Monte Carlo, mas os valores de k_p e k_q não foram validados. O valor de k_p obtido da metodologia de incerteza do GUM é cerca de 7% maior do que o obtido do MMC, e o valor de k_q cerca de 20% maior.

9.3 Transformação do sistema de coordenadas

9.3.1 Formulação

9.3.1.1 Considere uma grandeza complexa $\mathbf{Z}$ representada na forma cartesiana

$$X_1 + iX_2,$$

onde $X_1 \equiv Z_R$ e $X_2 \equiv Z_I$ são, respectivamente, as partes real e imaginária de Z , ou na forma polar

$$R(\cos \theta + i \sin \theta) = Re^{i\theta},$$

onde R e θ são, respectivamente, a magnitude e a fase de Z . Este exemplo considera a transformação das representações cartesianas para polares de Z descritas pelo modelo de medição bivariado

$$Y_1^2 = X_1^2 + X_2^2, \tan Y_2 = X_2/X_1,$$

com grandeza de entrada $\mathbf{X}=(X_1, X_2)^T \equiv (Z_R, Z_I)^T$ e grandeza de saída $\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2)^T \equiv (R, \theta)^T$.

NOTA As expressões (25) constituem um modelo de medição bivariado para R e θ . Uma vez que R é uma magnitude, e é conhecido por ser não negativo, é determinado exclusivamente pela raiz quadrada positiva de R^2 . Usando uma “função tangente inversa de quatro quadrantes” (muitas vezes denotada por “atan2”), θ é determinado exclusivamente para satisfazer $-\pi < \theta \leq \pi$. Assim, as expressões (25) podem ser lançadas como um modelo de medição bivariado.

9.3.1.2 Dadas são as estimativas x_1 e x_2 das grandezas X_1 e X_2 , obtidas de um sistema de medição adequado, e incertezas padrão associadas $u(x_1)$ e $u(x_2)$ e covariância $u(x_1, x_2) = ru(x_1)u(x_2)$, onde $r = r(x_1, x_2)$ denota o coeficiente de correlação associada [JCGM 100:2008 5.2.2]. Com base nesta

informação [JCGM 101:2008 6.4.8.1], $\mathbf{X}$ é atribuído a uma FDP gaussiana bivariada, com esperança e matriz de covariância

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u^2(x_1) & ru(x_1)u(x_2) \\ ru(x_1)u(x_2) & u^2(x_2) \end{bmatrix}.$$

As grandezas X_1 e X_2 são assumidas como tendo dimensão um.

9.3.1.3 A determinação de uma estimativa y de Y e a matriz de covariância associada $\mathbf{U}_y$ é considerada para diferentes escolhas de x_1 , x_2 , $u(x_1)$, $u(x_2)$ e $r(x_1, x_2)$.

9.3.1.4 Seis casos são considerados, em todos os quais x_2 é tomado como zero e $u(x_1) = u(x_2) = u_x = 0,010$. Os três primeiros destes casos correspondem a tomar $x_1 = 0,001$, $0,010$ e $0,100$, cada um com $r(x_1, x_2) = 0$ (ver 9.3.2). Os três segundos casos correspondem a tomar o mesmo x_1 , mas com $r(x_1, x_2) = 0,9$ (ver 9.3.3). A Figura 15 mostra os contornos das FDPs conjuntas atribuídas às grandezas de entrada $\mathbf{X}$ para o caso 1 ($x_1 = 0,001$ e $r(x_1, x_2) = 0$) e caso 4 ($x_1 = 0,001$ e $r(x_1, x_2) = 0,9$). (Nesta figura, um conjunto comum de valores de contorno não é usado para os dois gráficos de contorno.) Os contornos das FDPs conjuntas para os outros casos são obtidos pela tradução dos contornos mostrados ao longo do eixo X_1 , de modo que sejam centrados em $x_1 = 0,010$ (casos 2 e 5) ou $x_1 = 0,100$ (casos 3 e 6).

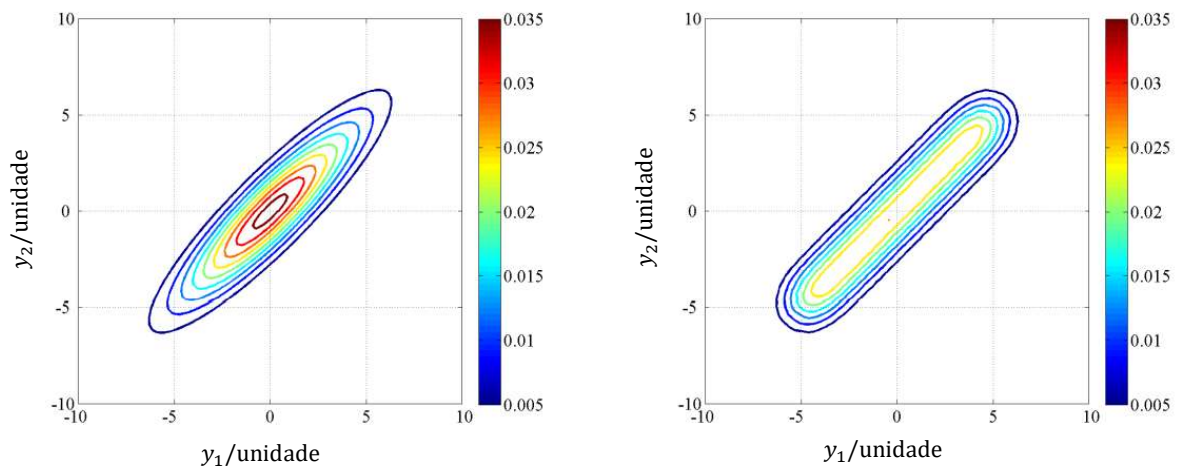


Figura 13 — Equivalente da figura 11 para uma grandeza de entrada X_3 com desvio-padrão de três (9.2.4)

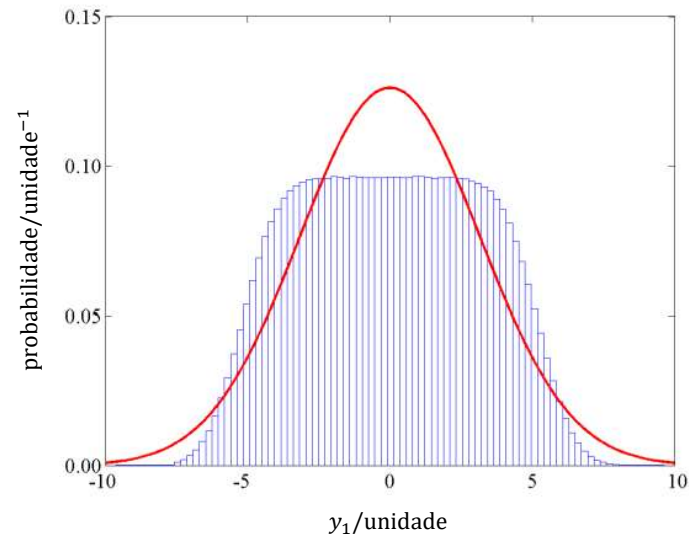


Figura 14 — Equivalente da figura 12 para uma grandeza de entrada X_3 com desvio-padrão de três (9.2.4)

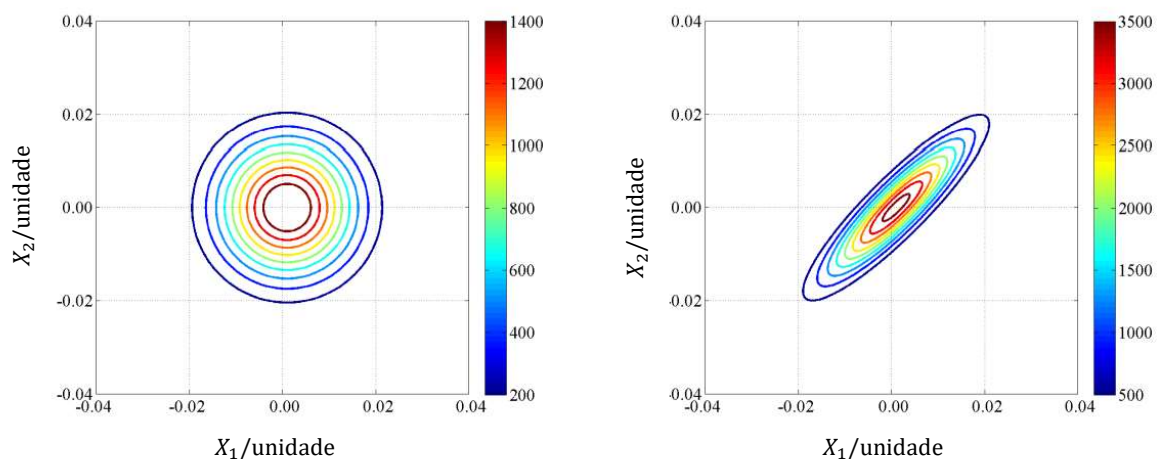


Figura 15 — Contornos das FDPs conjuntas para as grandezas de entrada no modelo de transformação do sistema de coordenadas para os casos 1 e (à direita) 4 (9.3.1.4)

9.3.2 Propagação e resumo: covariância zero

9.3.2.1 Geral

9.3.2.1.1 A avaliação da incerteza é tratada pela aplicação da propagação de distribuições (a) analiticamente (para fins de comparação), (b) usando a metodologia de incerteza do GUM (generalizada) e (c) usando MMC.

9.3.2.1.2 A FDP (conjunta) para Y , e as FDPs marginais para Y_1 e Y_2 , podem ser obtidas analiticamente no caso em que X_1 é descrito pela distribuição Gaussiana $N(x_1, u_x^2)$ e X_2 por $N(x_2, u_x^2)$, com X_1 e X_2 mutuamente independentes. Ver C.2.

9.3.2.1.3 No contexto da metodologia de incerteza do GUM, $\mathbf{Y}$ é caracterizado pela distribuição Gaussiana bivariada $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$, onde a estimativa $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ de $\mathbf{Y}$ é dada pela solução das equações

$$y_1^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \tan y_2 = x_2/x_1,$$

com matriz de covariância associada $\mathbf{U}_y$ obtida pela aplicação de uma generalização da lei de propagação da incerteza. Ver cláusula 6 e C.3.

9.3.2.1.4 O MMC é aplicado com $M = 10^7$ iterações. Consulte a cláusula 7.

9.3.2.2 Estimativa de entrada $x_1 = 0,001$

9.3.2.2.1 Para a estimativa de entrada $x_1 = 0,001$, com coeficiente de correlação $r(x_1, x_2) = 0$, as linhas 1 a 3 da tabela 6 fornecem os resultados obtidos analiticamente, usando a metodologia de incerteza do GUM (MIG) e MMC.

NOTA Os resultados analíticos para y_1 e $u(y_1)$ dados na tabela 6 são determinados calculando numericamente, com um alto grau de aproximação, $E(Y_1)$ e $V(Y_1)$, que assumem a forma de integrais definidas envolvendo a distribuição marginal para Y_1 obtido analiticamente (ver expressão (C.2) no anexo C). Da mesma forma, os resultados analíticos para y_2 e $u(y_2)$ são determinados calculando numericamente $E(Y_2)$ e $V(Y_2)$, que envolvem a distribuição marginal para Y_2 obtida analiticamente (ver expressão (C.3) no anexo C). É fácil mostrar que $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ e, portanto, o resultado analítico $r(y_1, y_2) = 0$.

Tabela 6 — Resultados da transformação do sistema de coordenadas, para estimativas de entrada com covariância zero associada (9.3.2.2.1, 9.3.2.3.1 e 9.3.2.4.1)

x_1	Método	y_1	y_2	$u(y_1)$	$u(y_2)$	$r(y_1, y_2)$
0,001	Analítico	0,013	0,000	0,007	1,744	0,000
	MIG	0,001	0,000	0,010	10,000	0,000
	MMC	0,013	-0,001	0,007	1,744	0,000
0,010	Analítico	0,015	0,000	0,008	1,118	0,000
	MIG	0,010	0,000	0,010	1,000	0,000
	MMC	0,015	0,000	0,008	1,117	0,000
0,100	Analítico	0,101	0,000	0,010	0,101	0,000
	MIG	0,100	0,000	0,010	0,100	0,000
	MMC	0,101	0,000	0,010	0,101	0,000

9.3.2.2.2 A Figura 16 mostra nos três primeiros gráficos os contornos das FDPs conjuntas para $\mathbf{Y}$ obtidas analiticamente, usando a metodologia de incerteza do GUM, e o MMC. A FDP fornecida pelo MMC é consistente com a solução analítica. No entanto, a FDP fornecida pela metodologia de incerteza do GUM é muito diferente da solução analítica e é necessário usar um conjunto diferente de valores de contorno para ilustrar essa FDP (consulte 9.1.5). Além disso, a FDP fornecida pela metodologia de incerteza do GUM assume valores positivos para valores inviáveis das grandezas de saída, ou seja, para valores $\eta_1 < 0$, $\eta_2 \leq -\pi$ e $\eta_2 > \pi$, implicando erroneamente uma densidade de probabilidade diferente de zero para tais valores inviáveis.

9.3.2.2.3 A Figura 16 mostra nos dois gráficos inferiores as FDPs marginais para as grandezas de saída Y_1 e Y_2 obtidas da distribuição conjunta para $\mathbf{Y}$. As FDPs marginais fornecidas pelo MMC (mostradas como histogramas ou distribuições de frequência em escala) são consistentes com as

soluções analíticas (mostradas como linhas tracejadas). No entanto, as distribuições marginais fornecidas pela metodologia de incerteza do GUM (mostradas como linhas sólidas) são muito diferentes das soluções analíticas. Por conveniência de apresentação, o gráfico da FDP marginal para Y_2 fornecida pelo intervalo de incerteza do GUM é mostrado apenas para valores (viáveis) de η_2 satisfazendo $-\pi < \eta_2 \leq \pi$, embora a FDP, que é a Gaussiana $N(0, 10^2)$, se estenda para bem além desse intervalo. As FDPs marginais fornecidas pela metodologia de incerteza do GUM implicam uma densidade de probabilidade diferente de zero para valores inviáveis das grandezas de saída (consultar também 9.3.2.2.2).

9.3.2.3 Estimativa de entrada $x_1 = 0,010$

9.3.2.3.1 Para a estimativa de entrada $x_1 = 0,010$, com coeficiente de correlação $r(x_1, x_2) = 0$, as linhas 4 a 6 da tabela 6 fornecem os resultados obtidos analiticamente, usando a metodologia de incerteza do GUM (MIG) e MMC. A Figura 17 mostra os contornos das FDPs conjuntas para Y obtidas usando as três abordagens e as FDPs marginais para Y_1 e Y_2 obtidas das respectivas FDPs conjuntas.

9.3.2.3.2 Pode-se observar que os resultados obtidos usando MMC são consistentes com a solução analítica. No entanto, os resultados obtidos usando a metodologia de incerteza do GUM são diferentes da solução analítica, mas não tão diferentes quanto para o caso $x_1 = 0,001$. As diferenças relativas entre as incertezas padrão $u(y_1)$ e $u(y_2)$ determinadas usando a metodologia de incerteza do GUM e analiticamente são aproximadamente 25% e 10% (em comparação com aproximadamente 40% e 470% para o caso $x_1 = 0,001$).

9.3.2.4 Estimativa de entrada $x_1 = 0,001$

9.3.2.4.1 Para a estimativa de entrada $x_1 = 0,001$, com coeficiente de correlação $r(x_1, x_2) = 0$, os resultados obtidos usando as três abordagens são dados nas linhas 7 a 9 da tabela 6 e na figura 18.

9.3.2.4.2 Pode-se observar que os resultados obtidos usando a metodologia de incerteza do GUM e o MMC são consistentes com a solução analítica. As distribuições marginais fornecidas pelas três abordagens mostradas na figura 18 são virtualmente indistinguíveis. As estimativas, incertezas padrão associadas e coeficiente de correlação associado determinados usando as três abordagens são concordantes dentro de dois dígitos decimais significativos.

9.3.3 Propagação e resumo: covariância não zero

9.3.3.1 A avaliação de incerteza é tratada pela aplicação da propagação de distribuições (a) usando a metodologia de incerteza do GUM (MIG - generalizada) (ver 6 e C.3) e (b) usando MMC com $M = 10^7$ iterações (ver 7).

9.3.3.2 Para as estimativas de entrada $x_1 = 0,001$, $x_1 = 0,010$ e $x_1 = 0,100$, com coeficiente de correlação $r(x_1, x_2) = 0,9$, a tabela 7 apresenta os resultados obtidos. As FDPs conjuntas para Y e as FDPs marginais para Y_1 e Y_2 , obtidas a partir das duas abordagens, são mostradas para os três casos, respectivamente, nas figuras 19, 20 e 21.

Tabela 7 — Resultados da transformação do sistema de coordenadas, para estimativas de entrada com covariância associada $r(x_1, x_2) = 0,9$ (9.3.3.2)

x_1	Método	y_1	y_2	$u(y_1)$	$u(y_2)$	$r(y_1, y_2)$
0,001	MIG	0,001	0,000	0,010	10,000	0,900
	MMC	0,012	-0,556	0,008	1,599	-0,070
0,010	MIG	0,010	0,000	0,010	1,000	0,900
	MMC	0,015	-0,343	0,008	0,903	0,352
0,100	MIG	0,100	0,000	0,010	0,100	0,900
	MMC	0,101	-0,009	0,010	0,103	0,882

9.3.3.3 Para os casos $x_1 = 0,001$ e $x_1 = 0,010$, os resultados fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM e pelo MMC são muito diferentes. Em particular, o MMC fornece FDPs marginais para Y_2 nesses dois casos que têm dois picos e que são muito diferentes das distribuições gaussianas (unimodais) fornecidas pela metodologia de incerteza do GUM. As posições desses picos nas FDPs marginais estão (aproximadamente) nos valores $\eta_2 = \pi/4 \approx 0,785$ e $\eta_2 = \pi/4 - \pi \approx -2,356$. Esses valores são os ângulos polares que definem a orientação do eixo maior dos contornos elípticos da FDP conjunta para as grandezas de entrada $\mathbf{X}$ (ver figura 15, à direita).

9.3.3.4 Para o caso $x_1 = 0,100$, há uma concordância muito melhor entre os resultados fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM e pelo MMC.

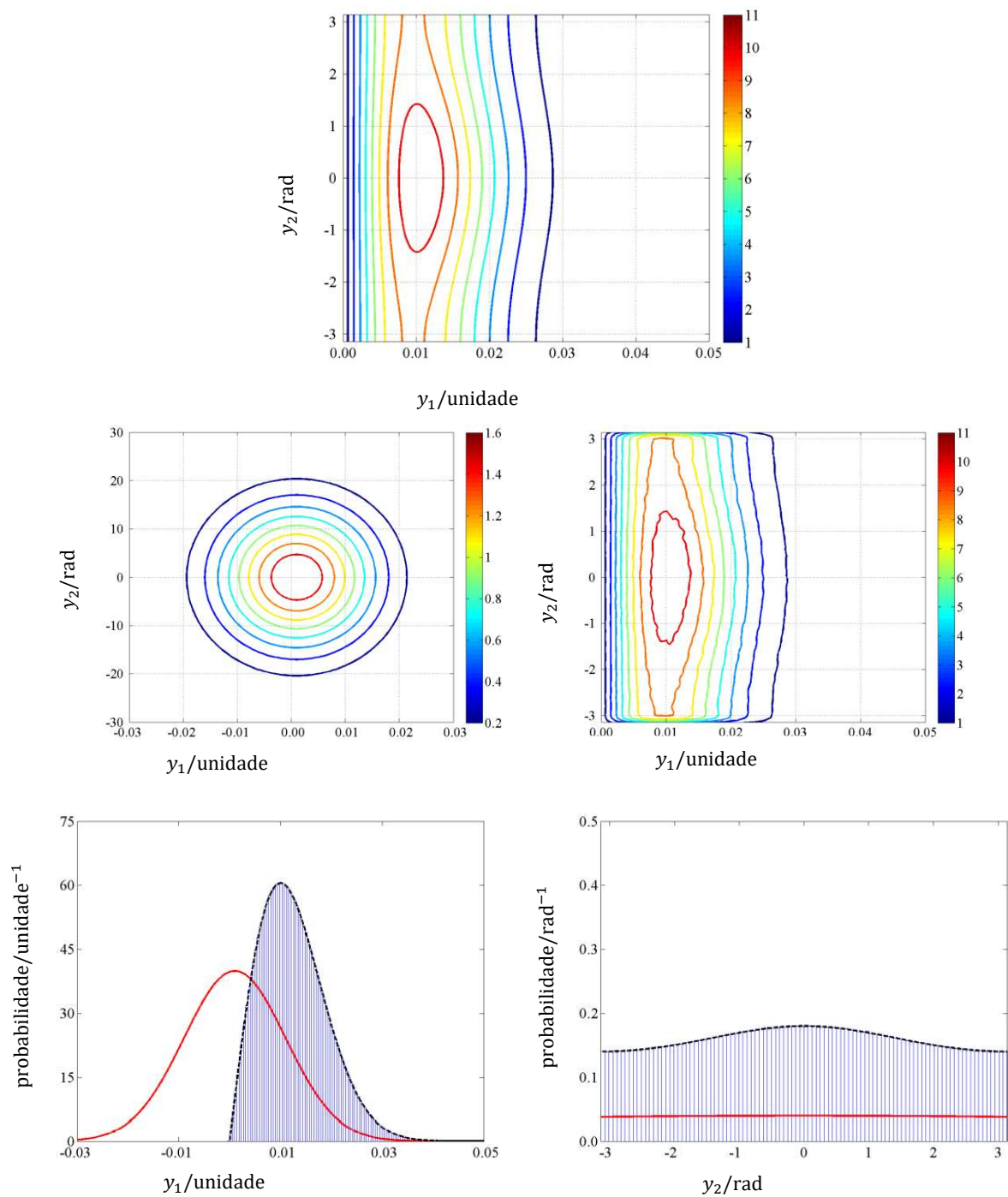


Figura 16 - Resultados da transformação do sistema de coordenadas, para estimativa de entrada $x_1 = 0,001$ e covariância $r(x_1, x_2) = 0$, mostrando (a) contornos das FDPs conjuntas para Y obtidas analiticamente (topo), usando a metodologia de incerteza do GUM (meio esquerdo) e MMC (meio direito), e (b) FDPs marginais para Y_1 (canto inferior esquerdo) e Y_2 (canto inferior direito) obtidos analiticamente (linha tracejada), usando a metodologia de incerteza do GUM (linha sólida) e MMC (histograma) (9.3.2.2.2 e 9.3.2.2.3)

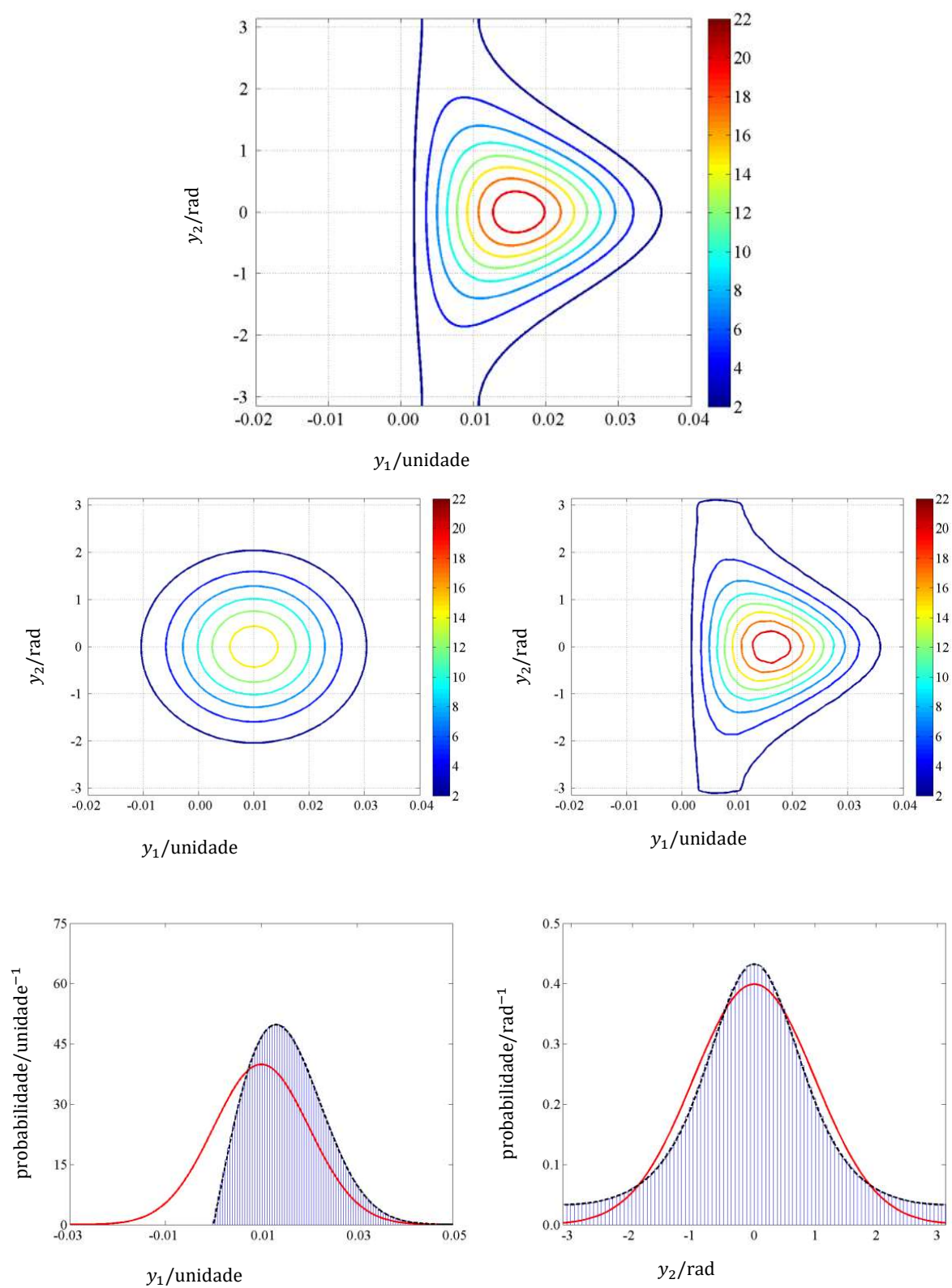


Figura 17 — Conforme a figura 16, exceto que $x_1 = 0,010$ (9.3.2.3.1)

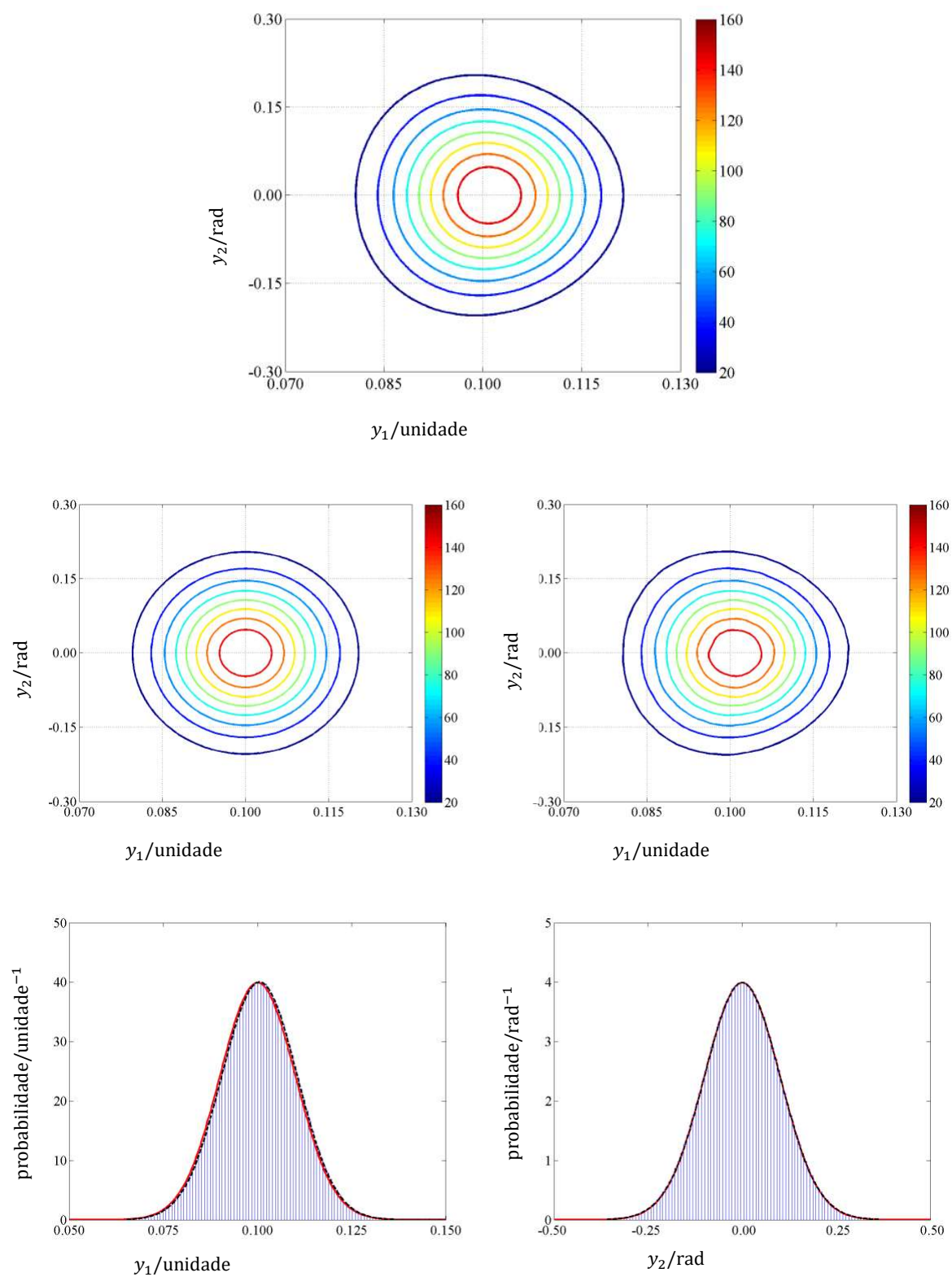


Figura 18 — Conforme a figura 16, exceto que $x_1 = 0,100$ (9.3.2.4.1)

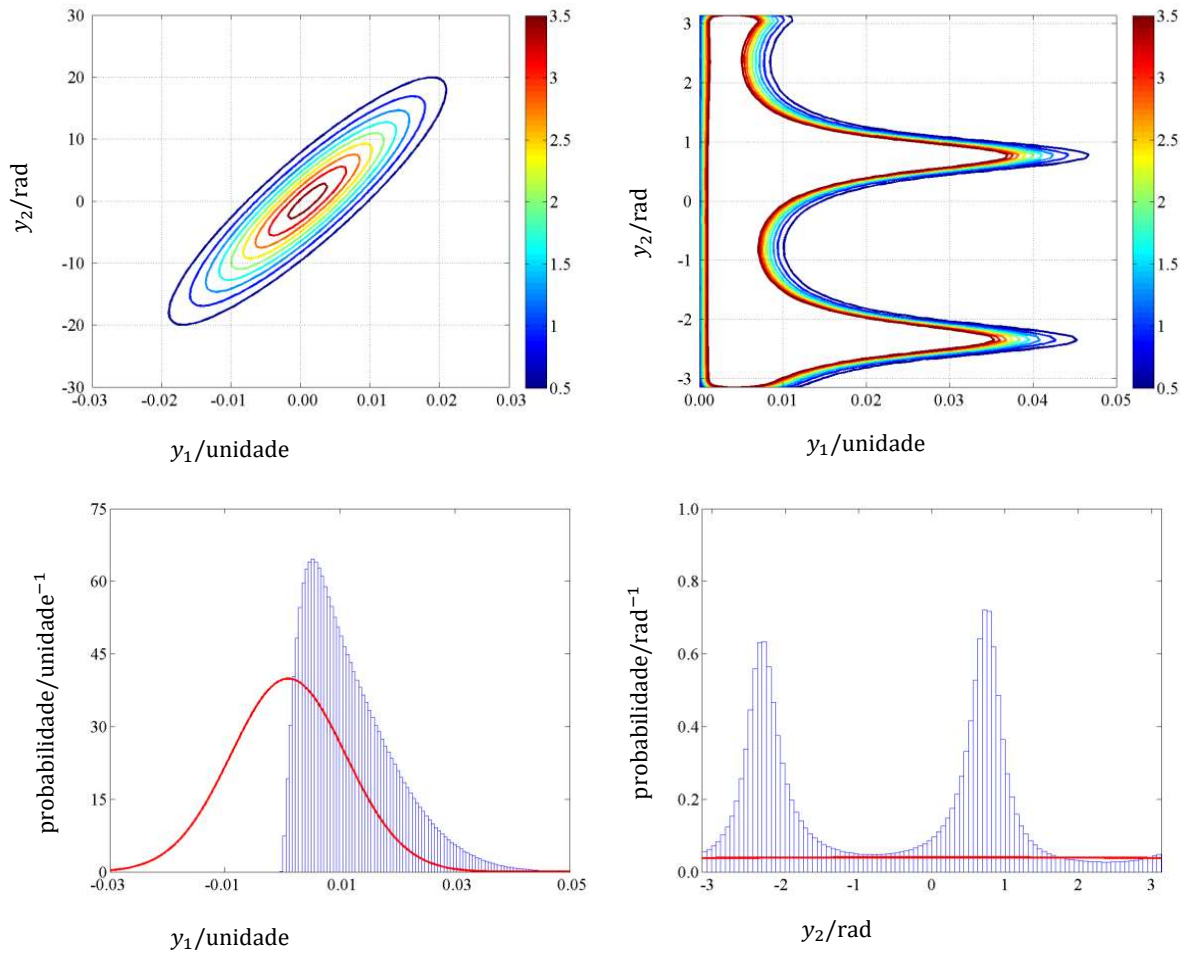


Figura 19 - Resultados da transformação do sistema de coordenadas, para estimativa de entrada $x_1 = 0,001$ e covariância $r(x_1, x_2) = 0,9$, mostrando (a) contornos das FDPs conjuntas para Y obtidas usando a metodologia de incerteza do GUM (MIG, canto superior esquerdo) e MMC (canto superior direito) e (b) as FDPs marginais para Y_1 (canto inferior esquerdo) e Y_2 (canto inferior direito) obtidos usando MIG (linha sólida) e MMC (histograma) (9.3.3.2)

9.3.4 Discussão

9.3.4.1 Para ambos os casos, de covariância zero e diferente de zero, à medida que x_1 se afasta cada vez mais de zero, os resultados fornecidos pela metodologia de incerteza do GUM e aqueles fornecidos pelo MMC tornam-se mais próximos.

9.3.4.2 Para as estimativas de entrada $x_1 = 0,001$ e $x_1 0,010$, e geralmente para valores de x_1 próximos de zero, o efeito da covariância diferente de zero é alterar sensivelmente os resultados fornecidos pelo MMC.

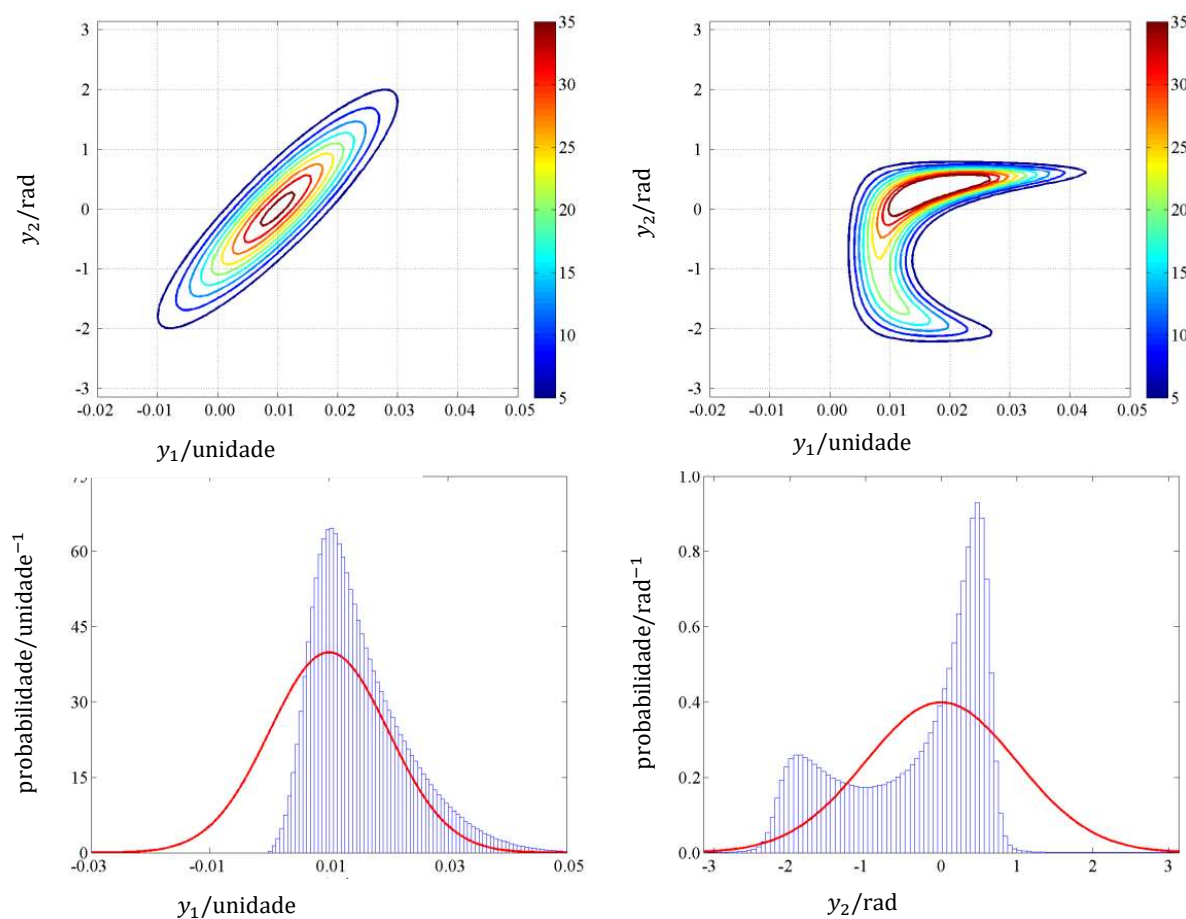


Figura 20 — Conforme a figura 19, exceto que $x_1 = 0,010$ (9.3.3.2)

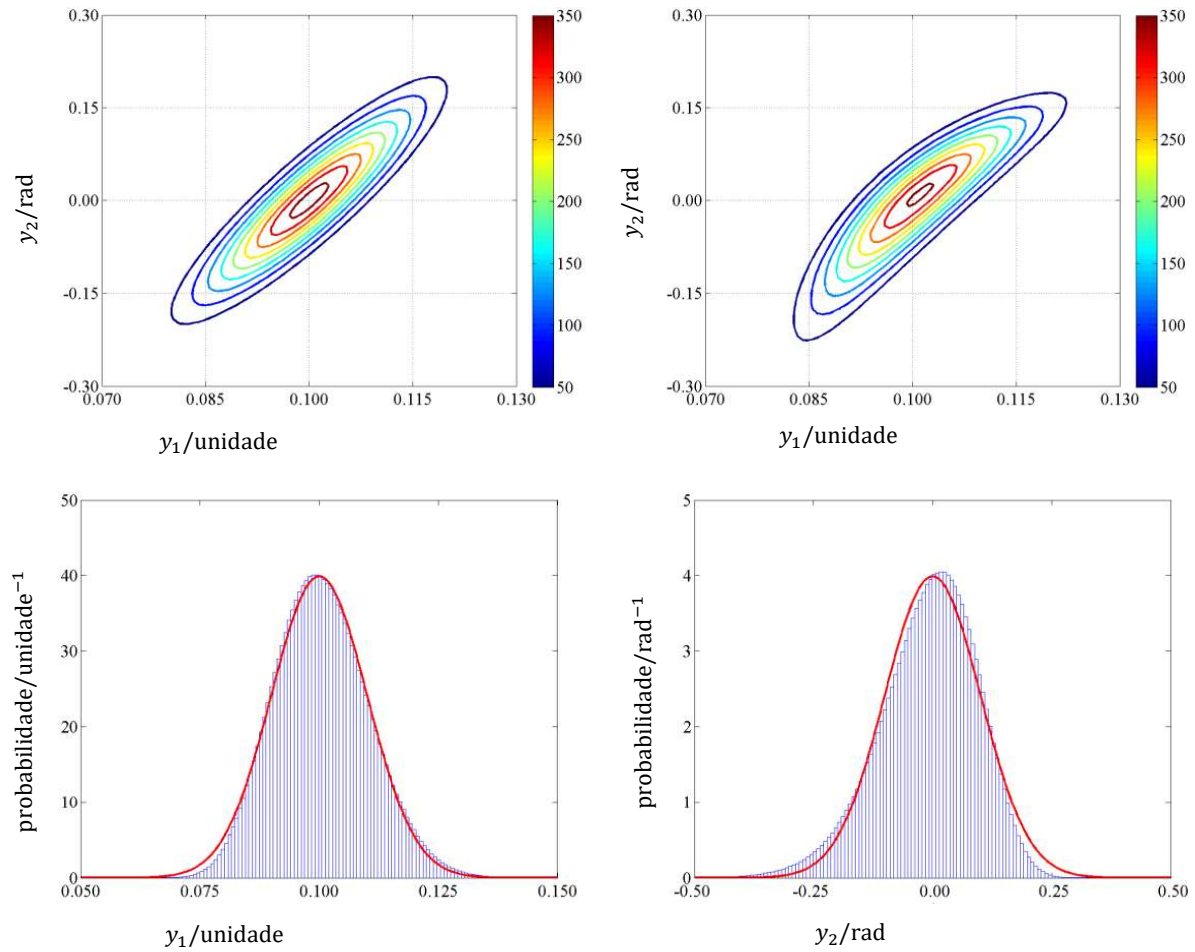


Figura 21 — Conforme a figura 19, exceto que $x_1 = 0,100$ (9.3.3.2)

9.3.4.3 Os resultados (numéricos) apresentados nas Tabelas 6 e 7 fornecem resumos das FDPs (conjuntas e marginais) mostradas nas figuras. Em algumas circunstâncias, tais resumos podem não ser apropriados ou podem ser insuficientes para descrever a natureza da FDP que caracteriza a grandeza de saída. Considere os resultados para o caso da estimativa de entrada $x_1 = 0,001$ e covariância diferente de zero $r(x_1, x_2) = 0,9$ (Figura 19). A FDP marginal para Y_2 obtida usando MMC é essencialmente bimodal, e a estimativa y_2 de Y_2 se encontra entre os modos da distribuição em um intervalo de valores de Y_2 onde a densidade de probabilidade é pequena. De modo mais geral, se a função verossimilhança for caracterizada por uma distribuição normal e se a informação *a priori* for escassa, então a FDP *a posteriori* (pós-medição) será aproximadamente normal. Neste caso, $g(\eta|\eta_m)$ pode ser adequadamente aproximada por uma distribuição normal com esperança (média) e desvio-padrão fornecidos pela melhor estimativa y e pela incerteza padrão u calculadas conforme o Subitem 6.3.1.

NOTA Para uma grandeza de saída caracterizada por uma distribuição gaussiana multivariada, o vetor de esperança e a matriz de covariância para a grandeza descrevem completamente a distribuição.

9.3.4.4 Para as estimativas de entrada $x_1 = 0,001$ e $x_1 = 0,010$, e geralmente para valores medidos de x_1 próximos de zero, a determinação de regiões de abrangência na forma de elipses e retângulos é inadequada.

9.4 Medição simultânea de resistência e reatância

9.4.1 Formulação

9.4.1.1 A resistência R e a reatância X de um elemento de circuito são determinadas medindo-se a amplitude V de uma diferença de potencial senoidalmente alternada entre seus terminais, a amplitude I da corrente alternada que passa por ela, e o ângulo de fase ϕ da diferença de potencial alternado relativa à corrente alternada. As grandezas de entrada são V , I e ϕ , e as grandezas de saída são as três componentes de impedância R , X e Z , onde $Z^2 = R^2 + X^2$.

9.4.1.2 A aplicação da lei de Ohm resulta no modelo de medição trivariado

$$R = \frac{V}{I} \cos \phi, \quad X = \frac{V}{I} \sin \phi, \quad Z = \frac{V}{I}. \quad (26)$$

como a relação entre a grandeza de entrada $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T \equiv (V, I, \phi)^T$ e a grandeza de saída $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^T \equiv (R, X, Z)^T$.

NOTA 1 Por razões de simplicidade, quaisquer erros sistemáticos que possam estar presentes em V , I e ϕ são ignorados.

NOTA 2 No GUM, a reatância é denotada por X , notação usada aqui também. A reatância X , um componente da grandeza de saída vetorial $\mathbf{Y}$, não deve ser confundida com $\mathbf{X}$, a grandeza de entrada vetorial.

9.4.1.3 Uma série de $n = 6$ conjuntos $x_1, \dots, x_n$ de valores de indicação simultâneos das grandezas de entrada são obtidos de maneira independente e sob condições semelhantes, resultando nos dados fornecidos na Tabela 8.

NOTA No GUM, os dados consistem em uma série de cinco conjuntos de valores de indicação simultâneos obtidos independentemente (conjuntos 1 a 5 da Tabela 8). Pelo menos seis conjuntos são necessários para que a matriz de covariância em 9.4.2.5 seja definida. O conjunto 6 na Tabela 8 está, portanto, incluído e é escolhido para ser a média dos conjuntos 1 a 5. Esta escolha particular para o conjunto 6 não é essencial, mas tem como consequência que sua inclusão não altera a média das séries.

Tabela 8 — Uma série de $n = 6$ conjuntos de valores de indicação simultâneos, obtidos independentemente, das grandezas de entrada para medição de resistência e reatância (9.4.1.3)

Conjunto	V/V	I/mA	ϕ/rad
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
6	4,999	19,661	1,0445

9.4.2 Propagação e resumo

9.4.2.1 A determinação de uma estimativa $\mathbf{y}$ de $\mathbf{Y}$ e da matriz de covariância associada $\mathbf{U}_y$ é considerada. Esta presente abordagem discute o problema definido pelo modelo de medição (26) e informações sobre as grandezas de entrada nesse modelo, na forma dos conjuntos $x_1, \dots, x_n$ de valores de indicação obtidos independentemente fornecidos na Tabela 8. O GUM aborda esse problema usando

a metodologia de incerteza do GUM [JCGM 100:2008 H.2.3]. O tratamento aqui é estendido para incluir o MMC e uma abordagem envolvendo uma distribuição-t multivariada (ver 5.3.2).

9.4.2.2 Para fins de aplicação da metodologia de incerteza do GUM (generalizada), estimativas $\mathbf{x} \equiv (\hat{V}, \hat{I}, \hat{\phi})^\top$ das grandezas de entrada $\mathbf{X} \equiv (V, I, \phi)^\top$ são determinadas como as médias dos valores de indicação fornecidos na Tabela 8 [JCGM 100:2008 4.2]:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{n}(\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n).$$

A matriz de covariância $\mathbf{U}_x$ associada a $\mathbf{x}$ contém as variâncias associadas às médias [JCGM 100:2008 4.2] e as covariâncias associadas a cada par de médias [JCGM 100:2008 5.2.3], e é calculada por

$$\mathbf{U}_x = \frac{1}{n(n-1)}\mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})^\top + \cdots + (\mathbf{x}_n - \mathbf{x})(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})^\top.$$

$\mathbf{M}$ é a matriz de adições de quadrados e produtos. As estimativas $\mathbf{x}$ e as incertezas padrão associadas, determinadas dessa maneira, são fornecidas na Tabela 9, e os coeficientes de correlação associados aos pares das estimativas na Tabela 10.

NOTA No GUM, uma abordagem 2 é apresentada para este exemplo, baseada na nota 4.1.4 do GUM. Esta abordagem não é aqui adotada, pelo motivo apresentado em 4.1.

Tabela 9 — Estimativas das grandezas de entrada $\mathbf{X} \equiv (V, I, \phi)^\top$ para a medição simultânea de resistência e reatância, e as incertezas padrão associadas (9.4.2.2)

	V/V	I/mA	ϕ/rad
Estimativa	4,9990	19,6610	1,04446
Incerteza padrão	0,0026	0,0077	0,00061

Tabela 10 — Coeficientes de correlação associados a pares de estimativas da grandeza de entrada $\mathbf{X} \equiv (V, I, \phi)^\top$ para medição simultânea de resistência e reatância (9.4.2.2)

	V	I	ϕ
V	1	-0,355	0,858
I		1	-0,645
ϕ			1

9.4.2.3 Na metodologia de incerteza do GUM, estimativas $\mathbf{y} \equiv (\hat{R}, \hat{X}, \hat{Z})^\top$ das grandezas de saída $\mathbf{Y} \equiv (R, X, Z)^\top$ são obtidas avaliando o modelo de medição (26) para as estimativas $\mathbf{x}$ das grandezas de entrada:

$$\mathbf{y} = \left[\frac{\hat{V}}{\hat{I}} \cos \hat{\phi}, \quad \frac{\hat{V}}{\hat{I}} \sin \hat{\phi}, \quad \frac{\hat{V}}{\hat{I}} \right]^\top.$$

A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ associada a $\mathbf{y}$ é avaliada usando a fórmula (3) em 6.2.1.3, ou seja, $\mathbf{U}_y = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^\top$, onde $\mathbf{C}_x$ é a matriz de sensibilidade dada por

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \frac{\cos \hat{\phi}}{\hat{I}} & -\frac{\hat{V} \cos \hat{\phi}}{\hat{I}^2} & -\frac{\hat{V} \sin \hat{\phi}}{\hat{I}} \\ \frac{\sin \hat{\phi}}{\hat{I}} & -\frac{\hat{V} \sin \hat{\phi}}{\hat{I}^2} & \frac{\hat{V} \cos \hat{\phi}}{\hat{I}} \\ \frac{1}{\hat{I}} & -\frac{\hat{V}}{\hat{I}^2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Os resultados obtidos com a aplicação da metodologia de incerteza do GUM estão resumidos na linha 1 (MIG) da Tabela 11.

NOTA 1 A coluna mais à direita na Tabela 11 é expressa como $1 - r(X, Z)$ porque o coeficiente de correlação $r(X, Z)$ é próximo da unidade (ver 3.21 nota 5).

NOTA 2 A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ é singular como um resultado de dependências no modelo de medição trivariado (26):

$$Z^2 = R^2 + X^2. \quad (28)$$

Por causa da relação (28), a matriz de correlação associada às melhores estimativas de R , X e Z é singular. No entanto, devido a arredondamento, a matriz de correlação dada na linha 1 da Tabela 11 não é singular nem definida positiva. Devido à pequenez das incertezas padrão associadas às estimativas das grandezas de entrada, esta singularidade não tem influência prática nos resultados obtidos [20, seção 4].

Tabela 11 — Resultados para a medição simultânea de resistência e reatância (9.4.2.3, 9.4.2.4 e 9.4.2.5)

Método	R/Ω	X/Ω	Z/Ω	$u(R)/\Omega$	$u(X)/\Omega$	$u(Z)/\Omega$	$r(R, X)$	$r(R, Z)$	$1 - r(X, Z)$
MIG	127,732	219,847	254,260	0,058	0,241	0,193	-0,588	-0,485	$0,749 \times 10^{-2}$
MMC	127,732	219,847	254,260	0,130	0,536	0,429	-0,587	-0,482	$0,770 \times 10^{-2}$
MIG alt	127,732	219,847	254,260	0,130	0,540	0,431	-0,588	-0,485	$0,749 \times 10^{-2}$

9.4.2.4 Considere que a única informação disponível sobre as grandezas de entrada é a série de valores de indicação listados na Tabela 8, e que os três valores em cada conjunto desta tabela podem ser considerados como uma materialização da mesma distribuição gaussiana multivariada. Então, $\mathbf{X}$ é caracterizada pela distribuição-t multivariada $t_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{M}/(\nu n))$ com $\nu = n - N = 3$ graus de liberdade, onde $\mathbf{x}$ contém as médias dos valores indicados (como em 9.4.2.2). Ver 5.3.2. Os resultados obtidos de uma aplicação de MMC com $M = 10^6$ tentativas estão resumidos na linha 2 (MMC) da Tabela 11.

9.4.2.5 A grandeza X caracterizada pela distribuição-t multivariada dada em 9.4.2.4 tem matriz de covariância

$$\mathbf{V}(X) = \frac{1}{(\nu - 2)n} \mathbf{M}.$$

Uma abordagem alternativa, de melhor indicação que o tratamento em 9.4.2.3, é avaliar a fórmula (3), ou seja, $\mathbf{U}_y = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^T$, onde $\mathbf{C}_x$ é a matriz de sensibilidade (27) e $\mathbf{U}_x$ sendo substituído por $\mathbf{V}(X)$. Os

resultados obtidos desta abordagem alternativa são resumidos na linha 3 (MIG alt.) da Tabela 11. Ver também a referência [15].

NOTA 1 $V(X)$ é a matriz de covariância correspondente à informação adicional considerada em 9.4.2.4.

NOTA 2 A matriz de covariância para X obtida desta forma só é definida se $v = n - N > 2$. É por esta razão que, neste exemplo, são necessários pelo menos $n = 6$ valores de indicação simultâneos das $N = 3$ grandezas de entrada.

9.4.2.6 A matriz de covariância $V(X)$ obtida da distribuição usada para caracterizar X está relacionada à matriz de covariância U_x usada na aplicação da metodologia de incerteza do GUM por

$$V(X) = \frac{n - 1}{n - N - 2} U_x.$$

9.4.2.7 São negligíveis as diferenças entre os resultados obtidos da aplicação do MMC e da aplicação alternativa da metodologia de incerteza do GUM, o que indica que as funções de medição no modelo de medição (26) podem ser linearizadas, com bom grau de aproximação, usando as estimativas das grandezas de entrada.

9.4.2.8 Neste exemplo, as condições para a aplicação da fórmula de Welch-Satterthwaite [fórmula JCGM 100:2008 (G.2b)], da metodologia de incerteza do GUM, para calcular os graus de liberdade efetivos, não são válidas porque existem grandezas para as quais as incertezas padrão têm graus de liberdade associados que são finitos e essas grandezas não são independentes.

9.5 Medição de temperatura Celsius usando um termômetro de resistência

9.5.1 Geral

O exemplo descrito nesta subseção é concernente à medição de temperatura Celsius usando a comparação da resistência de um termômetro de resistência de platina industrial com a resistência de um resistor padrão, usando uma ponte de resistência. A medição de uma singular temperatura Celsius é descrita por um modelo de medição univariado (ver 9.5.2), e a medição de múltiplas temperaturas o é por um modelo de medição multivariado (ver 9.5.3). O exemplo ilustra o tratamento desses modelos de medição (univariado e multivariado) usando a metodologia de incerteza do GUM (generalizada).

9.5.2 Medição de uma singular temperatura Celsius

9.5.2.1 A temperatura Celsius θ é medida comparando a resistência $R(\theta)$ de um termômetro de resistência com a resistência R_S de um resistor padrão usando uma ponte de resistência. No intervalo de temperatura de 0 °C a 30 °C, a resistência do termômetro é aproximada por uma função parabólica de sua temperatura Celsius θ :

$$R(\theta) = (1 + A\theta + B\theta^2)R_0, \quad (29)$$

onde R_0 , A e B são determinados a partir de uma calibração do termômetro. As estimativas de R_0 , A e B e as incertezas padrão associadas são fornecidas na Tabela 12, e os coeficientes de correlação diferentes de zero associados a pares das estimativas na Tabela 13.

Tabela 12 — Estimativas das grandezas de entrada $X \equiv (R_0, A, B, R_S, r)^\top$, para a medição de uma singular temperatura Celsius e as incertezas padrão associadas (9.5.2.1, 9.5.2.2 e 9.5.2.3)

	R_0/Ω	$A/^\circ\text{C}^{-1}$	$B/^\circ\text{C}^{-2}$	R_S/Ω	$r/1$
Estimativa	99,996 10	0,003 909 6	$-6,0 \times 10^{-7}$	99,999 47	1,078 005 7
Incert padrão	0,000 50	0,000 002 7	$1,1 \times 10^{-7}$	0,000 10	0,000 005 0

Tabela 13 — Coeficientes de correlação diferentes de zero associados a pares de estimativas das grandezas de entrada para a medição de uma singular temperatura Celsius (9.5.2.1, 9.5.2.2 e 9.5.2.3)

	R_0	A	B
R_0	1	-0,155	0,092
A		1	-0,959
B			1

9.5.2.2 A estimativa de R_S e a incerteza padrão associada, determinada por calibração, são fornecidas na Tabela 12. R_S é independente dos parâmetros R_0 , A e B .

9.5.2.3 A grandeza medida com a ponte de resistência é a razão de resistência

$$r = \frac{R(\theta)}{R_S}. \quad (30)$$

O valor medido de r e a incerteza padrão associada são fornecidos na Tabela 12. A razão de resistência é independente dos parâmetros R_0 , A e B do termômetro de resistência e da resistência R_S do resistor padrão. Não há, portanto, coeficientes de correlação diferentes de zero além daqueles apresentados na Tabela 13.

9.5.2.4 Combinando as expressões (29) e (30), o seguinte modelo de medição para a temperatura Celsius θ é obtida:

$$(1 + A\theta + B\theta^2)R_0 - rR_S = 0. \quad (31)$$

Em termos de notação geral, $N = 5$, $m = 1$, $\mathbf{X} \equiv (R_0, A, B, R_S, r)^\top$, $Y \equiv \theta$ e

$$h(Y, \mathbf{X}) = (1 + A\theta + B\theta^2)R_0 - rR_S.$$

NOTA Ao considerar expressões para as raízes de uma equação quadrática, é possível a transformação do modelo de medição (31) para forma explícita. No entanto, a avaliação numérica do modelo então transformado pode sofrer por cancelamento subtrativo, e a avaliação dos coeficientes de sensibilidade é dificultada pela transformação.

9.5.2.5 A estimativa $y \equiv \hat{\theta}$ da temperatura Celsius que está gerando a razão de resistência medida r é encontrada inserindo as estimativas fornecidas na Tabela 12 na Equação (31), e resolvendo esta equação. A solução obtida é $\hat{\theta} = 20,023\,2\,^\circ\text{C}$.

9.5.2.6 A incerteza padrão $u(y) \equiv u(\hat{\theta})$ associada à estimativa y é avaliada usando a expressão (8) em 6.3.1.3, ou seja, $\mathbf{C}_y \mathbf{U}_y \mathbf{C}_y^\top = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^\top$. Avaliando as matrizes $\mathbf{C}_y$ e $\mathbf{C}_x$ em 6.3.1.3, ou seja:

$$\mathbf{C}_y = \frac{\partial h}{\partial Y} \equiv \frac{\partial h}{\partial \theta} = (A + 2B\theta)R_0,$$

$$\mathbf{C}_x = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{X}} \equiv \left[\frac{\partial h}{\partial R_0}, \frac{\partial h}{\partial A}, \frac{\partial h}{\partial B}, \frac{\partial h}{\partial R_S}, \frac{\partial h}{\partial r} \right] = [1 + A\theta + B\theta^2, R_0\theta, R_0\theta^2, -r, -R_S],$$

nas estimativas das grandezas de entrada fornecidas na Tabela 12 e na estimativa correspondente da grandeza de saída, obtém-se as matrizes de sensibilidade

$$c_y = 0,389 \, \Omega \, ^\circ\text{C}^{-1},$$

e

$$\mathbf{C}_x = [1,08, 2,00 \times 10^3 \, \Omega \, ^\circ\text{C}, 4,01 \, \Omega \, ^\circ\text{C}^2, -1,08, -1,00 \times 10^2 \, \Omega].$$

Os elementos da matriz de covariâncias $\mathbf{U}_x$ associados às estimativas das grandezas de entrada são calculados a partir das incertezas padrão da Tabela 12 e dos coeficientes de correlação da Tabela 13. O resultado obtido é $u(\hat{\theta}) = 0,004 \, ^\circ\text{C}$.

9.5.3 Medição de várias temperaturas Celsius

9.5.3.1 O termômetro de resistência, o resistor padrão e a ponte de resistência, descritos em 9.5.2, são usados para a medição das razões de resistência $r_1, \dots, r_{10}$ geradas por dez temperaturas Celsius $\theta_1, \dots, \theta_{10}$.

9.5.3.2 As estimativas das grandezas de entrada R_0, A, B e R_S e as incertezas padrão associadas são apresentadas na Tabela 12 e as estimativas de $r_1, \dots, r_{10}$ na Tabela 14. Os únicos coeficientes de correlação diferentes de zero associados a pares das estimativas continuam sendo aqueles dados na Tabela 13. As razões de resistência são consideradas independentes, uma suposição que é válida se as magnitudes dos erros aleatórios são dominantes nas razões de resistência medidas.

Tabela 14 — Estimativas das razões de resistência para a medição de várias temperaturas Celsius e as incertezas padrão associadas (9.5.3.2)

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5
(Estimativa-1)/10 ⁻⁷	53	150 054	300 055	450 056	600 056
Incert padrão/10 ⁻⁷	50	50	50	50	50
	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
(Estimativa-1)/10 ⁻⁷	780 057	900 058	1 050 059	1 200 060	780 057
Incert padrão/10 ⁻⁷	50	50	50	50	50

9.5.3.3 Cada razão de resistência r_j está relacionada à temperatura Celsius correspondente θ_j por uma equação da forma (31):

$$(1 + A\theta_j + B\theta_j^2)R_0 - r_j R_S = 0, \quad j = 1, \dots, 10. \quad (32)$$

Em termos da notação geral, $N = 14$, $m = 10$, $\mathbf{X} \equiv (R_0, A, B, R_S, r_1, \dots, r_{10})^\top$, $\mathbf{Y} \equiv (\theta_1, \dots, \theta_{10})^\top$ e

$$\mathbf{h}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \\ \vdots \\ h_{10}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_0(1 + A\theta_1 + B\theta_1^2) - r_1 R_S \\ \vdots \\ R_0(1 + A\theta_{10} + B\theta_{10}^2) - r_{10} R_S \end{bmatrix}.$$

NOTA A transformação do modelo de medição (32) para a forma explícita é possível (ver 9.5.2.4).

9.5.3.4 As estimativas $\mathbf{y} \equiv (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{10})$ das temperaturas Celsius $\mathbf{Y}$ são obtidas inserindo as estimativas fornecidas nas colunas 1 a 4 da Tabela 12 e na Tabela 14 nas equações (32) e resolvendo essas equações. Essas estimativas são fornecidas na Tabela 15.

Tabela 15 — Estimativas das grandezas de saída $\mathbf{Y}$ e as incertezas padrão associadas para a medição de várias temperaturas Celsius (9.5.3.4 e 9.5.3.5)

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}
Estim/°C	0,0100	3,8491	7,6928	11,5410	15,3938	20,0232	23,1131	26,9797	30,8509	20,0232
Inc padr/°C	0,0018	0,0027	0,0040	0,0046	0,0047	0,0045	0,0046	0,0060	0,0089	0,0045

Tabela 16 — Coeficientes de correlação associados a pares de estimativas das grandezas de saída $\mathbf{Y}$ para a medição de várias temperaturas Celsius (9.5.3.5)

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}
θ_1	1	0,252	0,127	0,079	0,059	0,054	0,056	0,054	0,050	0,054
θ_2		1	0,815	0,800	0,755	0,580	0,312	-0,092	-0,358	0,580
θ_3			1	0,902	0,868	0,691	0,400	-0,057	-0,365	0,691
θ_4				1	0,909	0,766	0,495	0,040	-0,281	0,766
θ_5					1	0,847	0,629	0,208	-0,115	0,847
θ_6						1	0,841	0,549	0,264	0,918
θ_7							1	0,812	0,613	0,841
θ_8								1	0,909	0,549
θ_9									1	0,264
θ_{10}										1

9.5.3.5 A matriz de covariância $\mathbf{U}_y$ associada a $\mathbf{y}$ é avaliada usando a expressão (8) em 6.3.1.3, ou seja, $\mathbf{C}_y \mathbf{U}_y \mathbf{C}_y^\top = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^\top$. $\mathbf{C}_y$ e $\mathbf{C}_x$ são matrizes de sensibilidade dadas pela avaliação de $\mathbf{C}_Y$ e $\mathbf{C}_X$, respectivamente, nas estimativas das grandezas de entrada e saída. $\mathbf{C}_Y$ é uma matriz diagonal de dimensão 10×10 com entradas diagonais $R_0(A + 2B\theta_1), \dots, R_0(A + 2B\theta_{10})$. $\mathbf{C}_X$ é uma matriz de dimensão 10×14 dada por

$$\mathbf{C}_X = [\mathbf{C}_X^{(1)} \quad \mathbf{C}_X^{(2)}],$$

onde

$$\mathbf{C}_X^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 + A\theta_1 + B\theta_1^2 & R_0\theta_1 & R_0\theta_1^2 & -r_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 + A\theta_{10} + B\theta_{10}^2 & R_0\theta_{10} & R_0\theta_{10}^2 & -r_{10} \end{bmatrix}$$

é uma matriz de dimensão 10×4 , e $\mathbf{C}_X^{(2)}$ é uma matriz diagonal de dimensão 10×10 com elementos diagonais, todos iguais a $-R_S$. A matriz de covariância $\mathbf{U}_x$ é calculada a partir das incertezas padrão fornecidas nas colunas 1 a 4 da Tabela 12 e na Tabela 13. As incertezas padrão associadas às estimativas das temperaturas Celsius e os coeficientes de correlação associados aos pares de estimativas, derivados da matriz $\mathbf{U}_y$, são fornecidos na Tabela 15 e na Tabela 16, respectivamente.

9.5.3.6 Os resultados fornecidos na Tabela 15 e na Figura 22 mostram como a incerteza padrão $u(\hat{\theta}_j)$ varia com a estimativa $\hat{\theta}_j$ da temperatura Celsius θ_j . A incerteza é menor em torno de 0 °C e aumenta rapidamente para temperaturas superiores a 25 °C. Esse efeito se deve ao fato de que o termômetro de resistência foi calibrado nas temperaturas 0 °C, 15 °C, 20 °C e 25 °C, sendo ainda que a temperatura Celsius 0 °C durante a calibração foi gerada usando um banho de gelo com uma incerteza padrão três vezes menor do que aquelas associadas às outras três temperaturas, que foram geradas usando um banho de óleo.

NOTA Nas Figuras 22 e 23, os segmentos de reta que unem os pontos plotados são incluídos para fins de visualização.

9.5.3.7 Usando os resultados fornecidos na coluna final da Tabela 16, a Figura 23 mostra como o coeficiente de correlação associado ao par de estimativas $\hat{\theta}_j$ e $\hat{\theta}_{10}$ das temperaturas Celsius θ_j e $\theta_{10} = 20$ °C varia com $\hat{\theta}_j$, $j = 1, \dots, 9$. O coeficiente de correlação tem um máximo para $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_6$ e se aproxima de zero na medida que a diferença absoluta $|\hat{\theta}_j - \hat{\theta}_{10}|$ torna-se alta. O exemplo demonstra que grandezas medidas com o mesmo instrumento podem estar altamente correlacionadas.

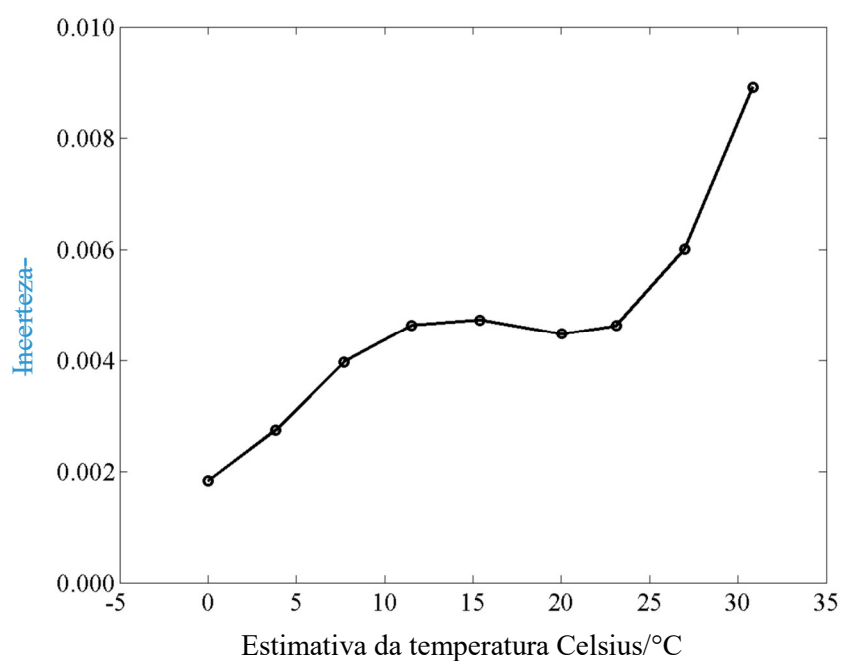


Figura 22 — Incerteza padrão $u(\hat{\theta}_j)$ associada à estimativa $\hat{\theta}_j$ da temperatura Celsius θ_j (9.5.3.6)

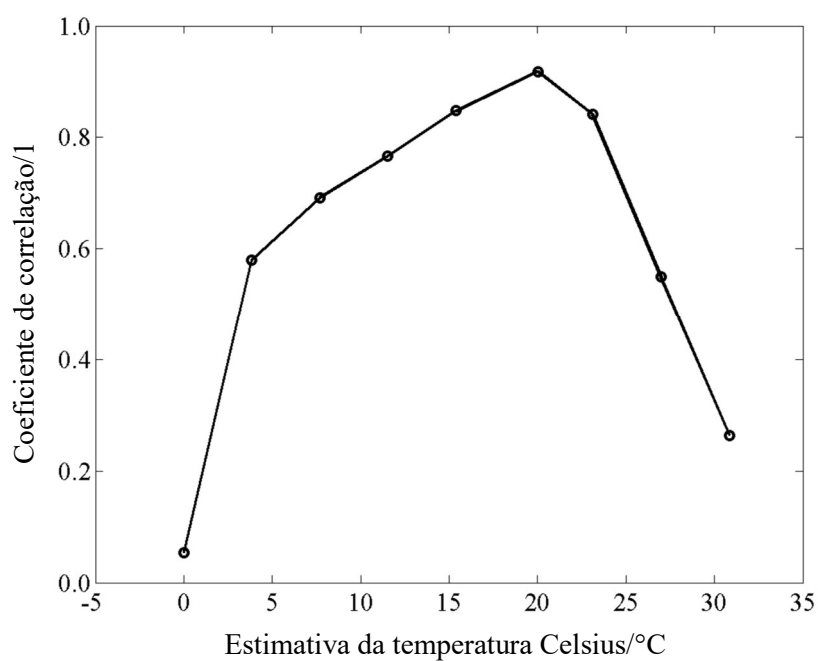


Figura 23 — Coeficiente de correlação associado ao par de estimativas $\hat{\theta}_j$ e $\hat{\theta}_{10}$ das temperaturas Celsius θ_j e $\theta_{10}=20\text{ °C}$ (9.5.3.7)

Anexo A

(Informativo)

Derivadas de funções de medição multivariadas complexas

A.1 Neste anexo é feita especial consideração quanto a determinação algebricamente eficiente das derivadas parciais de primeira ordem da função de medição $\mathbf{f}$ em um modelo de medição multivariado complexo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X}),$$

onde

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N)^\top, \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_m)^\top,$$

e

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)^\top,$$

$\mathbf{X}_i$ denotando a grandeza complexa $X_{i,R} + iX_{i,I}$, com $X_{i,R}$ e $X_{i,I}$ denotando grandezas escalares reais, e $i^2 = -1$, e de forma semelhante para $\mathbf{Y}_j$ e $\mathbf{f}_j$.

A.2 Seja $\mathbf{U}_x$ a matriz de covariância de dimensão $2N \times 2N$ associada a uma estimativa $\mathbf{x}$ de $\mathbf{X}$. $\mathbf{U}_x$ assume a forma

$$\mathbf{U}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \cdots & \mathbf{U}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) & \cdots & \mathbf{U}(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \begin{bmatrix} u(x_{i,R}, x_{j,R}) & u(x_{i,R}, x_{j,I}) \\ u(x_{i,I}, x_{j,R}) & u(x_{i,I}, x_{j,I}) \end{bmatrix}$$

é a matriz de covariância de dimensão 2×2 associada às estimativas (complexas) $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ de $\mathbf{X}_i$ e $\mathbf{X}_j$, respectivamente.

A.3 A matriz de covariância

$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_1) & \cdots & \mathbf{U}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{U}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_1) & \cdots & \mathbf{U}(\mathbf{y}_m, \mathbf{y}_m) \end{bmatrix},$$

de dimensão $2m \times 2m$, onde

$$\mathbf{U}(\mathbf{y}_l, \mathbf{y}_j) = \begin{bmatrix} u(y_{l,R}, y_{j,R}) & u(y_{l,R}, y_{j,I}) \\ u(y_{l,I}, y_{j,R}) & u(y_{l,I}, y_{j,I}) \end{bmatrix},$$

associada à estimativa

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

de $\mathbf{Y}$ é dada pela lei generalizada de propagação da incerteza

$$\mathbf{U}_y = \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^\top. \quad (\text{A.1})$$

A.4 $\mathbf{C}_x$ é a matriz de sensibilidade de dimensão $2m \times 2N$ dada pela avaliação

$$\mathbf{C}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1,1} & \cdots & \mathbf{C}_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{m,1} & \cdots & \mathbf{C}_{m,N} \end{bmatrix}$$

em $\mathbf{X} = \mathbf{x}$, onde $\mathbf{C}_{j,i}$ é a matriz de dimensão 2×2 das derivadas parciais de primeira ordem das partes real e imaginária de $\mathbf{f}_j$ em relação às partes real e imaginária de $\mathbf{X}_i$:

$$\mathbf{C}_{j,i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{j,R}}{\partial X_{i,R}} & \frac{\partial f_{j,R}}{\partial X_{i,I}} \\ \frac{\partial f_{j,I}}{\partial X_{i,R}} & \frac{\partial f_{j,I}}{\partial X_{i,I}} \end{bmatrix}.$$

A.5 Para qualquer grandeza escalar complexa $\mathbf{Q} = Q_R + iQ_I$, considere a representação matricial de dimensão 2×2 para $\mathbf{Q}$ [14]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} Q_R & -Q_I \\ Q_I & Q_R \end{bmatrix}.$$

Então, $\mathbf{C}_{j,i}$ pode ser expresso como

$$\mathbf{C}_{j,i} = \mathbf{M} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial \mathbf{X}_i} \right),$$

e fornece a base para um meio algebricamente eficiente para formar as derivadas parciais: somente as derivadas complexas de primeira ordem do $\mathbf{f}_j$ em relação ao $\mathbf{X}_i$ precisam ser formadas.

Anexo B

(Informativo)

Avaliação de coeficientes de sensibilidade e matriz de covariância para modelos de medição multivariados

B.1 Quando são utilizados conceitos reconhecidos da álgebra linear numérica [13], uma forma numericamente estável de compor $\mathbf{U}_y$, a solução do sistema linear de equações (8), é a seguinte:

- a) forme o fator de Cholesky $\mathbf{R}_x$ de $\mathbf{U}_x$, que é a matriz triangular superior tal que $\mathbf{R}_x^\top \mathbf{R}_x = \mathbf{U}_x$;
- b) fatorize $\mathbf{C}_x$ como o produto $\mathbf{C}_x = \mathbf{Q}_x \mathbf{W}_x$, onde $\mathbf{Q}_x$ é uma matriz ortogonal e $\mathbf{W}_x$ é uma matriz triangular superior;
- c) fatorize $\mathbf{C}_y$ como o produto $\mathbf{C}_y = \mathbf{L}_y \mathbf{W}_y$, onde $\mathbf{L}_y$ é uma matriz triangular inferior e $\mathbf{W}_y$ é uma matriz triangular superior;
- d) resolva a equação matricial $\mathbf{W}_y^\top \mathbf{M}_1 = \mathbf{I}$ para $\mathbf{M}_1$;
- e) resolva $\mathbf{L}_y^\top \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1$ para $\mathbf{M}_2$;
- f) forme $\mathbf{M}_3 = \mathbf{Q}_x^\top \mathbf{M}_2$;
- g) forme $\mathbf{K} = \mathbf{W}_x^\top \mathbf{M}_3$;
- h) forme $\mathbf{M} = \mathbf{R}_x \mathbf{K}$;
- i) triangularize $\mathbf{M}$ ortogonalmente para obter a matriz triangular superior $\mathbf{R}$;
- j) forme $\mathbf{U}_y = \mathbf{R}^\top \mathbf{R}$.

B.2 Este procedimento pode ser verificado usando álgebra matricial elementar. Mais detalhes estão disponíveis [7].

Anexo C

(Informativo)

Transformação do sistema de coordenadas

C.1 Generalidades

Este anexo trata de alguns detalhes do problema de transformação do sistema de coordenadas (ver 9.3). A subcláusula C.2 fornece, analiticamente, a FDP conjunta para $\mathbf{Y}$ para o caso em que X_1 é descrita pela distribuição Gaussiana $N(x_1, u_x^2)$ e X_2 por $N(x_2, u_x^2)$, com X_1 e X_2 mutuamente independentes. A subcláusula C.3 aplica a metodologia de incerteza do GUM para grandezas de entrada correlacionadas e não correlacionadas.

C.2 Solução analítica para um caso especial

C.2.1 Suponha que $\mathbf{X}$ tenha uma FDP $g_X(\boldsymbol{\xi})$, e $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}^{-1}(\boldsymbol{\eta})$ seja uma transformação de valores $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_N)^\top$ de $\mathbf{Y}$ para valores $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_N)^\top$ de $\mathbf{X}$ que é um-para-um. Então [19, página 35], $\mathbf{Y}$ tem FDP

$$g_Y(\boldsymbol{\eta}) = g_X(\mathbf{f}^{-1}(\boldsymbol{\eta})) |\det(\mathbf{J})|, \quad (\text{C.1})$$

onde $\det(\mathbf{J})$ é o determinante da matriz Jacobiana $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial \eta_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \xi_N}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial \xi_N}{\partial \eta_N} \end{bmatrix}$$

considerado como uma função de $\boldsymbol{\eta}$, com $\det(\mathbf{J})$ sendo assumido como nem zero nem infinito.

NOTA 1 O resultado (C.1) às vezes é conhecido como o “Teorema da mudança de variáveis”.

NOTA 2 O resultado para a transformação de uma única grandeza ($N = 1$) é o seguinte [21, páginas 57-61]: se $\eta = f(\xi)$ é diferenciável e monotônico, Y tem FDP

$$g_Y(\eta) = g_X(f^{-1}(\eta)) \left| \frac{df^{-1}(\eta)}{d\eta} \right|.$$

C.2.2 Para o problema de transformação do sistema de coordenadas considerado em 9.3, $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2)^\top$ com valores $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$, $\mathbf{Y} \equiv (R, \Theta)^\top$ com valores $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^\top$, e

$$\xi_1 = \eta_1 \cos \eta_2, \quad \xi_2 = \eta_1 \sin \eta_2.$$

Portanto,

$$J = \begin{bmatrix} \cos\eta_2 & -\eta_1 \operatorname{sen}\eta_2 \\ \operatorname{sen}\eta_2 & \eta_1 \cos\eta_2 \end{bmatrix},$$

e

$$\det(J) = \eta_1.$$

Segue-se que, desde que $\eta_1 > 0$,

$$g_{Y_1, Y_2}(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 g_{X_1, X_2}(\eta_1 \cos \eta_2, \eta_1 \operatorname{sen} \eta_2).$$

C.2.3 Considere o caso em que X_1 é descrito pela distribuição Gaussiana $N(x_1, u_x^2)$ e X_2 por $N(x_2, u_x^2)$, com X_1 e X_2 mutuamente independentes. Então,

$$g_{X_1, X_2}(\xi_1, \xi_2) = g_{X_1}(\xi_1) g_{X_2}(\xi_2) = \frac{1}{2\pi u_x^2} \exp\left(-\frac{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}{2 u_x^2}\right),$$

forneendo,

$$g_{Y_1, Y_2}(\eta_1, \eta_2) = \frac{\eta_1}{2\pi u_x^2} \exp\left(-\frac{(\eta_1 \cos\eta_2 - x_1)^2 + (\eta_1 \operatorname{sen}\eta_2 - x_2)^2}{2 u_x^2}\right).$$

C.2.4 A distribuição marginal para $Y_1 \equiv R$ é

$$g_{Y_1}(\eta_1) = \int_{-\pi}^{\pi} g_{Y_1, Y_2}(\eta_1, \eta_2) d\eta_2 = \frac{\eta_1}{u_x^2} \exp\left(-\frac{\eta_1^2 + y_1^2}{2 u_x^2}\right) I_0\left(\frac{\eta_1 y_1}{u_x^2}\right), \quad (\text{C.2})$$

onde

$$y_1^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

e I_0 é a função de Bessel modificada do primeiro tipo de ordem zero.

NOTA 1 A distribuição é a distribuição de Rice com os parâmetros y_1 e u_x .

NOTA 2 Se $y_1 = 0$, a distribuição é a distribuição Rayleigh com parâmetro u_x .

NOTA 3 Se $u_x = 1$, a distribuição é a distribuição qui-quadrado não central com dois graus de liberdade e parâmetro de não centralidade y_1^2 .

C.2.5 A distribuição marginal para $Y_2 \equiv \Theta$ é

$$g_{Y_2}(\eta_2) = \int_0^\infty g_{Y_1, Y_2}(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{y_1^2}{2 u_x^2}\right) [1 + \sqrt{\pi} \tau \exp(\tau^2) \operatorname{erfc}(-\tau)], \quad (\text{C.3})$$

onde

$$\tau = \frac{x_1 \cos\eta_2 + x_2 \operatorname{sen}\eta_2}{\sqrt{2} u_x},$$

e

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

é a função de erro complementar.

C.2.6 Se também $x_1 = x_2 = 0$, então

$$g_{Y_1, Y_2}(\eta_1, \eta_2) = \frac{\eta_1}{2 \pi u_x^2} \exp\left(-\frac{\eta_1^2}{2 u_x^2}\right),$$

e segue que Y_1 e Y_2 são mutuamente independentes com distribuições

$$g_{Y_1}(\eta_1) = \frac{\eta_1}{u_x^2} \exp\left(-\frac{\eta_1^2}{2 u_x^2}\right),$$

uma distribuição Rayleigh com parâmetro u_x , e

$$g_{Y_2}(\eta_2) = \frac{1}{2 \pi},$$

uma distribuição retangular entre $-\pi$ e π .

C.3 Aplicação da metodologia de incerteza do GUM

C.3.1 Para o problema de transformação do sistema de coordenadas considerado em 9.3, o modelo de medição pode ser escrito como o modelo de medição bivariado

$$Y_1 = f_1(X_1, X_2) = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}, \quad Y_2 = f_2(X_1, X_2) = \tan^{-1}(X_2/X_1),$$

onde entende-se que $Y_1 \geq 0$ e $-\pi < Y_2 \leq \pi$. As grandezas de entrada X_1 e X_2 têm estimativas x_1 e x_2 e incertezas associadas $u(x_1)$ e $u(x_2)$, respectivamente, e covariância associada e $u(x_1, x_2)$.

C.3.2 A aplicação de 6.2.1.2 fornece

$$y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad y_2 = \tan^{-1}(x_2/x_1),$$

como estimativas de Y_1 e Y_2 .

C.3.3 A matriz de sensibilidade $\mathbf{C}_x$ de dimensão 2×2 é obtida pela avaliação

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} & \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \\ \frac{-X_2}{X_1^2 + X_2^2} & \frac{X_1}{X_1^2 + X_2^2} \end{bmatrix} .$$

em $X_1 = x_1$ e $X_2 = x_2$. Portanto, desde que $y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > 0$,

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos y_2 & \sin y_2 \\ -(\sin y_2)/y_1 & (\cos y_2)/y_1 \end{bmatrix} .$$

C.3.4 A aplicação de 6.2.1.3 fornece

$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} u^2(y_1) & u(y_1, y_2) \\ u(y_2, y_1) & u^2(y_2) \end{bmatrix} .$$

como a matriz de covariância associada às estimativas $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, com $u(y_2, y_1) = u(y_1, y_2)$ e

$$u^2(y_1) = u^2(x_1) \cos^2 y_2 + u^2(x_2) \sin^2 y_2 + 2 u(x_1, x_2) \cos y_2 \sin y_2 ,$$

$$u(y_1, y_2) = (u^2(x_2) - u^2(x_1)) (\sin y_2 \cos y_2)/y_1 + u(x_1, x_2) (\cos^2 y_2 - \sin^2 y_2)/y_1 ,$$

$$u^2(y_2) = u^2(x_1) (\sin^2 y_2)/y_1^2 + u^2(x_2) (\cos^2 y_2)/y_1^2 - 2 u(x_1, x_2) (\sin y_2 \cos y_2)/y_1^2 .$$

C.3.5 No contexto da metodologia de incerteza do GUM, $\mathbf{Y}$ é caracterizada pela distribuição Gaussiana bivariada $N(\mathbf{y}, \mathbf{U}_y)$, que pode ser usada como base para determinar as regiões de abrangência para $\mathbf{Y}$ correspondentes a uma probabilidade de abrangência prescrita p (ver 6.5).

C.3.6 Considere o caso em que $u(x_1) = u(x_2) = u_x$ e $u(x_1, x_2) = 0$ (ver C.2.3). Então,

$$u^2(y_1) = u_x^2 , \quad u(y_1, y_2) = 0 , \quad u^2(y_2) = u_x^2/y_1^2 ,$$

com $\mathbf{Y}$ caracterizada por uma distribuição Gaussiana bivariada como em C.3.5. Segue-se que, nesta circunstância especial de grandezas não correlacionadas atribuídas a uma distribuição gaussiana bivariada, Y_1 e Y_2 são mutuamente independentes [19, teorema 3.1.3]. Consequentemente, Y_1 e Y_2 são caracterizadas por distribuições Gaussianas univariadas $N(y_1, u^2(y_1))$ e $N(y_2, u^2(y_2))$, respectivamente.

NOTA Por outro lado, no tratamento analítico C.2, onde $\mathbf{Y}$ não é caracterizada por uma distribuição Gaussiana bivariada, as condições $u(x_1) = u(x_2)$ e $u(x_1, x_2) = 0$ não são suficientes para Y_1 e Y_2 serem independentes. Uma condição adicional, a saber, $x_1 = x_2 = 0$, é necessária (ver C.2.6).

Anexo D

(Informativo)

Glossário dos principais símbolos

C_x	matriz de sensibilidade de dimensão $m \times N$ associada com x
C_y	matriz de sensibilidade de dimensão $m \times N$ associada com y
c	dígito decimal inteiro - n_{dig}
$\text{Corr}(X_i; X_j)$	correlação para duas variáveis randômicas X_i e X_j
$\text{Cov}(X_i; X_j)$	covariância para duas variáveis randômicas X_i e X_j
$\det(J)$	determinante jacobiano
$E(X_i)$	esperança de uma variável aleatória X_i
$E(X)$	esperança de uma variável aleatória X
$F_{m;n}$	distribuição de Fisher-Snedecor com m e $n - m$ graus de liberdade
f	função de medição univariada dependente de grandezas de entrada X
$\mathbf{f}$	função de medição multivariada dependente de grandezas de entrada X
G	representação discreta de função distribuição $G_Y(\eta)$ para grandeza de saída Y de um procedimento de Monte Carlo
$G_X(\xi)$	função distribuição com variável ξ para grandeza de entrada X
$g_{X_i}(\xi_i)$	função distribuição com variável ξ_i para grandeza de entrada X_i
$g_X(\xi)$	função densidade de probabilidade (multivariada) conjunta com variável ξ para grandeza de entrada X
$G_Y(\eta)$	função distribuição com variável η para grandeza de saída Y
$g_Y(\eta)$	função densidade de probabilidade (multivariada) conjunta com variável η para grandeza de entrada Y
h	modelo de medição univariado expresso como uma relação entre grandeza de saída Y e grandeza de entrada X da qual Y depende.
$\mathbf{h}$	modelo de medição multivariado expresso como uma relação entre grandezas de saída Y e grandezas de entrada X das quais Y dependem
i	unidade imaginária dada por $i^2 = -1$
J	matriz Jacobiana
k_p	fator de abrangência para uma região de abrangência na forma de um hiperelipsoide correspondente à probabilidade de abrangência p
k_p	fator de abrangência para uma região de abrangência na forma de um hiper-retângulo correspondente à probabilidade de abrangência p
L	matriz triangular inferior
ℓ	inteiro na representação $c \times 10^\ell$ de um valor numérico, onde c é um dígito decimal inteiro - n_{dig}
m	número de grandezas de saída $Y_1, \dots, Y_m$
M	número de iterações de Monte Carlo
$\mathbf{M}$	matriz de somas de quadrados e produtos

N	número de grandezas de entrada $X_1, \dots, X_N$
$N(0, 1)$	distribuição Gaussiana padrão
$N(\mu, \sigma^2)$	distribuição Gaussiana com parâmetros μ e σ^2
$N(\mu, V)$	distribuição Gaussiana multivariada com parâmetros μ e V
n	número de valores de indicação em uma série
n_{dig}	número de dígitos decimais significativos considerados significantes em um valor numérico
$\Pr(z)$	probabilidade do evento z
p	probabilidade de abrangência
R_Y	região de abrangência em m dimensões para Y
$\mathbf{R}_y$	matriz de correlação de dimensão $m \times m$ associada com y
$R(0, 1)$	distribuição retangular padrão sobre o intervalo $[0, 1]$
$R(a, b)$	distribuição retangular sobre o intervalo $[a, b]$
$r(x_i, x_j)$	coeficiente de correlação associado com estimativas x_i e x_j de grandezas de entrada X_i e X_j
s	desvio-padrão de uma série de n valores de indicações $x_1, \dots, x_n$
s_z	desvio-padrão associado à média z dos valores $z^{(1)}, \dots, z^{(h)}$ no procedimento adaptativo de Monte Carlo, onde z pode denotar a estimativa y_j da grandeza de saída Y_j , a incerteza padrão $u(y_j)$ associada a y_j , o autovalor máximo λ_{max} da matriz de correlação $\mathbf{R}_y$ ou o fator de abrangência k_p da região de abrangência para Y
T	sobrescrito que denota transposição de matriz
$t_v(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$	distribuição-t multivariada com parâmetros $\boldsymbol{\mu}$ e $\mathbf{S}$ e v graus de liberdade
U_p	incerteza expandida correspondente à probabilidade de abrangência p
$\mathbf{U}_x$	matriz de covariância associada com a estimativa $\mathbf{x}$ da grandeza de entrada $\mathbf{X}$
$\mathbf{U}_y$	matriz de covariância associada com a estimativa $\mathbf{y}$ da grandeza de saída $\mathbf{Y}$
$u_x, u(x)$	incerteza padrão associada com a estimativa x da grandeza de entrada X
$u(x_i)$	incerteza padrão associada com a estimativa x_i da grandeza de entrada X_i
$u(x_i, x_j)$	covariância associada com as estimativas x_i e x_j das grandezas de entrada X_i e X_j
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	vetor $(u(x_1), \dots, u(x_N))^T$ das incertezas padrão associadas com a estimativa $\mathbf{x}$ da grandeza de entrada $\mathbf{X}$
$V(X_i)$	variância da variável randômica X_i
$\mathbf{V}$	matriz de covariância (variância-covariância)
$\mathbf{V}(\mathbf{X})$	matriz de covariância da variável randômica $\mathbf{X}$
X_i	i -ésima grandeza de entrada, considerada como uma variável aleatória
$\mathbf{X}$	vetor $(X_1, \dots, X_N)^T$ de grandezas de entrada
$\bar{x}$	média da série de n valores de indicações $x_1, \dots, x_n$
x_i	estimativa (esperança) de X_i , ou i -ésimo valor de indicação numa série
$\mathbf{x}$	estimativa (esperança) $(x_1, \dots, x_N)^T$ de $\mathbf{X}$
$x_{i,r}$	r -ésima iteração de Monte Carlo a partir da função densidade de probabilidade para X_i

$\mathbf{x}_r$	r-ésima iteração de Monte Carlo, contendo valores $x_{1,r}, \dots, x_{N,r}$ sorteados a partir das funções densidade de probabilidade para N grandezas de entrada $(x_1, \dots, x_N)^\top$ ou a partir da função densidade de probabilidade para $\mathbf{X}$
Y_j	j-ésima grandeza de saída, considerada como uma variável aleatória
$\mathbf{Y}$	vetor $(Y_1, \dots, Y_m)^\top$ de grandezas de saída, consideradas como variáveis aleatórias
y_j	estimativa (esperança) de Y_j
$\mathbf{y}$	estimativa (esperança) $(y_1, \dots, y_m)^\top$ de $\mathbf{Y}$
$\hat{\mathbf{y}}$	estimativa de $\mathbf{Y}$, obtida como a média de M valores $\mathbf{y}_r$ do modelo, a partir de uma iteração de Monte Carlo
$\mathbf{y}_r$	r-ésimo valor do modelo $\mathbf{f}(\mathbf{x}_r)$
$\hat{\mathbf{y}}_r$	r-ésimo valor do modelo $\mathbf{f}(\mathbf{x}_r)$ transformado adequadamente
$z^{(h)}$	h-ésimo valor num procedimento adaptativo de Monte Carlo, em que z pode denotar a estimativa y_j da grandeza de saída Y_j , a incerteza padrão $u(y_j)$ associada a y_j , o autovalor máximo λ_{max} da matriz de correlação $\mathbf{R}_y$ ou o fator de abrangência k_p para uma região de abrangência para $\mathbf{Y}$
α	valor de probabilidade
$\Gamma(z)$	função gama com variável z
δ	tolerância numérica associada com um valor numérico
$\boldsymbol{\eta}$	variável que descreve possíveis valores da grandeza de saída $\mathbf{Y}$
k_p	tolerância numérica associada com fator de abrangência k_p para uma região de abrangência hiperelipsoidal
k_q	tolerância numérica associada com fator de abrangência k_q para uma região de abrangência hiper-retangular
λ_{max}	maior autovalor de matriz de correlação
λ_{min}	menor autovalor de matriz de correlação
μ	esperança de grandeza caracterizada por distribuição de probabilidade
$\boldsymbol{\mu}$	esperança de grandeza caracterizada por distribuição de probabilidade conjunta
ν	graus de liberdade de distribuição-t ou de distribuição chi-quadrado
ν_{eff}	graus de liberdade efetivos associados com incerteza padrão $u(y)$
ξ_i	variável que descreve possíveis valores da grandeza de entrada X_i
$\boldsymbol{\xi}$	variável $(\xi_1, \dots, \xi_N)^\top$ que descreve possíveis valores da grandeza de entrada $\mathbf{X}$
ρ	tolerância numérica associada com o autovalor máximo λ_{max} de uma matriz de correlação
σ	desvio-padrão de grandeza caracterizada por distribuição de probabilidade
σ^2	variância (desvio-padrão quadrado) de grandeza caracterizada por distribuição de probabilidade
$\boldsymbol{\Sigma}$	matriz de covariância de grandeza vetorial caracterizada por distribuição de probabilidade conjunta
χ^2_ν	distribuição chi-quadrado com ν graus de liberdade

WÍndice alfabético

A

apresentação de valores numéricos - reporting numerical values	3.21
atribuição de função densidade de probabilidade (FDP) a - assigning a probability density function (PDF) to	5.2.1, 5.2.2, 5.3, 9.3.1.2, 9.4.2.4, 9.4.2.5
autodecomposição - eigendecomposition	3.20
avaliação de incerteza do Tipo A e do Tipo B - Type A and Type B uncertainty evaluation	4.1

C

calibração - calibration	3.12, 9.5.2.1
coeficiente de correlação - correlation coefficient	3.21, 7.8.1.2
coeficiente de sensibilidade - sensitivity coefficient.	1, 6.3.1.4, B
cópula - copula.	5.3.3
correlação - correlation.	3.19
covariância - covariance	1, 3.18

D

decomposição de Cholesky - Cholesky decomposition.	5.3.2.4, 7.7.2
distribuição gaussiana - Gaussian distribution.	3.28, 5.3.2.4, 6.5.4, 7.3.2
multivariada - multivariate	3.27, 5.3.1, 5.3.2.1, 6.5.4, 7.3.2
distribuição de Fisher-Snedecor - Fisher-Snedecor distribution.	6.5.4
distribuição de Rayleigh - Rayleigh distribution.	C.2.4, C.2.6
distribuição de Rice - Rice distribution.	C.2.4
distribuição qui-quadrado - chi-squared distribution.	3.28, 5.3.2.4, 6.5.2.3, 6.5.3
distribuição qui-quadrado não central - non-central chi-squared distribution	C.2.4
distribuição retangular - rectangular distribution	7.3.2
distribuição-t = t-distribution.	6.5.4, 7.3.2
multivariada - multivariate	3.28, 5.3.1, 5.3.2, 7.3.3, 9.4.2.4, 9.4.2.5

E

esperança - expectation.	3.16, 4.11, 4.13, 4.14, 5.2.1, 5.5.1, 7.1.7
estado de conhecimento - state of knowledge.	4.1, 6.5.1.3
estimativa das grandezas de entrada - estimate of input quantities.	1, 4.6
estimativa das grandezas de saída - estimate of output quantities.	1, 4.7, 4.8, 5.5.1, 7.8.1.2
na metodologia de incerteza do GUM - from GUM uncertainty framework	6.2.1.2, 6.3.1.2
no método de Monte Carlo - from Monte Carlo method.	7.6
etapas da avaliação de incerteza - stages of uncertainty evaluation.	5.2
Formulação - formulation.	5.2.1
Propagação - propagation.	5.2.1, 5.6.1
Resumo summarizing.	5.2.1

F

fator de abrangência - coverage factor	6.5.3, 7.7.2, 7.8.1.2
fator de Cholesky - Cholesky factor	3.20, B.1
formulação...ver temas sobre avaliação de incerteza - formulation see stages of uncertainty evaluation	
fórmula de Welch-Satterthwaite - Welch-Satterthwaite formula	9.4.2.8
função de medição - measurement function	4.12, 5.2.1
complexa - complex	6.4, A
multivariada - multivariate	3.9, 4.4, 6.2.1.1
univariadas - univariate	3.9, 5.1.1
função densidade de probabilidade (FDP) - probability density function (PDF)	3.14, 4.12-4.15
marginal - marginal	3.15, C.2.4, C.2.5
função densidade de probabilidade para... - probability density function (PDF) for... ..	5.2.1, 6.5.1.3, 6.5.1.4
função densidade de probabilidade conjunta... ver função densidade de probabilidade (FDP) - joint probability density function ... see probability density function (PDF)	
função distribuição - distribution function	3.13, 4.12
do método de Monte Carlo - from Monte Carlo method.	7.1.2, 7.1.5, 7.5
função distribuição conjunta. ver função distribuição - joint distribution function . see distribution function	
função multivariada ver função de medição - multivariate function	see measurement function

G

grandeza - quantity	4.1, 4.11
complexa - complex	3.2, 5.1.3, 6.4, 9.1.2, A.1
estimada - estimate	4.11
real - real	3.1
vetorial - vector	3.3
vetorial complexa - complex vector	3.5
vetorial real - real vector	3.4, 5.1.1, 5.1.2
grandeza de entrada - input quantity	4.2, 5.1.1, 5.2.1
grandeza de saída - output quantity	4.3, 5.1.1, 5.1.2, 5.2.1
Guia para a expressão de incerteza de medição (GUM) - Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)	1-3
GUM ver Guia para a expressão de incerteza de medição - GUM see Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)	

I

incerteza padrão - standard uncertainty	1, 4.9, 7.8.1.2
intervalo de abrangência - coverage interval	3.23, 6.5.2.3, 6.5.3
mínimo - shortest	3.23, 5.5.3
probabilisticamente simétrico - probabilistically symmetric	3.23, 5.5.3
Introdução ao GUM - Introduction to the GUM	2

L

lei de propagação de incerteza - law of propagation of uncertainty 5.1.3, 5.6.1, 5.6.3, 6.1.2, 6.4, A.3

M

média - average. 6.5.4, 7.1.7, 7.6

matriz de correlação - correlation matrix. 3.21

matriz de covariância - covariance matrix . . 3.20, 4.6, 4.7, 4.14, 5.2.1, 5.5.1, 6.3.1.4, 6.5.4, 7.6, 7.8.1.2, A.2, A.3, B

da metodologia de incerteza do GUM - from GUM uncertainty framework 6.2.1.3, 3.1.3

do método de Monte Carlo - from Monte Carlo method. 7.6

reparação de - repairing of 3.20

matriz de covariância de medição ver covariância - measurement covariance matrix .see covariance matrix

matriz de sensibilidade - sensitivity matrix 3.22, 6.2.1.3, 6.3.1.3, 6.3.1.4, A.4, C.3.3

mensurando - measurand 3.6, 5.2.1

mensurando vetorial - vector measurand 3.6, 5.2.1

metodologia de incerteza do GUM (MIG) - GUM uncertainty framework (GUF) 1, 6, 8.1, C.3

exemplos de - examples of 6.2.2, 6.3.2, 6.4, 9

validação de - validation of 8

modelo ver modelo de medição - model . . . see measurement model

modelo complexo ver modelo de medição - complex model . see measurement model

modelo de medição - model of measurement see measurement model

modelo de medição - measurement model 3.7, 4.4, 4.5

complexo - complex 3.11, 5.1.3, 6.4

linear - linear 9.1.1

multiestágio - multistage 3.12, 5.4.2{5.4.4, 6.2.2

multivariado - multivariate. 3.8, 9.1.4, B

multivariado explícito - explicit multivariate 6.2

multivariado implícito - implicit multivariate. 6.3

não linear - non-linear 9.1.2, 9.1.3

real - real 3.10

univariado - univariate 3.8, 9.1.4

modelo multiestágio ver modelo de medição - multistage model see measurement model

modelo multivariado ver modelo de medição - multivariate model see measurement model

método de Monte Carlo (MMC) - Monte Carlo method (MCM) 1, 5.6.1, 5.6.4, 7, 8.1

avaliação de grandeza de saída vetorial - evaluation of vector output quantity in 7.4

exemplos de - examples of 9

fazer amostragens aleatórias de distribuições de probabilidade usadas em - making random
draws from probability distributions used in 7.3, 7.5

número de iterações em - number of trials in 7.2, 7.8.1.1

procedimento adaptativo para - adaptive procedure for 7.8

saída primário do - primary output from 7.1.6, 9.1.6

modelo real ver modelo de medição - real model see measurement model

N

nível de confiança	- level of confidence	3.25
número de dígitos decimais significantes	- number of significant decimal digits	7.8.2.1-7.8.2.3, 7.8.2.6, 7.8.2.7

P

princípio de máxima entropia	- principle of maximum entropy	6.5.1.3
probabilidade de abrangência	- coverage probability	1, 3.25, 5.2.1, 5.5.2, 6.5.1.4
propagação de distribuições	- propagation of distributions	5.4, 7.1.7
implementação da	- implementations of	5.6
por métodos analíticos	- analytical methods for	5.6.1
por métodos numéricos	- numerical methods for	5.6.1
propagação de incerteza	- propagation of uncertainty	5.6.1, 5.6.2, 6.1.1, 6.2-6.4
propagação de incerteza	- uncertainty propagation	see propagation of uncertainty

R

região de abrangência	- coverage region	1, 3.24, 5.2.1, 5.5.2, 6.5.1.4
bivariada	- bivariate	6.5.2
da metodologia de incerteza do GUM	- from GUM uncertainty framework	6.5
do método de Monte Carlo	- from Monte Carlo method	7.7
elíptica	- elliptical	6.5.2.3
mínima	- smallest	1, 3.26, 5.5.3, 6.5.2.3, 7.7.1, 7.7.4
multivariada	- multivariate	6.5.3
hiper elipsoidal	- hyper-ellipsoidal	1, 6.5.3, 7.7.1, 7.7.2, 7.8.1.2
hiper-retangular	- hyper-rectangular	1, 6.5.3, 7.7.1, 7.7.3
para a esperança de uma distribuição gaussiana multivariada	- for expectation of multivariate Gaussian distribution	6.5.4
retangular	- rectangular	6.5.2.3

S

solução analítica	- analytical solution	9.1.1, 9.1.2, C.2
suavização de contorno	- contour smoothing	9.1.6, 9.2.2.7
Suplemento 1 do GUM	- GUM Supplement 1	see Supplement 1 to the GUM

T

testes de aleatoriedade	- tests of randomness	7.3.3
teorema de Bayes	- Bayes' theorem	5.3.2.1
teorema de mudança de variáveis	- change of variables theorem	C.2.1
tolerância numérica	- numerical tolerance	7.8.1.1, 7.8.2, 8.3

V

valores de indicação	-	indication values		5.3.1, 5.3.2.1, 6.5.4, 9.1.3
variância	-	variance		3.17, 4.7, 4.13, 7.1.7
variável aleatória	-	random variable		4.1, 4.13, 4.14, 5.5.2, 6.5.4, 7.1.7, 7.8.3
VIM	ver	Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM)	-	see International vocabulary of metrology (VIM)
Vocabulário Internacional de Metrologia	-	International vocabulary of metrology (VIM)		2, 3

Bibliografia

- [1] BARNETT, V. The ordering of multivariate data. *J. R. Statist. Soc. A* 139 (1976), 318.
- [2] BICH, W., CALLEGARO, L., and PENNECCHI, F. Non-linear models and best estimates in the GUM. *Metrologia* 43 (2006), S196{S199.
- [3] BICH, W., COX, M. G., and HARRIS, P. M. Uncertainty modelling in mass comparisons. *Metrologia* 30 (1993), 1{12.
- [4] CHAYES, F. *Petrographic Modal Analysis: An Elementary Statistical Appraisal*. John Wiley & Sons, New York, 1956.
- [5] COMTET, L. *Bonferroni Inequalities { Advanced Combinatorics: The Art of Finite and Infinite Expansions*. Reidel, Dordrecht, Netherlands, 1974.
- [6] COX, M. G., ESWARD, T. J., HARRIS, P. M., MCCORMICK, N., RIDLER, N. M., SALTER, M. J., and WALTON, J. P. R. B. Visualization of uncertainty associated with classes of electrical measurement. Tech. Rep. CMSC 44/04, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2004.
- [7] COX, M. G., and HARRIS, P. M. SSfM Best Practice Guide No. 6, Uncertainty evaluation. Tech. Rep. MS 6, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2010.
- [8] COX, M. G., HARRIS, P. M., and SMITH, I. M. Software specifications for uncertainty evaluation. Tech. Rep. MS 7, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2010.
- [9] EAL. Calibration of pressure balances. Tech. Rep. EAL-G26, European Cooperation for Accreditation of Laboratories, 1997.
- [10] ENGLEN, G. F. *Microwave Circuit Theory and Foundations of Microwave Metrology*. Peter Peregrinus, London, 1992.
- [11] GELMAN, A., CARLIN, J. B., STERN, H. S., and RUBIN, D. B. *Bayesian Data Analysis*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida, 2004. Second edition.
- [12] GILL, P. E., MURRAY, W., and WRIGHT, M. H. *Practical Optimization*. Academic Press, London, 1981.
- [13] GOLUB, G. H., and VAN LOAN, C. F. *Matrix Computations*. John Hopkins University Press, Baltimore, MD, USA, 1996. Third edition.
- [14] HALL, B. D. On the propagation of uncertainty in complex-valued quantities. *Metrologia* 41 (2004), 173{177.
- [15] KACKER, R., TOMAN, B., and HUANG, D. Comparison of ISO-GUM, draft GUM Supplement 1 and Bayesian statistics using simple linear calibration. *Metrologia* 43 (2006), S167{S177.
- [16] KERNS, D. M., and BEATTY, R. W. *Basic Theory of Waveguide Junctions and Introductory Microwave Network Analysis*. Pergamon Press, London, 1967.
- [17] LEWIS, S., and PEGGS, G. *The Pressure Balance: A Practical Guide to its Use*. Second edition. HMSO, London, 1991.
- [18] LIRA, I. *Evaluating the Uncertainty of Measurement. Fundamentals and Practical Guidance*. Institute of Physics, Bristol, UK, 2002.
- [19] MARDIA, K. V., KENT, J. T., and BIBBY, J. M. *Multivariate Analysis*. Academic Press, London, UK, 1979.
- [20] POSSOLO, A. Copulas for uncertainty analysis. *Metrologia* 47 (2010), 262{271.

- [21] RICE, J. R. Mathematical Statistics and Data Analysis, second ed. Duxbury Press, Belmont, Ca., USA, 1995.
- [22] SCOTT, D. W. Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization. John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [23] SCOTT, D. W., and SAIN, S. R. Multi-dimensional density estimation. In Handbook of Statistics, Volume 23, Data Mining and Computational Statistics (Amsterdam, 2004), C. Rao and E. Wegman, Eds., Elsevier, pp. 229{261.
- [24] SILVERMAN, B. W. Density Estimation. Chapman and Hall, London, 1986.
- [25] SMITH, D. B. Granite, G-2. Certificate of Analysis. United States Geological Survey, Denver, Colorado, 1998.
- [26] SOMLO, P. I., AND HUNTER, J. D. Microwave Impedance Measurement. Peter Peregrinus, London, 1985.
- [27] STRANG, G., AND BORRE, K. Linear Algebra, Geodesy and GPS. Wiley, Wellesley-Cambridge Press, 1997.
- [28] WÜBBELER, G., HARRIS, P. M., COX, M. G., AND ELSTER, C. A two-stage procedure for determining the number of trials in the application of a Monte Carlo method for uncertainty evaluation. Metrologia 47, 3 (2010), 317.70