

INSTITUTO DE ENGENHARIA NUCLEAR

THIAGO FIGUEIRAL RIBEIRO DIAS DA ROSA

**UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADA COM CAPTURA
DE DESCONTINUIDADES BASEADA NO USO DE PASSOS DE TEMPO LOCAIS:
APLICAÇÃO A ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL E TRANSFERÊNCIA DE
CALOR EM GEOMETRIA AXISSIMÉTRICA**

RIO DE JANEIRO

2025

THIAGO FIGUEIRAL RIBEIRO DIAS DA ROSA

**UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADA COM CAPTURA
DE DESCONTINUIDADES BASEADA NO USO DE PASSOS DE TEMPO LOCAIS:
APLICAÇÃO A ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL E TRANSFERÊNCIA DE
CALOR EM GEOMETRIA AXISSIMÉTRICA**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia Nucleares do Instituto de Engenharia Nuclear da Comissão Nacional de Energia Nuclear como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Ciências e Tecnologia Nucleares – Ênfase Acadêmica em Tecnologia e Segurança de Reatores Nucleares.

Orientador: Prof. Paulo Augusto Berquó de Sampaio

RIO DE JANEIRO

2025

ROSA Rosa, Thiago Figueiral Ribeiro Dias

Uma formulação de elementos finitos estabilizada com captura de descontinuidades baseada no uso de passos de tempo locais: aplicação a escoamento incompressível e transferência de calor em geometria axissimétrica / Thiago Figueiral Ribeiro Dias Rosa. – Rio de Janeiro: CNEN/IEN, 2025.

91 f. : il. ; 31 cm

Orientador: Paulo Augusto Berquó de Sampaio

Dissertação (Mestrado em Ciência e Tecnologia Nucleares) – Instituto de Engenharia Nuclear, PPGIEN, 2025.


1. Elementos finitos. 2. Dinâmica dos fluidos computacional. 3. Geometria axissimétrica.

**UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADA COM CAPTURA
DE DESCONTINUIDADES BASEADA NO USO DE PASSOS DE TEMPO LOCAIS:
APLICAÇÃO A ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL E TRANSFERÊNCIA DE
CALOR EM GEOMETRIA AXISSIMÉTRICA**


THIAGO FIGUEIRAL RIBEIRO DIAS DA ROSA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA
E TECNOLOGIA NUCLEARES DO INSTITUTO DE ENGENHARIA NUCLEAR DA
COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS E
TECNOLOGIA NUCLEARES – ÊNFASE ACADÊMICA EM TECNOLOGIA E
SEGURANÇA DE REATORES NUCLEARES.


Aprovada por:

Documento assinado digitalmente
 **PAULO AUGUSTO BERQUO DE SAMPAIO**
Data: 16/06/2025 12:14:45-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Paulo Augusto Berquó de Sampaio, Ph.D.

Documento assinado digitalmente
 **MARIA DE LOURDES MOREIRA**
Data: 16/06/2025 14:59:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dra. Maria de Lourdes Moreira, D. Sc.

Documento assinado digitalmente
 **EDUARDO GOMES DUTRA DO CARMO**
Data: 14/06/2025 10:49:12-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

JUNHO DE 2025

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, pelo Seu amor incondicional e por me guiar em toda a minha jornada.

Sou grato à minha família por todo o suporte, paciência e compreensão nos momentos em que estive ausente — especialmente à minha mãe, Nilda, e à minha companheira, Carol. Amo vocês.

Obrigado a todos os profissionais e colegas do Instituto de Engenharia Nuclear. Sem vocês, esta dissertação não teria sido possível.

Sou profundamente grato ao meu orientador, Professor Paulo, por todo o conhecimento, pelas sugestões e pelo apoio irrestrito oferecido desde o início deste trabalho. Seus ensinamentos foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus amigos, por compreenderem minhas ausências e celebrarem comigo cada conquista.

A todos, meu sincero muito obrigado.

RESUMO

Preocupações em relação às mudanças climáticas têm motivado diversos estudos a fim de buscar novas alternativas para um desenvolvimento sustentável. Com o aumento da demanda por energia, a fonte nuclear se tornou uma alternativa promissora devido a sua baixa pegada de carbono e capacidade fornecimento contínuo. Por outro lado, apesar de ser uma das fontes mais seguras de geração de eletricidade, as usinas nucleares exigem um alto investimento devido aos elevados requisitos de segurança. Logo, uma das formas de aumentar a confiabilidade dos sistemas e equipamentos nucleares é utilizar a fluidodinâmica computacional para prever os fenômenos físicos que ocorrem e, dessa forma, torná-los mais seguros, eficientes e baratos. Assim, o presente trabalho tem por objetivo apresentar uma formulação estabilizada de elementos finitos baseada no uso de passos de tempo locais para resolver problemas de mecânica de fluidos e transferência de calor em escoamentos incompressíveis em geometrias cartesianas e axissimétricas. Nessa formulação, as equações de atualização do campo de pressão são obtidas pela aplicação do método de Taylor-Galerkin enquanto que as equações de atualização da velocidade e temperatura são obtidas a partir da minimização dos resíduos quadráticos das equações de quantidade de movimento e energia, respectivamente. Além disso, é derivado um esquema de upwind que combina os efeitos da velocidade real e da velocidade de transporte produzindo o efeito de captura de descontinuidade. Esse método foi implementado utilizando a linguagem de programação FORTRAN90 e empregando a ferramenta de paralelização OpenMP. As soluções numéricas apresentadas para os exemplos envolvendo transferência de calor em convecção livre, mista e forçada demonstram que o método apresentado possui ótima concordância com os resultados presentes na literatura.

Palavras-chave: Formulação estabilizada; Convecção natural e mista; Escoamento incompressível e transiente; Passo de tempo local.

ABSTRACT

Concerns about climate change have motivated numerous studies aimed at finding new alternatives for sustainable development. With the growing demand for energy, nuclear power has become a promising option due to its low carbon footprint and ability to provide continuous supply. On the other hand, despite being one of the safest sources of electricity generation, nuclear power plants require high investment due to stringent safety requirements. Therefore, one way to increase the reliability of nuclear systems and equipment is by using computational fluid dynamics to predict the physical phenomena that occur, thereby making them safer, more efficient, and more cost-effective. Thus, this work aims to present a stabilized finite element formulation based on the use of local time steps to solve fluid mechanics and heat transfer problems in incompressible flows with cartesian and axisymmetric geometries. In this formulation, the pressure field update equations are derived using the Taylor-Galerkin method, while the velocity and temperature update equations are obtained by minimizing the squared residuals of the momentum and energy equations, respectively. Additionally, an upwind scheme is derived, combining the effects of the real and transport velocities to produce a discontinuity-capturing effect. This method was implemented using the FORTRAN90 programming language and the OpenMP parallelization tool. The numerical solutions presented for examples involving heat transfer in free, mixed, and forced convection demonstrate that the proposed method shows excellent agreement with results found in the literature.

Keywords: Stabilized formulations; Free and mixed convection; Transient incompressible viscous flows; Local time-steps.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Crise Climática e Aumento da Demanda por Eletricidade	1
1.2	O Papel da Energia Nuclear	3
1.3	Fluidodinâmica Computacional na Energia Nuclear	5
1.4	Objetivo e Contribuição	6
1.5	Organização da Dissertação	6
2	Revisão Bibliográfica	8
2.1	Formulação Estabilizada do Método de Elementos Finitos	8
2.2	Operador Captura de Descontinuidade	10
3	Formulação Matemática	12
3.1	Modelo Cartesiano	12
3.1.1	Equações Governantes na Forma Adimensional	14
3.2	Modelo Axissimétrico	16
3.2.1	Equações Governantes na Forma Adimensional	18
4	Formulação Estabilizada	20
4.1	Atualização dos Campos - Cartesiano	20
4.1.1	Atualização do Campo de Pressão	20
4.1.2	Atualização dos Campos de Velocidade e Temperatura	24
4.2	Atualização dos Campos - Axissimétrico	30
4.2.1	Atualização do Campo de Pressão	30
4.2.2	Atualização dos Campos de Velocidade e Temperatura	33
4.3	Modelo Submalha Implícito	37
4.4	Campos de Velocidade	38
4.5	Passos de Tempo Locais e Sincronização	41
5	Código Computacional	48
5.1	Malha Adaptativa	48
5.2	Computação Paralela	49
5.3	Pré e Pós Processamento	49
6	Resultados e Discussões	50
6.1	Verificação do Modelo	50
6.1.1	Estratificação Térmica em uma Cavidade Quadrada	50
6.1.2	Convecção Natural ao Redor de um Cilindro Aquecido	55

6.1.3	Convecção Mista ao Redor de um Cilindro Aquecido sob Forças de Empuxo	59
6.1.4	Escoamento em Duto Horizontal de Seção Circular com Temperatura e Fluxo de Calor Prescritos na Parede	65
6.2	Exemplo da Aplicação: Estudo de um Downcomer de um PWR	68
7	Conclusão	71
	Referências Bibliográficas	72

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1:	Mudança observada na temperatura global e respostas modeladas para emissão de CO ₂ . Retirado de IPCC (2019) .	2
FIGURA 2:	Domínio de análise para o problema de convecção livre em uma cavidade quadrada.	51
FIGURA 3:	Malha adaptativa, isolinhas de temperatura, isolinhas de pressão e campo de velocidade para $Ra = 10^4$, $Pr = 0.71$.	52
FIGURA 4:	Malha adaptativa, isolinhas de temperatura, isolinhas de pressão e campo de velocidade para $Ra = 10^5$, $Pr = 0.71$.	53
FIGURA 5:	Malha adaptativa, isolinhas de temperatura, isolinhas de pressão e campo de velocidade para $Ra = 10^6$, $Pr = 0.71$.	54
FIGURA 6:	Isolinhas de temperatura para $Pr = 0.71$ e, da esquerda para a direita, $Ra = 5 \times 10^4$, 10^5 , 1.5×10^5 , 2×10^5 , 5×10^5 e 10^6 .	56
FIGURA 7:	Malhas adaptativas e isolinhas de temperatura para $Pr = 0.71$ e $Ra = 2 \times 10^5$ nos tempos $t = 14, 54$ e $112 d/u_o$.	57
FIGURA 8:	Comparação dos resultados do número de Nusselt médio com resultados das correlações experimentais de Churchill e Chu (1975) e Hyman et al. (1953) .	58
FIGURA 9:	Escoamento cruzado ao redor de um cilindro aquecido, ilustrando esquematicamente os casos de convecção auxiliada pela flutuabilidade e convecção oposta à flutuabilidade.	59
FIGURA 10:	Cilindro em escoamento cruzado com $Re_d = 100$: algumas malhas adaptativas e os correspondentes campos de pressão.	61
FIGURA 11:	Escoamento cruzado ao redor de um cilindro aquecido com $Re = 100$ e $Pr = 1$: malhas adaptativas e isolinhas de pressão em $t = 99d/u_0$: (a) convecção forçada ($Ri = 0$); (b) $Ri = 0.25$ com flutuabilidade opondo-se à convecção; (c) $Ri = 0.25$ com flutuabilidade auxiliando a convecção.	62
FIGURA 12:	Evolução temporal dos coeficientes de força para o problema de um cilindro circular em escoamento cruzado: (a) convecção forçada ($Ri = 0$); (b) $Ri = 0.25$ com flutuabilidade opondo-se à convecção; (c) $Ri = 0.25$ com flutuabilidade auxiliando a convecção.	63
FIGURA 13:	Escoamento cruzado ao redor de um cilindro aquecido com $Re = 100$, $Pr = 1$ e $Ri = 0.25$ com flutuabilidade opondo-se à convecção: região com temperaturas negativas para $\gamma = 0$ (a) e para $\gamma = 1$ (b).	65

FIGURA 14:	Domínio de análise para o problema de escoamento em duto horizontal com temperatura e fluxo de calor prescritos na parede.	66
FIGURA 15:	Refinamento da malha próximo a parede do duto .	66
FIGURA 16:	Comparação entre o fator de atrito em função do número de Reynolds para $Re = 100, 200, 500$ e 1000 .	67
FIGURA 17:	Região do vaso do reator modelada. Adaptado de Prasser et al. (2003)	68
FIGURA 18:	Tambor perfurado. Adaptado de (Höhne et al., 2006).	69
FIGURA 19:	Downcomer com malha não estruturada.	69
FIGURA 20:	Campo de velocidade (a) e pressão (b) no downcomer.	70

LISTA DE TABELAS

TABELA 1:	Número de Nusselt médio e máximo: comparação entre o presente resultado com os de De Sampaio (2006) e Hortmann et al. (1990) .	55
TABELA 2:	Convecção mista ao redor de um cilindro aquecido: dados estatísticos.	64
TABELA 3:	Número de Nusselt para temperatura e fluxo de calor constantes na parede do duto.	67

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Domínio limitado aberto
Γ	Contorno do domínio
u	Componente da velocidade na direção x
v	Componente da velocidade na direção y ou r
τ	Tensor das tensões viscosas em coordenadas cartesianas
S	Tensor das tensões viscosas em coordenadas cilíndricas
p	Pressão
T	Temperatura
β	Coefficiente de expansão volumétrica
g	Aceleração da gravidade
T_o	Temperatura de referência
ρ_o	Densidade do material à temperatura de referência T_o
u_o	Velocidade de referência
c_p	Calor específico a pressão constante
q	Fluxo de calor
μ	Viscosidade dinâmica
x	Componente da posição na direção x
r	Componente da posição na direção r
k	Condutividade térmica
n	Vetor normal
\bar{T}	Temperatura com valor prescrito
\bar{q}	Fluxo de calor com valor prescrito
\bar{p}	Pressão com valor prescrito
\bar{G}	Velocidade normal à fronteira com valor prescrito
\bar{t}	Tração com valor prescrito
T_{\max}	Temperatura máxima
T_{\min}	Temperatura mínima
t	Tempo
L	Comprimento característico modelo cartesiano
D	Comprimento característico modelo axissimétrico

\mathbf{g}	Módulo do vetor gravidade
\mathbf{a}	Vetor velocidade
∇u	Gradiente da componente u da velocidade
∇v	Gradiente da componente v da velocidade
∇T	Gradiente da componente T da temperatura
\mathbf{b}_u	Campo de velocidade efetiva associado ao ∇u
\mathbf{c}_v	Campo de velocidade efetiva associado ao ∇v
\mathbf{d}_T	Campo de velocidade efetiva associado ao ∇T
Re	Número de Reynolds
Pr	Número de Prandtl
Ri	Número de Richardson
Ra	Número de Rayleigh
Nu	Número de Nusselt
Δt	Passo de tempo
Δp	Variação temporal do campo de pressão
Δu	Variação temporal do campo de velocidade da componente u
Δv	Variação temporal do campo de velocidade da componente v
ΔT	Variação temporal do campo de temperatura
φ	Função peso
N	Função forma
h_{\min}	Tamanho mínimo do elemento
q_w	Fluxo de calor local da parede
F_D	Força de arrasto
F_L	Força transversal
St	Número de Strouhal
f	Frequência de desprendimento de vórtices
C_D	Coeficiente de arrasto
C_L	Coeficiente de sustentação

LISTA DE SIGLAS

CFD	Computational Fluid Dynamics
NOAA	National Oceanic and Atmospheric Administration
EPE	Empresa de Pesquisa Energética
IEA	International Energy Agency
VE	Veículo Elétrico
IA	Inteligência Artificial
GEE	Gases do Efeito Estufa
IAEA	Agência Internacional de Energia Atômica
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IEN	Instituto de Engenharia Nuclear
IPCC	Painel Intergovernamental de Mudanças Climáticas
PWR	Reator de Água Pressurizada
RANS	Equação de média de Reynolds
LES	Large Eddy Simulation
CEA	Comissão de Energia Alternativa
UNFCCC	Convenção-Quadro das Nações Unidas sobre Mudanças Climáticas
ROCOM	Ressendorf Coolant Mixing Model

1 Introdução

1.1 Crise Climática e Aumento da Demanda por Eletricidade

O aquecimento global, uma questão urgente do nosso tempo, tem sido impulsionado principalmente pelo aumento das emissões de gases do efeito estufa (GEEs) na atmosfera da Terra, em grande parte devido as atividades humanas. Esse fenômeno tem aumentado desde a Revolução Industrial, quando a utilização de combustíveis fósseis como carvão, óleo e gás natural começou a expandir. A partir dessa época, o nosso planeta tem experimentado as maiores concentrações de dióxido de carbono, metano e NOx dos últimos 800 mil anos (NAP, 2020).

No final do século passado, diversas pesquisas científicas e organizações como o IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) das Nações Unidas confirmaram o impacto das ações humanas no aumento da temperatura global. Desde sua fundação, o IPCC tem conduzido reuniões internacionais para discutir as mudanças no clima destacando os problemas causados por essa mudança e fixando compromissos para reduzir as emissões como o Protocolo de Kyoto e o Acordo de Paris (IPCC, 2019).

Embora o compromisso firmado no Acordo de Paris tenha sido limitar o aumento da temperatura global a 2°C em relação a níveis pré-industriais, as ações humanas já elevaram a temperatura da Terra em 0,87°C entre 2006 e 2015, em relação à média registrada entre 1850 e 1900 (Figura 1). Ainda segundo o IPCC (2019), o aumento de 2°C até 2060 representaria consequências devastadoras para nosso ecossistema. Estima-se que 6% dos insetos, 8% de plantas e 4% de vertebrados percam metade de sua amplitude geográfica por causa do aumento em 1,5°C e para um aumento em 2°C essa estimativa passa para 18%, 16% e 8% respectivamente. Além disso, no ambiente marinho, projeta-se uma diminuição entre 70-90% dos recifes de corais para um aumento de 1,5°C e mais de 99% para um aumento de 2°C.

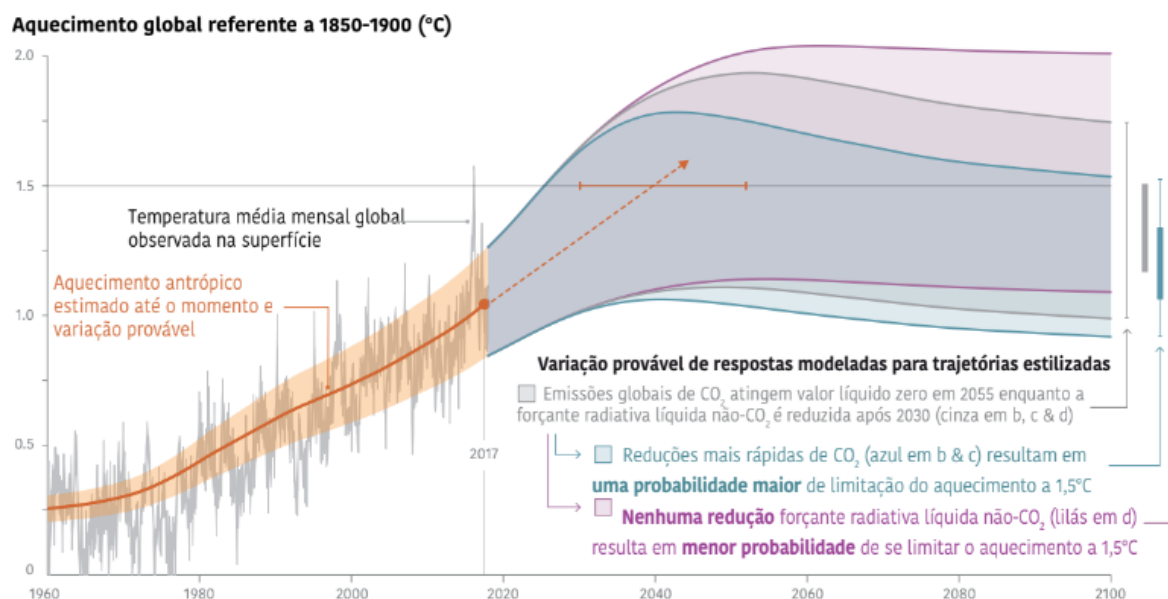


Figura 1: Mudança observada na temperatura global e respostas modeladas para emissão de CO₂. Retirado de IPCC (2019).

Ainda que 2023 tenha sido o ano mais quente desde 1850 segundo o 2023 Global Climate Report (NOAA, 2024), as ações humanas que impactam negativamente o clima do planeta continuam em níveis alarmantes. Um grande exemplo é o consumo de eletricidade, que é o maior responsável pelo aquecimento global, principalmente devido a dependência de combustíveis fósseis para geração elétrica. De acordo com a IEA (International Energy Agency), a matriz elétrica mundial é responsável por mais de 40% das emissões de CO₂, com a queima de carvão mineral sendo a maior culpada (IEA, 2020). A utilização de carvão, óleo e gás natural para a produção de eletricidade promove um aumento do efeito estufa e contribui para o aumento da temperatura global.

Além disso, com o objetivo de reduzir as emissões de carbono, a transição para uma frota automotiva eletrificada tem sido amplamente promovida como uma solução sustentável. No entanto, essa mudança vem acompanhada de um aumento significativo no consumo de energia elétrica. Os veículos elétricos (VEs), embora mais eficientes que os movidos a combustão, exigem uma infraestrutura robusta para recarga, além de fontes energéticas confiáveis para atender à crescente demanda. Segundo a IEA (2022), desde 2015, tem sido observado um rápido crescimento no número de veículos elétricos, que alcançou cerca de 16,5 milhões no final de 2021 e deve chegar a 145 milhões em 2030. À medida que a frota global de VEs cresce, a necessidade de reforçar a geração de energia aumenta e coloca ainda mais pressão sobre o atual sistema já sobrecarregado em diversas regiões.

Paralelamente, a expansão da inteligência artificial (IA) também contribui significativamente para o aumento do consumo energético. O treinamento de modelos avançados de IA exige supercomputadores e Data Centers que consomem grandes quantidades de energia. Mesmo a etapa de utilização desses modelos – como a geração de respostas ou a análise de dados – demanda um uso contínuo e intensivo de eletricidade. De acordo com a IEA (2023), estima-se que os Data Centers espalhados pelo mundo consumiram entre 1 e 1,3% da energia mundial em 2022, com projeção de que esse consumo dobre até 2026. Além disso, um estudo realizado pelo Lawrence Berkeley National Laboratory em 2023 aponta que os Centros de Processamento de Dados americanos consumiram cerca de 4,4% da energia produzida nos Estados Unidos, com estimativa de que esse número possa triplicar até 2028 (Shehabi et al., 2024).

No Brasil, assim como em outras grandes economias, o consumo de eletricidade tem aumentado ano após ano. Segundo a Empresa de Pesquisa Energética (EPE), os setores com maior demanda por energia são o industrial e o de transportes, que inclui tanto as necessidades da construção civil para infraestrutura quanto aquelas voltadas à ampliação da mobilidade da população. Ainda de acordo com a EPE, a taxa de motorização da população brasileira - que era de 5,3 habitantes por veículo em 2012 - poderá atingir 1,6 em 2050, resultando em uma frota de veículos leves estimada em aproximadamente 129,5 milhões. Além disso, o crescimento populacional também contribui para o aumento da demanda por energia elétrica. Conforme o censo realizado em 2022 (IBGE, 2024), a população brasileira, atualmente com 212,6 milhões de pessoas, poderá alcançar 220 milhões em 2041.

Diante desse cenário, atender a crescente demanda de energia se torna um desafio ainda mais complexo quando a questão climática é levada em consideração. Dados da EPE (2016) indicam que, no Brasil, cerca de 42,4% de toda a energia consumida em 2020 foi proveniente de derivados de petróleo. Diante desse cenário, desde 1992, na Convenção Quadro das Nações Unidas sobre Mudanças Climáticas (UNFCCC), 197 países concordaram que seria necessário uma abordagem mais contundente para conter o aquecimento global.

1.2 O Papel da Energia Nuclear

Na década de 60 vários países promoveram o desenvolvimento e a aplicação da energia nuclear para geração de eletricidade. O emprego da energia nuclear pelas marinhas ao redor do mundo produziu uma base de conhecimento para o tipo de reator que utiliza água “leve” a altas pressões como fluido refrigerante e moderador. Atualmente, os reatores de água pressurizada são os tipos de projeto mais populares, e são responsáveis por dois terços de toda capacidade nuclear instalada (Kok, 2017).

Com a crescente demanda mundial por energia elétrica e a necessidade de reduzir as emissões dos gases de efeito estufa, a matriz nuclear se tornou uma vantajosa solução para esses desafios. Devido às suas vantagens estratégicas como a produção de eletricidade com baixo impacto ambiental e a alta confiabilidade, a energia nuclear tornou-se uma alternativa valiosa quando comparada com outras fontes de energia de base como usinas termelétricas movidas a combustíveis fósseis, que emitem grandes quantidades de CO₂ e poluentes atmosféricos ao longo de sua operação.

A geração nuclear, ao longo de todo o seu ciclo de vida, apresenta emissões mínimas desde a construção até o pleno funcionamento. Estudos indicam que a energia nuclear tem uma pegada de carbono comparável à de fontes renováveis, como a eólica e a solar. Além disso, por não depender da queima de combustíveis fósseis, a energia nuclear reduz a emissão de poluentes atmosféricos como óxidos de enxofre e nitrogênio, contribuindo para a melhoria da qualidade do ar e a saúde pública.

Outro fator determinante para a expansão desse tipo de produção de energia é sua grande confiabilidade e capacidade de fornecimento contínuo de eletricidade. Diferentemente da fonte solar, eólica e hidrelétrica, cuja produção depende de fatores climáticos e sazonais, a geração nuclear opera de forma estável, garantindo eletricidade de base para os sistemas elétricos. Com um fator de capacidade superior a 90%, as usinas nucleares podem operar ininterruptamente por longos períodos entregando sua máxima potência, necessitando apenas de paradas para manutenção e troca do combustível.

Nesse contexto, países que buscam segurança energética ao mesmo tempo em que visam reduzir sua pegada de carbono têm adotado a energia nuclear em suas matrizes elétricas. Segundo a [IAEA \(2024\)](#), em 2023 havia 418 reatores nucleares operacionais, gerando um total de 377,6 GW(e), e outros 59 reatores em construção em 17 países, totalizando uma capacidade prevista de 61,1 GW(e). Durante esse ano, a construção de seis novos reatores foi iniciada, sendo cinco deles na China e um no Egito. Dessa forma, fica evidente que essa fonte de energia continua a se expandir globalmente.

Apesar das vantagens que a energia nuclear oferece, sua adesão ainda enfrenta resistência. Questões como o alto custo inicial, o gerenciamento de resíduos radioativos e, principalmente, preocupações com a segurança continuam a gerar debates sobre seu papel na matriz energética global. Acidentes como os de Chernobyl e Fukushima reforçaram o receio da população com esse tipo de tecnologia. Nesse sentido, fabricantes e agências reguladoras foram obrigados a aumentar ainda mais os requisitos de segurança das usinas. Tudo isso fez com que pesquisas envolvendo sistemas e componentes nucleares se multiplicassem por todo o mundo na intenção de prever possíveis falhas e aumentar a eficiência e a confiabilidade das plantas.

1.3 Fluidodinâmica Computacional na Energia Nuclear

Para projetar usinas nucleares eficientes e seguras, i.e., funcionando em condições otimizadas durante a operação normal e garantindo que seja atingido um estado seguro durante um transiente operacional ou acidente, necessariamente é preciso compreender as diversas formas de escoamento de fluidos bem como entender o modo como ocorre a transferência de calor de um meio para outro nos vários equipamentos e sistemas que compõem a planta. Nesse contexto, a fluidodinâmica computacional ou CFD (Computational Fluid Dynamics) tem se mostrado uma ferramenta essencial, permitindo a simulação numérica dos componentes nucleares.

Com o crescimento da capacidade de processamento nas últimas décadas, a fluidodinâmica computacional, tem desempenhado um papel cada vez mais relevante na indústria nuclear, especialmente no projeto e na análise de segurança de reatores. Esse avanço impulsionou o desenvolvimento de códigos termohidráulicos altamente confiáveis, capazes de reproduzir o comportamento do escoamento sob diversas condições de contorno, além de reduzir significativamente a dependência de experimentos no desenvolvimento de sistemas e equipamentos.

O uso de ferramentas CFD em projetos de reatores, como os resfriados a água pressurizada, tem permitido otimizar diversos componentes, como o design das varetas de combustível e o fluxo de refrigerante através do núcleo, entre outros, aumentando a eficiência e a segurança da planta como um todo. Além disso, essa ferramenta possibilita uma análise detalhada dos diferentes tipos de escoamentos que ocorrem durante o funcionamento dos reatores nucleares. Esses escoamentos podem envolver o transporte de energia, incluir múltiplas fases e ocorrer tanto em regime laminar quanto turbulento.

Ademais, a análise de segurança é outro aspecto em que a CFD se destaca. Ela é amplamente utilizada para prever o comportamento de transiente e acidentes em usinas nucleares, como quebras de linhas de alta energia, mau funcionamento de equipamentos como válvulas ou até mesmo falhas operacionais. Essas simulações auxiliam na avaliação da capacidade de uma planta resistir às falhas e na definição de estratégias para mitigar os danos decorrentes dessas falhas. Exemplos de códigos usados para modelar o comportamento térmico-hidráulico durante transientes no circuito primário por empresas como a Westinghouse e instituições como a Électricité de France incluem: RELAP-5, TRACE, CATHARE, GOTHIC e ATHLET (IAEA, 2022).

Por outro lado, a CFD também impulsiona a inovação no design de reatores. Projetos como o ASTRID (Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration) (Le Coz et al., 2011), um reator rápido resfriado a sódio de Geração IV desenvolvido pela

Comissão de Energia Alternativa e Energia Atômica da França (CEA), foram utilizados intensivamente para desenvolver e validar códigos usados para cálculos do comportamento termohidráulico dos sistemas e das margens operacionais relacionadas à segurança do reator (Chenaud et al., 2015).

Portanto, a fluidodinâmica computacional consolidou-se como uma ferramenta indispensável no desenvolvimento da energia nuclear. Sua aplicação não só melhora a segurança, mas também reduz custos e acelera a inovação em projetos de reatores. À medida que a indústria nuclear continua a evoluir, espera-se que seu papel se expanda ainda mais, contribuindo para a viabilidade dessa forma de geração de energia.

1.4 Objetivo e Contribuição

Como demonstrado nas seções anteriores, a simulação numérica de escoamentos com transferência de calor tem se tornado uma ferramenta indispensável na indústria nuclear. A termohidráulica, como é conhecida nessa área, desempenha um papel fundamental no projeto e na análise de segurança de reatores nucleares, uma vez que envolve o estudo de problemas de escoamento em equipamentos como o vaso do reator, trocadores de calor, bombas etc.

Portanto, o objetivo desta dissertação é desenvolver uma formulação estabilizada do método de elementos finitos, com captura de descontinuidade, para aplicação em problemas de escoamento incompressível governados por convecção-difusão, considerando transferência de calor e forças de empuxo decorrentes de gradientes térmicos, modelados pela hipótese de Boussinesq visto que tais problemas ocorrem rotineiramente, tanto no desenvolvimento de novos reatores quanto na análise de desempenho e segurança de plantas em operação.

Essa formulação é aplicável tanto a geometrias cartesianas quanto axissimétricas, abrangendo uma ampla gama de problemas bidimensionais. Além disso, inclui termos de estabilização que emergem naturalmente da discretização temporal das equações governantes. Esses termos permitem a estabilização do campo de pressão e outros gradientes intensos, o que reduz oscilações indesejadas nas soluções numéricas.

1.5 Organização da Dissertação

Este trabalho está organizado em sete capítulos estruturados de forma a apresentar o desenvolvimento e os resultados obtidos.

No Capítulo 1, é apresentada a introdução, abordando o contexto geral dessa dissertação, a motivação para o desenvolvimento da formulação proposta e os objetivos específicos da pesquisa.

O Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica abordando o emprego da formulação estabilizada com operador de captura de descontinuidade.

O Capítulo 3 trata da formulação matemática das equações governantes na forma dimensional e adimensional, abrangendo tanto geometrias cartesianas quanto axissimétricas. São descritas as leis de conservação e a hipótese de Boussinesq, que considera as forças de empuxo geradas por gradientes térmicos.

No Capítulo 4, é apresentada a formulação estabilizada do método de elementos finitos definido as equações de atualização da pressão, velocidade e temperatura. São discutidos o modelo submalha, os campos de velocidade, o uso de passos de tempo locais e a sincronização.

O Capítulo 5 aborda a implementação computacional da metodologia proposta, incluindo aspectos da malha adaptativa empregada, paralelismo computacional e etapas de pré e pós-processamento utilizados nas simulações.

No Capítulo 6, são apresentados os resultados obtidos para a verificação do modelo, os exemplos numéricos escolhidos incluem casos clássicos de convecção natural e mista, bem como escoamento em dutos e o escoamento em uma região do vaso de um reator nuclear.

Por fim, o Capítulo 7 reúne as conclusões do trabalho, destacando resultados mais relevantes, e sugestões para trabalhos futuros.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Formulação Estabilizada do Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos pode ser definido, de forma geral, como a aplicação dos princípios variacionais ou do método de resíduos ponderados a um conjunto de equações diferenciais. Inicialmente, foi empregado para resolver problemas em mecânica dos sólidos dada sua vantagem em lidar com geometrias complexas e a capacidade de impor condições de contorno de maneira direta (Clough, 1960). Quando aplicado a uma equação diferencial, esse método produz uma solução aproximada com formato de combinação linear de funções forma, onde para encontrar a solução é preciso determinar os coeficientes dessa combinação linear (Strang e Fix, 1973).

O método de Galerkin, por sua vez, é uma formulação de resíduos ponderados onde as funções peso são as mesmas funções usadas para interpolar a solução aproximada. Para um problema elíptico auto-adjunto, o método de Galerkin leva à melhor solução aproximada (a chamada propriedade de melhor aproximação). No entanto, quando aplicado em problemas de escoamento incompressível que envolvem convecção-difusão essa formulação falha, uma vez que os operadores diferenciais nesse caso não são auto-adjuntos e o método de Galerkin perde a sua propriedade de melhor aproximação (Johnson, 1987).

Logo, formulações estabilizadas em elementos finitos surgiram para superar as limitações da formulação Galerkin padrão na solução de problemas de Mecânica dos Fluidos envolvendo escoamentos incompressíveis dominados por convecção. Na abordagem clássica de Galerkin, é necessário que os espaços de interpolação para velocidade e pressão satisfaçam a condição de Babuška-Brezzi (Brezzi e Fortin, 1991). No entanto, essa condição impõe restrições, já que o campo de pressão não está diretamente ligado à conservação de massa, dificultando a aplicação desse método (Zienkiewicz e Nakazawa, 1986).

O uso de espaços de interpolação iguais para velocidade e pressão na solução desse tipo de escoamento pode resultar em uma matriz global singular. Esse problema ocorre porque a equação da continuidade, que impõe a incompressibilidade do fluido, age como uma restrição sobre o campo de velocidade. Assim, se os espaços de interpolação não forem compatíveis, garantindo um número adequado de graus de liberdade para a velocidade em relação à pressão, valores nulos podem ser introduzidos na diagonal principal da matriz global, tornando-a mal condicionada e dificultando sua inversão (De Sampaio, 1991b). Dessa forma, para utilizar

espaços de interpolação de mesma ordem para todas as variáveis, o que é atrativo computacionalmente, é preciso utilizar de uma formulação estabilizada. Essas formulações como a de Petrov-Galerkin adicionam termos de estabilização que modificam os resíduos ponderados, introduzindo valores não nulos na diagonal principal da matriz global sem comprometer a consistência da solução, evitando, assim, a formação de uma matriz singular.

Neste trabalho, é empregada uma formulação do tipo Petrov-Galerkin para as equações de Navier-Stokes incompressíveis em variáveis primitivas. O método é derivado do conceito de mínimos quadrados e permite o uso de interpolações de mesma ordem para velocidade e pressão (De Sampaio, 1991a). De fato, pode ser considerado uma generalização da formulação apresentada por Hughes et al. (1986b), que contorna a condição de Babuška-Brezzi no contexto do escoamento de Stokes.

Nessa formulação, os termos de estabilização emergem naturalmente a partir da aplicação da minimização da integral do quadrado dos resíduos do balanço de quantidade de movimento, que combina uma discretização temporal baseada em diferenças finitas e espacial usando elementos finitos, onde as funções de ponderação resultantes apresentam uma estrutura análoga à função SUPG proposta por Brooks e Hughes (1982). Esses termos estabilizadores foram adicionados à equação de conservação de massa, permitindo uma estabilização do campo de pressão (De Sampaio, 2005).

Geralmente, os termos de estabilização aparecem multiplicados por parâmetros (ou escalas de tempo intrínsecas) que definem a quantidade de estabilização necessária, dependendo do tamanho local da malha, da velocidade e das propriedades físicas. No trabalho de Brooks e Hughes (1982), esses autores determinaram o chamado parâmetro de upwinding ótimo, usado para controlar oscilações na solução numérica de problemas de convecção-difusão unidimensionais e em estado estacionário. No entanto, em problemas de convecção-difusão transitórios e multidimensionais a estrutura dos termos de estabilização e os parâmetros correspondentes geralmente são propostos a priori e justificados a posteriori por meio de análises numéricas e experimentos computacionais (De Sampaio, 1991b).

Outra importante característica do método proposto é que o passo de tempo utilizado na discretização temporal da equação de conservação de quantidade de movimento e energia é empregado como parâmetro de estabilização. Isso implica que há um parâmetro a menos para definir em aplicações transitórias. Mais importante ainda, isso oferece uma indicação de como escolher o passo de tempo/parâmetro de estabilização. Na prática, o passo de tempo é definido com base na estimativa das escalas de tempo dos processos de convecção-difusão de momentum, que podem ser resolvidos pela malha local (De Sampaio, 1991a).

Para introduzir a quantidade correta de estabilização em todo o domínio de análise, o passo de tempo deve ser definido localmente, resultando em uma distribuição espacialmente variável de passos de tempo. No trabalho de [De Sampaio \(2005\)](#), algoritmos especiais foram empregados para acomodar essa distribuição e sincronizar os cálculos em problemas transientes. Neste trabalho, é proposta uma abordagem similar mas com o uso de matrizes de escala de tempo, para o cálculo dos passos de tempo locais, e um esquema de sincronização necessário que são incorporados ao método para introduzir a quantidade correta de estabilização em todo o domínio.

Como resultado, desenvolveu-se um método que se assemelha a formulações estabilizadas bem conhecidas, empregando um único passo de tempo para todo o domínio e uma definição local de parâmetros de estabilização. No entanto, suas origens estão baseadas no uso de passos de tempo locais combinados com um esquema de sincronização.

2.2 Operador Captura de Descontinuidade

Como discutido anteriormente, o método de Galerkin é inadequado para a análise de problemas dominados por convecção. A chamada propriedade de melhor aproximação ([Johnson, 1987](#)), que a formulação de Galerkin exibe para operadores auto-adjuntos, é perdida sempre que termos de convecção estão presentes. Na prática, a aplicação da formulação de Galerkin a problemas convectivos resulta em oscilações espaciais que podem poluir a solução em todo o domínio de análise.

Com o desenvolvimento do método SUPG, que introduz uma difusão anisotrópica de balanceamento ([Kelly et al., 1980](#)), um avanço significativo foi obtido no sentido de reduzir essas oscilações. Nesse método, o upwinding é introduzido aproveitando a ideia do método de diferenciação a montante inclinada de [Raithby \(1976\)](#). O método gera uma contribuição difusiva que atua apenas na direção das linhas de corrente. Comparado com métodos de diferenças finitas, o SUPG pode ser classificado como um esquema de upwind de segunda ordem. De fato, a parte de Galerkin do método corresponde à diferenciação central, enquanto a dissipação necessária para estabilizar a formulação vem da parte de perturbação do resíduo ponderado.

Apesar de o método SUPG apresentar boa estabilidade se a solução exata for regular, para soluções não regulares, i.e., que possuem descontinuidades ou gradientes muito intensos, podem aparecer oscilações localizadas em regiões contendo camadas agudas, como por exemplo, camadas limites e interfaces finas. [Hughes et al. \(1986a\)](#) abordaram esse problema adicionando uma perturbação extra à função peso do SUPG. O efeito dessa perturbação extra

é introduzir difusão ao longo da direção do gradiente da grandeza transportada, funcionando como um operador de captura de descontinuidade que auxilia o método SUPG no controle de oscilações em regiões com camadas abruptas.

No trabalho de [Galeão e Dutra do Carmo \(1988\)](#), foi desenvolvido um esquema de upwind tomando a ideia de que na solução exata, as linhas de corrente, em um problema puramente convectivo, são a direção física das grandezas transportadas, porém, no caso da solução numérica, a direção é aproximada. Nessa abordagem, os autores derivaram o upwind a partir da definição de um campo de velocidade que satisfaz a equação de transporte em cada elemento finito e minimiza a diferença entre a velocidade real e a velocidade de transporte modificada gerando um termo de estabilização Petrov-Galerkin, que incorpora a direção a montante corrigida. Dessa forma, à medida que a solução numérica se aproxima da solução exata, a direção a montante tende à direção das linhas de corrente produzindo o efeito de captura de descontinuidade.

Além disso, no trabalho de [De Sampaio e Coutinho \(2001\)](#), a velocidade efetiva, similar a empregada no trabalho de [Galeão e Dutra do Carmo \(1988\)](#) foi aplicada para ajustar a velocidade real na direção do fluxo difusivo. Logo, o problema de convecção-difusão aproximado gerou a mesma estrutura de função de peso do método de [Hughes et al. \(1986a\)](#), porém, nesse caso, o operador de captura de descontinuidade resultante não cria o indesejável efeito de duplicação da formulação original SUPG somado a captura de descontinuidade.

3 Formulação Matemática

O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação matemática para escoamentos incompressíveis com transferência de calor em problemas bidimensionais, considerando tanto geometrias cartesianas quanto axissimétricas. A adoção de um modelo bidimensional se justifica principalmente pelo fato de que muitos escoamentos, tanto na área nuclear quanto em outras áreas da engenharia, apresentam simetrias ou geometrias que permitem a simplificação de um modelo tridimensional para uma representação bidimensional. Essa simplificação reduz significativamente o custo computacional, viabilizando simulações com maior resolução espacial e temporal.

Primeiramente, será desenvolvida a formulação para coordenadas cartesianas, seguida pela extensão para coordenadas cilíndricas. Em ambos os casos, o problema é definido em um domínio Ω com fronteira Γ , contidos em um espaço Euclidiano bidimensional. A formulação é estruturada de forma a incorporar as características específicas de cada sistema de coordenadas, garantindo uma representação adequada dos fenômenos físicos. Para os dois modelos considerados, foi adotada a aproximação de Boussinesq, na qual as pequenas variações de densidade devido ao gradiente de temperatura, são incorporadas nos termos de força de empuxo das equações de momentum.

3.1 Modelo Cartesiano

As leis de conservação são os princípios físicos que regem o comportamento dos fluidos e a transferência de calor em um determinado sistema. Essas leis são conhecidas como conservação de massa, quantidade de movimento e de energia.

Escrevendo a equação da Continuidade, de Navier-Stokes e de Energia em coordenadas cartesianas temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho_o \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho_o \beta g_x (T - T_o) = 0 \quad (3.2)$$

$$\rho_o \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} + \rho_o \beta g_y (T - T_o) = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho_o c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

onde as variáveis dependentes são: u e v as componentes da velocidade, p a pressão e T a temperatura. A massa específica a temperatura de referência T_o e dada por ρ_o , o coeficiente de expansão volumétrica é dado por $\beta = -\rho^{-1} \partial \rho / \partial T$ e g é a aceleração da gravidade.

O tensor das tensões viscosas pode ser escrito como:

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.5)$$

e o fluxo de calor como:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.6)$$

onde μ é a viscosidade, k é a condutividade térmica do fluido.

O modelo fica completo com a introdução das condições iniciais e de contorno dos campos de velocidade e temperatura nas fronteiras. As condições de contorno de velocidade e tração na direção x são prescritas pelos valores dados nas fronteiras não sobrepostas Γ_u e Γ_{tx} , tal que $\Gamma_u \cup \Gamma_{tx} = \Gamma$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_{tx} = \emptyset$, de acordo com:

$$u = \bar{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (3.7)$$

$$(-p + \tau_{xx})n_x + \tau_{xy}n_y = \bar{t}_x(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{tx} \quad (3.8)$$

onde n_x e n_y são as componentes na direção x e y , respectivamente, do vetor normal à fronteira.

As condições de contorno de velocidade e tração na direção y são prescritas pelos valores dados nas fronteiras não sobrepostas Γ_v e Γ_{ty} , tal que $\Gamma_v \cup \Gamma_{ty} = \Gamma$ e $\Gamma_v \cap \Gamma_{ty} = \emptyset$, de acordo com:

$$v = \bar{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v \quad (3.9)$$

$$\tau_{xy}n_x + (-p + \tau_{yy})n_y = \bar{t}_y(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ty} \quad (3.10)$$

As condições de contorno de temperatura e fluxo de calor são prescritas pelos valores dados nas fronteiras não sobrepostas Γ_T e Γ_q , tal que $\Gamma_T \cup \Gamma_q = \Gamma$ e $\Gamma_T \cap \Gamma_q = 0$, de acordo com:

$$T = \bar{T}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T \quad (3.11)$$

$$q_x n_x + q_y n_y = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q \quad (3.12)$$

As condições de contorno de pressão e velocidade normal são prescritas pelos valores dados nas fronteiras não sobrepostas Γ_p e Γ_G , tal que $\Gamma_p \cup \Gamma_G = \Gamma$ e $\Gamma_p \cap \Gamma_G = 0$, de acordo com

$$p = \bar{p}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p \quad (3.13)$$

$$un_x + vn_y = \bar{G}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_G \quad (3.14)$$

Note que as Equações de conservação contêm o gradiente de pressão e não a pressão propriamente dita. Ou seja, pelo menos um valor de referência de pressão deve ser prescrito a fim definir um campo de pressão único.

3.1.1 Equações Governantes na Forma Adimensional

De forma a adimensionalizar as equações de conservação governantes, o que permite identificar os números adimensionais relevantes que caracterizam o tipo de regime de escoamento, é preciso escrever as variáveis de forma conveniente em relação as escalas de referência do problema. Sendo assim, as componentes da velocidade, pressão e temperatura na forma adimensional são: $u^* = u/u_o$, $v^* = v/u_o$, $p^* = p/\rho_o u_o^2$ e $T^* = (T - T_o)/\Delta T$ com

$\Delta T = (T_{max} - T_{min})$. Além disso, u_o é a velocidade de referência, T_{max} e T_{min} são as temperaturas máxima e mínima do problema, respectivamente. As coordenadas espaciais são adimensionalizadas com o comprimento característico L , i.e., $x^* = x/L$ e $y^* = y/L$. Ademais, o tempo e a aceleração da gravidade adimensionalizados são expressos na forma: $t^* = t u_o/L$ e $g^* = g/\|\mathbf{g}\|$, respectivamente.

Deste modo, as equações governantes na forma adimensional podem ser escritas, a partir deste ponto, omitindo-se o símbolo '*' das variáveis adimensionais. Essa convenção é adotada por simplicidade de notação, mantendo-se o entendimento de que todas as variáveis envolvidas nas equações subsequentes estão expressas em sua forma adimensional.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} + Ri g_x T = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} + Ri g_y T = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (3.18)$$

Com as equações constitutivas da tensão cisalhante escritas na seguinte forma:

$$\tau_{xx} = \frac{2}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \tau_{xy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad \tau_{yy} = \frac{2}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.19)$$

e do fluxo de calor como:

$$q_x = -\frac{1}{Re Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -\frac{1}{Re Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.20)$$

onde $Re = \rho_o \|\mathbf{u}\| L / \mu$ é o número de Reynolds, $Ri = \beta \Delta T \|\mathbf{g}\| L / u_o^2$ é o número de Richardson e $Pr = c_p \mu / k$ é o número de Prandtl.

É importante destacar que para problemas que envolvem convecção mista e forçada, em que a velocidade de referência utilizada depende das características do caso estudado, o em-

prego das equações na forma adimensional é bastante conveniente. No entanto, para problemas que envolvem apenas convecção natural, é necessário obter a escala de tempo da velocidade de forma indireta, i.e., $u_o = \sqrt{\beta \Delta T \|\mathbf{g}\| L}$. Ou seja, para o caso de convecção natural, os números de Richardson e Reynolds, que aparecem nas equações adimensionais, se tornam $Ri = 1$ e $Re = \sqrt{Ra/Pr}$, respectivamente, onde $Ra = \rho_o c_p \|\mathbf{g}\| \beta \Delta T L^3 / \mu k$ é o número de Rayleigh.

3.2 Modelo Axissimétrico

Para o modelo axissimétrico, as equações de continuidade, Navier-Stokes e energia para um fluido incompressível podem ser escritas em coordenadas cilíndricas como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (3.21)$$

$$\rho_o \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rS_{xr})}{\partial r} + \rho_o \beta g_x (T - T_o) = 0 \quad (3.22)$$

$$\rho_o \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial S_{xr}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rS_{rr})}{\partial r} + \frac{S_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (3.23)$$

$$\rho_o c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rq_r)}{\partial r} = 0 \quad (3.24)$$

onde u é a componente da velocidade na direção axial, v é a componente da velocidade na direção radial, p a pressão, e T a temperatura.

No modelo axissimétrico, a equação de quantidade de movimento na direção angular não é resolvida devido a consideração de simetria em relação ao eixo. Além disso, as equações constitutivas incorporadas nas equações de conservação acima são escritas para a tensão cisalhante como:

$$S_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad S_{xr} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad S_{rr} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} \quad S_{\theta\theta} = 2\mu \frac{v}{r} \quad (3.25)$$

e para o fluxo de calor como:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.26)$$

Novamente, o modelo fica completo com a introdução das condições iniciais e de contorno dos campos de velocidade e temperatura nas fronteiras. As condições de contorno de velocidade e tração na direção axial são prescritas pelos valores dados nas fronteiras não sobrepostas Γ_u e Γ_{t_x} , tal que $\Gamma_u \cup \Gamma_{t_x} = \Gamma$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_{t_x} = \emptyset$, de acordo com:

$$u = \bar{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (3.27)$$

$$(-p + S_{xx})n_x + S_{xr}n_r = \bar{t}_x(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{t_x} \quad (3.28)$$

onde n_x e n_r são as componente axial e radial, respectivamente, do vetor normal à fronteira.

As condições de contorno de velocidade e tração na direção radial são prescritas pelos valores dados nas fronteiras não sobrepostas Γ_v e Γ_{t_r} , tal que $\Gamma_v \cup \Gamma_{t_r} = \Gamma$ e $\Gamma_v \cap \Gamma_{t_r} = \emptyset$, de acordo com:

$$v = \bar{v}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v \quad (3.29)$$

$$S_{xr}n_x + (-p + S_{rr})n_r = \bar{t}_r(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{t_r} \quad (3.30)$$

As condições de contorno de temperatura e fluxo de calor são prescritas pelos valores dados nas fronteiras não sobrepostas Γ_T e Γ_q , tal que $\Gamma_T \cup \Gamma_q = \Gamma$ e $\Gamma_T \cap \Gamma_q = \emptyset$, de acordo com:

$$T = \bar{T}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T \quad (3.31)$$

$$q_x n_x + q_r n_r = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q \quad (3.32)$$

As condições de contorno de pressão e velocidade normal são prescritas pelos valores dados nas fronteiras não sobrepostas Γ_p e Γ_G , tal que $\Gamma_p \cup \Gamma_G = \Gamma$ e $\Gamma_p \cap \Gamma_G = \emptyset$, de acordo com:

$$p = \bar{p}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p \quad (3.33)$$

$$un_x + vn_r = \bar{G}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_G \quad (3.34)$$

3.2.1 Equações Governantes na Forma Adimensional

Análogo ao que foi feito para adimensionalizar as equações de conservação em coordenadas cartesianas, na forma adimensional das equações em coordenadas cilíndricas as variáveis primitivas velocidade, pressão e temperatura podem ser escritas como: $u^* = u/u_o$, $v^* = v/u_o$, $p^* = p/\rho_o u_o^2$ e $T^* = (T - T_o)/\Delta T$. As coordenadas espaciais são adimensionalizadas com o comprimento de referência D , i.e., $x^* = x/D$ e $r^* = r/D$ e o tempo e a aceleração da gravidade adimensionalizados são expressos na forma: $t^* = t u_o/D$ e $g_x^* = g_x/\|\mathbf{g}\|$, respectivamente.

Como na seção anterior, as equações governantes na forma adimensional podem ser escritas, a partir deste ponto, omitindo-se o símbolo '*' das variáveis adimensionais.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0 \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rS_{xr})}{\partial r} + Ri g_x T = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial S_{xr}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rS_{rr})}{\partial r} + \frac{S_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rq_r)}{\partial r} = 0 \quad (3.38)$$

Com as equações constitutivas da tensão cisalhante escritas na seguinte forma:

$$S_{xx} = \frac{2}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} \quad S_{xr} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad S_{rr} = \frac{2}{Re} \frac{\partial v}{\partial r} \quad S_{\theta\theta} = \frac{2}{Re} \frac{v}{r} \quad (3.39)$$

e do fluxo de calor como:

$$q_x = -\frac{1}{RePr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_r = -\frac{1}{RePr} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.40)$$

onde $Re = \rho_o u_o D / \mu$, $Pr = c_p \mu / k$ e $Ri = \beta \Delta T \| \mathbf{g} \| D / u_o^2$ são os números de Reynold, Prandtl e Richardson respectivamente.

No modelo axissimétrico, com comprimento característico diferente do modelo cartesiano, a escala da velocidade de referência tomada indiretamente, é definida como $u_o = \sqrt{\beta \Delta T \| \mathbf{g} \| D}$. Portanto, para convecção livre, os números de Richardson e Reynolds se tornam $Ri = 1$ e $Re = \sqrt{Ra/Pr}$, onde $Ra = \rho_o^2 c_p \| \mathbf{g} \| \Delta T D^3 / \mu k$ é o número de Rayleigh.

4 Formulação Estabilizada

Neste trabalho, a formulação estabilizada segue aquela derivada no trabalho de [De Sampaio \(2006\)](#). Como dito anteriormente na revisão bibliográfica, para os problemas de difusão, a solução pelo método de Galerkin padrão é direta. No entanto, se uma aproximação desse tipo fosse usada para resolver equações de convecção com valores críticos de Peclet elementar, os resultados apresentariam oscilações espúrias. Por isso, com o objetivo de eliminar essas oscilações, diversos esquemas de upwinding como o SUPG foram desenvolvidos ([Nithiarasu et al., 2016](#)).

A formulação apresentada aqui pertence a classe das formulações de elementos finitos inerentemente estáveis, i.e., não requerem a introdução de termos escolhidos a priori para serem estabilizadas. Os termos que garantem a estabilização surgem de forma natural conduzindo a uma aproximação conveniente para solução do problema de convecção dominante, produzindo dessa forma o efeito SUPG. Além disso, os campos de velocidade e pressão são projetados em espaços de funções de mesma ordem, condição que violaria a restrição de Babuška-Brezzi se não fossem estabilizados.

4.1 Atualização dos Campos - Cartesiano

4.1.1 Atualização do Campo de Pressão

Para derivar a equação de atualização dos valores de pressão, é realizada uma expansão temporal das variáveis dependentes velocidade e temperatura. Com isso, a velocidade u pode ser expressa utilizando uma série de Taylor de segunda ordem, da seguinte forma:

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n + O(\Delta t^3) \quad (4.1)$$

onde os sobrescritos n e $n + 1$ indicam o nível de tempo e Δt indica o passo de tempo entre dois níveis de tempo consecutivos.

Note que é possível escrever a equação acima como:

$$u^{n+1} - u^n = \Delta u = \Delta t \left[\frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^n \right] + O(\Delta t^3) \quad (4.2)$$

$$\Delta u = \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+1/2} + O(\Delta t^3) \quad (4.3)$$

onde a variação da velocidade durante o passo de tempo Δt é denotado por $\Delta u = u^{n+1} - u^n$.

Nesse momento, definimos o que chamamos de velocidade real como o vetor velocidade \mathbf{a} , que será usado nas equações de conservação, como:

$$\mathbf{a} = u\hat{\mathbf{e}}_x + v\hat{\mathbf{e}}_y \quad (4.4)$$

Dessa forma, é possível escrever:

$$\mathbf{a} \cdot \nabla u = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad \mathbf{a} \cdot \nabla v = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \quad \mathbf{a} \cdot \nabla T = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4.5)$$

Assim, ao substituir a variação da velocidade Δu na equação de conservação da quantidade de movimento na direção x , e aplicando o mesmo procedimento aos termos Δv e ΔT nas equações de conservação da quantidade de movimento na direção y e de energia, respectivamente, obtém-se:

$$\Delta u = -\Delta t \left[\mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla u^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^{n+1/2}}{\partial y} + Ri g_x T^{n+1/2} \right] + O(\Delta t^3) \quad (4.6)$$

$$\Delta v = -\Delta t \left[\mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla v^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}^{n+1/2}}{\partial y} + Ri g_y T^{n+1/2} \right] + O(\Delta t^3) \quad (4.7)$$

$$\Delta T = -\Delta t \left[\mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla T^{n+1/2} + \frac{\partial q_x^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial q_y^{n+1/2}}{\partial y} \right] + O(\Delta t^3) \quad (4.8)$$

Uma outra forma útil de representar as expressões acima é tomar uma aproximação de menor ordem, na qual as variáveis são avaliadas no nível de tempo n , com exceção do gradiente de pressão, que é avaliado no nível $n + 1/2$:

$$\Delta u = -\Delta t \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla u^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial y} + Ri g_x T^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (4.9)$$

$$\Delta v = -\Delta t \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla v^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}^n}{\partial y} + Ri g_y T^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (4.10)$$

$$\Delta T = -\Delta t \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla T^n + \frac{\partial q_x^n}{\partial x} + \frac{\partial q_y^n}{\partial y} \right] + O(\Delta t^2) \quad (4.11)$$

Com as expressões para Δu e Δv já determinadas, ao impor o balanço de massa no nível de tempo $n + 1$, obtemos:

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = 0 \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} = 0 \quad (4.13)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados, onde φ é a função peso, e integrando sobre o domínio Ω , obtemos:

$$\int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

Ao integrar o resíduo com a função peso φ , garantimos que sua média ponderada (integral) sobre o domínio seja igual a zero. Essa é a chamada formulação fraca, pois ela não exige que a solução coincida a menos de um conjunto de medida nula.

Integrando por partes, essa equação assume a forma:

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta u d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta v d\Omega + \int_{\Gamma} \varphi (\Delta u n_x + \Delta v n_y) d\Gamma + \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} \right] d\Omega = 0 \quad (4.15)$$

Substituindo Δu e Δv na equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla u^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial y} + Ri g_x T^n \right] d\Omega \\ + \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla v^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}^n}{\partial y} + Ri g_y T^n \right] d\Omega = \\ - \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} \right] d\Omega - \int_{\Gamma} \varphi (\Delta u n_x + \Delta v n_y) d\Gamma + O(\Delta t^2) \quad (4.16) \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação acima e considerando que a pressão é prescrita na fronteira Γ_p , o valor da função peso φ , tal que $\varphi = 0$ em Γ_p , e que em Γ_G a variação do fluxo através da fronteira é prescrita como $\Delta \bar{G} = \Delta u n_x + \Delta v n_y$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta t \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial y} \right] d\Omega = - \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} \right] d\Omega \\ - \int_{\Gamma_G} \varphi \Delta \bar{G} d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla u^n - \frac{\partial \tau_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial y} + Ri g_x T^n \right] d\Omega \\ - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla v^n - \frac{\partial \tau_{xy}^n}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}^n}{\partial y} + Ri g_y T^n \right] d\Omega \quad (4.17) \end{aligned}$$

Como o método de Elementos Finitos é baseado na formulação fraca do problema, busca-se uma solução aproximada para as equações diferenciais em um espaço de dimensão finita. Essa solução aproximada é uma projeção da solução exata em um subespaço apropriado e pode ser representada como uma combinação linear de um número finito de funções conhecidas, que formam a base desse subespaço. Isso implica que u pode ser escrito como o somatório:

$$\hat{u} = N_j u_j$$

onde N_j são as funções forma e u_j são os valores nodais.

Neste trabalho, a discretização espacial é realizada utilizando elementos finitos com funções forma Lagrangianas triangulares lineares em duas dimensões. Assim, as variáveis de velocidade, pressão e temperatura são representadas como: $\hat{u} = N_j u_j$, $\hat{v} = N_j v_j$, $\hat{p} = N_j p_j$ e $\hat{T} = N_j T_j$.

Aplicando o método de Galerkin, obtemos da Eq. 4.15 a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta t \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} \right] d\Omega = & - \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} \right] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_G} N_i \Delta \bar{G} d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{u}^n - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial y} + Ri g_x \hat{T}^n \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial y} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{v}^n - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} + Ri g_y \hat{T}^n \right] d\Omega \quad (4.18) \end{aligned}$$

Dessa forma, a equação acima é usada para calcular o campo de pressão $\hat{p}^{n+1/2}$.

4.1.2 Atualização dos Campos de Velocidade e Temperatura

Uma vez que foi obtida uma expressão para o cálculo do campo de pressão, prosseguimos com a atualização dos campos de velocidade e temperatura. Para isso, são utilizadas as equações de conservação de quantidade de movimento e energia na forma discretizada no tempo $n + 1$:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + \mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla u^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^{n+1/2}}{\partial y} + Ri g_x T^{n+1/2} = 0 + O(\Delta t^2) \quad (4.19)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} + \mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla v^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}^{n+1/2}}{\partial y} + Ri g_y T^{n+1/2} = 0 + O(\Delta t^2) \quad (4.20)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} + \mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla T^{n+1/2} + \frac{\partial q_x^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial q_y^{n+1/2}}{\partial y} = 0 + O(\Delta t^2) \quad (4.21)$$

Note que é possível representar as variáveis no nível de tempo intermediário $n + 1/2$. Sendo assim, utilizando as expansões de Taylor, obtemos:

$$u^{n+1/2} = \frac{u^{n+1} + u^n}{2} + O(\Delta t^2) = u^n + \frac{\Delta u}{2} + O(\Delta t^2) \quad (4.22)$$

$$v^{n+1/2} = \frac{v^{n+1} + v^n}{2} + O(\Delta t^2) = v^n + \frac{\Delta v}{2} + O(\Delta t^2) \quad (4.23)$$

$$T^{n+1/2} = \frac{T^{n+1} + T^n}{2} + O(\Delta t^2) = T^n + \frac{\Delta T}{2} + O(\Delta t^2) \quad (4.24)$$

Assim, considerando que os cálculos iterativos das variáveis: Δu^k , Δv^k e ΔT^k são valores estimados para a variação de u , v e T durante o passo de tempo Δt , onde k é um índice provisório usado durante as iterações até se atingir a segunda ordem no tempo. Então, u^k , v^k e T^k são as estimativas correspondentes dessas variáveis no tempo $t^{n+1/2} = t^n + \Delta t/2$. Dessa forma, tomamos as seguintes aproximações das variáveis no nível de tempo $t^{n+1/2}$:

$$u^k = u^n + \frac{\Delta u^k}{2} \quad u^{k+1} = u^n + \frac{\Delta u^{k+1}}{2} \quad (4.25)$$

$$v^k = v^n + \frac{\Delta v^k}{2} \quad v^{k+1} = v^n + \frac{\Delta v^{k+1}}{2} \quad (4.26)$$

$$T^k = T^n + \frac{\Delta T^k}{2} \quad T^{k+1} = T^n + \frac{\Delta T^{k+1}}{2} \quad (4.27)$$

Considerando a equação de momentum. Das equações 4.19 e 4.20, temos:

$$\frac{\Delta u^{k+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^k \cdot \nabla (\Delta u)^{k+1} + \mathbf{a}^k \cdot \nabla u^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}^k}{\partial y} + Ri g_x T^k = 0 \quad (4.28)$$

$$\frac{\Delta v^{k+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^k \cdot \nabla (\Delta v)^{k+1} + \mathbf{a}^k \cdot \nabla v^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}^k}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}^k}{\partial y} + Ri g_y T^k = 0 \quad (4.29)$$

Para a equação de energia 4.21, temos o seguinte resultado análogo à da equação anterior:

$$\frac{\Delta T^{k+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^k \cdot \nabla (\Delta T)^{k+1} + \mathbf{a}^k \cdot \nabla T^n + \frac{\partial q_x^k}{\partial x} + \frac{\partial q_y^k}{\partial y} = 0 \quad (4.30)$$

Para produzir os resíduos das componentes do campo de velocidade e da temperatura, novamente, as variáveis são discretizadas espacialmente usando elementos finitos assumindo as seguintes formas: $\hat{u}^k = N_j u_j^k$, $\hat{v}^k = N_j v_j^k$, $\hat{T}^k = N_j T_j^k$, $\Delta \hat{u}^k = N_j \Delta u_j^k$, $\Delta \hat{v}^k = N_j \Delta v_j^k$ e $\Delta \hat{T}^k = N_j \Delta T_j^k$. Essa discretização é utilizada para aproximar os respectivos campos nas equações 4.28, 4.29 e 4.30:

$$R_x = \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{u}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{k+1} \right] + \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} + Ri g_x \hat{T}^k \quad (4.31)$$

$$R_y = \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{v}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{v})^{k+1} \right] + \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^k}{\partial y} + Ri g_y \hat{T}^k \quad (4.32)$$

$$R_E = \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{T}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{T})^{k+1} \right] + \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial q_x^k}{\partial x} + \frac{\partial q_y^k}{\partial y} \quad (4.33)$$

Usando o resíduo da discretização da equação de momentum, podemos escrever o resíduo quadrado como:

$$S = \int_{\Omega} \lambda (R_x R_x + R_y R_y) d\Omega \quad (4.34)$$

onde λ é um parâmetro de escala.

Minimizando S com relação as variáveis livres Δu_i^{k+1} e Δv_i^{k+1} , temos:

$$\Delta S = \frac{\delta S}{\delta \Delta u_i^{k+1}} \delta \Delta u_i^{k+1} + \frac{\delta S}{\delta \Delta v_i^{k+1}} \delta \Delta v_i^{k+1} = 0 \quad (4.35)$$

onde,

$$\frac{\delta S}{\delta \Delta u_i^{k+1}} = \int_{\Omega} 2\lambda \frac{\delta R_x}{\delta \Delta u_i^{k+1}} R_x d\Omega = 0 \quad \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.36)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \Delta v_i^{k+1}} = \int_{\Omega} 2\lambda \frac{\delta R_y}{\delta \Delta v_i^{k+1}} R_y d\Omega = 0 \quad \forall \Delta v_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.37)$$

O parâmetro λ , que nesse trabalho é $\lambda = \Delta t$, foi escolhido de forma a obter o resíduo ponderado do tipo Petrov-Galerkin como se segue:

$$\int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] R_x d\Omega = 0 \quad \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.38)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] R_y d\Omega = 0 \quad \forall \Delta v_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.39)$$

Note que a primeira parte da função peso corresponde a função peso do método de Galerkin. Então, da Eq. 4.38, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{u}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{k+1} \right] d\Omega = \\ - \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} + Ri g_x \hat{T}^k \right] d\Omega = 0 \\ \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.40) \end{aligned}$$

Seja o seguinte termo da Eq. 4.40:

$$- \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} \right] d\Omega \quad (4.41)$$

Usando a identidade de Green, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{p}^{n+1/2} - \hat{\tau}_{xx}^k \right] d\Omega \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\tau}_{xy}^k d\Omega + \int_{\Gamma} N_i \left[(-\hat{p}^{n+1/2} + \hat{\tau}_{xx}^k) n_x + \hat{\tau}_{xy}^k n_y \right] d\Gamma \quad (4.42) \end{aligned}$$

Considerando que a fronteira Γ constitui-se de duas partes não sobrepostas, Γ_u e Γ_{t_x} , como dito anteriormente. A componente da velocidade \hat{u} é prescrita em Γ_u e portanto $\Delta \hat{u}$ também é prescrito em Γ_u . Dessa forma, $N_i = 0$ em Γ_u onde $\Delta \hat{u}_i^{k+1}$ é prescrito. Por outro lado, $\hat{t}_x^k = (-\hat{p}^{n+1/2} + \hat{\tau}_{xx}^k) n_x + \hat{\tau}_{xy}^k n_y$ é prescrito em Γ_{t_x} . Então, usando a Eq. 4.40, temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{u}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{k+1} \right] d\Omega = \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{p}^{n+1/2} - \hat{\tau}_{xx}^k \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\tau}_{xy}^k d\Omega - \int_{\Omega} N_i \left(\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + Ri g_x \hat{T}^k \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} + Ri g_x \hat{T}^k \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{tx}} N_i \hat{t}_x^k d\Gamma \\
& \quad \quad \quad \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.43)
\end{aligned}$$

De forma similar para o resíduo da velocidade na direção y, pela Eq. 4.39, temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{v}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{v})^{k+1} \right] d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{\tau}_{xy}^k d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{\tau}_{yy}^k) d\Omega - \int_{\Omega} N_i \left(\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + Ri g_y \hat{T}^k \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^k}{\partial y} + Ri g_y \hat{T}^k \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{ty}} N_i \hat{t}_y^k d\Gamma \\
& \quad \quad \quad \forall \Delta v_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.44)
\end{aligned}$$

onde a fronteira Γ constitui-se de duas partes não sobrepostas, Γ_v e Γ_{t_y} , como dito anteriormente. A componente da velocidade \hat{v} é prescrita em Γ_v e portanto $\Delta \hat{v}$ também é prescrito em Γ_v . Dessa forma, $N_i = 0$ em Γ_v onde $\Delta \hat{v}_i^{k+1}$ é prescrito. Por outro lado, $\hat{t}_y^k = \hat{\tau}_{xy}^k n_x + (-\hat{p}^{n+1/2} + \hat{\tau}_{yy}^k) n_y$ é prescrito em Γ_{t_y} .

Dado o resíduo da discretização da equação da energia (4.33), podemos escrever o resíduo quadrado como:

$$S = \int_{\Omega} \lambda R_E R_E d\Omega \quad (4.45)$$

Minimizando S com relação as variáveis livres ΔT_i^{k+1} e escolhendo $\lambda = \Delta t$, temos:

$$\int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] R_E d\Omega = 0 \quad \forall \Delta T_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.46)$$

Portanto, substituindo R_E na equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{T}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta T)^{k+1} \right] d\Omega = \\ - \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^k}{\partial y} \right] d\Omega \quad \forall \Delta T_i^{k+1} \text{ livre} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Seja o seguinte termo da Eq. 4.47:

$$- \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^k}{\partial y} \right] d\Omega \quad (4.48)$$

Usando a identidade de Green, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$- \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^k}{\partial y} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^k d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_y^k d\Omega - \int_{\Gamma} N_i (\hat{q}_x^k n_x + \hat{q}_y^k n_y) d\Gamma \quad (4.49)$$

Considerando que a fronteira Γ constitui-se de duas partes não sobrepostas, Γ_T e Γ_q , como dito anteriormente. As componente da Temperatura \hat{T} são prescritas em Γ_T e portanto $\Delta \hat{T}$ também é prescrito em Γ_T . Dessa forma, $N_i = 0$ em Γ_T onde $\Delta \hat{T}_i^{k+1}$ é prescrito. Por outro lado, $\vec{q}^k = q_x^k n_x + q_y^k n_y$ é prescrito em Γ_q . Então, usando a Eq. 4.49 na Eq. 4.47, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{T}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{T})^{k+1} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^k d\Omega \\ + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_y^k d\Omega - \int_{\Omega} N_i \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^k}{\partial y} \right] d\Omega \\ - \int_{\Gamma_q} N_i \vec{q}^k d\Gamma \quad \forall \Delta T_i^{k+1} \text{ livre} \end{aligned} \quad (4.50)$$

4.2 Atualização dos Campos - Axissimétrico

4.2.1 Atualização do Campo de Pressão

Para obter a equação de atualização dos valores de pressão no modelo Axissimétrico, seguindo o mesmo procedimento do modelo anterior, é feita uma discretização no tempo das variáveis de velocidade e temperatura. Além disso, o vetor velocidade real \mathbf{a} , escrito em coordenadas cilíndricas, que será usado nas equações de conservação, é definido como:

$$\mathbf{a} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_r \quad (4.51)$$

Dessa forma, é possível escrever:

$$\mathbf{a} \cdot \nabla u = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \quad \mathbf{a} \cdot \nabla v = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \quad \mathbf{a} \cdot \nabla T = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \quad (4.52)$$

Assim, utilizando a expansão em série de Taylor das variáveis, como em 4.3, e substituindo nas equações de quantidade de movimento nas direções axial e radial e na equação de energia, temos:

$$\Delta u = -\Delta t \left[\mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla u^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r S_{xr}^{n+1/2} \right) + Ri g_x T^{n+1/2} \right] + O(\Delta t^3) \quad (4.53)$$

$$\Delta v = -\Delta t \left[\mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla v^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial r} - \frac{\partial S_{xr}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r S_{rr}^{n+1/2} \right) + \frac{S_{\theta\theta}^{n+1/2}}{r} \right] + O(\Delta t^3) \quad (4.54)$$

$$\Delta T = -\Delta t \left[\mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla T^{n+1/2} + \frac{\partial q_x^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r q_r^{n+1/2} \right) \right] + O(\Delta t^3) \quad (4.55)$$

Tomando uma aproximação de menor ordem das equações acima com as variáveis avaliadas no nível de tempo n , com exceção do gradiente de pressão, que é avaliado no nível $n + 1/2$, temos:

$$\Delta u = -\Delta t \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla u^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}^n}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{xr}^n) + Ri g_x T^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (4.56)$$

$$\Delta v = -\Delta t \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla v^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial r} - \frac{\partial S_{xr}^n}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r S_{rr}^n) + \frac{S_{\theta\theta}^n}{r} \right] + O(\Delta t^2) \quad (4.57)$$

$$\Delta T = -\Delta t \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla T^n + \frac{\partial q_x^n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r^n) \right] + O(\Delta t^2) \quad (4.58)$$

Impondo o balanço de massa no nível de tempo $n + 1$, obtemos:

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v^{n+1})}{\partial r} = 0 \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Delta v)}{\partial r} + \frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v^n)}{\partial r} = 0 \quad (4.60)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados, onde φ é a função peso, e integrando sobre o domínio Ω , obtemos:

$$\int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Delta v)}{\partial r} \right] r d\Omega + \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v^n)}{\partial r} \right] r d\Omega = 0 \quad (4.61)$$

Integrando por partes, essa equação assume a forma:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta u r d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Delta v r d\Omega + \int_{\Gamma} \varphi (\Delta u n_x + \Delta v n_r) r d\Gamma \\ + \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v^n)}{\partial r} \right] r d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Substituindo Δu e Δv na equação acima, temos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla u^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}^n}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{xr}^n)}{\partial r} + Ri g_x T^n \right] r d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla v^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial r} - \frac{\partial S_{xr}^n}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rr}^n)}{\partial r} + \frac{S_{\theta\theta}^n}{r} \right] r d\Omega = \\ & - \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v^n)}{\partial r} \right] r d\Omega - \int_{\Gamma} \varphi (\Delta u n_x + \Delta v n_r) r d\Gamma + O(\Delta t^2) \quad (4.63) \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação acima e considerando que a pressão é prescrita Γ_p , o valor da função peso φ , tal que $\varphi = 0$ em Γ_p , e em Γ_G a variação do fluxo através da fronteira é prescrita como, $\Delta \bar{G} = \Delta u n_x + \Delta v n_r$, obtemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta t \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial r} \right] r d\Omega = - \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v^n)}{\partial r} \right] r d\Omega - \int_{\Gamma_G} \varphi \Delta \bar{G} r d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla u^n - \frac{\partial S_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial S_{xr}^n}{\partial r} + Ri g_x T^n \right] r d\Omega - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left[\mathbf{a}^n \cdot \nabla v^n - \frac{\partial S_{xr}^n}{\partial x} - \frac{\partial S_{rr}^n}{\partial r} \right] r d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial x} S_{xr}^n d\Omega + \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial r} (S_{rr}^n - S_{\theta\theta}^n) d\Omega \quad (4.64) \end{aligned}$$

A discretização espacial da equação acima é realizada de forma análoga à Eq. 4.17, utilizando o método de Galerkin. Esse procedimento resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Delta t \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial r} \right] r d\Omega = - \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right] r d\Omega - \int_{\Omega} N_i \hat{v}^n d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_G} N_i \Delta \bar{G} r d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{u}^n - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^n}{\partial r} + Ri g_x \hat{T}^n \right] r d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial r} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{v}^n - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{rr}^n}{\partial r} \right] r d\Omega + \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{S}_{xr}^n d\Omega + \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial r} (\hat{S}_{rr}^n - \hat{S}_{\theta\theta}^n) d\Omega \quad (4.65) \end{aligned}$$

A equação acima é usada para calcular o campo de pressão $\hat{p}^{n+1/2}$.

4.2.2 Atualização dos Campos de Velocidade e Temperatura

Analogamente ao modelo Cartesiano, após o cálculo do campo de pressão, prosseguimos com a atualização dos campos de velocidade e temperatura. Para isso, são utilizadas as equações de conservação de quantidade de movimento e energia na forma discretizada no tempo $n + 1$:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} + \mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla u^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{xr}^{n+1/2})}{\partial r} + Ri g_x T^{n+1/2} = 0 + O(\Delta t^2) \quad (4.66)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} + \mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla v^{n+1/2} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial r} - \frac{\partial S_{xr}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rr}^{n+1/2})}{\partial r} + \frac{S_{\theta\theta}^{n+1/2}}{r} = 0 + O(\Delta t^2) \quad (4.67)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} + \mathbf{a}^{n+1/2} \cdot \nabla T^{n+1/2} + \frac{\partial q_x^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r q_r^{n+1/2})}{\partial r} = 0 + O(\Delta t^2) \quad (4.68)$$

Utilizando as expressões 4.22 - 4.27 para o cálculo iterativo das variáveis a fim de se alcançar uma precisão de segunda ordem no tempo, i.e., no nível de tempo $n + 1/2$, as Eqs. 4.66 - 4.68 resultam em:

$$\frac{\Delta u^{k+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^k \cdot \nabla (\Delta u)^{k+1} + \mathbf{a}^k \cdot \nabla u^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial S_{xx}^k}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{xr}^k)}{\partial r} + Ri g_x T^k = 0 \quad (4.69)$$

$$\frac{\Delta v^{k+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^k \cdot \nabla (\Delta v)^{k+1} + \mathbf{a}^k \cdot \nabla v^n + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial r} - \frac{\partial S_{xr}^k}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r S_{rr}^k)}{\partial r} + \frac{S_{\theta\theta}^k}{r} = 0 \quad (4.70)$$

$$\frac{\Delta T^{k+1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \mathbf{a}^k \cdot \nabla (\Delta T)^{k+1} + \mathbf{a}^k \cdot \nabla T^n + \frac{\partial q_x^k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r q_r^k)}{\partial r} = 0 \quad (4.71)$$

Os resíduos das componentes do campo de velocidade e da temperatura são escritos usando a mesma discretização espacial em elementos finitos que no modelo Cartesiano. Essa discretização é utilizada para aproximar os respectivos campos nas equações 4.69, 4.70 e 4.71:

$$R_x = \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{u}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{k+1} \right] + \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{S}_{xr}^k)}{\partial r} + Ri g_x \hat{T}^k \quad (4.72)$$

$$R_r = \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{v}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{v})^{k+1} \right] + \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^k}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{S}_{rr}^k)}{\partial r} + \frac{\hat{S}_{\theta\theta}^k}{r} \quad (4.73)$$

$$R_E = \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{T}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{T})^{k+1} \right] + \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{q}_r^k)}{\partial r} \quad (4.74)$$

Usando o resíduo da discretização da equação de momentum, podemos escrever o resíduo quadrado como:

$$S = \int_{\Omega} \lambda (R_x R_x + R_r R_r) r d\Omega \quad (4.75)$$

onde, assim como no modelo anterior, λ é um parâmetro de escala.

Minimizando S com relação as variáveis livres Δu_i^{k+1} e Δv_i^{k+1} , temos:

$$\Delta S = \frac{\delta S}{\delta \Delta u_i^{k+1}} \delta \Delta u_i^{k+1} + \frac{\delta S}{\delta \Delta v_i^{k+1}} \delta \Delta v_i^{k+1} = 0 \quad (4.76)$$

Então,

$$\frac{\delta S}{\delta \Delta u_i^{k+1}} = \int_{\Omega} 2\lambda \frac{\delta R_x}{\delta \Delta u_i^{k+1}} R_x r d\Omega = 0 \quad \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.77)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \Delta v_i^{k+1}} = \int_{\Omega} 2\lambda \frac{\delta R_r}{\delta \Delta v_i^{k+1}} R_r r d\Omega = 0 \quad \forall \Delta v_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.78)$$

Escolhendo $\lambda = \Delta t$, temos:

$$\int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] R_x r d\Omega = 0 \quad \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.79)$$

$$\int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] R_r r d\Omega = 0 \quad \forall \Delta v_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.80)$$

Note que novamente a primeira parte da função peso corresponde a função peso do

método de Galerkin. Então, da Eq. 4.79, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{u}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{k+1} \right] rd\Omega = \\ - \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{S}_{xr}^k)}{\partial r} + Ri g_x \hat{T}^k \right] rd\Omega \\ \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.81) \end{aligned}$$

Seja o seguinte termo da Eq.4.81

$$- \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{S}_{xr}^k)}{\partial r} \right] rd\Omega \quad (4.82)$$

Usando a identidade de Green, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{S}_{xr}^k)}{\partial r} \right] rd\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{S}_{xx}^k) rd\Omega \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{S}_{xr}^k rd\Omega + \int_{\Gamma} N_i \left[(-\hat{p}^{n+1/2} + \hat{S}_{xx}^k) n_x + \hat{S}_{xr}^k n_r \right] rd\Gamma \quad (4.83) \end{aligned}$$

Considerando que a fronteira Γ constitui-se de duas partes não sobrepostas, Γ_u e Γ_{tx} , como dito anteriormente. A componente da velocidade \hat{u} é prescrita em Γ_u e portanto $\Delta \hat{u}$ também é prescrito em Γ_u . Dessa forma, $N_i = 0$ em Γ_u onde Δu_i^{k+1} é prescrito. Por outro lado, $\vec{t}_x^k = (-\hat{p}^{n+1/2} + \hat{S}_{xx}^k) n_x + \hat{S}_{xr}^k n_r$ é Γ_{tx} . Então, usando a Eq. acima na Eq. 4.81, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{u}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{k+1} \right] rd\Omega = \\ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{S}_{xx}^k) rd\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{S}_{xr}^k rd\Omega - \int_{\Omega} N_i (\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + Ri g_x \hat{T}^k) rd\Omega \\ - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^k}{\partial r} - \frac{\hat{S}_{xr}^k}{r} + Ri g_x \hat{T}^k \right] rd\Omega \\ + \int_{\Gamma_{tx}} N_i \vec{t}_x^k rd\Gamma \quad \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.84) \end{aligned}$$

De forma similar para o resíduo da velocidade na direção radial, pela Eq. 4.80, temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{v}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{v})^{k+1} \right] r d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{S}_{xr}^k r d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{S}_{rr}^k) r d\Omega + \int_{\Omega} N_i \hat{p}^{n+1/2} d\Omega - \int_{\Omega} N_i (\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\hat{S}_{\theta\theta}^k}{r}) r d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{rr}^k}{\partial r} - \frac{\hat{S}_{rr}^k}{r} + \frac{\hat{S}_{\theta\theta}^k}{r} \right] r d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_{tr}} N_i \vec{t}_r^k r d\Gamma \quad \forall \Delta v_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.85)
\end{aligned}$$

onde a fronteira Γ constitui-se de duas partes não sobrepostas, Γ_v e Γ_{tr} , como dito anteriormente. A componente da velocidade \hat{v} é prescrita em Γ_v e portanto $\Delta \hat{v}$ também é prescrito em Γ_v . Dessa forma, $N_i = 0$ em Γ_v onde Δv_i^{k+1} é prescrito. Por outro lado, $\vec{t}_r^k = \hat{S}_{xr}^k n_x + (-\hat{p}^{k+1/2} + \hat{S}_{rr}^k) n_r$ é prescrito em Γ_{tr} .

Dado o resíduo da discretização da equação da energia (4.74), podemos escrever o resíduo quadrado como:

$$S = \int_{\Omega} \lambda R_E R_E r d\Omega \quad (4.86)$$

Minimizando S com relação as variáveis livres ΔT_i^{k+1} e escolhendo $\lambda = \Delta t$, temos:

$$\int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] R_E r d\Omega = 0 \quad \forall \Delta T_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.87)$$

Portanto, substituindo R_E na equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{T}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{T})^{k+1} \right] r d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{q}_r^k)}{\partial r} \right] r d\Omega \quad \forall \Delta T_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.88)
\end{aligned}$$

Seja o seguinte termo da Eq. acima:

$$- \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{q}_r^k)}{\partial r} \right] r d\Omega \quad (4.89)$$

Usando a identidade de Green, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$-\int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \hat{q}_r^k)}{\partial r} \right] rd\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^k rd\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{q}_r^k rd\Omega - \int_{\Gamma} N_i (\hat{q}_x^k n_x + \hat{q}_r^k n_r) rd\Gamma \quad (4.90)$$

Considerando que a fronteira Γ constitui-se de duas partes não sobrepostas, Γ_T e Γ_q , como dito anteriormente. As componente da Temperatura \hat{T} são prescritas em Γ_T e portanto $\Delta \hat{T}$ também é prescrito em Γ_T . Dessa forma, $N_i = 0$ em Γ_T onde ΔT_i^{k+1} é prescrito. Por outro lado, $\bar{q}^k = \hat{q}_x^k n_x + \hat{q}_r^k n_r$ é prescrito em Γ_q . Então, usando a Eq. 4.90 na Eq. 4.88, temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{T}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{T})^{k+1} \right] rd\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^k rd\Omega \\ &+ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{q}_r^k rd\Omega - \int_{\Omega} N_i \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n rd\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{a}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_r^k}{\partial r} + \frac{\hat{q}_r^k}{r} \right] rd\Omega \\ &- \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q}_k rd\Gamma \quad \forall \Delta T_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.91) \end{aligned}$$

4.3 Modelo Submalha Implícito

Uma característica importante das formulações estabilizadas de elementos finitos é a introdução de forma inerente de um modelo submalha para as escalas não resolvíveis do escoamento. Em um importante trabalho, [Hughes \(1995\)](#) propôs o Método Multiescala Variacional, explicando a relação entre modelos submalha e formulações estabilizadas de elementos finitos. Além disso, no trabalho de [De sampaio et al. \(2008\)](#), ficou demonstrado que a formulação estabilizada proposta, similar a apresentada neste trabalho, é equivalente ao uso de uma discretização do tipo Galerkin das equações espacialmente filtradas, onde um modelo submalha particular, proporcional ao resíduo de discretização, é aplicado.

Na Simulação de Grandes Escalas (LES), onde as grandes escalas de turbulência são resolvidas pela discretização e as pequenas escalas são levadas em consideração usando os chamados modelos submalha ([Garnier, 2009](#)), as equações governantes são obtidas aplicando uma função filtro no espaço no sistema de equações de Navier-Stokes. A aplicação dessa função gera um problema de fechamento, uma vez que o termo não linear da equação de quantidade de movimento resulta na introdução de tensões adicionais que precisam ser modeladas. Essa abordagem é análoga à utilizada para obter o modelo RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) ([Wilcox, 1993](#)), mas com uma filtragem no espaço ao invés de uma filtragem no tempo. Para resolver esse problema de fechamento, diversos modelos de submalha foram propostos, como

o modelo Smagorinsky, que expressa essas tensões em termos das variáveis do fluxo filtrado.

Dessa forma, a formulação estabilizada derivada neste trabalho pode ser interpretada como uma discretização do tipo Galerkin aplicada às equações de Navier-Stokes filtradas espacialmente, onde o modelo submalha surge de forma implícita. Ao comparar a equação estabilizada resultante com a obtida pelo método de Galerkin aplicado às equações filtradas, observa-se que ambas são equivalentes se a tensão de submalha for modelada como uma função do resíduo de discretização. Logo, esse resultado indica que o modelo submalha surge naturalmente na formulação estabilizada, sem a necessidade de introduzir explicitamente um modelo adicional. Outra característica é que, diferentemente do modelo de Smagorinsky, que adiciona dissipação independentemente da resolução do escoamento, o modelo implícito da formulação estabilizada age de forma que seu efeito é significativo apenas nas regiões onde as escalas não resolvidas são intensas, reduzindo o impacto em áreas onde o escoamento está bem resolvido.

4.4 Campos de Velocidade

Neste trabalho, para a derivação do operador de captura de descontinuidade, são introduzidos os conceitos de velocidade efetiva e velocidade híbrida. A velocidade efetiva, assim como aquela utilizada no trabalho de [Galeão e Dutra do Carmo \(1988\)](#), ajusta a velocidade real na direção do fluxo difusivo. Já a velocidade híbrida é uma combinação da velocidade real com a velocidade efetiva, equilibrando os efeitos de transporte e dissipação. Além disso, a velocidade efetiva é usada para modificar a representação convencional do termo de convecção no nível contínuo, antes de escolher qualquer tipo de discretização ([De Sampaio e Coutinho, 2001](#)).

Logo, os campos de velocidade efetiva são utilizados para alcançar resultados mais precisos uma vez que reduz os efeitos adversos da difusão negativa (característica do método SUPG) gerada nas equações governantes na forma discretizada. Dessa forma, a velocidade efetiva representa uma projeção da velocidade real na direção do gradiente das variáveis transportadas, como as componentes da velocidade e a temperatura.

Assim, os campos de velocidade efetiva \mathbf{b}_u , \mathbf{c}_v e \mathbf{d}_T podem ser escritos como:

$$\mathbf{b}_u = \frac{\mathbf{a} \cdot \nabla u}{\|\nabla u\|^2} \nabla u \quad \mathbf{c}_v = \frac{\mathbf{a} \cdot \nabla v}{\|\nabla v\|^2} \nabla v \quad \mathbf{d}_T = \frac{\mathbf{a} \cdot \nabla T}{\|\nabla T\|^2} \nabla T \quad (4.92)$$

Além disso, é possível notar que tanto no nível contínuo quanto no discretizado, as

equações de conservação podem ser escritas com a velocidade real, com as velocidades efetivas escritas acima (aquelas que efetivamente transportam) ou com uma combinação das duas, conduzindo à definição de velocidade híbrida. Na forma discretizada, as equações empregam a combinação da velocidade real $\hat{\mathbf{a}}^k$ e as velocidades efetivas $\hat{\mathbf{b}}_u^k$, $\hat{\mathbf{c}}_v^k$ e $\hat{\mathbf{d}}_T^k$, escritas como uma interpolação entre elas: $\hat{\mathbf{b}}^k = (1 - \gamma)\hat{\mathbf{a}}^k + \gamma\hat{\mathbf{b}}_u^k$, $\hat{\mathbf{c}}^k = (1 - \gamma)\hat{\mathbf{a}}^k + \gamma\hat{\mathbf{c}}_v^k$ e $\hat{\mathbf{d}}^k = (1 - \gamma)\hat{\mathbf{a}}^k + \gamma\hat{\mathbf{d}}_T^k$, onde o parâmetro γ varia entre 0 e 1. Esse parâmetro controla a influência relativa entre a velocidade real e a velocidade efetiva, permitindo um ajuste conforme a necessidade da simulação.

Portanto, as equações de atualização da pressão, velocidade e temperatura em coordenadas cartesianas podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta t \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} \right] d\Omega = & - \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} \right] d\Omega \\ & - \int_{\Gamma_G} N_i \Delta \bar{G} d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{u}^n - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial y} + Ri g_x \hat{T}^n \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial y} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{v}^n - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} + Ri g_y \hat{T}^n \right] d\Omega \quad \forall \Delta p_i^{n+1/2} \text{ livre} \quad (4.93) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{u}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{k+1} \right] d\Omega = \\ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{p}^{n+1/2} - \hat{\tau}_{xx}^k \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\tau}_{xy}^k d\Omega - \int_{\Omega} N_i \left(\hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + Ri g_x \hat{T}^k \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} + Ri g_x \hat{T}^k \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{tx}} N_i \bar{t}_x^k d\Gamma \\ \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.94) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{v}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{v})^{k+1} \right] d\Omega = \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{\tau}_{xy}^k d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{\tau}_{yy}^k) d\Omega - \int_{\Omega} N_i \left(\hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + Ri g_y \hat{T}^k \right) d\Omega \\ - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^k}{\partial y} + Ri g_y \hat{T}^k \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{ty}} N_i \bar{t}_y^k d\Gamma \\ \forall \Delta v_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.95) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{T}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{T})^{k+1} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^k d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_y^k d\Omega - \int_{\Omega} N_i \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^k}{\partial y} \right] d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q}^k d\Gamma \quad \forall \Delta T_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.96)
\end{aligned}$$

e em coordenadas cilíndricas como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \Delta t \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial r} \right] r d\Omega = - \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right] r d\Omega - \int_{\Omega} N_i \hat{v}^n d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_G} N_i \Delta \bar{G} r d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{u}^n - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^n}{\partial r} + Ri_{gx} \hat{T}^n \right] r d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial r} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{v}^n - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{rr}^n}{\partial r} \right] r d\Omega + \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{S}_{xr}^n d\Omega + \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial r} (\hat{S}_{rr}^n - \hat{S}_{\theta\theta}^n) d\Omega \\
& \quad \forall \Delta p_i^{n+1/2} \text{ livre} \quad (4.97)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{u}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{k+1} \right] r d\Omega = \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{S}_{xx}^k) r d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{S}_{xr}^k r d\Omega - \int_{\Omega} N_i (\hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + Ri_{gx} \hat{T}^k) r d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^k}{\partial r} - \frac{\hat{S}_{xr}^k}{r} + Ri_{gx} \hat{T}^k \right] r d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_{tx}} N_i \bar{t}_x^k r d\Gamma \quad \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.98)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{v}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{v})^{k+1} \right] r d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{S}_{xr}^k r d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{S}_{rr}^k) r d\Omega + \int_{\Omega} N_i \hat{p}^{n+1/2} d\Omega - \int_{\Omega} N_i (\hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\hat{S}_{\theta\theta}^k}{r}) r d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{rr}^k}{\partial r} - \frac{\hat{S}_{rr}^k}{r} + \frac{\hat{S}_{\theta\theta}^k}{r} \right] r d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_{tr}} N_i \bar{t}_r^k r d\Gamma \quad \forall \Delta v_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.99)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t} \left[\Delta \hat{T}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{T})^{k+1} \right] r d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^k r d\Omega \\
+ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{q}_r^k r d\Omega - \int_{\Omega} N_i \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n r d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_r^k}{\partial r} + \frac{\hat{q}_r^k}{r} \right] r d\Omega \\
- \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q}_k r d\Gamma \quad \forall \Delta T_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.100)
\end{aligned}$$

Cabe ressaltar que a escolha entre a velocidade real, a velocidade efetiva ou a velocidade híbrida impacta diretamente no peso da formulação utilizada. Quando se usa a velocidade real, o método SUPG é aplicado. Se a velocidade efetiva é utilizada, ocorre a captura de descontinuidade, essencial para problemas com fortes gradientes. Já a velocidade híbrida representa um compromisso entre essas abordagens.

4.5 Passos de Tempo Locais e Sincronização

Neste trabalho, os passos de tempo foram escolhidos a partir das estimativas das escalas de tempo dos fenômenos mais rápidos que podem ser resolvidos pela discretização espacial disponível. Como a resolução da malha pode variar espacialmente, o mesmo pode ocorrer com a resolução temporal representada pelo passo de tempo Δt .

Para exemplificar esse processo, considere a convecção e a difusão de momentum em um determinado elemento finito. Se tc_M é a escala de tempo local (do elemento) para a convecção de momentum e td_M é a escala de tempo local (do elemento) para a difusão de momentum, devemos selecionar o passo de tempo local (do elemento) como $\Delta t_M = \min(tc_M, td_M)$ para ser capaz de acompanhar o processo físico mais rápido naquele elemento.

É conveniente expressar a razão entre as escalas de tempo locais de difusão e convecção como $\beta = td_M/tc_M$. Note que quando a convecção é mais forte do que a difusão, o processo convectivo é mais rápido e temos $tc_M < td_M$. Assim, quando a convecção é dominante, temos $\beta > 1$ e escolhemos o passo de tempo como $\Delta t_M = tc_M$. Por outro lado, quando a difusão é dominante, temos $\beta < 1$ e $\Delta t_M = td_M$.

É interessante observar que selecionar $\Delta t_M = \min(tc_M, td_M)$ é equivalente a definir

$$\Delta t_M = \alpha tc_M \quad (4.101)$$

onde

$$\alpha = \begin{cases} \beta & \text{para } \beta \leq 1 \\ 1 & \text{para } \beta \geq 1 \end{cases} \quad (4.102)$$

Em seguida, é necessário definir as estimativas para as escalas de tempo locais tc_M e td_M . Tezduyar e Osawa (2000) empregaram matrizes de elementos finitos para calcular os parâmetros de estabilização usados em sua formulação. Neste trabalho, essa ideia foi adaptada para estimar as escalas de tempo tc_M e td_M usando as matrizes de elementos finitos que representam as contribuições transitórias, convectiva e difusiva para o problema discretizado. Estas são, respectivamente:

$$(\mathbf{M}_L)_{ij} = \left[\int_{\Omega_e} N_i N_j d\Omega \right]_{lumped} \quad (4.103)$$

$$(\mathbf{C})_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i \mathbf{a} \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (4.104)$$

$$(\mathbf{D})_{ij} = \int_{\Omega_e} \frac{1}{Re} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (4.105)$$

Usando as matrizes de elementos acima, tc_M e td_M são escolhidos como

$$tc_M = c_1 \frac{\|\mathbf{M}_L\|}{\|\mathbf{C}\|} \quad (4.106)$$

$$td_M = c_2 \frac{\|\mathbf{M}_L\|}{\|\mathbf{D}\|} \quad (4.107)$$

As constantes c_1 e c_2 são $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}/3$, respectivamente. Esses valores foram escolhidos para reproduzir a aproximação assintótica, proposta em Brooks e Hughes (1982), do parâmetro upwind ótimo para o problema unidimensional de convecção-difusão discretizado com elementos finitos lineares. De fato, para o problema unidimensional de convecção-difusão, com um elemento finito linear de tamanho (comprimento) h , as equações 4.101 e 4.102 resultam em:

$$\Delta t_M = \alpha \frac{h}{\|\mathbf{a}\|} \quad (4.108)$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{Re\|\mathbf{a}\|h}{6} & \text{para } Re\|\mathbf{a}\|h \leq 6 \\ 1 & \text{para } Re\|\mathbf{a}\|h \geq 6 \end{cases} \quad (4.109)$$

o que é precisamente a aproximação assintótica para o parâmetro de upwind ótimo apresentado em Brooks e Hughes (1982). Note que, nesse caso, a função de ponderação baseada em Δt_M torna-se exatamente a função de ponderação SUPG:

$$W_i = N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \mathbf{a} \cdot \nabla N_i = N_i + \frac{\alpha h}{2\|\mathbf{a}\|} \mathbf{a} \cdot \nabla N_i \quad (4.110)$$

As equações 4.108 e 4.110 ilustram a conexão entre a seleção do passo de tempo de acordo com a menor escala de tempo e a introdução da quantidade apropriada de upwind. No entanto, nos cálculos realizados, sempre foi selecionado o passo de tempo simplesmente usando a expressão $\Delta t_M = \min(tc_M, td_M)$, com as escalas de tempo determinadas de acordo com as equações 4.106 e 4.107, em vez de usar o parâmetro de upwind α .

Neste trabalho, o passo de tempo $\Delta t_M = \min(tc_M, td_M)$ é utilizado na equação de atualização da pressão. Por outro lado, observe que, no caso mais geral, as equações de momentum para os componentes x e y ou r empregam as velocidades híbridas \mathbf{b} e \mathbf{c} , respectivamente, em vez da velocidade real \mathbf{a} . Aqui as expressões apresentadas para a direção y equivalem àsquelas para a direção r . Logo, o passo de tempo para os componentes x e y ou r é computado como:

$$\Delta t_{Mx} = \min(tc_{Mx}, td_M) \quad (4.111)$$

$$\Delta t_{My} = \min(tc_{My}, td_M) \quad (4.112)$$

onde

$$tc_{Mx} = c_1 \frac{\|\mathbf{M}_L\|}{\|\mathbf{C}_x\|} \quad (4.113)$$

$$tc_{My} = c_1 \frac{\|\mathbf{M}_L\|}{\|\mathbf{C}_y\|} \quad (4.114)$$

$$(\mathbf{C}_x)_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i \mathbf{b} \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (4.115)$$

$$(\mathbf{C}_y)_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i \mathbf{c} \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (4.116)$$

Finalmente, deve-se calcular o passo de tempo para a equação de energia. Note que a convecção de energia é calculada usando a velocidade híbrida \mathbf{d} e que a difusão de energia depende de $RePr$ em vez de apenas Re . Portanto, o passo de tempo para a energia é determinado conforme:

$$\Delta t_E = \min(tc_E, td_E) \quad (4.117)$$

onde

$$tc_E = c_1 \frac{\|\mathbf{M}_L\|}{\|\mathbf{C}_E\|} \quad (4.118)$$

$$td_E = c_2 \frac{\|\mathbf{M}_L\|}{\|\mathbf{D}_E\|} \quad (4.119)$$

$$(\mathbf{C}_E)_{ij} = \int_{\Omega_e} N_i \mathbf{d} \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (4.120)$$

$$(\mathbf{D}_E)_{ij} = \int_{\Omega_e} \frac{1}{RePr} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega \quad (4.121)$$

Os passos de tempo acima são determinados para cada elemento finito, daí o nome passos de tempo locais. Eles formam distribuições de passo de tempo constantes por partes no domínio de análise. Como os passos de tempo variam com a posição e de acordo com a quantidade transportada, precisamos recorrer a um esquema especial para sincronizar a evolução temporal do cálculo.

Neste trabalho, adotamos o procedimento introduzido por [De Sampaio \(2005\)](#). Ele se baseia na seleção de um passo de tempo de interpolação Δt^* , que será o mesmo para todas as variáveis e não variará no espaço (ou seja, o conceito usual de um passo de tempo). O passo de tempo de sincronização é escolhido para ser bem próximo ao menor passo de tempo do

problema e é calculado como: $\Delta t^* = 0.999 \min(\Delta t_M, \Delta t_{Mx}, \Delta t_{My}, \Delta t_E)$.

Seja $\Delta \hat{u}^{k+1}$, $\Delta \hat{v}^{k+1}$ e $\Delta \hat{T}^{k+1}$ as variações das variáveis obtidas ao utilizar os passos de tempo locais apropriados para resolver as equações discretizadas. É possível denotar as variações das variáveis do tempo t^n para $t^n + \Delta t^*$ (tempo de sincronização) como $\Delta \hat{u}^{*k+1}$, $\Delta \hat{v}^{*k+1}$ e $\Delta \hat{T}^{*k+1}$. Assim, mantendo a mesma taxa de variação, temos as seguintes relações:

$$\frac{\Delta \hat{u}^{*k+1}}{\Delta t^*} = \frac{\Delta \hat{u}^{k+1}}{\Delta t_{Mx}} \quad (4.122)$$

$$\frac{\Delta \hat{v}^{*k+1}}{\Delta t^*} = \frac{\Delta \hat{v}^{k+1}}{\Delta t_{My}} \quad (4.123)$$

$$\frac{\Delta \hat{T}^{*k+1}}{\Delta t^*} = \frac{\Delta \hat{T}^{k+1}}{\Delta t_E} \quad (4.124)$$

Na prática, o cálculo baseado em passos de tempo locais e a fase de sincronização não precisam ser realizados separadamente. De fato, a fase de sincronização, representada pelas equações 4.122 - 4.124, pode ser incorporada às equações 4.93 - 4.100 apresentadas na seção 4.4. Assim, a solução sincronizada no instante $t^n + \Delta t^*$ pode ser obtida diretamente resolvendo as seguintes equações para o caso cartesiano:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta t_M \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} \right] d\Omega &= - \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_G} N_i \Delta \bar{G} d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta t_M \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{u}^n - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial y} + Ri g_x \hat{T}^n \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \Delta t_M \frac{\partial N_i}{\partial y} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{v}^n - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} + Ri g_y \hat{T}^n \right] d\Omega \quad \forall \Delta p_i^{n+1/2} \text{ livre} \end{aligned} \quad (4.125)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t_{Mx}}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t^*} \left[\Delta \hat{u}^{*k+1} + \frac{\Delta t_{Mx}}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{*k+1} \right] d\Omega = \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{p}^{n+1/2} - \hat{\tau}_{xx}^k \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\tau}_{xy}^k d\Omega - \int_{\Omega} N_i \left(\hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + Ri g_x \hat{T}^k \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_{Mx}}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial y} + Ri g_x \hat{T}^k \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{tx}} N_i \bar{t}_x^k d\Gamma \\
& \quad \quad \quad \forall \Delta u_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.126)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t_{My}}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t^*} \left[\Delta \hat{v}^{*k+1} + \frac{\Delta t_{My}}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{v})^{*k+1} \right] d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{\tau}_{xy}^k d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{\tau}_{yy}^k) d\Omega - \int_{\Omega} N_i \left(\hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + Ri g_y \hat{T}^k \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_{My}}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^k}{\partial y} + Ri g_y \hat{T}^k \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{ty}} N_i \bar{t}_y^k d\Gamma \\
& \quad \quad \quad \forall \Delta v_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.127)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t^*} \left[\Delta \hat{T}^{*k+1} + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{T})^{*k+1} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^k d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_y^k d\Omega - \int_{\Omega} N_i \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^k}{\partial y} \right] d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q}^k d\Gamma \quad \forall \Delta T_i^{k+1} \text{ livre} \quad (4.128)
\end{aligned}$$

e para o caso axissimétrico:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \Delta t_M \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial r} \right] r d\Omega = - \int_{\Omega} N_i \left[\frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right] r d\Omega \\
& - \int_{\Omega} N_i \hat{v}^n d\Omega - \int_{\Omega} \Delta t_M \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{u}^n - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^n}{\partial r} + Ri g_x \hat{T}^n \right] r d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \Delta t_M \frac{\partial N_i}{\partial r} \left[\hat{\mathbf{a}}^n \cdot \nabla \hat{v}^n - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{rr}^n}{\partial r} \right] r d\Omega + \int_{\Omega} \Delta t_M \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{S}_{xr}^n d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \Delta t_M \frac{\partial N_i}{\partial r} (\hat{S}_{rr}^n - \hat{S}_{\theta\theta}^n) d\Omega - \int_{\Gamma_G} N_i \Delta \bar{G} r d\Gamma \quad \forall p_i^{n+1/2} \text{ livre} \quad (4.129)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t_{Mx}}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t^*} \left[\Delta \hat{u}^{*k+1} + \frac{\Delta t_{Mx}}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{u})^{*k+1} \right] rd\Omega = \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{S}_{xx}^k) rd\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{S}_{xr}^k rd\Omega - \int_{\Omega} N_i (\hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + Ri g_x \hat{T}^k) rd\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_{Mx}}{2} \hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{b}}^k \cdot \nabla \hat{u}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xx}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^k}{\partial r} - \frac{\hat{S}_{xr}^k}{r} + Ri g_x \hat{T}^k \right] rd\Omega + \int_{\Gamma_{tx}} N_i \hat{t}_x^k rd\Gamma \\
& \quad \forall \Delta u_i^{*k+1} \text{ livre} \quad (4.130)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t_{Mr}}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t^*} \left[\Delta \hat{v}^{*k+1} + \frac{\Delta t_{Mr}}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{v})^{*k+1} \right] rd\Omega = \\
& - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{S}_{xr}^k rd\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} (\hat{p}^{n+1/2} - \hat{S}_{rr}^k) rd\Omega + \int_{\Omega} N_i \hat{p}^{n+1/2} d\Omega - \int_{\Omega} N_i (\hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\hat{S}_{\theta\theta}^k}{r}) rd\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_{Mr}}{2} \hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{c}}^k \cdot \nabla \hat{v}^n + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{S}_{xr}^k}{\partial x} - \frac{\partial \hat{S}_{rr}^k}{\partial r} - \frac{\hat{S}_{rr}^k}{r} + \frac{\hat{S}_{\theta\theta}^k}{r} \right] rd\Omega + \int_{\Gamma_{tr}} N_i \hat{t}_r^k rd\Gamma \\
& \quad \forall \Delta v_i^{*k+1} \text{ livre} \quad (4.131)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla N_i \right] \frac{1}{\Delta t^*} \left[\Delta \hat{T}^{*k+1} + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla (\Delta \hat{T})^{*k+1} \right] rd\Omega = \\
& \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^k rd\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{q}_r^k rd\Omega - \int_{\Omega} N_i \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n rd\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla N_i \left[\hat{\mathbf{d}}^k \cdot \nabla \hat{T}^n + \frac{\partial \hat{q}_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_r^k}{\partial r} + \frac{\hat{q}_r^k}{r} \right] rd\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i \hat{q}^k rd\Gamma \\
& \quad \forall \Delta T_i^{*k+1} \text{ livre} \quad (4.132)
\end{aligned}$$

5 Código Computacional

5.1 Malha Adaptativa

Nas simulações numéricas, o custo computacional está diretamente relacionado ao número de elementos em que o domínio é subdividido. Nesse contexto, o uso de uma malha adaptativa possibilita um refinamento localizado nas regiões que demandam maior nível de discretização, utilizando elementos menores, ao mesmo tempo em que economiza recursos computacionais em áreas menos críticas.

O refinamento localizado é importante em regiões com variações significativas das variáveis de interesse, como camadas limites, descontinuidades ou zonas com altas curvaturas, onde ocorrem grandes gradientes. Além disso, em problemas transientes, nos quais os detalhes do escoamento podem evoluir consideravelmente ao longo do tempo, a capacidade de adaptar a malha conforme a simulação avança garante que o esforço computacional seja direcionado para as áreas mais relevantes.

Neste trabalho, o refinamento da malha é realizado utilizando o estimador de erro apresentado em [Zienkiewicz e Zhu \(1987\)](#). Esse estimador, baseado na distribuição uniforme do erro entre os elementos, calcula o erro associado ao gradiente de velocidade e sugere uma nova configuração de malha. Essa estratégia requer a especificação prévia do número máximo de elementos desejado e do tamanho mínimo permitido para qualquer região do domínio, conforme descrito em [De Sampaio e Coutinho \(1999\)](#). Além disso, a conexão dos novos nós à malha existente é realizada por meio do algoritmo de [Bowyer \(1981\)](#).

A quantidade de passos de tempo necessária para o primeiro refinamento da malha é determinada com base na estimativa da escala temporal adequada para acompanhar a evolução dos maiores vórtices do escoamento. Assim, o número de passos de tempo é calculado como $nsteps = t_{scale}/2\Delta t^*$, sendo o valor arredondado para o inteiro mais próximo. Aqui, $t_{scale} = L/u_o$ representa o tempo característico para seguir o maior vórtice, onde L é a dimensão característica do problema e u_o é a velocidade de referência, enquanto Δt^* é o passo de tempo de sincronização utilizado para avançar a solução numérica.

5.2 Computação Paralela

Com problemas cada vez maiores e mais complexos os quais exigem um maior número de elementos e malhas progressivamente mais refinadas, a demanda por maior poder computacional cresce exponencialmente. Nesse contexto, a ferramenta de paralelização OpenMP (Open Multi-Processing), projetada para sistemas de memória compartilhada e compatível com linguagens como Fortran, C e C++, permite reduções significativas no tempo de execução de códigos (Dagum e Menon, 1998).

Em códigos baseados em elementos finitos, como o empregado neste trabalho, etapas como a montagem de matrizes globais e a solução de sistemas de equações algébricas demandam um alto esforço computacional. O OpenMP possibilita que as iterações usados pelas rotinas responsáveis por esses cálculos sejam distribuídas entre os núcleos de processamento disponíveis, acelerando significativamente essas tarefas e otimizando o desempenho geral do programa.

5.3 Pré e Pós Processamento

Neste trabalho, o pré e o pós-processamento foram realizados utilizando o software comercial GiD – The Personal Pre and Post Processor, amplamente empregado em simulações de dinâmica de fluidos computacional. Durante o pré-processamento, ele foi utilizado para a criação dos modelos geométricos, geração das malhas e definição das condições de contorno e dos números adimensionais. No pós-processamento, foi utilizado para a visualização dos campos velocidade, pressão e temperatura em vários instantes de tempo, permitindo uma visualização dinâmica dos resultados.

Além disso, aqui o GiD foi personalizado para gerar automaticamente os arquivos de entrada necessários para o código utilizado na simulação, além de processar os arquivos de saída do mesmo, otimizando o fluxo entre as etapas de pré e pós-processamento. Essa integração garantiu maior eficiência na execução e análise dos resultados, adaptando o software às necessidades específicas de cada problema estudado.

6 Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta os exemplos numéricos desenvolvidos neste trabalho, detalhando suas configurações e resultados com o objetivo de verificar e validar o código computacional utilizado para resolver as equações governantes em coordenadas cartesianas e cilíndricas. O código foi implementado em Fortran 90, uma versão da linguagem Fortran amplamente empregada na computação numérica, e foi executado no Laboratório de Computação Paralela do Instituto de Engenharia Nuclear, utilizando recursos otimizados para alto desempenho.

As simulações foram realizadas em malhas triangulares 2D com interpolação linear, contemplando casos de geometrias planas e axissimétricas. Para geometrias planas, os estudos envolveram a estratificação térmica em uma cavidade quadrada, convecção natural ao redor de um cilindro aquecido e convecção mista ao redor de um cilindro aquecido sob forças de empuxo. Para geometrias axissimétricas, os casos analisados incluem o escoamento em um duto horizontal de seção circular, considerando duas condições térmicas distintas: temperatura constante e fluxo de calor constante na parede ao longo do eixo.

Em todas as simulações foi empregado o valor de $\gamma = 1$, ou seja, utilizando-se somente o operador de captura de descontinuidade. Ao final do exemplo de convecção mista ao redor de um cilindro aquecido, é feita uma comparação do emprego de $\gamma = 0$, em que apenas o peso SUPG é considerado, permitindo avaliar o impacto da captura de descontinuidade sobre a solução numérica.

Por último foi feita a simulação de um caso prático da indústria nuclear envolvendo a geometria axissimétrica de uma região do vaso de pressão de um reator tipo PWR (Pressurized Water Reactor). Esse estudo qualitativo considera as características geométricas bem como o número de Reynolds aplicado no caso real.

6.1 Verificação do Modelo

6.1.1 Estratificação Térmica em uma Cavidade Quadrada

Neste exemplo, considera-se uma cavidade quadrada de lado L (Figura 2) com as seguintes condições de contorno: as fronteiras superior e inferior são termicamente isoladas; a pressão de referência $p = 0$ é aplicada no centro da cavidade; uma condição de não desliza-

mento é imposta em todas as paredes; a temperatura na parede esquerda é $T_{\max} = T_o + \Delta T/2$; e a temperatura na parede direita é $T_{\min} = T_o - \Delta T/2$. Como condição inicial, assume-se que o fluido na cavidade está em repouso à temperatura uniforme T_o .

A simulação transiente tem início em $t = 0$, momento em que as condições de contorno impostas nas paredes paralelas opostas induzem um fluxo de convecção natural dentro da cavidade. Para números de Rayleigh suficientemente altos, esse fluxo resulta em estratificação térmica no domínio.

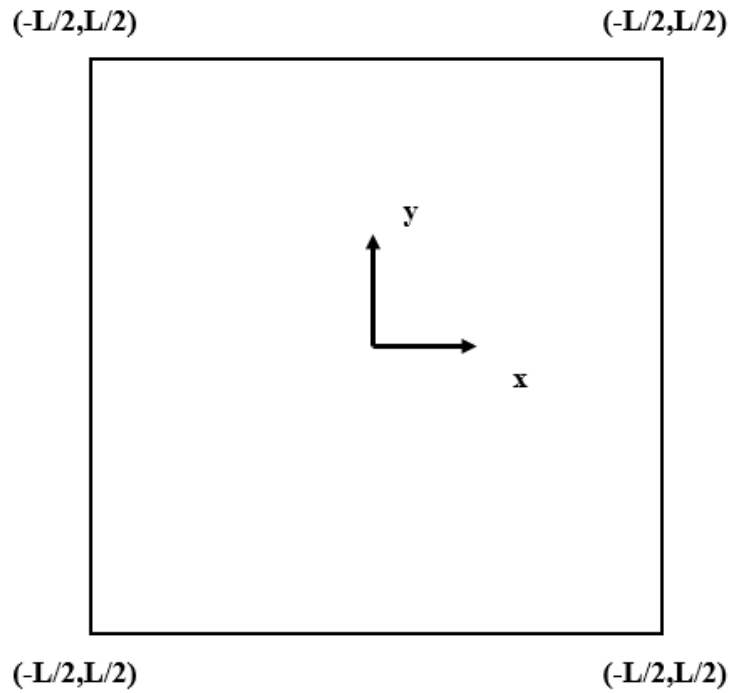


Figura 2: Domínio de análise para o problema de convecção livre em uma cavidade quadrada.

Os resultados numéricos foram parametrizados em função dos números de Prandtl e Rayleigh. As simulações foram realizadas para $Ra = 10^4$, $Ra = 10^5$ e $Ra = 10^6$, enquanto o número de Prandtl foi mantido constante em $Pr = 0,71$ para todos os casos.

Os transientes foram analisados no intervalo de tempo de $t = 0$ até $t = 30L/u_o$, onde $u_o = \sqrt{\beta(T_{\max} - T_{\min})\|g\|L}$ representa a velocidade de referência. Em todas as simulações, esse período de tempo foi suficiente para garantir a convergência ao regime estacionário.

Observa-se que, à medida que o número de Rayleigh aumenta, o refinamento da malha é mais intenso nas regiões onde os gradientes de temperatura e velocidade são mais significativos, como próximo às paredes da cavidade. Além disso, é possível notar os detalhes das estruturas induzidas pela convecção natural e as zonas de estratificação térmica.

A Figura 3 apresenta a malha adaptativa final, bem como as linhas isotérmicas, isobáricas e o campo de velocidade para $Ra = 10^4$ e $Pr = 0,71$. A malha inicial foi de 1440 elementos enquanto que a malha adaptativa final contém 2766 elementos, com o maior elemento apresentando tamanho $0,05L$ e o menor apresentando tamanho de $0,02L$.

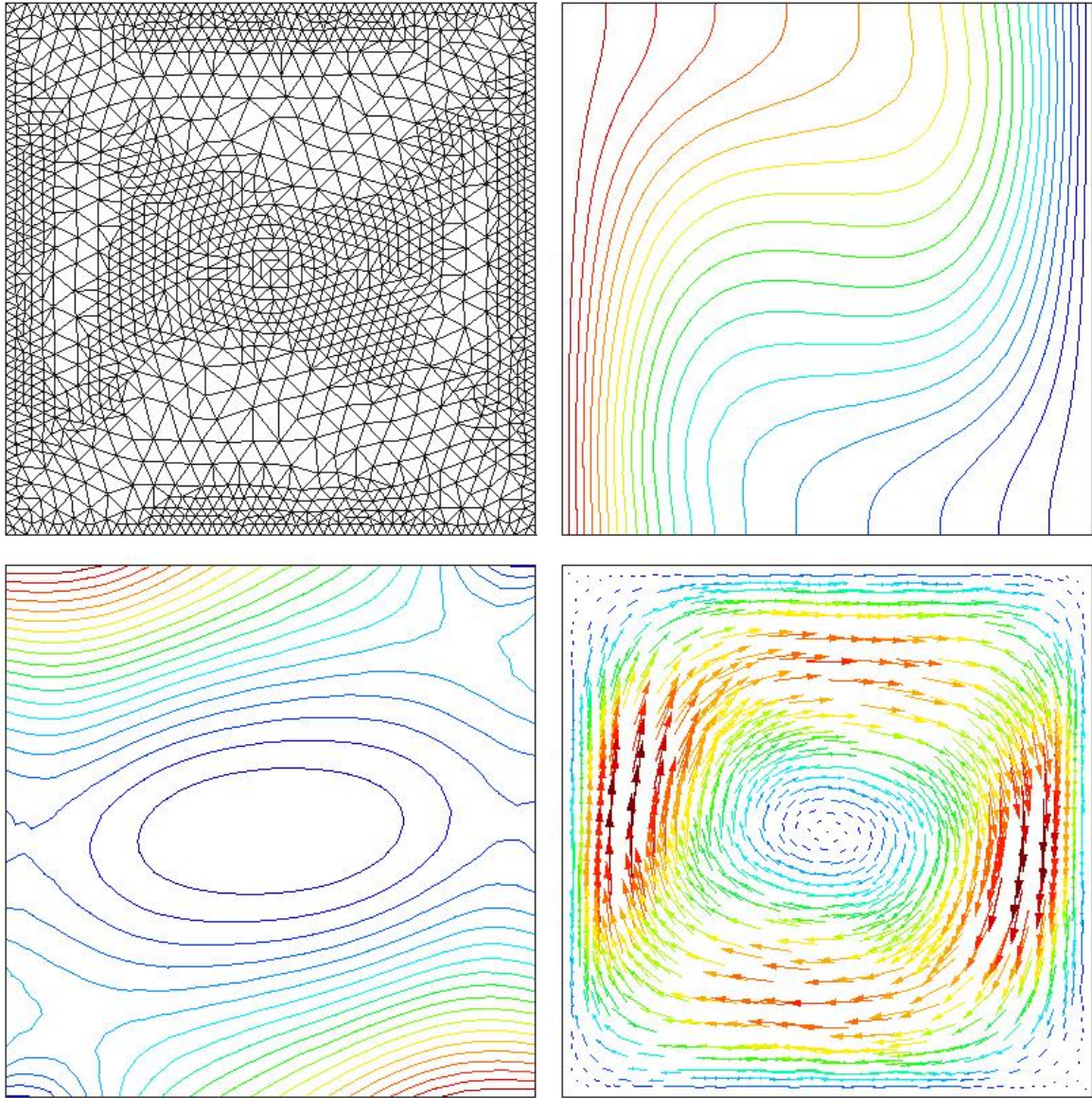


Figura 3: Malha adaptativa, isolinhas de temperatura, isolinhas de pressão e campo de velocidade para $Ra = 10^4$, $Pr = 0.71$.

Para $Ra = 10^5$ e $Pr = 0,71$, os resultados estão ilustrados na Figura 4. Nesse caso, a malha inicial foi de 3824 elementos enquanto que a malha adaptativa final contém 6354 elementos, com o maior elemento apresentando tamanho $0,03L$ e o menor apresentando tamanho de $0,01L$.

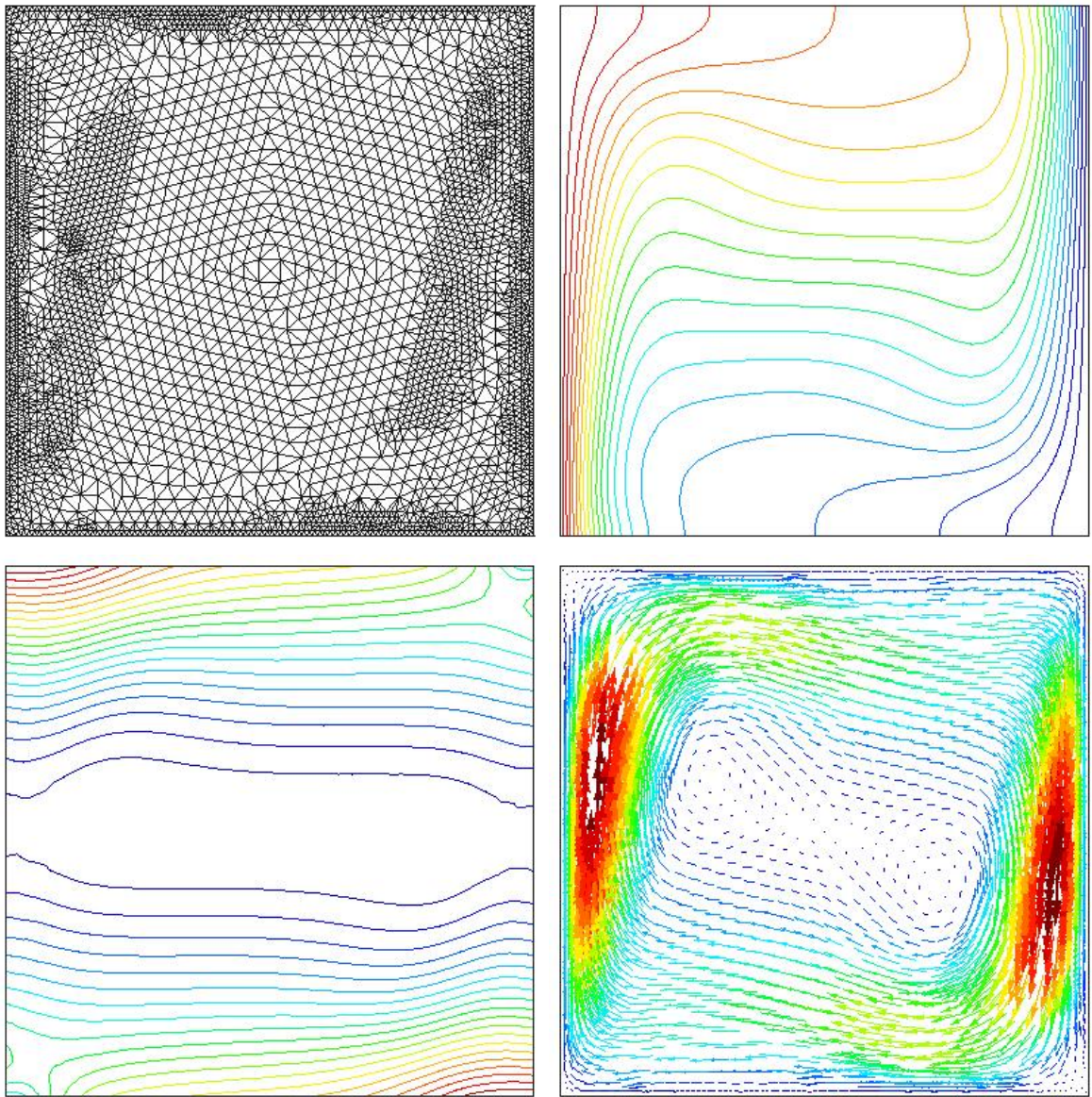


Figura 4: Malha adaptativa, isolinhas de temperatura, isolinhas de pressão e campo de velocidade para $Ra = 10^5$, $Pr = 0.71$.

Já para $Ra = 10^6$ e $Pr = 0,71$, os resultados são mostrados na Figura 5. A malha inicial foi de 8756 elementos enquanto que a malha adaptativa final contém 11170 elementos, com o maior elemento apresentando tamanho $0,02L$ e o menor apresentando tamanho de $0,005L$.

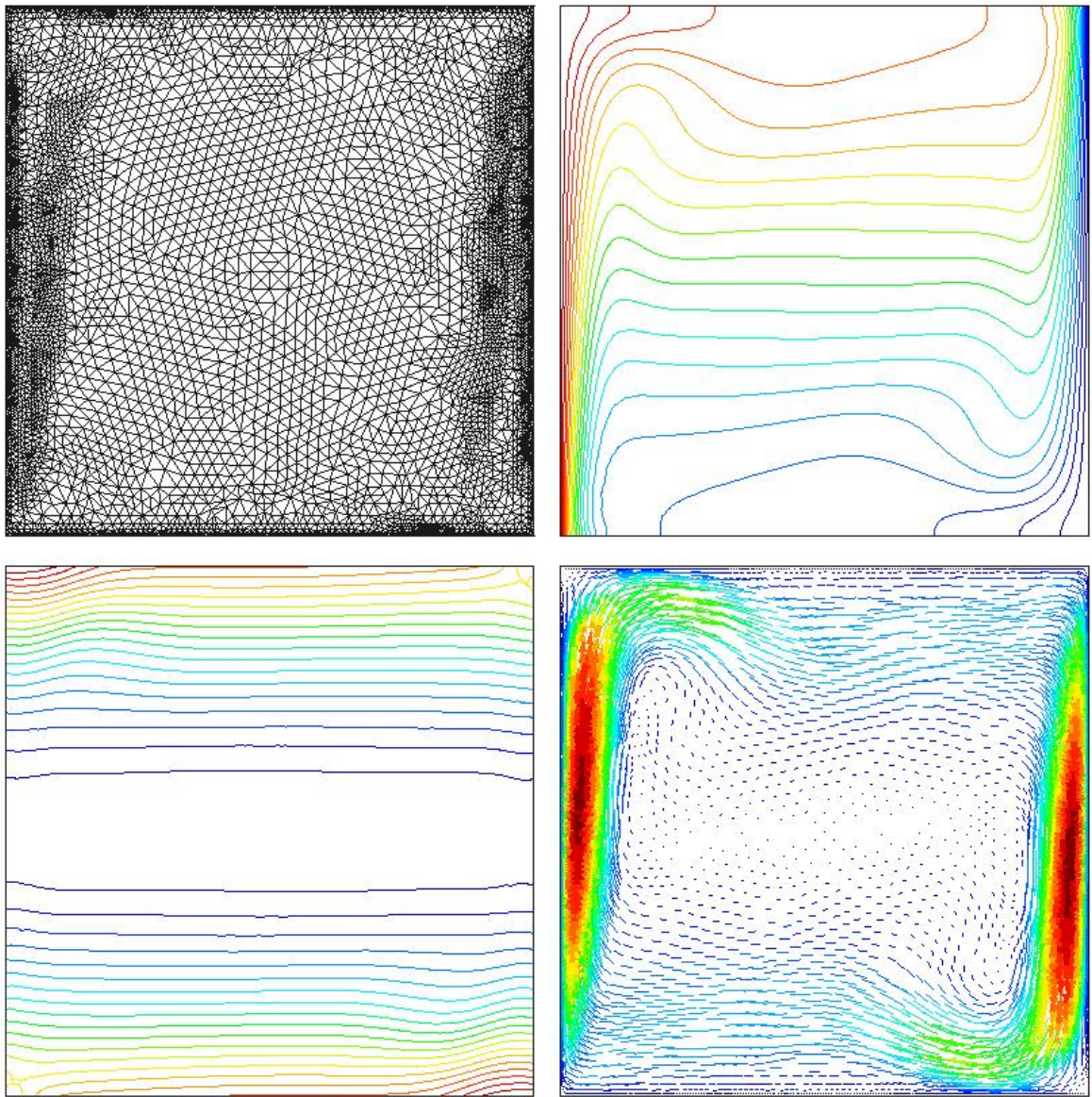


Figura 5: Malha adaptativa, isolinhas de temperatura, isolinhas de pressão e campo de velocidade para $Ra = 10^6$, $Pr = 0.71$.

Esses resultados demonstram que, conforme o número de Rayleigh aumenta, ocorre um refinamento progressivo da malha, refletindo a maior complexidade do escoamento e a necessidade de capturar os detalhes das regiões de gradientes mais intensos.

A Tabela 1 compara os valores obtidos para os números de Nusselt médio e máximo com os dados de referência fornecidos por Hortmann et al. (1990) e os resultados de (De Sampaio, 2006). O número de Nusselt é calculado como $Nu = q_w L / k(T_{\max} - T_{\min})$, onde q_w representa o fluxo de calor local integrado ao longo da parede.

Tabela 1: Número de Nusselt médio e máximo: comparação entre o presente resultado com os de De Sampaio (2006) e Hortmann et al. (1990).

Fonte	$Ra = 10^4$		$Ra = 10^5$		$Ra = 10^6$	
	Nu máx.	Nu méd.	Nu máx.	Nu méd.	Nu máx.	Nu méd.
Presente	3.5421	2.2404	7.7272	4.5149	17.7331	8.8286
De Sampaio (2006)	3.5254	2.2398	7.7033	4.5123	17.4577	8.8076
Hortmann et al. (1990)	3.5309	2.2448	7.7201	4.5216	17.5360	8.8251

Observa-se que a precisão da formulação estabilizada e o uso de malhas adaptativas nos cálculos adotados neste trabalho permitem alcançar resultados com uma concordância muito boa em relação ao benchmark de Hortmann et al. (1990), mesmo utilizando um número significativamente menor de pontos nodais. Esse desempenho reforça a eficácia da abordagem empregada, evidenciando que a qualidade da solução obtida não depende exclusivamente do grau de refinamento, mas sim da capacidade de concentrar elementos nas regiões com maiores gradientes.

6.1.2 Convecção Natural ao Redor de um Cilindro Aquecido

Neste segundo exemplo, analisamos o escoamento ao redor de um cilindro aquecido de diâmetro d , inicialmente em contato com o fluido em repouso. As condições de contorno consideradas são: temperatura $T_{\max} = T_o + \Delta T$ e condição de não deslizamento na superfície do cilindro. Como condição inicial, assume-se que o fluido ao redor do cilindro está em repouso e com temperatura uniforme $T_{\min} = T_o$. O diâmetro d do cilindro foi escolhido como escala de referência para o comprimento.

As simulações foram realizadas para $Pr = 0,71$ e os seguintes valores de Ra : 10^4 , 5×10^4 , 10^5 , $1,5 \times 10^5$, 2×10^5 , 5×10^5 e 10^6 . As malhas iniciais utilizadas nos casos com o tamanho mínimo dos elementos definido como $h_{\min} = 0,02d$ continham 17405 elementos enquanto que as malhas adaptativas finais, refinadas ao longo das simulações, variaram entre 40 000 e 60 000 elementos. Para verificar a influência do refinamento, os exemplo com $Ra = 5 \times 10^5$ e $Ra = 10^6$ também foram calculados com $h_{\min} = 0,01d$ e $0,005d$. As simulações realizadas com malhas mais refinadas resultaram em configurações com até xx elementos.

A Figura 6 apresenta as linhas isotérmicas com as respectivas plumas desenvolvidas para os casos 5×10^4 , 10^5 , $1,5 \times 10^5$, 2×10^5 , 6×10^5 e 10^6 . Já a Figura 7 mostra a evolução

da pluma térmica, capturada pela malha adaptativas em $t = 14, 54$ e $112 d/u_o$, para o caso com $Ra = 2 \times 10^5$, onde $u_o = \sqrt{\beta(T_{\max} - T_{\min})\|g\|d}$ representa a velocidade de referência. Esses resultados ilustram o comportamento térmico e dinâmico do fluido em diferentes condições de fluxo e níveis de refinamento.

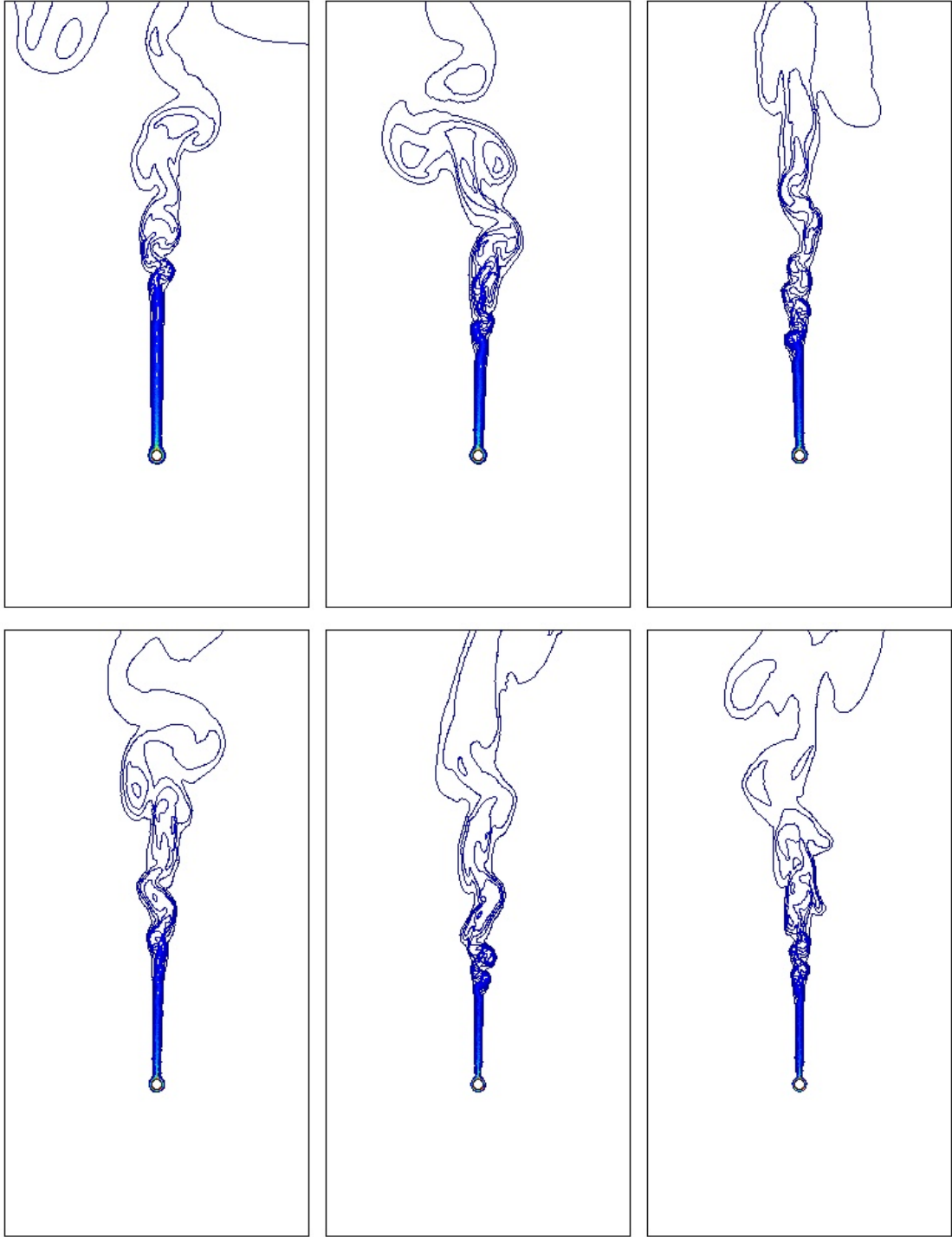


Figura 6: Isolinhas de temperatura para $Pr = 0.71$ e, da esquerda para a direita, $Ra = 5 \times 10^4$, 10^5 , 1.5×10^5 , 2×10^5 , 5×10^5 e 10^6 .

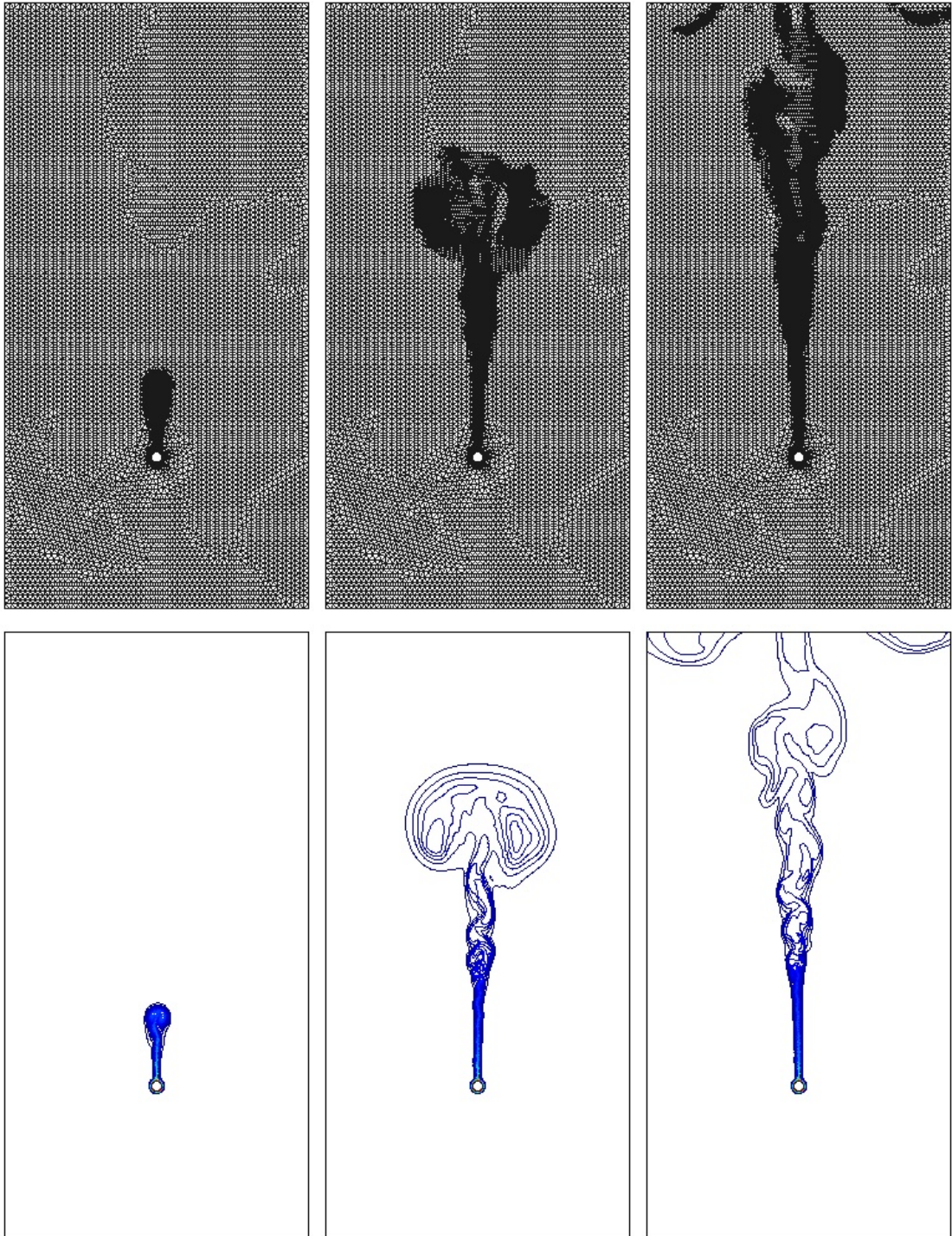


Figura 7: Malhas adaptativas e isolinhas de temperatura para $Pr = 0.71$ e $Ra = 2 \times 10^5$ nos tempos $t = 14, 54$ e $112 d/u_o$.

É relevante comparar as previsões deste trabalho para o número de Nusselt médio com as correlações experimentais disponíveis na literatura. O número de Nusselt médio é calculado como $\langle Nu \rangle = \langle q_w \rangle d / k (T_{\max} - T_{\min})$, onde $\langle q_w \rangle$ representa o fluxo de calor médio na superfície do cilindro.

De acordo com Churchill e Chu (1975), os dados experimentais para a faixa de escoamento laminar ($Ra \leq 10^9$) podem ser bem descritos pela seguinte expressão:

$$\langle Nu \rangle = 0,36 + \frac{0,518Ra^{1/4}}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \quad (6.1)$$

Uma correlação alternativa na faixa laminar é fornecida por Hyman et al. (1953):

$$\langle Nu \rangle = 0,53 \left[\left(\frac{Pr}{Pr + 0,952} \right) Ra \right]^{1/4} \quad (6.2)$$

A Figura 8 apresenta a comparação entre os valores de Nusselt médio obtidos aqui com os das expressões fornecidas pelas Eqs. 6.1 e 6.2. Observa-se uma concordância bastante satisfatória entre os resultados numéricos e as correlações experimentais.

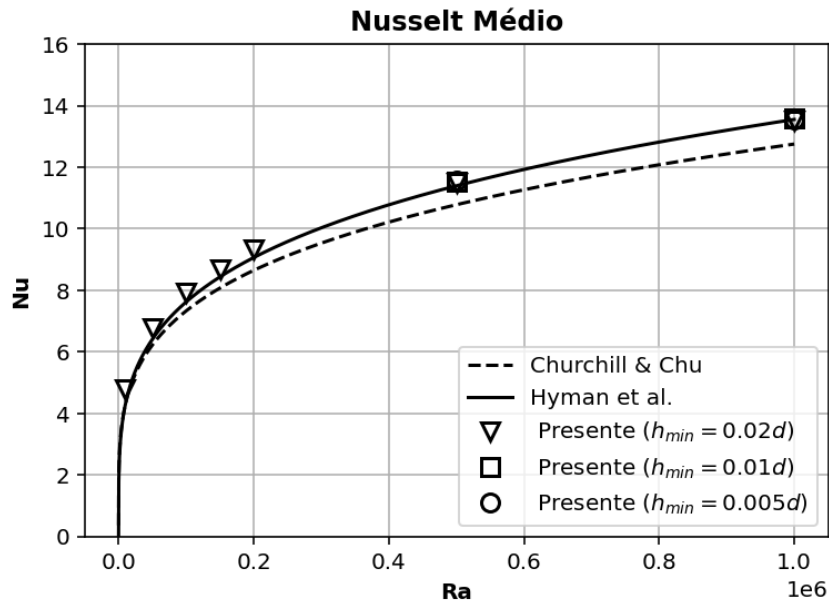


Figura 8: Comparação dos resultados do número de Nusselt médio com resultados das correlações experimentais de Churchill e Chu (1975) e Hyman et al. (1953).

Em princípio, com os modelos 2D que utilizamos aqui, poderíamos calcular soluções de convecção livre fisicamente significativas até $Ra = 10^9$, embora às custas de discretizações muito finas tanto no espaço quanto no tempo. A transição para a turbulência começa para números de Rayleigh da ordem de 10^9 . Para tais números de Rayleigh altos, o fluxo começa a apresentar algumas características importantes em 3D que os modelos 2D não podem capturar.

No entanto, isso não é uma limitação do método dos elementos finitos estabilizados proposto aqui, que também pode ser empregado em cálculos 3D. Porém, a tarefa de calcular fluxos de convecção livre turbulenta em 3D para números de Rayleigh muito altos, enquanto se usa discretizações muito finas no espaço e no tempo, pode se tornar extremamente cara. Nesse caso, recorrer a modelos RANS ou LES seria uma escolha mais viável.

6.1.3 Convecção Mista ao Redor de um Cilindro Aquecido sob Forças de Empuxo

Neste terceiro exemplo, analisamos o efeito das forças de flutuabilidade no escoamento transversal ao redor de um cilindro aquecido. As condições de contorno consideradas são as seguintes: o fluxo incidente, que se aproxima com velocidade u_o , está à temperatura $T_{\min} = T_o$; a superfície do cilindro mantém-se à temperatura $T_{\max} = T_o + \Delta T$; e uma condição de não deslizamento é aplicada na superfície do cilindro. Inicialmente, a temperatura do fluido é assumida como uniforme e igual a T_o .

O domínio de análise, representado esquematicamente na Figura 9, ilustra como as forças de empuxo podem atuar dependendo da orientação do vetor gravidade \mathbf{g} . Essas forças podem tanto auxiliar quanto se opor ao fluxo convectivo, alterando significativamente o comportamento do escoamento ao redor do cilindro.

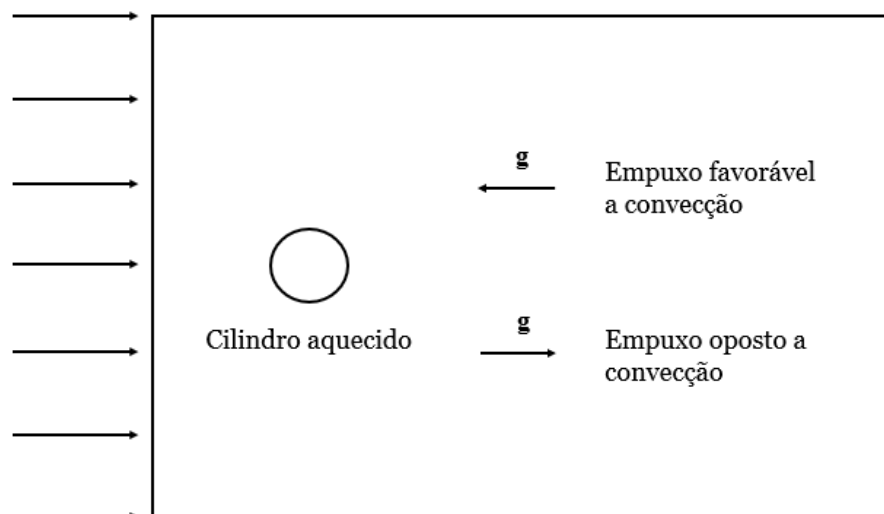


Figura 9: Escoamento cruzado ao redor de um cilindro aquecido, ilustrando esquematicamente os casos de convecção auxiliada pela flutuabilidade e convecção oposta à flutuabilidade.

Foram realizadas três simulações. Em todos os casos, foram considerados $Re = 100$ e $Pr = 1$. Na primeira análise, a força de empuxo não foi considerada, representando um pro-

blema de escoamento por convecção forçada pura ($Ri = 0$). As outras duas análises representam condições de escoamento por convecção mista, com $Ri = 0,25$. Uma apresenta a flutuabilidade auxiliando o escoamento, enquanto a outra considera a flutuabilidade se opondo à convecção.

Em todos os casos, a malha inicial era composta por 2151 elementos. Para o caso de convecção forçada pura ($Ri = 0$), a malha adaptativa final continha 9958 elementos. Já nos problemas de convecção mista ($Re = 100$, $Pr = 1$, $Ri = 0,25$), as malhas adaptativas apresentaram 12440 elementos para o caso em que a flutuabilidade se opõe à convecção e 7555 elementos para o caso em que a flutuabilidade auxilia a convecção. Em todas as análises, o tamanho mínimo dos elementos foi fixado em $0,02d$.

A Figura 10 apresenta as malhas adaptativas e as linhas isobáricas para o primeiro caso ($Re = 100$, $Pr = 1$, $Ri = 0$) em diversos tempos. Nessa figura é possível observar a adaptação da malha seguindo os vórtices gerados ao longo da evolução da simulação. Essa adaptação é guiada pela estimativa de erro no gradiente de velocidade.

A Figura 11 apresenta as malhas adaptativas e as linhas isobáricas em $t = 99d/u_0$. Ela também revela que, no caso em que a flutuabilidade auxilia a convecção, o comportamento de desprendimento de vórtices foi suprimido. Este resultado está em concordância com os obtidos por Patnaik et al. (1999), confirmando a influência estabilizadora das forças de flutuabilidade no escoamento ao redor do cilindro.

As forças de arrasto (F_D) e transversais (F_L) por unidade de comprimento atuando no cilindro quente foram determinadas a partir do campo de escoamento utilizando as seguintes expressões:

$$F_D = \int_{\Gamma_c} \left[\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} n_x - p n_x \right] d\Gamma \quad (6.3)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_c} \left[\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} n_y - p n_y \right] d\Gamma \quad (6.4)$$

Nas Eqs. 6.3 e 6.4, foram utilizadas as notações $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u_1 = u$ e $u_2 = v$ para representar as coordenadas espaciais e as componentes das velocidades, respectivamente. Essas expressões levam em conta as forças viscosas e de pressão, demonstrando as interações entre o escoamento e a superfície do cilindro.

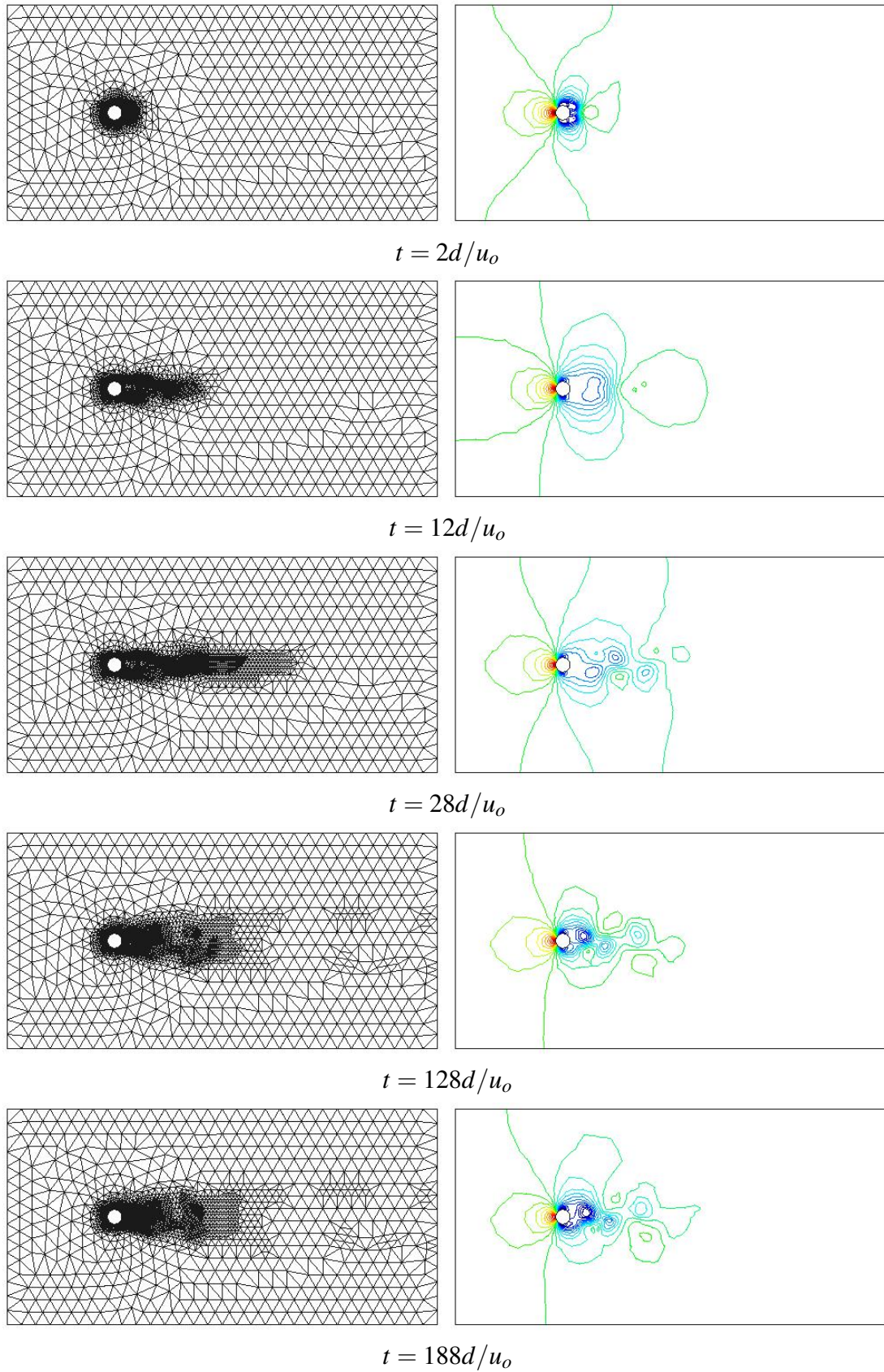


Figura 10: Cilindro em escoamento cruzado com $Re_d = 100$: algumas malhas adaptativas e os correspondentes campos de pressão.

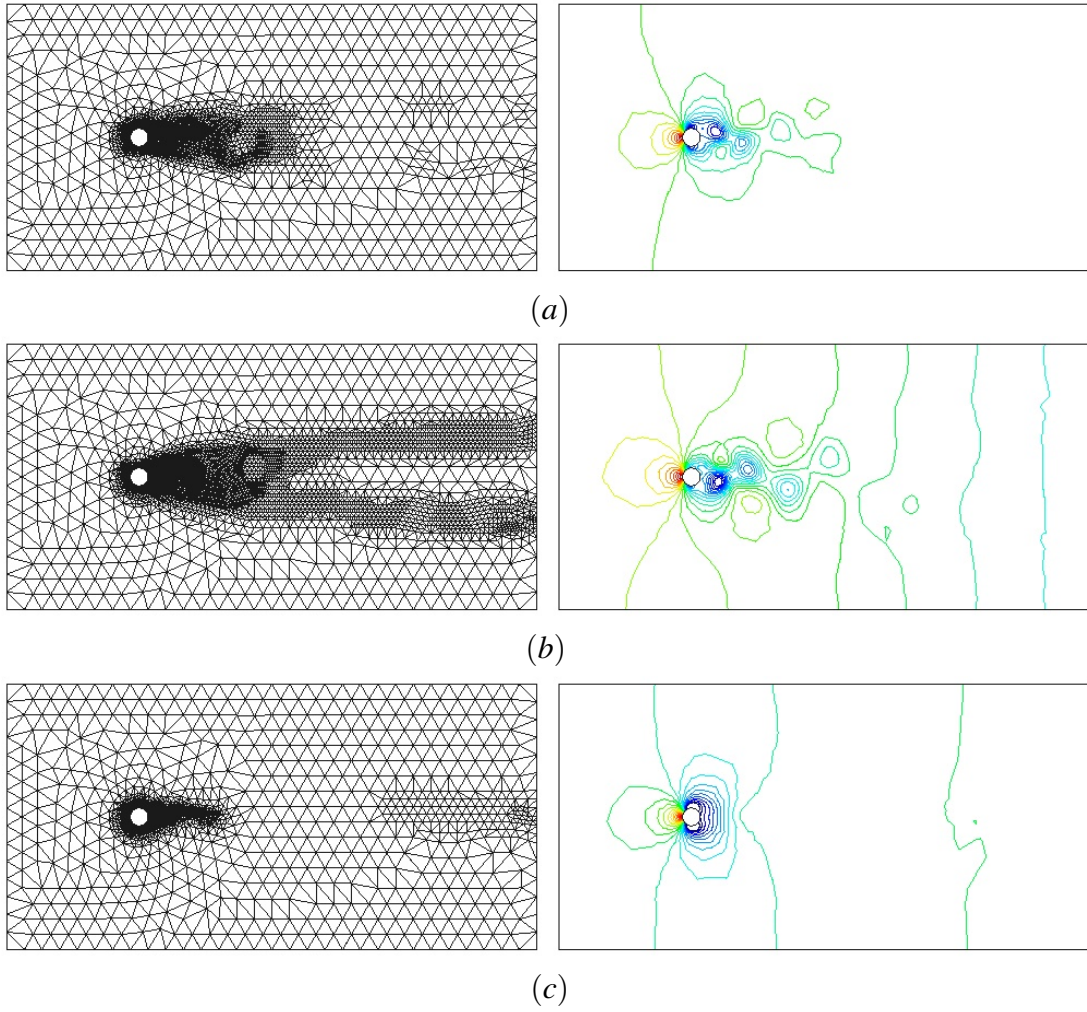
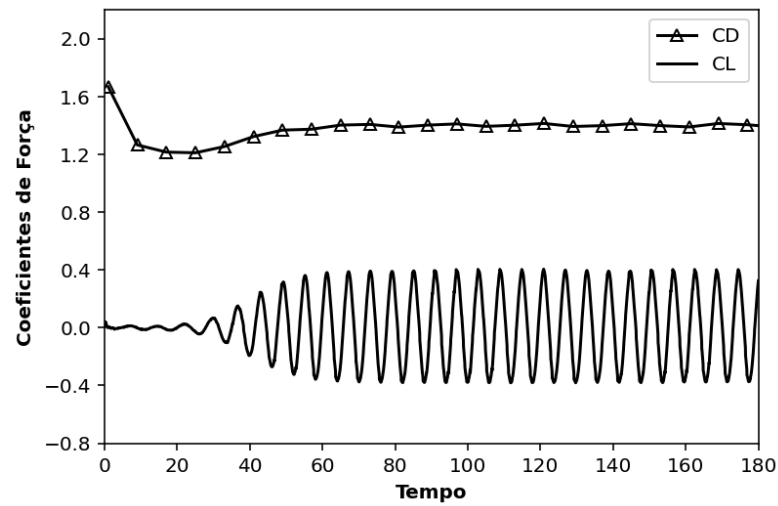


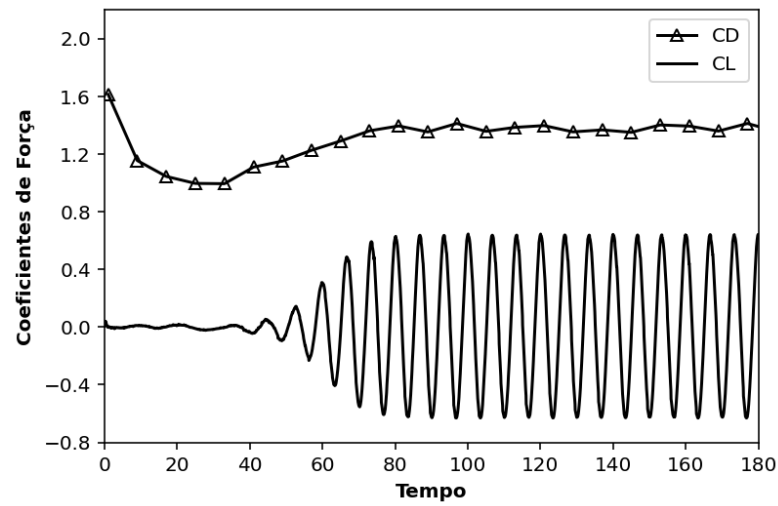
Figura 11: Escoamento cruzado ao redor de um cilindro aquecido com $Re = 100$ e $Pr = 1$: malhas adaptativas e isolinhas de pressão em $t = 99d/u_0$: (a) convecção forçada ($Ri = 0$); (b) $Ri = 0.25$ com flutuabilidade opondo-se à convecção; (c) $Ri = 0.25$ com flutuabilidade auxiliando a convecção.

A frequência de desprendimento de vórtices (f) foi determinada por meio da análise do histórico da força transversal e expressa de forma adimensional pelo número de Strouhal, definido como $St = fd/u_0$. Os coeficientes de força de arrasto e transversal são calculados como $C_D = 2F_D/\rho u_0^2 d$ e $C_L = 2F_L/\rho u_0^2 d$, respectivamente. Além disso, o fluxo de calor médio do cilindro $\langle q_w \rangle$ foi expresso em termos adimensionais pelo número de Nusselt médio, dado por $\langle Nu \rangle = \langle q_w \rangle d/k(T_{\max} - T_{\min})$.

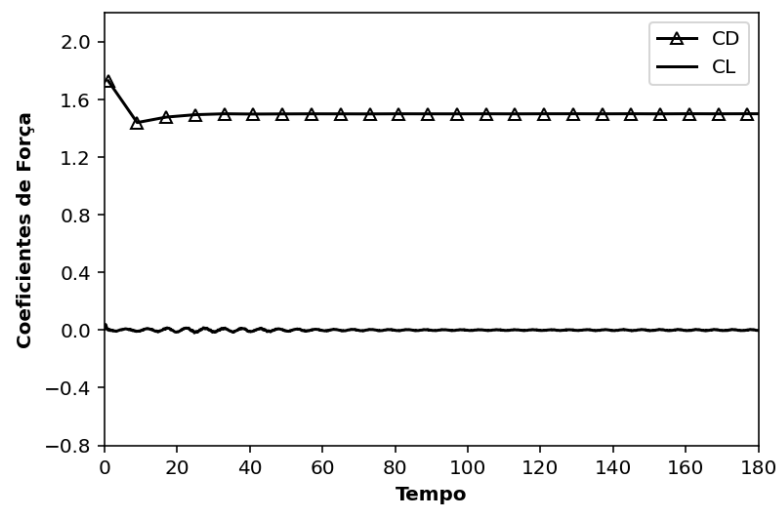
A Figura 12 mostra a evolução dos coeficientes de arrasto e de sustentação no cilindro para os três casos simulados e a Tabela 2 apresenta os valores médios do coeficiente de arrasto C_D (médio), o coeficiente de força transversal C_L (rms), o número de Nusselt médio $\langle Nu \rangle$ e o número de Strouhal (St) também para os três casos simulados.



(a)



(b)



(c)

Figura 12: Evolução temporal dos coeficientes de força para o problema de um cilindro circular em escoamento cruzado: (a) convecção forçada ($Ri = 0$); (b) $Ri = 0.25$ com flutuabilidade opondo-se à convecção; (c) $Ri = 0.25$ com flutuabilidade auxiliando a convecção.

No caso de convecção auxiliada pela flutuabilidade, o padrão de desprendimento de vórtices foi eliminado, como discutido anteriormente. No entanto, os valores de C_D (médio) e $\langle Nu \rangle$ mostraram pouca variação entre os três casos analisados. Por outro lado, a força transversal C_L (rms), associada ao processo de desprendimento de vórtices, foi consideravelmente maior no caso de convecção opondo-se à flutuabilidade. Esse comportamento, juntamente com a redução do número de Strouhal para essa condição, está em conformidade com os resultados obtidos por Patnaik et al. (1999), destacando os efeitos das forças de flutuabilidade na dinâmica do escoamento.

Tabela 2: Convecção mista ao redor de um cilindro aquecido: dados estatísticos.

	CD (médio)	CL (rms)	Nu (médio)	Strouhal
$Ri = 0$	1.4000	0.2748	5.8823	0.1677
$Ri = 0.25$, Empuxo oposto a convecção	1.3801	0.4494	5.7812	0.1462
$Ri = 0.25$, Empuxo favorável a convecção	1.5005	0.0022	5.9402	—

Tomando este caso como exemplo, é possível verificar os efeitos da captura de descontinuidade na redução dos valores de temperatura negativos quando comparados à formulação SUPG ($\gamma = 0$). Esses valores negativos são devidos à difusão introduzida pela presença dos pesos na formulação estabilizada. Ao introduzir o peso considerando a velocidade de transporte apenas ($\gamma = 1$), a quantidade de difusão adicionada nas regiões de maiores gradientes é reduzida evitando a geração de valores de temperaturas negativas (não físicas) na solução.

A Figura 13 mostra as regiões do domínio que possuem valores negativos de temperatura (região em branco ao redor do cilindro) no caso do escoamento cruzado ao redor de um cilindro aquecido com $Re = 100$, $Pr = 1$ e $Ri = 0.25$ com flutuabilidade opondo-se à convecção. Na Figura 13 (a), é possível observar uma grande região de valores negativos de temperatura que ocorrem ao longo do domínio para o caso com $\gamma = 0$, com valores de $T_{min} = -0.01106$. Na Figura 13 (b), é possível observar o efeito produzido pelo uso de $\gamma = 1$. Aqui, apenas dois pequenos pontos próximos ao cilindro ficaram com temperaturas negativas com valores de $T_{min} = -0.00022$. Isso demonstra a capacidade dessa formulação em reduzir a difusão excessiva produzida quando a velocidade efetiva não é considerada.

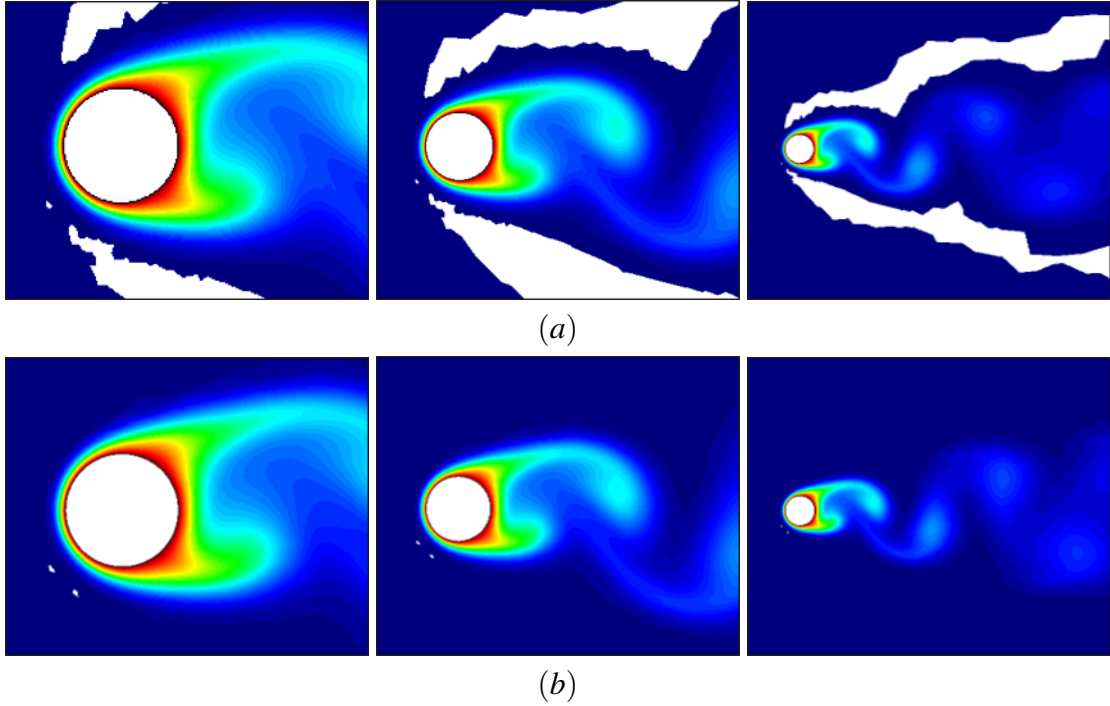


Figura 13: Escoamento cruzado ao redor de um cilindro aquecido com $Re = 100$, $Pr = 1$ e $Ri = 0.25$ com flutuabilidade opondo-se à convecção: região com temperaturas negativas para $\gamma = 0$ (a) e para $\gamma = 1$ (b).

6.1.4 Escoamento em Duto Horizontal de Seção Circular com Temperatura e Fluxo de Calor Prescritos na Parede

Neste quarto exemplo, analisamos os efeitos de duas condições de contorno distintas aplicadas na parede de um duto horizontal de seção circular, com diâmetro d e comprimento L . Na primeira análise, considera-se uma temperatura constante axialmente igual a T_{\max} , condição de não deslizamento na parede e pressão de referência $p = 0$ aplicada na saída do duto. Na segunda, aplica-se um fluxo de calor constante axialmente igual a $q_w = \frac{1}{4}(d/L)$, também com condição de não deslizamento na parede e pressão de referência $p = 0$ na saída.

Como condição inicial para as duas análises, assume-se que o fluido na entrada do duto possui velocidade constante u_o e temperatura $T_{\min} = T_o$. O domínio de análise é representado esquematicamente na Figura 14. As simulações foram realizadas para $Pr = 1$ e considerando diferentes comprimentos e valores de Reynolds. Para todos os casos foi utilizada uma malha estruturada composta por elementos triangulares e sem o emprego de adaptação de malha.

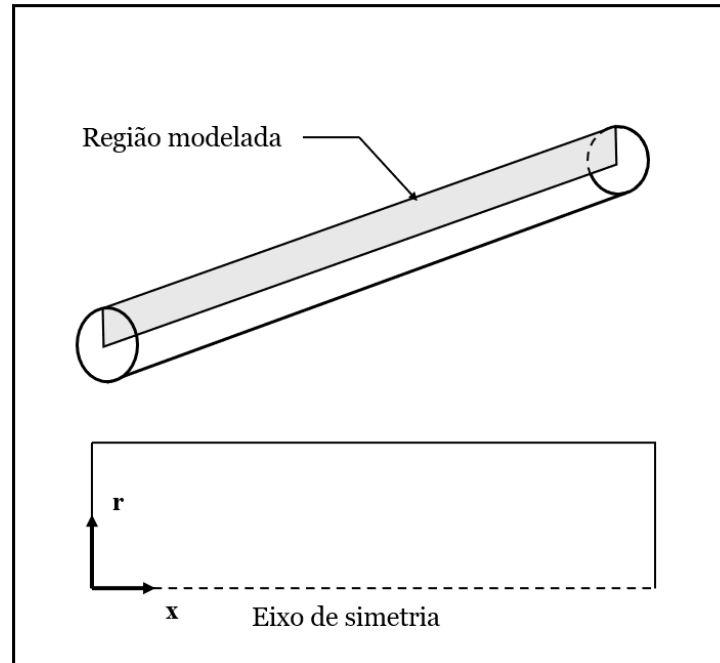


Figura 14: Domínio de análise para o problema de escoamento em duto horizontal com temperatura e fluxo de calor prescritos na parede.

As simulações foram realizadas para os seguintes valores de Reynolds e comprimentos de duto: $Re = 100$, $L = 10$; $Re = 200$, $L = 20$; $Re = 500$, $L = 50$; e $Re = 1000$, $L = 100$. A malha utilizada no caso 1 possui 2 500 elementos, no caso 2 possui 5 000 elementos e no caso 3 possui 20 000 elementos. No caso 4 foi feito um estudo de convergência de malha onde a primeira malha continha 25 000 elementos, a segunda 40 000 elementos e a terceira 60 000 elementos. Além disso, a Figura 15 apresenta o refinamento característico da malha próximo a parede do duto que foi utilizado em todos os casos.

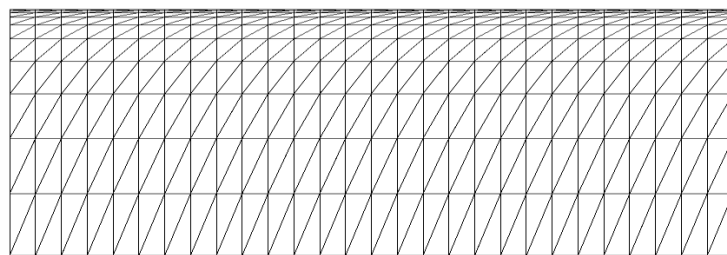


Figura 15: Refinamento da malha próximo a parede do duto .

De modo geral, no estudo de escoamentos internos com parede aquecida, os parâmetros mais relevantes a serem determinados são a força de atrito (ou queda de pressão) e o fluxo de calor na parede. Para regimes de escoamento laminar, os valores do fator de atrito e do número de Nusselt em dutos de seção circular com temperatura ou fluxo de calor prescritos na parede são bem conhecidos na literatura. Neste trabalho, esses valores foram calculados na região do

duto onde os perfis de velocidade e temperatura estavam completamente desenvolvidos.

Na Figura 16 é apresentada a comparação entre os valores do fator de atrito f obtidos neste trabalho com os valores calculados de forma analítica a partir da solução do problema de Hagen-Poiseuille. É possível observar a boa concordância dos resultados para os escoamentos laminares analisados. Além disso, para o caso em que $Re = 1000$, é possível notar a boa concordância de resultados mesmo com uma menor discretização.

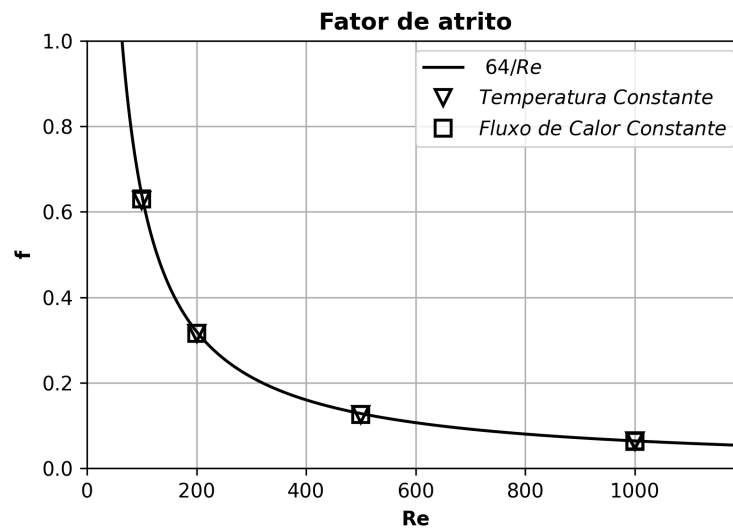


Figura 16: Comparação entre o fator de atrito em função do número de Reynolds para $Re = 100, 200, 500$ e 1000 .

A Tabela 3 apresenta os resultados dos valores de Nusselt obtidos para todos os casos considerando duas condições de contorno: temperatura e fluxo de calor constante na parede ao longo do duto. O valor de Nusselt considerado para a condição de temperatura constante é de 3.66 e fluxo de calor constante é de 4.36. É possível observar a boa concordância dos resultados com os valores calculados a partir da solução analítica do problema.

Tabela 3: Número de Nusselt para temperatura e fluxo de calor constantes na parede do duto.

Reynolds	100	200	500	1000		
Elementos	2 500	5 000	20 000	25 000	40 000	60 000
Nu (T_{max})	3.6102	3.6167	3.6192	5.0617	3.7289	3.6263
Nu (q_w)	4.3677	4.3843	4.3868	5.6253	4.4501	4.3910

6.2 Exemplo da Aplicação: Estudo de um Downcomer de um PWR

Neste quinto e último exemplo, é analisado o escoamento em uma região do vaso de pressão de um reator nuclear conhecida como downcomer. Nesse estudo será empregada a formulação para geometrias axissimétricas devida a simetria axial dessa região. Na Figura 17 esta destacada a região do vaso que será modelada. Os dados utilizados foram obtidos do experimento ROCOM, (Ressendorf Coolant Mixing Model), que é uma instalação experimental localizada na Alemanha e foi projetado para estudar a mistura de refrigerante em reatores nucleares PWR, especialmente em situações de transientes térmicos e acidentes de injeção de segurança (Kliem et al., 2008).

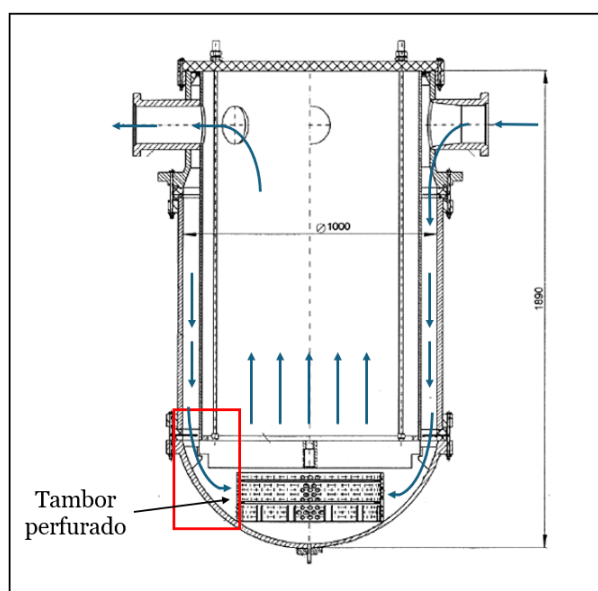


Figura 17: Região do vaso do reator modelada. Adaptado de Prasser et al. (2003)

Tendo em vista que a região de entrada do downcomer tem o formato de um anulus e a de saída é uma placa com vários furos em formato de anel (Figura 18), o anulus de entrada e os furos da placa de saída foram aproximados de tal forma que pudesse ser aplicado a condição de escoamento 2D axissimétrico. Ademais, para essa simulação foi considerado $Re = 4.154 \times 10^6$, o mesmo utilizado no experimento ROCOM e condição de não deslizamento nas paredes.

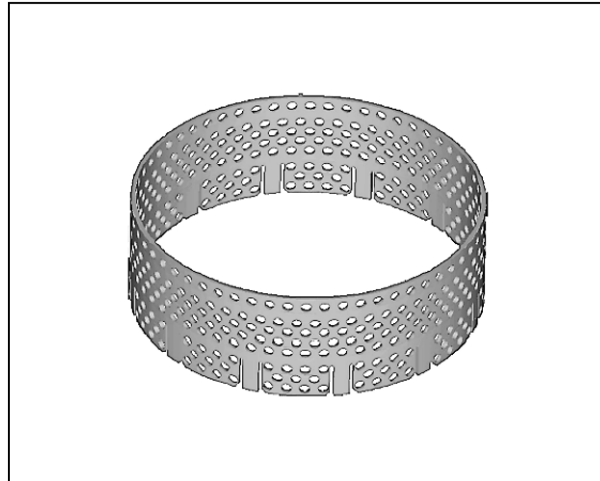


Figura 18: Tambor perfurado. Adaptado de (Höhne et al., 2006).

A Figura 19 mostra a geometria já com a malha inicial relativa à região indicada na Figura 17. A malha não estruturada empregada inicialmente possui 22206 elementos com tamanho mínimo dos elementos definido como $h_{\min} = 0,004d$ e opção de malha adaptativa ativada.

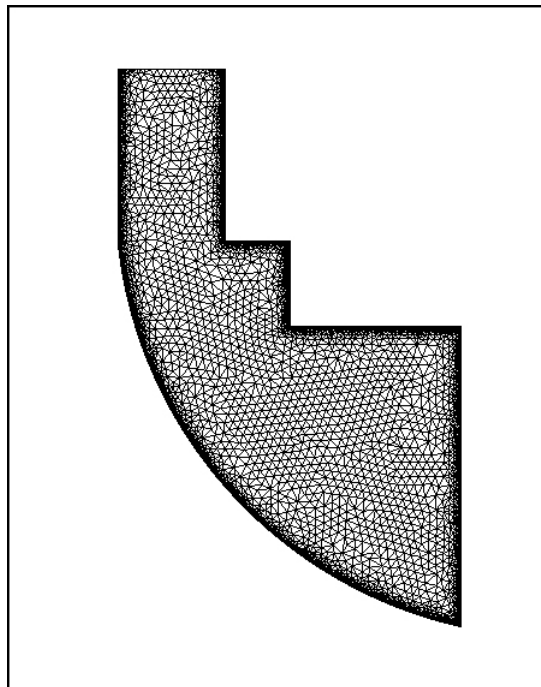


Figura 19: Downcomer com malha não estruturada.

A Figura 20 apresenta os detalhes dos campos de velocidade e pressão na região do downcomer, permitindo uma análise qualitativa do escoamento. Na Figura 20 (a), observa-se o campo de velocidade, onde o fluido acelera logo após a entrada e sofre descolamento na região do primeiro degrau. Nota-se ainda a formação de uma zona de recirculação nesse degrau, além de uma região de baixa velocidade que se estende até a saída, após o segundo degrau. Já a

Figura 20 (b) exibe o campo de pressão, destacando uma região de baixa pressão associada à recirculação no primeiro degrau. Também se observa um aumento de pressão na parte inferior do downcomer, consequência da mudança de direção do escoamento, que entra verticalmente e sai horizontalmente.

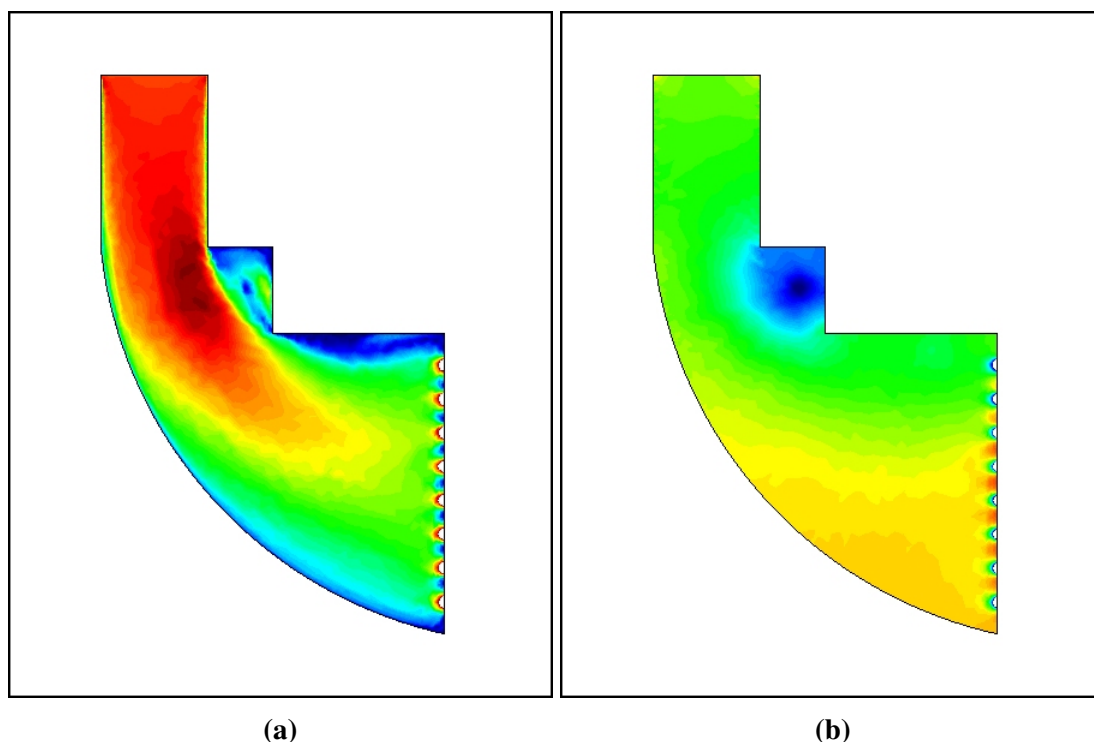


Figura 20: Campo de velocidade (a) e pressão (b) no downcomer.

Este exemplo demonstra que a formulação estabilizada empregada neste trabalho é capaz de prever o escoamento em condições reais. Destacando que, para uma análise mais detalhada, os campos de velocidade, pressão e temperatura na região do downcomer são influenciados pela interação entre o fluxo que entra pelos bocais de entrada e os efeitos da geometria do vaso de pressão do reator. Além disso, a partir dos resultados obtidos neste trabalho, é possível otimizar a geometria dessa região a fim de reduzir as perdas de carga bem como reduzir ou eliminar as vibrações que surgem em determinadas faixas de Reynolds devido ao desprendimento de vórtices causados pelo descolamento do fluido na região dos degraus.

7 Conclusão

O principal objetivo deste trabalho foi verificar e validar a formulação estabilizada de elementos finitos proposta, resolvendo diversos exemplos clássicos de mecânica dos fluidos e transferência de calor bem conhecidos na literatura. Esses exemplos foram escolhidos de forma a demonstrar a capacidade desta formulação em capturar os fenômenos físicos envolvidos em diferentes geometrias. O modelo bidimensional é apresentado tanto para coordenadas cartesianas quanto para coordenadas cilíndricas, nas quais o domínio é simétrico em relação ao eixo x . Quando a opção axissimétrica é ativada, as equações governantes escritas para x e r são resolvida em vez da forma cartesiana, x e y . Assim, no caso axissimétrico, a direção axial corresponde ao eixo x , enquanto a direção radial é representada pelo eixo y positivo.

Neste trabalho, foi proposta uma formulação estabilizada de segunda ordem no tempo para a simulação de escoamentos incompressíveis com convecção dominante utilizando espaços de interpolação de mesma ordem para a velocidade e pressão. Os balanços de massa e quantidade de movimento foram combinados a partir da série de Taylor de segunda ordem das componentes de velocidade e temperatura, de forma a obter uma equação de atualização do campo de pressão. Para o cálculo dos campos de velocidade e temperatura, minimizou-se a integral do quadrado dos resíduos dos balanços de quantidade de movimento e energia em relação às variáveis livres de velocidade e temperatura.

Adicionalmente, utilizou-se o conceito de velocidade híbrida, que combina a velocidade real e a velocidade efetiva, produzindo o efeito de captura de descontinuidade. Como resultado, obteve-se uma formulação estabilizada que incorpora, de forma intrínseca, os pesos responsáveis por controlar oscilações espaciais em escoamentos dominados por convecção, além de contornar as restrições impostas pela escolha de espaços de interpolação iguais para a velocidade e pressão.

No primeiro exemplo, foi analisada a estratificação térmica em uma cavidade quadrada para diferentes números de Rayleigh. Observou-se o comportamento característico dos campos de pressão, velocidade e temperatura, além do refinamento adaptativo da malha em regiões com maiores gradientes. Comparando-se os valores obtidos para o número de Nusselt com os disponíveis na literatura, verificou-se uma excelente concordância.

No segundo exemplo, referente à convecção natural em torno de um cilindro aquecido para diversos números de Rayleigh, os resultados novamente demonstraram boa precisão na estimativa do número de Nusselt médio. Além disso, esse caso permitiu avaliar de forma mais

clara o efeito do operador de captura de descontinuidade ao comparar a solução obtida com e sem o uso da velocidade efetiva. A análise revelou que temperaturas negativas, resultado da difusão numérica que não representa a física do problema, foram atenuadas, reduzindo o erro da solução para um mesmo número de elementos.

No terceiro exemplo, foram analisados os casos de convecção forçada e mista em torno de um cilindro aquecido, com e sem os efeitos da aceleração da gravidade. Observou-se a mudança no padrão de desprendimento de vórtices no caso em que a flutuabilidade era oposta a convecção, bem como sua supressão no caso de flutuabilidade era auxiliada pela convecção. Os resultados apresentaram boa concordância com dados experimentais disponíveis na literatura.

No quarto exemplo, foi analisado o escoamento em duto horizontal de seção circular para as condições de temperatura e fluxo de calor prescritos na parede, considerando diferentes números de Reynolds e comprimentos. Os resultados demonstraram que tanto o fator de atrito quanto o número de Nusselt foram determinados com uma boa precisão pela formulação escrita para geometrias axissimétricas, reproduzindo adequadamente o comportamento característicos esperados para esses problemas sob as mesmas condições.

Por fim, foi realizada a simulação do escoamento através do downcomer, uma região crítica do vaso de pressão de reatores nucleares. Aproveitando a simetria do problema em relação ao eixo, investigou-se o comportamento do escoamento nessa área. Os resultados reforçaram a aplicabilidade da formulação desenvolvida para tratar problemas reais, demonstrando seu potencial na resolução de desafios que envolvem a dinâmica dos fluidos computacional.

Assim, os resultados obtidos evidenciam a adequação da formulação proposta para tratar problemas envolvendo convecção natural, mista e forçada, bem como transferência de calor, quando presente tanto em geometrias cartesianas quanto em axissimétricas. A comparação dos resultados obtidos com dados experimentais da literatura confirma a consistência e a precisão da formulação estabilizada apresentada. Além disso, pode-se destacar que esta pesquisa tem potencial para gerar trabalhos subsequentes, como a identificação dos valores adequados de γ para determinados problemas dominados por convecção.

Referências Bibliográficas

- A. Bowyer. Computing dirichlet tessellations. *The Computer Journal*, 24:162–166, 1981.
- F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, New York, NY, 1991.
- A. Brooks and T.J.R. Hughes. Streamline upwind petrov–galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier–stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- M.S. Chenaud, S. Li, M. Anderhuber, L. Matteo, and A. Gerschenfeld. Computational thermal hydraulic schemes for SFR transient studies. In *NURETH 16 - The 16th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics*, Chicago, United States, 2015.
- S.W. Churchill and H.H.S. Chu. Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder. *International Journal Heat Mass Transfer*, 18:1049–1053, 1975.
- R.W. Clough. The finite element in plane stress analysis. *Proceedings of American Society of Civil Engineers*, 1960.
- L. Dagum and R. Menon. Openmp: an industry standard api for shared-memory programming. *IEEE Computational Science and Engineering*, 5:46–55, 1998.
- P.A.B De Sampaio. A petrov-galerkin formulation for the incompressible navier-stokes equations using equal interpolation for velocity and pressure. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:1135–1149, 1991a.
- P.A.B De Sampaio. *Petrov-Galerkin Finite Element Formulations for Incompressible Viscous Flows*. Phd thesis, University of Wales, Swansea, UK, 1991b.
- P.A.B. De Sampaio. A finite element formulation for transient incompressible viscous flows stabilized by local time-steps. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:2095–2108, 2005.
- P.A.B. De Sampaio. A stabilized finite element method for incompressible flow and heat transfer: A natural derivation based on the use of local time-steps. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:6177–6190, 2006.
- P.A.B. De Sampaio and A.L.G.A. Coutinho. Simulation of free and forced convection incompressible flows using an adaptive parallel/vector finite element procedure. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29:289–309, 1999.

- P.A.B. De Sampaio and A.L.G.A. Coutinho. A natural derivation of discontinuity capturing operator for convection-diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:6291–6308, 2001.
- P.A.B. De sampaio, A.G. Junior, Milton, and J. M.F.C. Lapa. A cfd approach to the atmospheric dispersion of radionuclides in the vicinity of npps. *Nuclear Engineering and Design*, 238: 250–273, 01 2008. doi: 10.1016/j.nucengdes.2007.05.009.
- Empresa de Pesquisa Energética EPE. Demanda de energia 2050. *ESTUDOS DA DEMANDA ENERGIA*, 2016.
- A.C. Galeão and E.G. Dutra do Carmo. A consistent approximate upwind petrov-galerkin method for convection dominated problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68(1):83–95, 1988.
- N. Sagaut P. Garnier, E. Adams. *Large Eddy Simulation for Compressible Flows*. Springer Dordrecht, 2009.
- M. Hortmann, M. Peric, and G. Scheuerer. Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: benchmark solutions. *International Journal For Numerical Methods in Fluids*, 11:189–207, 1990.
- Thomas J.R. Hughes. Multiscale phenomena: Green’s functions, the dirichlet-to-neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1):387–401, 1995. ISSN 0045-7825. doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00844-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(95)00844-9).
- Thomas J.R. Hughes, Michel Mallet, and Mizukami Akira. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II. beyond SUPG. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 54(3):341–355, 1986a. ISSN 0045-7825. doi: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(86\)90110-6](https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90110-6).
- T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Ballestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics, V. circumventing the babuska-brezzi condition: A stable petrov-galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59:85–89, 1986b.
- S.C. Hyman, C.F. Bonilla, and S.W. Ehrlich. Natural convection transfer processes. heat transfer to liquid metals and non-metals at horizontal cylinders. *Chemical Engineering Progress*, 49: 21–31, 1953.

- Thomas Höhne, Sören Kliem, and Ulrich Bieder. Modeling of a buoyancy-driven flow experiment at the rocom test facility using the cfd-codes cfx-5 and trio-u. *Nuclear Engineering and Design*, 236:1309–1325, 06 2006. doi: 10.1016/j.nucengdes.2005.12.005.
- IAEA. *Summary review on the application of computational fluid dynamics in nuclear power plant design*. Number NR-T-1.20 in IAEA Nuclear Energy Series. International Atomic Energy Agency, Vienna, 2022. ISBN 978-92-0-100221-1.
- IAEA. *Nuclear Power Reactors in the World*. Number 2 in Reference Data Series. INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY, Vienna, 2024. ISBN 978-92-0-122224-4.
- IBGE. Projeção da população do brasil e das unidades da federação, 2024. URL <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/index.html>. Acesso em: 22 Ago. 2024.
- IEA. Global co2 emissions in 2019, 2020. URL <https://www.iea.org/reports/global-co2-emissions-in-2019>. Acesso em: 02 Jul. 2024.
- IEA. Global ev outlook 2022, 2022. URL <https://www.iea.org/reports/global-ev-outlook-2022>. Acesso em: 20 Dez. 2024.
- IEA. Tracking clean energy progress 2023, 2023. URL <https://www.iea.org/reports/tracking-clean-energy-progress-2023>. Acesso em: 20 Dez. 2024.
- IPCC. Aquecimento global de 1,5°C, 2019. URL https://www.ipcc.ch/site/assets/uploads/sites/2/2019/09/SR15_SPM_Portuguese.pdf. Acesso em: 28 Ago. 2024.
- C. Johnson. *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- D. W. Kelly, S. Nakazawa, O. C. Zienkiewicz, and J. C. Heinrich. A note on upwinding and anisotropic balancing dissipation in finite element approximation to convective diffusion problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15:1705–1711, 1980.
- Soeren Kliem, T. Sühnel, Ulrich Rohde, Thomas Höhne, H.-M Prasser, and Frank-Peter Weiss. Experiments at the mixing test facility rocom for benchmarking of cfd codes. *Nuclear Engineering and Design*, 238:566–576, 03 2008. doi: 10.1016/j.nucengdes.2007.02.053.
- Kenneth D. Kok. *Nuclear Engineering Handbook*, volume 2. Taylor Francis Group, LLC, 2017. ISBN 13:978-1-4822-1592-2.
- P. Le Coz, J.F. Sauvage, and J.P. Serpantie. Sodium cooled fast reactors: The astrid plant project. In *Proceedings of the International Congress on Advances in Nuclear Power Plants (ICAPP 2011)*, page 2851, Paris, 2011. Société Française d’Énergie Nucléaire.

- NAP. *Climate Change: Evidence and Causes: Update 2020*. The National Academies Press, Washington, DC, 2020. ISBN 978-0-309-67502-4. doi: 10.17226/25733.
- P. Nithiarasu, R. W. Lewis, and K.N. Seetharamu. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Mass Transfer*. John Wiley Sons, Ltd, 2 edition, 2016. ISBN 9780470756256.
- NOAA. Annual 2023 global climate report, 2024. URL <https://www.ncei.noaa.gov/access/monitoring/monthly-report/global/202313>. Acesso em: 04 Jul. 2024.
- B.S.V. Patnaik, P.A.A. Narayana, and K.N. Seetharamu. Numerical simulation of vortex shedding past a circular cylinder under the influence of buoyancy. *International Journal Heat Mass Transfer*, 42:3495–3507, 1999.
- Horst-Michael Prasser, Gerhard Grunwald, Thomas Höhne, Soeren Kliem, Ulrich Rohde, and Frank-Peter Weiss. Coolant mixing in a pressurized water reactor: Deboraton transients, steam-line breaks, and emergency core cooling injection. *Nuclear Technology*, 143:37–56, 07 2003. doi: 10.13182/NT03-A3396.
- G.D. Raithby. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 9:153–164, 1976.
- A. Shehabi, S.J. Smith, A. Hubbard, A. Newkirk, N. Lei, M.A.B. Siddik, B. Holecek, J. Koomey, E. Masanet, and D. Sartor. 2024 united states data center energy usage report. Technical Report LBNL-2001637, Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, 2024.
- G. Strang and G.J. Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, 1973.
- Tayfun Tezduyar and Yasuo Osawa. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:411–430, 10 2000. doi: 10.1016/S0045-7825(00)00211-5.
- D.C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 26(11):1299–1310, 1993.
- O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24: 337–357, 1987.
- Qu S. Taylor R.L. Zienkiewicz, O.C. and S. Nakazawa. The patch test for mixed formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23:1873–1883, 1986.