



ANÁLISE DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL COM REALIMENTAÇÃO TERMO-HIDRÁULICA

João Paulo Araujo Barbosa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia Nucleares do Instituto de Engenharia Nuclear da Comissão Nacional de Energia Nuclear, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciência e Tecnologia Nucleares .

Orientadores: Daniel Artur Pinheiro Palma
Guilherme Guedes de Almeida

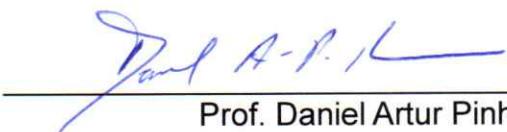
Rio de Janeiro
Março de 2024

“ANÁLISE DE SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL COM
REALIMENTAÇÃO TERMO-HIDRÁULICA”

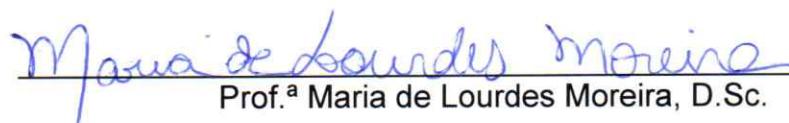
João Paulo Araújo Barbosa

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA NUCLEARES DO
INSTITUTO DE ENGENHARIA NUCLEAR COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA E
TECNOLOGIA NUCLEARES.

Aprovado por:


Prof. Daniel Artur Pinheiro Palma, D.Sc.


Prof. Guilherme Guedes de Almeida, D.Sc.


Prof.ª Maria de Lourdes Moreira, D.Sc.


Prof. Alexandre José Miranda Antunes, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MARÇO DE 2024

BARB Barbosa, João Paulo Araujo

Análise de Soluções de Equações da Cinética Pontual
com Realimentação Termo-Hidráulica/João Paulo
Araujo Barbosa. – Rio de Janeiro: IEN/CNEN, 2024.

xi, 69 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Daniel Artur Pinheiro Palma
Guilherme Guedes de Almeida

Dissertação (mestrado) – IEN/CNEN/Programa de
Ciência e Tecnologia Nucleares , 2024.

Referências Bibliográficas: p. 60 – 62.

1. Equações da Cinética Pontual. 2. Realimentação
Termo hidráulica. 3. Reatividade. 4. Transientes.
I. Pinheiro Palma, Daniel Artur *et al.* II. Comissão
Nacional de Energia Nuclear, IEN, Programa de Ciência
e Tecnologia Nucleares . III. Título.

*“Não morrem os que vivos
vivem.”*

Autor Desconhecido

AGRADECIMENTOS

A Deus em primeiro lugar, meu companheiro de todas as horas, que a todos os momentos segura nas minhas mãos e nunca me abandona;

Aos meus pais, João da Cruz e Maria de Lourdes, pelo amor, compreensão, apoio incondicional e por sempre rezarem por mim;

Aos meus irmãos, pelo apoio e pela preocupação em sempre manter meu astral alto, em especial José Milton e Marzio (in Memoriam);

À minha esposa, Tatielen, pelo apoio, companheirismo, paciência e dedicação, me dando todo suporte emocional e material para que eu concluisse essa jornada;

Ao meu filho João Miguel, pelo carinho e por sempre acreditar que posso ir mais longe;

Aos professores do IEN, em especial Dr. Marcelo Lapa e Marcus Vidal pelo apoio e confiança;

Ao meu orientador, Prof. Dr. Daniel Artur Pinheiro Palma, pela confiança, bom humor, pelo incentivo, disponibilidade e apoio;

Ao meu orientador, Prof. Dr. Guilherme Guedes de Almeida, pela paciência, atenção, disponibilidade, confiança;

À secretaria do PPGIEN Leila Carla, pelo disponibilidade, cortesia e apoio;

À Comissão Nacional de Energia Nuclear, CNEN;

Resumo da Dissertação apresentada ao IEN/CNEN como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL COM REALIMENTAÇÃO TERMO-HIDRÁULICA

João Paulo Araujo Barbosa

Março/2024

Orientadores: Daniel Artur Pinheiro Palma
Guilherme Guedes de Almeida

Programa: Ciência e Tecnologia Nucleares

O conjunto das equações da cinética pontual com realimentação termohidráulica (ECPRT) fornece uma metodologia adequada para predizer globalmente a densidade de nêutrons, a reatividade, a temperatura e a concentração de precursores de nêutrons retardados em um reator nuclear no qual a separabilidade das partes espacial e temporal do fluxo de nêutrons é válida. Na presente dissertação um estudo de revisão bibliográfica foi realizado levando em consideração quatro metodologias distintas para obtenção de soluções aproximadas das ECPRT considerando um transiente de inserção de reatividade. Uma dedução didática dessas soluções foi realizada bem como o desenvolvimento de um código em linguagem Phyton para servir de solução numérica de referência no intuito de testar a acurácia dessas aproximações em relação a dois parâmetros específicos, quais sejam, o pico de potência transiente e o instante em que esse pico ocorre. Essas informações são importantes nas análises de segurança realizadas pelos projetistas e avaliadas pelos órgãos reguladores. Os resultados obtidos mostram que cada solução proposta apresenta regiões nos quais sua predição é mais acurada mas é possível concluir que a solução proposta por Abdallah A. Nahla é a mais adequada de um modo geral.

Abstract of Dissertation presented to IEN/CNEN as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SOLUTION ANALYSIS OF THE POINT KINETIC EQUATIONS WITH
THERMO-HYDRAULIC FEEDBACK

João Paulo Araujo Barbosa

March/2024

Advisors: Daniel Artur Pinheiro Palma
Guilherme Guedes de Almeida

Department: Science and Nuclear Technology

The set of point kinetics equations with thermohydraulic feedback (PKETFE) provides a suitable methodology for globally predicting neutron density, reactivity, temperature, and delayed neutron precursor concentration in a nuclear reactor where the separability of the spatial and temporal aspects of neutron flux is valid. In this work, a literature review study was conducted, considering four distinct methodologies for obtaining approximate solutions of PKETFE, specifically addressing a reactivity insertion transient. A didactic derivation of these solutions was performed, along with the development of a Python code to serve as a numerical reference solution to test the accuracy of these approximations concerning two specific parameters: the transient peak power and the time at which this peak occurs. These pieces of information are crucial in safety analyses conducted by designers and assessed by regulatory bodies. The obtained results show that each proposed solution has regions where its prediction is more accurate, but it can be concluded that the solution proposed by Abdallah A. Nahla is the most suitable overall.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	4
1.1.1 Objetivos gerais	4
1.1.2 Objetivos específicos	4
1.1.3 Estrutura da dissertação	4
2 Metodologia	6
2.1 O Método proposto por Haofeng Li, Wenzhen Chen, Fan Zhang e Lei Luo	7
2.1.1 Aproximação prompt jump para os nêutrons	7
2.1.2 Aproximação prompt jump para os precursores	12
2.1.3 Aproximação prompt jump para a temperatura	14
2.2 O Método proposto por Chen	17
2.2.1 Análise do Modelo Prompt Supercrítico	18
2.2.2 Desconsiderando a potência inicial ($t = 0, n_0 = 0$)	19
2.2.3 Considerando a potência inicial ($t = 0, n = n_0$ e $\rho = \rho_0$)	20
2.2.4 Considerando a aproximação Prompt Jump	21
2.2.5 Aproximação Prompt Jump para precursores	22
2.3 O Método proposto por Nahla	23
2.4 O Método Nahla aproximado proposto por Palma <i>et. al</i>	27
2.4.1 Aplicação da Técnica de Ajuste	40
3 Resultados	43
3.1 Considerações iniciais	43
3.2 O método Runge-Kutta	44
3.3 A linguagem Python	45
3.4 Análise qualitativa	45
3.4.1 Método de referência	46

3.4.2	Método proposto por Li. <i>et.al</i>	47
3.4.3	Método proposto por Chen	48
3.4.4	Método proposto por Nahla	49
3.4.5	Método Nahla aproximado proposto por Palma. <i>et.al</i>	50
3.5	Análise quantitativa	50
3.5.1	Análise do desvio percentual médio (%)	57
4	Conclusão e Perspectivas futuras	59
Referências Bibliográficas		60
A Código Python		64

Lista de Figuras

3.1	Potência em função do tempo. Solução numérica - método de Runge-Kutta.	46
3.2	Potência em função do tempo. Solução numérica - Li, 2007.	47
3.3	Potência em função do tempo. Solução numérica com $\rho_0 > \beta$ - Chen, 2007.	48
3.4	Potência em função do tempo. Solução numérica - Nahla, 2009.	49
3.5	Potência em função do tempo. Solução numérica - Palma, 2009.	50
3.6	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{2.0}$.	51
3.7	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{2.5}$.	52
3.8	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{3.0}$.	53
3.9	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{3.5}$.	54
3.10	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{4.0}$.	55
3.11	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{4.5}$.	56
3.12	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{5.0}$.	57

Listas de Tabelas

3.1	Parâmetros cinéticos.	44
3.2	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{2.0}$.	51
3.3	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{2.5}$.	51
3.4	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{3.0}$.	52
3.5	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{3.5}$.	53
3.6	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{4.0}$.	54
3.7	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{4.5}$.	55
3.8	Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{5.0}$.	56
3.9	Média dos desvios percentuais.	57

Capítulo 1

Introdução

Segundo a Agência Internacional de Energia Atômica (IAEA)¹ atualmente existem 413 reatores nucleares em operação em todo o mundo, com uma capacidade de geração em torno de 370 GW de energia elétrica. Esses números reforçam a importância da energia nuclear como parte da solução para suprir a demanda energética global de maneira mais sustentável e descarbonizada. Diante desse contexto global, o Brasil também enfrenta desafios e oportunidades no setor energético. O Brasil é um país em desenvolvimento, com uma taxa média de crescimento de PIB prevista de 3,1% a.a. no horizonte até 2050, segundo dados do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA)² e taxas semelhantes para o crescimento médio do consumo de energia elétrica.

A malha energética brasileira visa expandir a oferta de energia econômica e sustentável, mantendo a diversidade energética. Atualmente, a capacidade energética do Brasil é composta por 63,1% de usinas hidrelétricas, 25,1% de usinas térmicas, 8,9% de usinas eólicas e 2,9% de usinas solares. Com base no relatório do Ministério de Minas e Energia, é possível observar um considerável aumento na demanda por energia a longo prazo (2050), levantando preocupações, uma vez que 53,17% da matriz energética nacional é proveniente de hidrelétricas e 24,57% de termelétricas. Sendo assim, a energia nuclear ainda é uma opção viável para o Brasil, sendo parte da solução de nossos problemas energéticos no médio e curto prazo.[1]

O Brasil abriga diferentes projetos relacionados ao desenvolvimento do setor nuclear, sendo a expansão do programa nuclear brasileiro uma realidade face aos novos projetos de reatores em fase de licenciamento ou construção no país. Construir, licenciar e operar essas instalações de forma segura é primordial para o sucesso desses empreendimentos e das ambições do Brasil no cenário mundial de utilização da energia nuclear para fins pacíficos.

Para um reator nuclear operar em um nível de potência constante, a taxa de

¹www.iaea.org

²www.ipea.gov.br

produção de nêutrons por meio de reações de fissão deve ser perfeitamente equilibrada com as perdas de nêutrons por absorção e vazamento. Qualquer desvio dessa condição de equilíbrio resulta em uma dependência temporal do número de nêutrons e, portanto, do nível de potência do reator. Isso pode acontecer por vários motivos. Por exemplo, um operador de reator pode querer alterar o nível de potência do reator alterando temporariamente a multiplicação do núcleo ajustando as hastes de controle. Alternativamente, pode haver mudanças de longo prazo na multiplicação do núcleo devido ao esgotamento do combustível e acúmulo de isótopos [2]

Condições imprevistas de acidentes podem causar mudanças mais drásticas, como falha da bomba de refrigeração principal, bloqueio de passagens de fluxo de refrigeração ou ejeção inesperada de barras de controle. É importante ser capaz de prever o comportamento temporal da população de nêutrons no núcleo do reator causado por mudanças na duplicação do reator. Tal assunto é conhecido como dinâmica do reator nuclear [2]

A modelagem dinâmica e simulação é um campo da Engenharia que prediz a atuação de sistemas dinâmicos em diversas áreas da engenharia. Realizar o controle dos reatores nucleares de fissão é de extrema relevância, devido aos riscos de exposição, vazamentos radioativos, superaquecimento no reator. A modelagem e simulação de reatores nucleares por fissão permite aplicar ferramentas de controle no sistema que tendem a ser altamente eficazes, mantendo o reator dentro dos padrões de segurança [3]

Para isso, utiliza-se comumente o modelo da cinética pontual. Esse conjunto de equações da cinética pontual é o modelo mais simples, assumindo a separabilidade em espaço total, e considera apenas a magnitude variável no tempo do fluxo e tempo, com funções de forma espacial conhecidas [4]. Tais modelos utilizados em física de reatores são capazes de fazer previsões em tempo real acerca do funcionamento dinâmico de um reator. As equações da cinética pontual e suas bem estabelecidas equações para um grupo de precursores de nêutrons retardados são escritas da seguinte forma:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{[\rho(t) - \beta]}{l} n(t) + \lambda C(t), \quad (1.1)$$

e

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{l} n(t) - \lambda C(t). \quad (1.2)$$

Onde,

- $n(t)$ é a densidade de nêutrons, que a menos dos fatores multiplicativos, pode

representar a potência do reator. Tais fatores são obtidos considerando que no estudo de reatores, a potência P é definida como uma função do fluxo Φ de nêutrons [5], da seguinte forma: $P = \gamma \Sigma_f \int_V \Phi dV$, com $\gamma \equiv$ Energia média liberada por fissão e $\Sigma_f \equiv$ Seção macroscópica de fissão. Vale lembrar também que para o modelo de cinética pontual, o fluxo de nêutrons é dividido em uma parte especial e uma parte temporal $\Phi = \phi(\vec{v}, \Omega) \cdot n(t)$. Como $\gamma \Sigma_f \int_V \Phi dV$, não depende do tempo, pode ser considerado uma constante de proporcionalidade entre a potência P e a densidade de nêutrons $n(t)$.

- β é a fração total de nêutrons atrasados;
- l é o tempo de vida útil dos nêutrons prontos;
- λ é a constante de decaimento dos precursores de nêutrons atrasados; [6].
- $C(t)$ é a concentração de precursores de nêutrons atrasados; [6].

Essas equações têm um rico conjunto de soluções por meio de métodos analíticos, numéricos e mistos [4]. A cinética pontual tradicional é um dos modelos matemáticos usualmente utilizados para simular transientes em reatores nucleares em curta escala de tempo. A partir de certas simplificações, ela busca predizer o comportamento de reatores e avaliar sua segurança na operação, que ocorrem na ordem entre 10^{-1} s até 10^1 s [7].

A presente dissertação foi desenvolvida no intuito de contribuir com o entendimento da predição de grandezas relevantes na monitoração da potência nuclear em um reator de potência, quais sejam, a densidade de nêutrons, a densidade de precursores de nêutrons retardados, a reatividade e a temperatura média do meio. Para isso, será utilizado o conjunto das equações da cinética pontual considerando realimentação termo hidráulica, que para um grupo de precursores de nêutrons retardados adiciona as equações (1.3) e (1.4) as seguintes equações:

$$\rho(t) = \rho_0 - \alpha[T(t) - T_0] \quad (1.3)$$

e

$$\frac{dT}{dt} = K_c n(t), \quad (1.4)$$

onde T é o incremento de temperatura do reator [6].

O presente trabalho faz uma avaliação das soluções analíticas das equações da cinética pontual com realimentação termo hidráulica desenvolvidas em um passado recente por quatro diferentes autores [6, 8–10]. Além de realizar uma dedução didática das soluções elencadas no Capítulo 2, será dado ênfase na predição dos picos de potência e do instante em que a potência máxima é atingida para um transiente de inserção de reatividade. Todos os resultados obtidos serão comparados com um método numérico de referência desenvolvido especificamente para este fim com a linguagem Python.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos gerais

O objetivo geral dissertação, consiste na apresentação do desenvolvimento de diferentes soluções do conjunto de equações da cinética pontual com realimentação termo-hidráulica.

1.1.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos desta dissertação incluem:

- I. Deduzir de forma didática quatro diferentes metodologias de solução aproximada do conjunto de equações da cinética pontual com realimentação termo hidráulica;
- II. Desenvolver um código computacional para servir de solução numérica de referência em uma linguagem mais moderna (Python), pois trata-se de uma linguagem de programação de alto nível, interpretada de script, imperativa, orientada a objetos, funcional, de tipagem dinâmica;
- III. Avaliar qual, dos métodos analisados, prediz melhor o instante em que o pico de potência acontece e qual é esse pico;

1.1.3 Estrutura da dissertação

O presente trabalho foi estruturado em cinco capítulos, conforme descrito a seguir:

- I. O capítulo 1 apresenta um panorama geral do trabalho com resumo da metodologia utilizada e introdução.
- II. No Capítulo 2 serão apresentados os quatro métodos analíticos citados anteriormente, além do método numérico de referência;

III. No capítulo 3 serão reportados os resultados obtidos para todos os métodos, procedendo uma comparação entre os mesmos bem como comparando-os com o método de referência, com foco nas avaliações já apresentadas nos objetivos específicos;

VI. As conclusões e discussões acerca dos resultados obtidos, serão apresentadas no Capítulo 4;

V. A bibliografia utilizada como referência será apresentada, e o código desenvolvido em Python encontra-se em ANEXO A.

A seguir serão apresentados diferentes métodos de solução anaítica das Equações da Cinética Pontual com realimentação termohidráulica, a fim de compará-los qualitativa e quantitativamente entre si.

Capítulo 2

Metodologia

A presente pesquisa trará uma resolução detalhada dos trabalhos apresentados nos subitens 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, com o intuito de desenvolver uma metodologia capaz de implementar numericamente as soluções analíticas, a fim de analisar o pico de potência e o instante de tempo em que ele acontece, para assim predizer, dos métodos apresentados, qual é o mais eficaz. Para isto serão utilizados os parâmetros cinéticos [10] $\alpha = 5,010^{-5}K^{-1}$, $k_c = 5,0 \cdot 10^{-2}K/MWs$, $\beta = 6,5 \cdot 10^{-4}$, $\lambda = 7,741 \cdot 10^{-2}s^{-1}$, $l = 10^{-4}s$, $T_0 = 300K$, $n_0 = 10MW$, $\rho_0 = \beta/k$ com $k \in [2,5]$. Desta forma, para cada método será plotado um gráfico da solução analítica e, para fins de comparação, um gráfico da solução numérica, utilizando um programa desenvolvido em Python e considerando os mesmos parâmetros cinéticos.

Definido o método numérico de referência, fazer uma análise gráfica mais detalhada a fim de compará-lo com as soluções analíticas dos métodos apresentados pela literatura. O objetivo dessa análise é identificar os valores de potência máxima e o instante de tempo em que essa potência ocorre.

Com base nos resultados derivados das técnicas analisadas, elaborar tabelas e gráficos, contendo os valores da potência máxima e do tempo para os valores de $k = [2,5]$, observando a relação $\rho_0 = \beta/k$.

Por fim, definindo como erro percentual médio, a média dos erros percentuais dos quatro métodos discutidos, considerando os sete valores de ρ_0 analisados, ser capaz de concluir qual método prediz melhor o pico de potência e qual é esse instante, além de compreender qual é o método mais eficaz, globalmente.

O estudo dos processos transitórios em um reator nuclear, sejam eles lineares ou não, desperta o interesse tanto da cinética quanto da dinâmica dos reatores nucleares. Neste trabalho, o foco é direcionado para as equações da cinética, em particular a cinética pontual de nêutrons, que regula a variação da densidade de nêutrons ao longo do tempo. Essa equação possui uma solução analítica conhecida quando a reatividade é constante. No entanto, para a reatividade dependente do tempo, são necessários procedimentos adequados de solução, pois trata-se de um

problema rígido, também conhecido como *Stiff*. Nesse tipo de problema, o tamanho do passo de tempo deve ser rigorosamente controlado para garantir a estabilidade numérica da solução [11].

2.1 O Método proposto por Haofeng Li, Wenzhen Chen, Fan Zhang e Lei Luo

O conjunto de equações da cinética pontual possui diversos métodos de solução. Nesse contexto, Li, et al. proposeram investigar o processo supercrítico atrasado de um reator nuclear com realimentação de temperatura durante uma pequena inserção de reatividade, verificando a existência de alguns problemas nos resultados obtidos nas literaturas publicadas [6].

O método proposto, consistiu derivar a expressão da relação entre a reatividade e o tempo. Nele, Li analisa e discute os efeitos da pequena inserção de reatividade. [6]

As equações da Cinética Pontual para um grupo de energia podem ser definidas pelas as expressões [10]:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{[\rho(t) - \beta]}{l} n(t) + \lambda C(t) + q_0 \quad (2.1)$$

e

$$\frac{dC(t)}{dt} = \frac{\beta}{l} n(t) - \lambda C(t), \quad (2.2)$$

conforme descrito no Capítulo 1, onde q_0 é uma fonte externa de nêutrons. No entanto, algumas considerações são necessárias para que a análise do método seja capaz de contemplar a máxima variedade de cenários.

2.1.1 Aproximação prompt jump para os nêutrons

Alterações rápidas na reatividade provocam alterações acentuadas na população de nêutrons prontos, seguidas por uma mudança gradual no número de nêutrons atrasados. Portanto, ao focarmos no comportamento assintótico da população de nêutrons, podemos simplificar as equações da cinética pontual ao assumir que ocorre uma rápida elevação na potência em resposta a qualquer mudança na reatividade [2]. Essa simplificação, conhecida como Aproximação Prompt-Jump, implica negligenciar a rápida variação da potência devido aos nêutrons prontos, equivalendo a considerar que $dn/dt = 0$, nas equações da cinética pontual. Essa simplificação é valiosa para compreender a dinâmica imediata do reator diante de alterações súbitas.

Desse modo, se um reator opera em estado de potência constante, o efeito da fonte externa pode ser desprezado [2]. Assim, a Equação (2.1) resulta em:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{[\rho(t) - \beta]}{l} n(t) + \lambda C(t). \quad (2.3)$$

Observe que multiplicando a Equação (2.3) por l e derivando, é possível chegar ao resultado:

$$l \frac{d^2n(t)}{dt^2} = \frac{d\rho(t)}{dt} n(t) + [\rho(t) - \beta] \frac{dn(t)}{dt} + l\lambda \frac{dC(t)}{dt}. \quad (2.4)$$

Substituindo a Equação (2.2) na Equação (2.4):

$$l \frac{d^2n(t)}{dt^2} - [\rho(t) - \beta] \frac{dn(t)}{dt} = \left[\frac{d\rho(t)}{dt} + \lambda\beta \right] n(t) - l\lambda^2 C(t). \quad (2.5)$$

Isolando $\lambda C(t)$ na Equação (2.3) e substituindo na Equação (2.5) obtém-se finalmente:

$$l \frac{d^2n(t)}{dt^2} - [\rho(t) - \beta - \lambda l] \frac{dn(t)}{dt} = \left[\frac{d\rho(t)}{dt} + \lambda\rho(t) \right] n(t). \quad (2.6)$$

Usando a aproximação *Prompt Jump* [12, 13] despreza-se o termo com a derivada segunda, e a Equação (2.6) pode ser reescrita como:

$$[\rho(t) - \beta - \lambda l] \frac{dn(t)}{dt} = - \left[\frac{d\rho(t)}{dt} + \lambda\rho(t) \right] n(t). \quad (2.7)$$

Assumindo que a variação da reatividade é pequena para a análise considerada, ou seja, que serão dados pequenos passos na solução numérica. Como sabe-se que a reatividade varia com a temperatura, pode-se propor que essa variação seja linear. Considerando que a reatividade diminui com a temperatura, espera-se uma equação do tipo:

$$\rho(t) = \rho_0 - \alpha T(t), \quad (2.8)$$

onde T é o incremento de temperatura no reator.

Quando se introduz uma reatividade ao reator, a potência responde rapidamente, e o modelo adiabático pode ser utilizado para o cálculo da temperatura [14], tem-se

que:

$$\frac{dT(t)}{dt} = K_c n(t), \quad (2.9)$$

onde K_c é o recíproco da capacidade térmica do reator.

Derivando a Equação (2.8) com relação a t e usando a Equação (2.9), se tem o resultado seguinte:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\alpha K_c n(t). \quad (2.10)$$

Aplicando a regra da cadeia, e usando a Equação (2.10), escreve-se a derivada de $n(t)$ que aparece na Equação (2.7) como:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{dn(t)}{d\rho(t)} \frac{d\rho(t)}{dt} = -\alpha K_c n(t) \frac{dn(t)}{d\rho(t)}. \quad (2.11)$$

Substituindo as Equações (2.10) e (2.11) na Equação (2.7), e arrumando os termos, se tem que:

$$\frac{dn}{d\rho} = \frac{\lambda\rho - \alpha K_c n}{\alpha K_c (\rho - \beta - \lambda l)}. \quad (2.12)$$

Repare que, na Equação (2.12), passou-se a omitir a dependência temporal de $\rho(t)$ e $n(t)$, com intuito de não deixar a notação carregada. Esta equação pode ser escrita como segue:

$$\frac{dn}{d\rho} + \frac{n}{\rho - \beta - \lambda l} = \frac{\lambda\rho}{\alpha K_c (\rho - \beta - \lambda l)}. \quad (2.13)$$

Considerando n na Equação (2.13) como uma função de ρ , percebe-se que esta encontra-se na forma canônica de uma Equação Diferencial Ordinária de primeira ordem:

$$\frac{dn(\rho)}{d\rho} + p(\rho)n(\rho) = q(\rho), \quad (2.14)$$

onde

$$p(\rho) = \frac{1}{\rho - \beta - \lambda l} \quad (2.15)$$

e

$$q(\rho) = \frac{\lambda\rho}{\alpha K_c (\rho - \beta - \lambda l)}. \quad (2.16)$$

Este tipo de equação pode ser resolvida com o *método do fator integrante*, e sua solução é da forma:

$$n(\rho) = \frac{1}{\mu(\rho)} \left[n_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} q(\rho') \mu(\rho') d\rho' \right], \quad (2.17)$$

onde $n_0 = n(\rho_0)$ e $\mu(\rho)$ é o fator integrante, definido como segue:

$$\mu(\rho) = \exp \left[\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' - \beta - \lambda l} \right]. \quad (2.18)$$

A integral presente na Equação (2.18) é direta:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' - \beta - \lambda l} = \ln(\rho' - \beta - \lambda l)|_{\rho_0}^{\rho} = \ln \left(\frac{\rho - \beta - \lambda l}{\rho_0 - \beta - \lambda l} \right), \quad (2.19)$$

o que leva ao seguinte resultado para o fator integrante:

$$\mu(\rho) = \frac{\rho - \beta - \lambda l}{\rho_0 - \beta - \lambda l}. \quad (2.20)$$

Substituindo as Equações (2.16) e (2.20) na Equação (2.17), se tem o seguinte:

$$\begin{aligned} n(\rho) &= \frac{\rho_0 - \beta - \lambda l}{\rho - \beta - \lambda l} \left[n_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\lambda \rho'}{\alpha K_c (\rho_0 - \beta - \lambda l)} d\rho' \right] = \\ &= \frac{\rho_0 - \beta - \lambda l}{\rho - \beta - \lambda l} \left[n_0 + \frac{\lambda}{\alpha K_c (\rho_0 - \beta - \lambda l)} \int_{\rho_0}^{\rho} \rho' d\rho' \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

o que leva, finalmente, ao seguinte resultado:

$$n(\rho) = \frac{(\rho_0 - \beta - \lambda l) n_0}{\rho - \beta - \lambda l} + \frac{\lambda (\rho^2 - \rho_0^2)}{2 \alpha K_c (\rho - \beta - \lambda l)}. \quad (2.22)$$

Substituindo a Equação (2.22) na Equação (2.10):

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= -\alpha K_c \frac{(\rho_0 - \beta - \lambda l) n_0}{\rho - \beta - \lambda l} - \frac{\lambda (\rho^2 - \rho_0^2)}{2 (\rho - \beta - \lambda l)} = \\ &= -\frac{2 \alpha K_c (\rho_0 - \beta - \lambda l) n_0 + \lambda (\rho^2 - \rho_0^2)}{2 (\rho - \beta - \lambda l)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A Equação (2.23) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{2(\rho - \beta - \lambda l)}{\lambda(\rho^2 - \rho_1^2)} \frac{d\rho(t)}{dt} = -1, \quad (2.24)$$

onde ρ_1 é definido como segue:

$$\rho_1 = \sqrt{\rho_0^2 + 2\alpha K_c (\beta - \rho_0 + \lambda l) n_0 / \lambda}, \quad (2.25)$$

Usando a técnica de frações parciais na Equação (2.24) e integrando em t com a condição de que $\rho = \rho_0$ em $t = 0$, se tem o seguinte:

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{2\rho' d\rho'}{\rho'^2 - \rho_1^2} + \frac{\beta + \lambda l}{\lambda \rho_1} \left(\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' + \rho_1} - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho' - \rho_1} \right) = -t. \quad (2.26)$$

Fazendo a substituição $u = \rho'^2 - \rho_1^2$ na primeira integral da Equação (2.26), $v = \rho' + \rho_1$ na segunda e $w = \rho' - \rho_1$ na terceira, chega-se ao seguinte resultado:

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\rho_0^2 - \rho_1^2}^{\rho^2 - \rho_1^2} \frac{du}{u} + \frac{\beta + \lambda l}{\lambda \rho_1} \left(\int_{\rho_0 + \rho_1}^{\rho + \rho_1} \frac{dv}{v} - \int_{\rho_0 - \rho_1}^{\rho - \rho_1} \frac{dw}{w} \right) = -t. \quad (2.27)$$

As integrais acima são triviais. Assim, utilizando propriedades do logaritmo, se chega ao seguinte resultado:

$$t = \frac{\beta + \lambda l}{\lambda \rho_1} \ln \left[\left(\frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 + \rho} \right) \left(\frac{\rho_1 + \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \right) \right] + \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho^2} \right). \quad (2.28)$$

Com as Equações (2.22) e (2.28), é possível obter a variação de n com relação ao tempo t .

$$n(t) = \frac{\lambda(\rho^2 - \rho_0^2)}{2\alpha K_c(\beta + \lambda l)} \left\{ \rho_0^2 \left[\frac{\rho_1 + \rho_0 - (\rho_1 - \rho_0) e^{\frac{\beta + \lambda l}{\lambda}}}{\rho_1 + \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) e^{\frac{\beta + \lambda l}{\lambda}}} \right]^2 \right\} + n_0 \quad (2.29)$$

2.1.2 Aproximação prompt jump para os precursores

A fissão nuclear resulta na formação dos chamados fragmentos de fissão, os quais são elementos com um número de massa menor em comparação com o núcleo original. A maioria dos produtos de fissão é instável, e durante o processo de decaimento, eles emitem nêutrons. Os nêutrons liberados após a ocorrência da fissão são denominados nêutrons atrasados, e os núcleos que os emitem são referidos como precursores de nêutrons atrasados [10][15].

Os nêutrons atrasados não compartilham as mesmas características dos nêutrons prontos, que são gerados imediatamente após o processo de fissão. A energia média dos nêutrons prontos é superior à energia dos nêutrons atrasados [16].

Aproximação prompt jump para precursores considera que os nêutrons atrasados são produzidos apenas por um grupo de precursores com a mesma constante de decaimento (média). Então a equação da cinética pontual usando a aproximação Prompt Jump para um grupo de nêutrons atrasados [5], é escrita na forma da Equação 2.2.

Tomando a derivada da Equação (2.2), se tem que:

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = \frac{\beta}{l} \frac{dn(t)}{dt} - \lambda \frac{dC(t)}{dt}. \quad (2.30)$$

Substituindo as Equações (2.2) e (2.3) na Equação (2.30):

$$\begin{aligned} \frac{d^2C(t)}{dt^2} &= \frac{\beta(\rho - \beta)n}{l^2} + \frac{\beta\lambda C(t)}{l} - \lambda \left(\frac{\beta}{l}n - \lambda C(t) \right) = \\ &= \frac{(\rho - \beta - \lambda l)\beta}{l}n + (\beta + \lambda l) \frac{\lambda C(t)}{l}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Utilizando a aproximação *prompt jump* na Equação (2.31), ou seja, considerar $\frac{d^2C(t)}{dt^2}$ desprezível em relação ao demais termos, [15, 17, 18] se tem o que segue:

$$\lambda C(t) = \frac{(\beta - \rho + \lambda l)\beta n}{l(\beta + \lambda l)}. \quad (2.32)$$

Substituindo a Equação (2.32) na Equação (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= \frac{(\rho - \beta)n}{l} + \frac{(\beta - \rho + \lambda l)\beta n}{l(\beta + \lambda l)} = \\ &= \frac{[(\beta + \lambda l)(\rho - \beta) + (\beta - \rho + \lambda l)\beta]n}{l(\beta + \lambda l)}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

que após algumas simplificações, leva ao resultado abaixo:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\lambda\rho n}{(\beta + \lambda l)}. \quad (2.34)$$

No lado esquerdo da Equação (2.34), se tem a derivada de n com relação a t , mas a dependência funcional do lado direito se dá com as variáveis ρ e n . Para resolver esse problema e se chegar à uma EDO solúvel, se usa a regra da cadeia no lado esquerdo $\left(\frac{dn}{dt} = \frac{dn}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} \right)$ e se substitui a Equação (2.10), o que leva a:

$$\frac{dn}{d\rho} = -\frac{\lambda\rho}{\alpha K_c (\beta + \lambda l)}. \quad (2.35)$$

Integrando a Equação (2.35) com a condição inicial $\rho = \rho_0$ e $n = n_0$ em $t = 0$, se chega ao seguinte resultado:

$$n(\rho) = \frac{\lambda(\rho_0^2 - \rho^2)}{2\alpha K_c (\beta + \lambda l)} + n_0. \quad (2.36)$$

Com as Equações (2.10) e (2.36), se tem que:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\lambda(\rho^2 - \rho_0^2) - 2\alpha K_c (\beta + \lambda l) n_0}{2(\beta + \lambda l)}. \quad (2.37)$$

Definindo ρ_2 como:

$$\rho_2 = \sqrt{\rho_0^2 + 2\alpha K_c (\beta + \lambda l) n_0 / \lambda}, \quad (2.38)$$

faz com que a Equação (2.38) assuma a seguinte forma:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\lambda(\rho^2 - \rho_2^2)}{2(\beta + \lambda l)}. \quad (2.39)$$

Usando a técnica de frações parciais na Equação (2.39) e integrando em t com a condição de que $\rho = \rho_0$ em $t = 0$, se tem o seguinte:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho - \rho_2} - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho + \rho_2} = \frac{\rho_2 \lambda t}{\beta + \lambda l}. \quad (2.40)$$

As integrais acima são triviais, e levam ao seguinte resultado:

$$\ln \left[\left(\frac{\rho - \rho_2}{\rho_0 - \rho_2} \right) \left(\frac{\rho_0 + \rho_2}{\rho + \rho_2} \right) \right] = \frac{\rho_2 \lambda t}{\beta + \lambda l}. \quad (2.41)$$

Usando o fato da função exponencial ser a inversa da logarítmica, a Equação (2.41) fornece, após alguma manipulação algébrica, a seguinte expressão para $\rho(t)$:

$$\rho(t) = \frac{\rho_2 \left[1 - \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2 + \rho_0} \exp \left(\frac{\rho_2 \lambda t}{\rho + \lambda l} \right) \right]}{1 + \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2 + \rho_0} \exp \left(\frac{\rho_2 \lambda t}{\rho + \lambda l} \right)}. \quad (2.42)$$

Finalmente, com a substituição da Equação (2.41) na Equação (2.42), se chega na expressão para $n(t)$:

$$n(t) = \frac{\lambda}{2\alpha K_c (\beta + \lambda l)} \left\{ \rho_0^2 + \left[\rho^2 \frac{\rho_2 + \rho_0 - (\rho_2 - \rho_0) \exp \left(\frac{\rho_2 \lambda t}{\rho + \lambda l} \right)}{\rho_2 + \rho_0 + (\rho_2 - \rho_0) \exp \left(\frac{\rho_2 \lambda t}{\rho + \lambda l} \right)} \right]^2 \right\} + n_0. \quad (2.43)$$

2.1.3 Aproximação prompt jump para a temperatura

Em reatores nucleares, independentemente do tipo, nêutrons têm a possibilidade de serem absorvidos em áreas específicas chamadas de ressonâncias. Durante o projeto desses reatores, é crucial realizar uma análise precisa das absorções ressonantes. Adicionalmente, a absorção em ressonância é afetada pela temperatura do combustível, devido ao fenômeno conhecido como alargamento Doppler das ressonâncias. A variação da absorção ressonante em relação à temperatura do combustível é um fator significativo na dinâmica do reator, muitas vezes desempenhando um papel fundamental no controle eficaz do reator [19].

Portanto, alterações na temperatura podem afetar a absorção e produção de nêutrons, impactando diretamente a reatividade do reator, parâmetro que mede a sua capacidade de sustentar uma reação nuclear em cadeia [3].

Cabe ainda destacar que muitos dos parâmetros que determinam o fator de multiplicação de um reator dependem da temperatura. Como resultado, uma mudança na temperatura leva a uma mudança na criticalidade e altera a reatividade do sistema. Este efeito tem uma influência importante na operação de um reator e, em

última análise, na segurança do sistema [5].

Assumindo que o termo q_0 da Equação 2.1, é independente do tempo e que o reator opera no estado crítico com regime permanente de potência constante, então o efeito da fonte externa de nêutrons pode ser negligenciado [6]

Tomando a derivada da Equação (2.1), obtém-se:

$$\frac{d^2n(t)}{dt^2} = \frac{\rho(t) - \beta}{l} \cdot \frac{dn(t)}{dt} + \frac{d\rho(t)}{dt} \frac{n(t)}{l} + \lambda \frac{dC(t)}{dt}. \quad (2.44)$$

Note que $\lambda\beta n - \lambda^2 lC$ é o lado direito da Equação 2.2 multiplicado por λl . Fazendo as devidas manipulações na Equação 2.1 e multipliando-a por λl , obtém-se:

$$\frac{ld^2n(t)}{dt^2} = (\rho - \beta) \frac{dn(t)}{dt} + n \frac{d\rho}{dt} - \frac{\lambda ldn(t)}{dt} + \lambda \rho n + \lambda l q_0. \quad (2.45)$$

Fatorando adequadamente e integrando a Equação (2.42) em t , pode-se facilmente perceber que:

$$\frac{ldn(t)}{dt} = (\rho - \beta + \lambda l)n(t) + \lambda l q_0 t + n \cdot \frac{d\rho}{dt} - \frac{\lambda ldn(t)}{dt} + \int \lambda \rho n dt. \quad (2.46)$$

Derivando a Equação (2.9), combinando-a com as Equações (2.8) e (2.42), além de definir $D = K_c n_0(\beta - \lambda l) + l K_c q_0$, chega-se a expressão:

$$l \frac{d^2T}{dt^2} = (\rho_0 - \beta - \lambda l - \alpha T) \frac{dT(t)}{dt} + \lambda \rho_0 T - \frac{\alpha \lambda T^2}{2} + K_c \lambda l q_0 T + D. \quad (2.47)$$

Considerando a *Aproximação Prmpt Jump*, assume-se que $\frac{d^2T}{dt^2} \approx 0$, e portanto, a expressão para a derivada da temperatura pode ser escrita como:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{\lambda \rho_0 T - \frac{\alpha \lambda T^2}{2} + K_c n_0(\beta - \lambda l)}{\beta + \lambda l - \rho + \alpha T}. \quad (2.48)$$

A integral de uma função $F + k$ (onde k é uma constante), com $F = t + B$ e $k = -B$, pode ser feita por frações parciais. Como a integral da Equação (2.48) não é trivial, define-se $A = \beta + \lambda l$ e $C = K_c n_0 / \lambda$ para resolvê-la.

Aplicando devidamente as noções de *arctgh*, e substituindo A e C, obtém-se

$$t + B = -\frac{2(\beta + \lambda l)}{\lambda \rho_1} \operatorname{arctgh} \left(\frac{\rho_0 - \alpha T}{\rho_1} \right) - \frac{1}{\lambda} \ln \left(-T^2 + \frac{2\rho_0}{\alpha} T + \frac{2K_c n_0 (\beta + \lambda l)}{\lambda \alpha} \right). \quad (2.49)$$

Assumindo $t = 0$ na Equação (2.49):

$$B = -\frac{2(\beta + \lambda l)}{\lambda \rho_1} \operatorname{arctgh} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right) - \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{2K_c n_0 (\beta + \lambda l)}{\lambda \alpha} \right). \quad (2.50)$$

Substituindo B na Equação (2.49):

$$t = -\frac{2(\beta + \lambda l)}{\lambda \rho_1} \left[\operatorname{arctgh} \left(\frac{\rho_0 - \alpha T}{\rho_1} \right) - \operatorname{arctgh} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} \right) \right] - \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\lambda \alpha T^2 + 2\lambda \rho_0 T}{2K_c n_0 (\beta + \lambda l)} + 1 \right). \quad (2.51)$$

Aplicando (2.51) em (2.50), com $\rho = \rho_0 - \alpha T$, usando as propriedades da tgh , e fazendo as devidas manipulações, chega-se a uma expressão para o tempo do tipo:

$$t = -\frac{2(\beta + \lambda l)}{\lambda \rho_1} \ln \left(\left| \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 + \rho} \right| \left| \frac{\rho_1 + \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \right| \right) - \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{-\lambda (\rho_0^2 - \rho^2)}{2\alpha K_c n_0 (\beta + \lambda l)} + 1 \right). \quad (2.52)$$

Substituindo as Equações (2.8) e (2.9) na Equação (2.48) com a fatoração necessária, e aplicando a técnica de completar quadrados, obtém-se a expressão para $n(t)$:

$$n(t) = \frac{\lambda (\rho_1^2 - \rho^2)}{2\alpha K_c (\beta + \lambda l - \rho)}. \quad (2.53)$$

Pode-se concluir que $n(t)$ é máximo quando a derivada de n em função de ρ for igual a zero, ou seja, quando ρ e n forem máximos, e assim definir uma expressão para $n_{\text{máximo}}$ em função de ρ :

$$n_m = \frac{\lambda \rho_1^2 - \lambda (\beta + \lambda l)^2 + \lambda (\beta + \lambda l) \sqrt{(\beta + \lambda l)^2 - \rho_1^2}}{\alpha K_c \sqrt{(\beta + \lambda l)^2 - \rho_1^2}}. \quad (2.54)$$

Por fim, igualando a Equação (2.36) a 0, é fácil perceber que, pela condição de existência, é possível escrever uma expressão para $\rho_{\text{máximo}}$ do tipo:

$$\rho_m = \beta + \lambda l - \sqrt{(\beta + \lambda l)^2 - \rho_1^2}. \quad (2.55)$$

2.2 O Método proposto por Chen

A potência inicial de um reator nuclear é frequentemente objeto de análises detalhadas, especialmente em estudos sobre processos transientes supercríticos. Autores que incluem [20] e [12], propuseram a análise do comportamento transitório imediatamente supercrítico de um reator nuclear, considerando a realimentação de temperatura e uma reatividade significativa ($\rho_0 > \beta$), baseava-se principalmente no modelo de Nordheim-Fuchs. Isso ocorria sob a suposição de que a potência inicial do reator era tão baixa que poderia ser ignorada. Contudo, estudos mais recentes indicam que é possível ampliar os limites para qualquer nível de potência inicial [8] abrangendo também o comportamento transitório supercrítico retardado, no qual uma reatividade de pequena amplitude ($\rho_0 < \beta$) é introduzida. A proposta desenvolvida por Chen aborda a questão da cinética pontual por meio de quatro modelos de solução e da comparação com a literatura existente. Sua conclusão destaca a inaplicabilidade do modelo e da solução associados ao processo supercrítico imediato para o supercrítico atrasado, e vice-versa. Desta forma, ressalta-se a necessidade de derivar e empregar soluções analíticas específicas para processos supercríticos imediatos e atrasados, considerando a realimentação de temperatura em cada cenário [8].

Nesse sentido, quando um reator mantém uma potência de saída constante, é possível negligenciar o impacto de uma fonte externa de nêutrons [6]. Portanto, as equações que descrevem a cinética pontual com um grupo de nêutrons atrasados são fornecidas conforme indicado em (2.1) e (2.2).

Vale ressaltar que, durante a inserção abrupta de uma pequena reatividade $\rho_0 < \beta$ (ou uma grande reatividade $\rho_0 > \beta$) no reator no instante $t = 0$, observar-se-á a ocorrência do transiente supercrítico atrasado (ou imediato) [8].

Por outro lado, assume-se o pressuposto que o reator possui um coeficiente de temperatura negativo, denotado por α ($\alpha > 0$), quando uma alteração abrupta na reatividade, representada por ρ_0 ($\rho_0 > 0$), é introduzida. Levando em consideração a realimentação de temperatura, a reatividade efetiva do reator é dada por [8]

$$\rho = \rho_0 - \alpha[T(t) - T_0], \quad (2.56)$$

onde $T(t)$ e T_0 são a temperatura imediata e a temperatura inicial do reator, respectivamente. Após uma reatividade $\rho_0 (> 0)$ ser inserido no reator, a potência responde rapidamente e o modelo adiabático pode ser usado para o cálculo da temperatura [11, 12, 21]. Derivando a temperatura com relação ao tempo e combinando com a Equação (2.56), obtém-se, respectivamente

$$\frac{dT}{dt} = K_c n(t) \quad (2.57)$$

e

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\alpha K_c n(t), \quad (2.58)$$

onde K_c equivale a capacidade térmica do reator.

2.2.1 Análise do Modelo Prompt Supercrítico

O movimento térmico dos núcleos se torna relevante quando os nêutrons alcançam energias $\approx k_B T$. Nessa conformidade a seção de choque sofre influência do movimento térmico dos núcleos. Mas, existe uma circunstância que o movimento térmico dos núcleos deve ser levado em conta, mesmo quando os nêutrons têm energias cinéticas muito maiores que $k_B T$ [2].

Durante o tempo em que uma reatividade é inserida abruptamente no reator no momento $t = 0$, ocorrerá um transiente supercrítico rápido. Nesse processo, a potência do reator aumenta muito rapidamente e atinge níveis muito elevados. Portanto, em $t > 0$, a contribuição dos precursores de nêutrons atrasados pode ser negligenciada [11, 12, 14, 21], e a Equação (2.1) é simplificada como:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{[\rho(t) - \beta]}{l} n(t). \quad (2.59)$$

Substituindo a derivada da Equação (2.58) na Equação (2.59) chega-se a:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{[\rho(t) - \beta]}{l} \frac{d\rho}{dt}. \quad (2.60)$$

A integral da Equação (2.60) é trivial e pode ser feita por substituição simples, resultando em:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{[\rho(t) - \beta]^2}{2l} - B. \quad (2.61)$$

Definindo B como uma constante determinada pela condição inicial do reator em estado estacionário, ou seja, no tempo $t = 0$, $\rho = \rho_0$ e $n = n_0$ sendo $B = \frac{[\rho(t) - \beta]^2}{2l} + \alpha K_c n(t)$ e depois substituindo a Equação (2.58) na Equação (2.61) obtém-se:

$$-\alpha K_c n(t) = \frac{[\rho(t) - \beta]^2}{2l} - B. \quad (2.62)$$

Portanto substituindo o valor de B da Equação (2.62), a derivada temporal da reatividade será escrita da forma:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{[\rho(t) - \beta]^2}{2l} - \frac{[\rho_0 - \beta]^2}{2l} - \alpha K_c n_0. \quad (2.63)$$

Fazendo a manipulação algébrica necessária na Equação (2.58) é possível escrever uma expressão para a potência em um instante de tempo qualquer, em função da potência inicial:

$$\frac{1}{-2l\alpha K_c} [(\rho(t) - \beta)^2 - (\rho_0 - \beta)^2] + n_0 = n(t). \quad (2.64)$$

2.2.2 Desconsiderando a potência inicial ($t = 0, n_0 = 0$)

Ao desconsiderar a potência inicial, a abordagem convencional presume que este valor seria tão insignificante que não impactaria de maneira relevante o desempenho do reator [12]. No entanto, tal abordagem simplificada pode levar a uma compreensão limitada do comportamento do sistema, especialmente em situações transientes supercríticos. Essa simplificação pode negligenciar interações importantes entre a potência inicial, a realimentação de temperatura e a reatividade do reator. Ignorar esses fatores pode levar a uma análise incompleta das condições operacionais e, consequentemente, a uma compreensão inadequada dos limites e comportamentos do reator em diferentes cenários [8].

Considerando nula a potência inicial, as Equações (2.63) e (2.64) serão escritas, respectivamente como

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{[\rho(t) - \beta]^2}{2l} - \frac{[\rho_0 - \beta]^2}{2l} \quad (2.65)$$

e

$$n(t) = \frac{1}{-2l\alpha K_c} [(\rho - \beta)^2 - (\rho_0 - \beta)^2]. \quad (2.66)$$

Resolvendo as Equações (2.65) e (2.66) com as condições iniciais $t = 0, \rho = \rho_0$ e $n = 0$, obtém-se:

$$\rho = \beta - (\rho_0 - \beta) \operatorname{tgh} \left(\frac{\rho_0 - \beta}{2l} t \right) \quad (2.67)$$

e

$$n(t) = \frac{(\rho_0 - \beta)^2}{2l\alpha K_c} \sec^2 \left(\frac{\rho_0 - \beta}{2l} t \right). \quad (2.68)$$

2.2.3 Considerando a potência inicial ($t = 0, n = n_0$ e $\rho = \rho_0$)

Considerar a potência inicial de um reator nuclear é crucial para uma análise abrangente e precisa do comportamento do sistema ao longo do tempo. Essa consideração não apenas impacta a estabilidade do reator, mas também contribui para aprimorar a segurança e eficiência das operações nucleares [8].

Ao fazer essa análise, é necessário levar em conta fatores como a realimentação de temperatura e a reatividade do sistema. Esses elementos interagem de maneira complexa, influenciando diretamente a resposta do reator a mudanças nas condições operacionais [19].

Nesse contexto, note que as Equações (2.67) e (2.68) são apenas ajustadas ao processo supercrítico imediato com potência inicial igual zero, e a aplicação dos resultados é limitada.[8]

Assumindo $A = \sqrt{[\rho_0(t) - \beta]^2 + 2l\alpha K_c n_0}$ e $C = \frac{-A + (\rho_0 - \beta)}{A + (\rho_0 - \beta)} = \frac{-(A - (\rho_0 - \beta))}{A + (\rho_0 - \beta)}$, e substituindo-os adequadamente, a expressão para a reatividade fica da seguinte forma:

$$\rho = \frac{2A - (\beta - A) + (\beta - A) \frac{-(A - (\rho_0 - \beta))}{A + (\rho_0 - \beta)} \exp \left(\frac{At}{l} \right)}{\left[1 + \frac{(A - (\rho_0 - \beta))}{A + (\rho_0 - \beta)} \exp \left(\frac{At}{l} \right) \right]}. \quad (2.69)$$

Já a expressão para a potência será obtida, substituindo a Equação (2.69) na Equação (2.66).

$$n = \frac{1}{2\alpha K_c l} \left\{ (\rho_0 - \beta)^2 - \left[\frac{2A - (\beta - A) + (\beta - A) \frac{-(A - (\rho_0 - \beta))}{A + (\rho_0 - \beta)} \exp \left(\frac{At}{l} \right)}{\left[1 + \frac{(A - (\rho_0 - \beta))}{A + (\rho_0 - \beta)} \exp \left(\frac{At}{l} \right) \right]} A \right]^2 \right\} + n_0. \quad (2.70)$$

2.2.4 Considerando a aproximação Prompt Jump

Como visto na subseção 2.1.1, durante o processo transiente super crítico atrasado a contribuição da fonte de precursores de nêutrons atrasados deve ser levado em consideração [8]. Portanto, derivando a Equação (2.1) e combinando-a com a Equação (2.2):

$$\frac{ldn^2(t)}{dt^2} + [\rho(t) - \beta + \lambda l] \frac{dn(t)}{dt} = \left(\lambda \rho(t) + \frac{d\rho(t)}{dt} \right) n(t). \quad (2.71)$$

Mas pela "Aproximação Prompt Jump" dada por $\frac{ldn^2(t)}{dt^2} \approx 0$, ou seja, o termo da segunda derivada pode ser desconsiderado em relação aos demais e, portanto:

$$[\beta - \rho(t) + \lambda l] \frac{dn(t)}{dt} \approx \left(\lambda \rho(t) + \frac{d\rho(t)}{dt} \right) n(t). \quad (2.72)$$

Partindo do pressuposto de que as funções $\rho(t)$ e $n(t)$ são contínuas e que n , varia em função de ρ da Equação (2.60), pode-se escrever:

$$\frac{dn(t)}{d\rho(t)} = \frac{\alpha K_c n(t) - \lambda \rho(t)}{\alpha K_c (\beta - \rho(t) + \lambda l)}, \quad (2.73)$$

logo pode-se notar que a Equação (2.73) é uma EDO de 1^a ordem, que pode ser resolvida usando a técnica de fator integrante, onde $\mu(\rho) = (\rho - \beta - \lambda l)$. Integrando ambos os lados no intervalo de ρ_0 a ρ , obtém-se:

$$n(t) = \frac{\lambda (\rho_0^2 - \rho^2)}{2\alpha K_c (\beta - \rho(t) + \lambda l)} + \frac{(\beta - \rho_0 + \lambda l)}{(\beta - \rho(t) + \lambda l)} n_0, \quad (2.74)$$

Substituindo a Equação (2.74) na Equação (2.58), obtém-se:

$$-\frac{d\rho}{dt} = \frac{\lambda (\rho_0^2 - \rho^2) + 2\alpha K_c (\beta - \rho(t) + \lambda l) n_0}{2(\beta - \rho(t) + \lambda l)}. \quad (2.75)$$

Uma expressão para o tempo pode ser determinada integrando a Equação (2.75) nas condições iniciais $\rho = \rho_0$; $t = 0$ e definindo $B = \beta + \lambda l$; $d = 2\alpha K_c n_0$ e $\rho_1 = \sqrt{\rho_0^2 + 2\alpha K_c (\beta - \rho_0 + \lambda l) n_0 / \lambda}$ e finalmente substituindo esses fatores na expressão final.

$$t = \frac{\beta + \lambda l}{\lambda \rho_1} \ln \left[\left(\frac{\rho_1 - \rho(t)}{\rho_1 + \rho(t)} \right) \left(\frac{\rho_1 + \rho_0}{\rho_1 - \rho_0} \right) \right] + \frac{1}{\lambda} \ln \left[\left(\frac{\rho_1^2 - \rho_0^2}{\rho_1^2 - \rho(t)^2} \right) \right]. \quad (2.76)$$

2.2.5 Aproximação Prompt Jump para precursores

O fato de os nêutrons atrasados serem produzidos com energias mais baixas impacta significativamente sua trajetória no ciclo de vida do nêutron. Em primeiro lugar, esses nêutrons têm uma probabilidade muito menor de induzir fissões rápidas em comparação com os nêutrons prontos, pois sua energia média está abaixo do limiar necessário para desencadear fissões rápidas. Em segundo lugar, os nêutrons atrasados têm uma probabilidade reduzida de escapar do núcleo, uma vez que iniciam com energias mais baixas, percorrendo distâncias mais curtas em comparação com os nêutrons rápidos. Conforme exposto na subseção 2.1.2, essa abordagem pressupõe que os nêutrons atrasados são gerados exclusivamente por um conjunto de precursores com uma taxa de decaimento uniforme (média), e portanto, a derivada da Equação (2.2), pode ser escrita como:

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} = \frac{\beta}{l} \frac{dn(t)}{dt} - \lambda \frac{dC(t)}{dt}. \quad (2.77)$$

Substituindo a Equação (2.1) no termo central da Equação (2.77):

$$\frac{d^2C(t)}{dt^2} + \frac{\beta}{l} \frac{(\beta - \rho(t) + \lambda l)n(t)}{l} = \left(\frac{\beta + \lambda l}{l} \right) \lambda C. \quad (2.78)$$

Como pela *aproximação Prompt Jump*, o termo da derivada segunda pode ser negligenciado, $\frac{d^2C(t)}{dt^2} \approx 0$, então:

$$\frac{\beta}{l} \frac{(\beta - \rho(t) + \lambda l)n(t)}{l} = \left(\frac{\beta + \lambda l}{l} \right) \lambda C. \quad (2.79)$$

Fazendo as manipulações algébricas adequadas e, novamente considerando a continuidade de n e ρ , pode-se escrever:

$$\frac{dn(t)}{d\rho(t)} = -\frac{\lambda\rho(t)}{\alpha K_c(\beta + \lambda l)}, \quad (2.80)$$

que após ser integrada com as condições iniciais $\rho = \rho_0; n = n_0; t = 0$, fica da seguinte forma:

$$n(t) = \frac{\lambda(\rho^2 - \rho_0^2)}{2\alpha K_c(\beta + \lambda l)} + n_0. \quad (2.81)$$

A equação a seguir é obtida substituindo-se da Equação (2.81) na Equação (2.63)

$$-\frac{d\rho}{dt} = \frac{\lambda(\rho^2 - \rho_0^2) + 2\alpha K_c(\beta + \lambda l)n_0}{2(\beta + \lambda l)}, \quad (2.82)$$

que quando integrada utilizando a técnica de substituição, nas condições iniciais $\rho = \rho_0$ e $t = 0$, e usando as propriedades de exponenciação, pode-se chegar à variação da reatividade com o tempo:

$$\rho = \frac{\rho_1 - \rho_1 \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} \exp\left(\frac{\lambda t \rho_1}{\beta + \lambda l}\right)}{1 + \frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} \left(\frac{\lambda t \rho_1}{\beta + \lambda l}\right)}, \quad (2.83)$$

$$\text{com } \rho_1 = \sqrt{\rho_0^2 + 2\alpha K_c(\beta - \rho_0 + \lambda l)n_0/\lambda}.$$

Finalmente, substituindo a Equação (2.83) na Equação (2.81) obtém-se a variação da potência com o tempo,

$$n(t) = \frac{\lambda}{2\alpha K_c(\beta + \lambda l)} \left\{ \rho_0^2 - \left[\rho_1 \frac{(\rho_1 + \rho_0) - (\rho_1 - \rho_0) \exp\left(\frac{\lambda t \rho_1}{\beta + \lambda l}\right)}{\rho_1 + \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0) \exp\left(\frac{\lambda t \rho_1}{\beta + \lambda l}\right)} \right]^2 \right\}. \quad (2.84)$$

2.3 O Método proposto por Nahla

Nessa seção, é apresentado o formalismo de Abdallah A. Nahla, que desenvolveu uma solução analítica para a equação diferencial de segunda ordem da densidade de nêutrons. Essa solução é fundamentada na expansão da densidade de nêutrons em termos do pequeno parâmetro, representado pelo tempo de geração imediata de nêutrons rápidos [9].

Ao explorar as incursões do reator crítico quase imediato, Nahla derivou a relação entre o tempo e a reatividade. Ele apresentou as funções da densidade de nêutrons e da densidade média de precursores de nêutrons atrasados em termos da reatividade. Além disso, calculou as inter-relações entre reatividade, densidade de nêutrons e temperatura. Essa abordagem permitiu realizar comparações com outros métodos [9].

Partindo do pressuposto de que o reator apresenta uma temperatura negativa para um coeficiente de reatividade $\alpha (\alpha > 0)$, quando a reatividade inicial ρ_0 , é inferior à fração total de nêutrons atrasados β . Assume-se que a realimentação de temperatura segue as características delineadas nas Equações (2.56) e (2.57) [21–23].

Derivando a Equação (2.56) com relação ao tempo, multiplicando-a por l e rees-

crevendo a Equação (2.57), obtém-se o seguinte:

$$l \frac{d^2n}{dt^2} = \frac{d\rho}{dt} n + (\rho - \beta) \frac{dn}{dt} + l\lambda c. \quad (2.85)$$

Substituindo a Equação (2.2) na Equação (2.85) e substituindo na relação da segunda derivada de n em função de t , obtém-se:

$$\frac{d^2n}{dt^2} + [\beta - \rho + \lambda l] \frac{dn}{dt} = [\lambda + \frac{d\rho}{dt}] n. \quad (2.86)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor de l , e desconsiderando os termos a partir de l^2 e αl [9], obtém-se a expressão da potência em função do tempo,

$$n(t) = n_1(t) + ln_2(t). \quad (2.87)$$

Porém substituindo a Equação (2.87) na Equação (2.9) e desconsiderando novamente os termos a partir de αl , obtém-se:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\alpha K_c n_1, \quad (2.88)$$

substituindo as Equações (2.87) e (2.88) na Equação (2.86):

$$n(t) = n_1 \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \right] + n_2 l \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \right]. \quad (2.89)$$

Considerando l e α de mesma ordem e forçando a igualdade entre os termos de mesmo grau em l (ou α), tem-se que:

Em l^0 :

$$[\beta - \rho] \frac{dn_1}{dt} = \left[\lambda\rho + \frac{d\rho}{dt} \right] n_1(t). \quad (2.90)$$

e em l :

$$[\rho - \beta] \frac{dn_2}{dt} + \left[\lambda\rho + \frac{d\rho}{dt} \right] n_2 = \frac{dn_1}{dt} + \lambda l \frac{dn_1}{dt}. \quad (2.91)$$

Assumindo que $\frac{d\rho}{dt}$, $\rho \frac{dn_1}{dt}$ e n_1 são contínuos em t e n_1 sendo função de ρ , pode-se obter uma relação para $\frac{dn_1}{d\rho}$, que é equivalente à divisão da Equação (2.90) pela Equação (2.88). Simplificando os termos com n_1 e dt e substituindo novamente a Equação (2.88) na relação $\frac{d\rho}{dt}$, obtém-se:

$$\frac{dn_1}{d\rho} = \frac{\alpha k_c n_1 - \lambda\rho}{\alpha k_c (\beta - \rho)}. \quad (2.92)$$

Escrevendo a Equação (2.91) na forma de uma equação diferencial e assumindo que

$\rho_0 < \beta$, tal equação pode ser solucionada pela técnica de fator integrante, com $\mu(t) = \beta - \rho$ e definindo $\sigma = \sqrt{\rho_0^2 + (2/\lambda)\alpha_{k_c n_0}(\beta - \rho_0)}$.

$$n_1 = \frac{\lambda}{2\alpha K_c} \left(\frac{\sigma^2 - \rho^2}{\beta - \rho} \right); \rho_0 < \beta. \quad (2.93)$$

Substituindo a Equação (2.92) na Equação (2.88), obtém-se:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-\lambda}{2} \left(\frac{\sigma^2 - \rho^2}{\beta - \rho} \right). \quad (2.94)$$

Para integrar a Equação (2.93), com o intuito de simplificar o processo, divide-se a equação em duas partes. Na primeira parte da integral, tem-se $\int \frac{\beta}{\sigma^2 - \rho^2} d\rho = \frac{\beta}{\sigma} \int \frac{\sigma d\rho}{\sigma^2 - \rho^2}$ e para a segunda parte $-\frac{1}{2} \int \frac{2\rho d\rho}{\sigma^2 - \rho^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sigma^2 - u}$. Integra-se as duas partes utilizando a técnica de substituição simples e finalmente soma-se as duas partes para obter uma expressão para o tempo.

$$t = \frac{1}{\lambda\sigma} \ln \left[\left(\frac{\rho - \sigma}{\rho_0 - \sigma} \right)^\beta \left(\frac{\rho_0 + \sigma}{\rho + \sigma} \right)^B \left(\frac{\rho_0^\alpha - \sigma^2}{\rho^a - \sigma^2} \right)^\sigma \right]. \quad (2.95)$$

Esta equação descreve a relação entre tempo e reatividade para excursões próximas ao ponto crítico, $\rho_0 < \beta$ e $|\rho| < \sigma$, que é válido tanto acima quanto abaixo do prompt crítico [9]. Substituindo as Equações (2.92) e (2.94) e a derivada da Equação (2.92) na Equação (2.91), tem-se:

$$\frac{dn_2}{d\rho} + \frac{\rho^2 - 2g\beta^2 + \sigma^2}{(\beta - \rho)(\rho^2 - \sigma^2)} n_2 = \frac{+\lambda^2}{4k_c\alpha} \left[\frac{\rho^4 - 4\beta\rho^3 + 2(2\beta^2 + \sigma^2)\rho^2 - 4\beta^3\rho + (4\beta^2 - 3\sigma^2)\sigma^2}{(\beta - \rho^5)} \right]. \quad (2.96)$$

Multiplicando o lado esquerdo da Equação (2.96) por $\left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right)$, obtém-se a equação

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} n_2 \right] = \frac{-\lambda^2 [\rho^4 - 4\beta\rho^3 + 2(2\beta^2 + \sigma^2)\rho^2 - 4\beta^3\rho + (4\beta^2 - 3\sigma^2)\sigma^2]}{4\alpha k_c (\beta - \rho)^4 (\rho^2 - \sigma^2)}. \quad (2.97)$$

Note que $n_2(0) = 0$, pois $n(0) = n_1(0) = n_0$. Então, integrando a Equação (2.96) pela técnica de frações parciais, é possível obter um resultado útil.

Fazendo substituições não triviais, define-se

$$S = (\beta + \sigma)^5 - u(\beta + \sigma)^4 \quad (2.98)$$

e

$$P = (\beta - \sigma)^5 - u(\beta - \sigma)^4, \quad (2.99)$$

e portanto

$$dS = -(\beta + \sigma)^4 \quad (2.100)$$

e

$$dP = -(\beta - \sigma)^4. \quad (2.101)$$

Desenvolvendo com os fatores 'P' e 'S'

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\beta^3}{2(\beta + \sigma)^4} - \frac{2\beta\sigma^2}{(\beta + \sigma)^4} \right) \int \frac{1}{S} dS + \left(\frac{\beta^3}{2(\beta - \sigma)^4} - \frac{2\beta\sigma^2}{(\beta - \sigma)^4} \right) \int \frac{1}{P} dP = \\ & \frac{\beta^3}{2(\beta - \sigma)^4} \ln|P| - \frac{2\beta\sigma^2}{(\beta - \sigma)^4} \ln|P| + \left(\frac{-\beta^3}{2(\sigma + \beta)^4} - \frac{2\beta_0\sigma^2}{(\beta + \sigma)^4} \right) \ln|S| \end{aligned} \quad (2.102)$$

e substiuindo-os adequadamente, obtém-se n_2 , pormenorizando, por conveniênciа

$$A = \frac{(3\beta^2 + \sigma^2)\rho_0^2 - \beta(7\beta^2 + \sigma^2)\rho_0 + 5\beta^4 + \sigma^4 - 2\beta^2\sigma^2}{(\sigma^2 - \beta^2)(\beta - \rho_0)^3}.$$

$$\begin{aligned} n_2 = & \frac{\lambda^2(\sigma^2 - \beta^2)}{4\alpha k_c(\beta - \rho)} \left[\frac{4\beta(\beta^2 + \sigma^2)}{(\beta^2 - \sigma^2)^2} \ln \left(\frac{\rho - \beta}{\rho_0 - \beta} \right) - \frac{2\beta}{(\beta - \sigma)^2} \ln \left(\frac{\rho^2 - \sigma^2}{\rho_0^2 - \sigma^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{(3\beta^2 + \sigma^2)\rho^2 - \beta(7\beta^2 + \sigma^2)\rho + 5\beta^4 + \sigma^4 - 2\beta^3\sigma^2}{(\sigma^2 - \rho^2)(\beta - \rho)^3} - A \right]. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Assim, como $n(t) = n_1 + ln_2$, então a relação entre a densidide de nêtrons e a reatividade pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} n(t) = & \frac{\lambda^2(\sigma^2 - \beta^2)}{4\alpha k_c(\beta - \rho)} \left\{ 1 + \frac{\lambda l}{2} \left[\frac{4\beta(\beta^2 + \sigma^2)}{(\beta^2 - \sigma^2)^2} \ln \left(\frac{\rho - \beta}{\rho_0 - \beta} \right) - \frac{2\beta}{(\beta - \sigma)^2} \ln \left(\frac{\rho^2 - \sigma^2}{\rho_0^2 - \sigma^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(3\beta^2 + \sigma^2)\rho^2 - \beta(7\beta^2 + \sigma^2)\rho + 5\beta^4 + \sigma^4 - 2\beta^3\sigma^2}{(\sigma^2 - \rho^2)(\beta - \rho)^3} - A \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

por fim, somando as Equações (2.1) e (2.2), obtém-se a concentração de precursores de nêutrons, da seguinte forma:

$$\frac{d(n + c)}{d\rho} = \frac{-\rho}{\alpha K_c}. \quad (2.105)$$

Portanto

$$C_{(t)} = \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{2\alpha l k_c} + \left(1 + \frac{\rho}{\lambda l} \right) k_c - n. \quad (2.106)$$

2.4 O Método Nahla aproximado proposto por Palma *et. al*

Esta seção apresenta uma aproximação para soluções analíticas do método proposto por Nahla. Em razão do nome do autor da proposta, esta aproximação será denominada, nesta dissertação por "*Método proposto por Palma*".

Diante da ausência de soluções com dependência explícita no tempo, o que complica a implementação computacional e, consequentemente, limita sua aplicabilidade em situações práticas, Palma adota a técnica de ajuste polinomial para contornar esse problema na aproximação analítica proposta por Nahla [10].

As equações que descrevem a cinética pontual com um grupo de precursores, levando em consideração a realimentação de temperatura de forma adiabática, são expressas conforme as Equações (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4) [10].

Derivando a Equação (1.1) em relação ao tempo, multiplicando toda equação por l e eliminando a dependência da densidade de precursores de nêutrons $C(t)$, obtém-se a expressão

$$l \frac{d^2n(t)}{dt^2} + [\beta - \rho(t) + \lambda l] \frac{dn(t)}{dt} = \left[\lambda \rho(t) + \frac{d\rho(t)}{dt} \right] n(t), \quad (2.107)$$

sujeito as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} n(0) = n_0 \\ \frac{dn(0)}{dt} = 0. \end{cases} \quad (2.108)$$

Expandindo a concentração de nêutrons em termos de potência para o tempo de geração de nêutrons imediatos e considerando $l \gg \alpha l$, [10] tem-se:

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t)l + n_3(t)l^2 \cdots + n_k(t)l^{k-1} \quad (2.109)$$

Substituindo as Equações (1.3) e (1.4) na Equação (2.109), nota-se que, como $l \gg \alpha$, então se $\alpha \rightarrow 0$, logo $-\alpha K_c n_2(t)l \rightarrow 0$, e portanto chega-se a equação

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\alpha K_c n_1(t), \quad (2.110)$$

que ao ser substituída na Equação (2.107), obtém-se $n_1(t)$, na potência l^0

$$[\beta - \rho(t)] \frac{dn_1(t)}{dt} = \left[\lambda \rho(t) + \frac{d\rho(t)}{dt} \right] n_1(t) \quad (2.111)$$

e $n_2(t)$, na potência l^1

$$[\rho(t) - \beta] \frac{dn_2(t)}{dt} + \left[\frac{d\rho(t)}{dt} + \lambda\rho(t) \right] n_2(t) = \frac{d^2n_1(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dn_1(t)}{dt}. \quad (2.112)$$

Note que as duas funções $n_1(t)$ e $n_2(t)$, também são soluções das Equações (2.111) e (2.112).

Multiplicando a Equação (2.111) convenientemente por $\frac{-\alpha K_c}{-\alpha K_c}$, obtém-se

$$(\alpha K_c - \lambda\rho(t)) \frac{d\rho(t)}{dt} + \alpha K_c (\rho(t) - \beta) \frac{dn_1(t)}{dt} = 0, \quad (2.113)$$

que é um equação exata, pois definindo

$$M = (\alpha K_c - \lambda\rho(t)) \frac{d\rho(t)}{dt} \quad (2.114)$$

e

$$N = \alpha K_c (\rho(t) - \beta) \frac{dn_1(t)}{dt}, \quad (2.115)$$

com M e N sendo funções diferenciáveis e integráveis, suas derivadas parciais são iguais, ou seja,

$$\frac{\partial M}{\partial n_1} = \frac{\partial N}{\partial \rho} = \alpha K_c. \quad (2.116)$$

Sendo assim, $\exists \varphi$, tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \alpha K_c n_1(t) - \lambda\rho(t). \quad (2.117)$$

Integrando a Equação (2.117) com a condição inicial de $\rho(t) = \rho_0$, conclui-se que

$$\varphi = \alpha K_c n_1(t) \rho(t) - \alpha K_c n_0(t) \rho_0 - \frac{\lambda}{2} \rho^2(t) + \frac{\lambda}{2} \rho_0^2 + g(n_1). \quad (2.118)$$

Derivando a Equação (2.118) com respeito a n_1 , fatorando a expressão e assumindo que $\left(\rho_0^2 + \left(\frac{2}{\lambda} \right) \right) \alpha K_c n_0 (\beta - \rho_0) = \sigma^2$, obtém-se

$$n_1(t) = \frac{\lambda (\sigma^2 - \rho^2)}{2\alpha K_c (\beta - \rho_0)}; \quad \beta > \rho_0. \quad (2.119)$$

Calculando a segunda derivada de n com relação a t , pela regra da cadeia, obtém-se a seguinte expressão:

$$\frac{dn^2(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dn_1(t)}{d\rho} \right) \cdot \frac{d\rho}{dt} + \frac{dn_1(t)}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \right). \quad (2.120)$$

Para calcular a segunda derivada entretanto, foi necessário antes calcular cada um dos dois fatores em que ela se divide, assim, substituindo a Equação (2.92) para então deriva-lá no tempo e obter $\frac{d}{dt} \left(\frac{dn_1(t)}{d\rho} \right) \cdot \frac{d\rho}{dt}$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\frac{dn_1(t)}{d\rho} \right) \cdot \frac{d\rho}{dt} \\ &= \frac{\left[\left(\alpha K_c \frac{dn_1}{dt} - \lambda \frac{d\rho}{dt} \right) (\alpha K_c(\beta - \rho)) (-\alpha K_c \beta n_1(t) - \lambda \rho(t)) \left(-\alpha K_c \frac{d\rho}{dt} \right) \right]}{(\alpha K_c(\beta - \rho))^2} \frac{d\rho}{dt}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Colocando em evidência, αK_c e substituindo a relação da regra da cadeia $\frac{dn_1(t)}{dt} = \frac{dn_1(t)}{d\rho} \frac{d\rho}{dt}$, para então colocar $\frac{d\rho}{dt}$ em evidência, chegou-se em:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dn_1(t)}{d\rho} \right) \cdot \frac{d\rho}{dt} = \left[\frac{d\rho}{dt} \right]^2 \frac{\alpha K_c \left[\left(\alpha K_c \frac{dn_1(t)}{d\rho} - \lambda \right) \cdot (\beta - \rho) + (\alpha K_c n_1 - \lambda \rho) \right]}{\alpha K_c (\beta - \rho)^2}. \quad (2.122)$$

Substituindo a Equação (2.92) para $\frac{dn_1(t)}{d\rho}$ e simplificando a fração pelo fator αK_c , obtém-se a equação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dn_1(t)}{d\rho} \right) \cdot \frac{d\rho}{dt} = \frac{\alpha K_c n_1 - \lambda \rho - \lambda \cdot (\beta - \rho) + \alpha K_c n_1 - \lambda \rho}{\alpha K_c (\beta - \rho)^2} \left[\frac{d\rho}{dt} \right]^2, \quad (2.123)$$

com isso:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dn_1(t)}{d\rho} \right) \cdot \frac{d\rho}{dt} = \left[\frac{d\rho}{dt} \right]^2 \frac{2\alpha K_c n_1 - \lambda \cdot (\beta + \rho)}{\alpha K_c (\beta - \rho)^2}. \quad (2.124)$$

Por fim, fatorando a Equação (2.124), obtém-se:

$$\frac{dn_1(t)}{d\rho} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) = \frac{dn_1(t)}{d\rho} \cdot \left[-\frac{\frac{\lambda}{2} 2\rho \frac{d\rho}{dt} (\beta - \rho) - (\sigma^2 - \rho^2) \left(-\frac{d\rho}{dt} \right)}{(\beta - \rho)^2} \right]. \quad (2.125)$$

Desenvolvendo a segunda parte da Equação (2.120), derivando a Equação (2.94) em função do tempo utilizando a regra da cadeia e fatorando, obteve-se:

$$\frac{dn_1(t)}{d\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) = \frac{dn_1(t)}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} \frac{\lambda}{2} \frac{(2\rho\beta - \rho^2 - \sigma^2)}{2\rho\beta - \rho^2 - \sigma^2}. \quad (2.126)$$

Assim, fatorando e substituindo a Equação (2.92), chegou-se em:

$$\begin{aligned} \frac{dn_1(t)}{d\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) &= \\ \frac{\lambda}{2} \frac{d\rho}{dt} \left(\frac{\alpha K_c n_1 - \lambda \rho}{\alpha K_c (\beta - \rho)} \right) \left(\frac{2\rho\beta - \rho^2 - \sigma^2}{(\beta - \rho)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.127)$$

Substituindo a Equação (2.93) para dn_1 , obtém-se:

$$\frac{dn_1}{d\rho} \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \right) = \frac{\lambda^2}{4} \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{[-2(\sigma^2 - \rho^2)(\sigma^2 - \beta^2) + .(\sigma^2 - 2\rho\beta + \rho^2)(2\rho\beta - \rho^2 - \sigma^2)]}{\alpha K_c (\beta - \rho)^4}. \quad (2.128)$$

Note que desenvolver a derivada de grau 1 equivale a substituir a Equação 2.92 na Equação 2.128

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = \frac{dn_1(t)}{d\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \frac{\alpha K_c n_1 - \lambda \rho}{\alpha K_c (\beta - \rho)}, \quad (2.129)$$

e substituindo a Equação (2.93), obtém-se:

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \left(\frac{\lambda}{2} \frac{(\sigma^2 - \rho^2)}{(\beta - \rho)} - \lambda \rho \right). \quad (2.130)$$

A forma fatorada da Equação (2.130) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = \frac{\lambda}{2} \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{1}{\alpha K_c (\beta - \rho)^2} (\sigma^2 - 2\rho\beta + \rho^2). \quad (2.131)$$

Portanto o lado direito da Equação (2.112) fica:

$$\frac{dn_1^2(t)}{dt^2} + \lambda \frac{dn_1(t)}{dt} = \frac{\lambda^2}{4} \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{L}{\alpha K_c (\beta - \rho)^4}, \quad (2.132)$$

com:

$$L = -2(\sigma^2 - \rho^2)(\sigma^2 - \beta^2) + (\sigma^2 - 2\rho\beta + \rho^2)(2\rho\beta - \rho^2 - \sigma^2) + 2(\sigma^2 - 2\rho\beta + \rho^2)(\beta - \rho)^2. \quad (2.133)$$

Aplicando-se corretamente a propriedade distributiva, obtém-se:

$$L = -2\sigma^4 + 2\sigma^2\beta^2 - 2\rho^2\beta^2 - 2\rho\beta\sigma^2 + \rho^2\sigma^2 - \sigma^4 + 2\sigma^2\beta^2 - 2\rho^3\beta + \rho^4 - \rho^2\sigma^2 + 2\rho^2\beta^2 + 4\rho^2\beta^2 - 2\rho^3\beta + 2\rho\beta\sigma^2 - 4\rho\beta^3. \quad (2.134)$$

Observe que, L é escrito em forma polinomial, e substituindo a Equação (2.132) na Equação (2.112), obtém-se:

$$[\rho(t) - \beta] \frac{dn_2(t)}{dt} + \left[-\frac{\lambda}{2} \frac{(\sigma^2 - \rho^2)}{(\beta - \rho)} + \lambda\rho(t) \right] n_2(t) = \frac{\lambda^2}{4} \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{L}{\alpha K_c(\beta - \rho)^4}. \quad (2.135)$$

Manipulando esta última equação e substituindo o termo da derivada temporal da reatividade, pela Equação (2.94) e dividindo-a por $(\rho - \beta)$, tem-se:

$$\frac{dn_2(t)}{dt} + \left[\frac{\lambda}{2} \frac{(\sigma^2 - 2\rho\beta + \rho^2)}{(\beta - \rho)^2} \right] n_2(t) = \frac{\lambda^2}{4} \left(\frac{\lambda}{2} \frac{(\sigma^2 - \rho^2)}{(\beta - \rho)} \right) \cdot \frac{L}{\alpha K_c(\beta - \rho)^5}. \quad (2.136)$$

Porém, pela continuidade das funções, tem-se que:

$$\frac{\frac{dn_2(t)}{dt}}{\frac{d\rho}{dt}} = \frac{dn_2(t)}{d\rho}. \quad (2.137)$$

Dividindo a Equação (2.136) pelo termo $-\frac{\lambda}{2} \frac{(\sigma^2 - \rho^2)}{(\beta - \rho)}$, consegue-se, utilizando a regra da cadeia para as derivadas, chegar em:

$$\frac{dn_2(t)}{d\rho} + \frac{(\sigma^2 - 2\rho\beta + \rho^2)}{(\beta - \rho)(\rho^2 - \sigma^2)} n_2 = \frac{-\lambda^2 \cdot L}{4\alpha K_c(\beta - \rho)^5}. \quad (2.138)$$

Note que

$$\frac{d}{d\rho} \left[\left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right) n_2 \right] = \frac{dn_2(t)}{d\rho} \left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right) + \frac{(\rho^2 - \sigma^2) - 2\rho(\rho - \beta)}{(\rho^2 - \sigma^2)^2} n_2. \quad (2.139)$$

A Equação (2.139) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right) n_2 \right] = \left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right) \left(\frac{dn_2}{d\rho} + \frac{(\sigma^2 - 2\rho\beta + \rho^2)}{(\beta - \rho)(\rho^2 - \sigma^2)} n_2 \right). \quad (2.140)$$

Multiplicando a Equação (2.138) por $\left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right)$, obtém-se:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right) n_2 \right] = \left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right) \left[\frac{-\lambda^2 \cdot L}{4\alpha K_c (\beta - \rho)^5} \right], \quad (2.141)$$

que pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right) n_2 \right] = \frac{\lambda^2 \cdot L}{4\alpha K_c (\beta - \rho)^4 (\rho^2 - \sigma^2)}. \quad (2.142)$$

Integrando esta equação com a condição inicial $\rho(0) = \rho_0$; $n_2(0) = 0$ e multiplicando-a pelo inverso de $\left[\frac{\lambda^2 \cdot L}{4\alpha K_c} \right]$, pode-se obter $n_2(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{4\alpha K_c}{\lambda^2} \left[\left(\frac{\rho - \beta}{\rho^2 - \sigma^2} \right) n_2 \right] &= \int \frac{\rho^4 - 4\beta\rho^3}{(\beta - \rho)^4 (\rho^2 - \sigma^2)} d\rho + \int \frac{3\sigma^4 - 4\beta^2\sigma^2}{(\beta - \rho)^4 (\rho^2 - \sigma^2)} d\rho \\ &\quad + \int \frac{4\beta^2\rho^2 + 2\sigma^2\rho^2 - 4\beta^3\rho}{(\beta - \rho)^4 (\rho^2 - \sigma^2)} d\rho \end{aligned} \quad (2.143)$$

O lado direito da Equação (2.143) pode ser dividido em 3 partes, denominadas P1, P2 e P3, como segue. O intuito dessa divisão é facilitar a solução da integral. Os termos referentes a cada parte da equação serão assim definidos:

$$P1 = \int \frac{\rho^4 - 4\beta\rho^3}{(\beta - \rho)^4 (\rho^2 - \sigma^2)} d\rho, \quad (2.144)$$

$$P2 = \int \frac{3\sigma^4 - 4\beta^2\sigma^2}{(\beta - \rho)^4 (\rho^2 - \sigma^2)} d\rho, \quad (2.145)$$

$$P3 = \int \frac{4\beta^2\rho^2 + 2\sigma^2\rho^2 - 4\beta^3\rho}{(\beta - \rho)^4 (\rho^2 - \sigma^2)} d\rho. \quad (2.146)$$

Para resolver a Equação (2.143) é necessário fazer diversas substituições. Sendo assim, inicialmente fazendo $u = \beta - x$, tem-se que $du = -dx$ e com isso, inicialmente resolvendo a parte P1, ao integrar a Equação (2.144):

$$\int \frac{\rho^4 - 4\beta\rho^3}{(\beta - \rho)^4 (\rho^2 - \sigma^2)} d\rho = \int \frac{(\beta - u)^3(3\beta + u)}{u^4(\beta - \sigma - u)(\beta + \sigma - u)} du. \quad (2.147)$$

Porém o termo da esquerda da Equação (2.144) pode ser dividido em frações parciais, de modo que $(\beta - x)^4 (\rho^2 - \sigma^2) = u^4(\beta - \sigma - u)(\beta + \sigma - u)$ e definindo $\int \frac{(\beta - u)^3(3\beta + u)}{u^4(\beta - \sigma - u)(\beta + \sigma - u)} du = T.E.$ (T.E. sendo a abreviação de "termo da esquerda"), tem-se:

$$T.E. = \int \frac{3\beta^4}{u^4(\beta^2 - \sigma^2)} du - \int \frac{2(\beta^5 - 4\beta^3\sigma^3)}{u^3(\beta^2 - \sigma^2)^2} du + \int \frac{4(\beta^5\sigma^2 + 5\beta^3\sigma^4)}{u(\beta^2 - \sigma^2)^4} du \\ + \int \frac{-\beta^6 + 7\beta^4\sigma^2 + 6\beta^2\sigma^4}{u^2(\beta^2 - \sigma^2)^3} du + \int \frac{\sigma^2(4\beta + \sigma)}{2((\beta + \sigma)^5 - u(\beta + \sigma)^4)} du. \quad (2.148)$$

Desenvolvendo a Equação 2.148:

$$T.E. = \left(2\beta\sigma^2 + \frac{\sigma^3}{2}\right) \int \frac{du}{(\beta - \sigma)^5 - u(\beta - \sigma)^4} \\ + \left(2\beta\sigma^2 - \frac{\sigma^3}{2}\right) \int \frac{du}{(\beta + \sigma)^5 - u(\beta + \sigma)^4} \\ + \left(\frac{4\beta^5\sigma^2}{(\beta^2 - \sigma^2)^4} + \frac{20\beta^3\sigma^4}{(\beta^2 - \sigma^2)^4}\right) \int \frac{1}{u} du + \left(\frac{-\beta^6 + 7\beta^4\sigma^2 + 6\beta^2\sigma^4}{u^2(\beta^2 - \sigma^2)^3}\right) \int \frac{1}{u^2} du \\ + \left(\frac{8\beta^3\sigma^2 - 2\beta^5}{(\beta^2 - \sigma^2)^2}\right) \int \frac{1}{u^3} du + \frac{3\beta^4}{\beta^2 - \sigma^2} \int \frac{1}{u^4} du. \quad (2.149)$$

Para resolver a Equação (2.148) é necessário resolver cada termo da Equação (2.149). Para isso, foram utilizadas substituições e usadas algumas integrais imediatas. Primeiramente, vale relembrar que:

$$\begin{cases} \int u^{-1} du = \ln|u|; \\ \int u^{-2} du = -\frac{1}{u}; \\ \int u^{-3} du = \frac{1}{2u^2}; \\ \int u^{-4} du = -\frac{1}{3u^3}. \end{cases} \quad (2.150)$$

Além disso, também, nomearam-se os fatores da Equação (2.149) de modo que:

$$I = \left(2\beta\sigma^2 + \frac{\sigma^3}{2}\right) \int \frac{du}{(\beta - \sigma)^5 - u(\beta - \sigma)^4}; \quad (2.151)$$

$$II = \left(2\beta\sigma^2 - \frac{\sigma^3}{2}\right) \int \frac{du}{(\beta + \sigma)^5 - u(\beta + \sigma)^4}; \quad (2.152)$$

$$III = \left(\frac{4\beta^5\sigma^2}{(\beta^2 - \sigma^2)^4} + \frac{20\beta^3\sigma^4}{(\beta^2 - \sigma^2)^4}\right) \int \frac{1}{u} du; \quad (2.153)$$

$$IV = \left(\frac{-\beta^6 + 7\beta^4\sigma^2 + 6\beta^2\sigma^4}{u^2(\beta^2 - \sigma^2)^3}\right) \int \frac{1}{u^2} du; \quad (2.154)$$

$$V = \left(\frac{8\beta^3\sigma^2 - 2\beta^5}{(\beta^2 - \sigma^2)^2}\right) \int \frac{1}{u^4} du; \quad (2.155)$$

$$VI = \frac{3\beta^4}{\beta^2 - \sigma^2} \int \frac{1}{u^4} du. \quad (2.156)$$

Fazendo as devidas substituições:

$$\begin{cases} s = (\beta + \sigma)^5 - u(\beta + \sigma)^4 \\ p = (\beta - \sigma)^5 - u(\beta - \sigma)^4 \end{cases}, \quad (2.157)$$

e desse modo conclui-se que:

$$ds = dp = -(\beta + \sigma)^4. \quad (2.158)$$

Assim, fazendo as substituições das Equações (2.156) e (2.157), é possível resolver:

$$I + II = \left(\frac{-\beta^3}{2(\beta + \sigma)^4} - \frac{2\beta\sigma^2}{(\beta + \sigma)^4}\right) \int \frac{1}{s} ds + \left(\frac{\beta^3}{2(\beta - \sigma)^4} - \frac{2\beta\sigma^2}{(\beta - \sigma)^4}\right) \int \frac{1}{p} dp \quad (2.159)$$

Utilizando as relações da Equação (2.150) em cada um dos termos correspondentes, obtém-se:

$$I + II = \frac{\beta^3}{2(\beta - \sigma)^4} \ln|p| - \frac{2\beta\sigma^2}{(\beta - \sigma)^4} \ln|p| + \left(\frac{-\beta^3}{2(\beta + \sigma)^4} - \frac{2\beta\sigma^2}{(\beta + \sigma)^4}\right) \ln|s|. \quad (2.160)$$

Multiplicando pelo fator $2u^3(\beta^2 - \sigma^2)^4$, eliminando “p” e “s” ao substituir a variável “u” de volta e com as relações expressas na Equação (2.150), pode-se resolver $P1$ para a variável “u”. Assim, tem-se:

$$[2u^3(\beta^2 - \sigma^2)^4] P1 = 4\beta^3\sigma^2 (\beta^2 + 5\sigma^2) \ln|u| + 2\beta^2 (\beta^2 - \sigma^2) \cdot$$

$$\begin{aligned}
& [\beta^6 - \beta^5 u - \beta^4 (2\sigma^2 + u^2) + 5\beta^3 \sigma^2 u + \beta^2 (\sigma^4 + 7\sigma^2 u^2) - 4\beta^4 \sigma^2 u + 6\sigma^4 u^2] \\
& + \sigma^3 u^3 (4\beta + \sigma) (\beta - \sigma)^4 \ln |(\beta + \sigma)^4 (\beta + \sigma - u)| \\
& + \sigma^3 u^3 (4\beta - \sigma) (\beta + \sigma)^4 \ln |(\beta - \sigma)^4 (\beta - \sigma - u)|. \tag{2.161}
\end{aligned}$$

Sabendo a relação $\operatorname{tgh}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, conclui-se que:

$$x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}. \tag{2.162}$$

Desse modo, a partir da Equação 2.162, obtém-se a relação que define a função arcotangente hiperbólica $\operatorname{arctgh}(x)$, dada pela equação:

$$\operatorname{arctgh}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}. \tag{2.163}$$

Por fim, isolando $P1$, substituindo ρ , usando sua relação com “u”, na Equação (2.161) e substituindo a Equação (2.160), com certa fatoração, obtém-se:

$$P1 = \frac{1}{(\beta^2 - \sigma^2)^4} \cdot \frac{D}{(\beta - \rho)^3 \sigma}, \tag{2.164}$$

com “D”, dado por:

$$\begin{aligned}
D = & \beta^4 (-\sigma) (\beta^2 - \sigma^2)^3 + \beta^2 \sigma (\beta^2 - \sigma^2) (\beta^4 - 7\beta^2 \sigma^2 - 6\sigma^4) (\beta - \rho)^2 \\
& + (15\beta^4 \sigma^4 + 10\beta^2 \sigma^6 - \sigma^8) (\beta - \rho)^3 \operatorname{arctgh}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right) + \beta^3 \sigma (\beta^2 - 4\sigma^2) (\beta^2 - \sigma^2)^2 (\beta - \rho) \\
& - 2\beta^3 \sigma^3 (\beta^2 + 5\sigma^2) (\beta - \rho)^3 \ln |\beta^2 - \sigma^2| + 4\beta^3 \sigma^3 (\beta^2 + 5\sigma^2) (\beta - \rho)^3 \ln |\beta - \rho|. \tag{2.165}
\end{aligned}$$

Partindo da Equação (2.145), com raciocínio análogo ao feito para solucionar a Equação (2.144), obtém-se a solução para $P2$, como segue:

$$P2 = \int \frac{(3\sigma^4 - 4\beta^2 \sigma^2)}{u^4 (\beta - \sigma - u) (\beta + \sigma - u)} du. \tag{2.166}$$

Após alguma fatoração, $P2$ resulta na soma de seis integrais.

$$\begin{aligned}
\frac{P2}{3\sigma^4 - 4\beta^2\sigma^2} &= \int \frac{(3\beta^2 + \sigma^2)\sigma^4 - 4}{u^2(\beta^2 - \sigma^2)^3} du + \int \frac{4\beta(\beta^2 + \sigma^2)}{u(\beta^2 - \sigma^2)^4} du \\
&\quad + \int \frac{1}{u(\beta^2 - \sigma^2)} du + \int \frac{1}{u^3(\beta^2 - \sigma^2)^2} du \\
&\quad + \int \frac{1}{2\sigma[(\beta - \sigma)^5 - u(\beta - \sigma)^4]} du - \int \frac{1}{2\sigma[(\beta + \sigma)^5 - u(\beta + \sigma)^4]} du.
\end{aligned} \tag{2.167}$$

Novamente é possível dividir a Equação 2.167 em 6 frações parciais, e com isso, determinar P2:

$$VII = \int \frac{(3\beta^2 + \sigma^2)\sigma^4 - 4}{u^2(\beta^2 - \sigma^2)^3} du, \tag{2.168}$$

$$VIII = \int \frac{4\beta(\beta^2 + \sigma^2)}{u(\beta^2 - \sigma^2)^4} du, \tag{2.169}$$

$$IX = \int \frac{1}{u(\beta^2 - \sigma^2)} du, \tag{2.170}$$

$$X = \int \frac{1}{u^3(\beta^2 - \sigma^2)^2} du, \tag{2.171}$$

$$XI = \int \frac{1}{2\sigma[(\beta - \sigma)^5 - u(\beta - \sigma)^4]} du, \tag{2.172}$$

$$XII = \int \frac{1}{2\sigma[(\beta + \sigma)^5 - u(\beta + \sigma)^4]} du. \tag{2.173}$$

Os fatores VII, VIII, IX e IX podem ser resolvidos com os resultados das equações apresentadas na Equação (2.150). Além disso, os fatores XI e XII podem ser resolvidos com as substituições definidas pelas Equações (2.157) e (2.158) de maneira análoga aos fatores I e II. Assim, depois de certa fatoração e multiplicando a Equação (2.167) por $(3\sigma^4 - 4\beta^2\sigma^2)$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
P2 &= \frac{-3\beta\sigma^4}{u^2(\beta^2 - \sigma^2)^2} + \frac{4\beta^3\sigma^2}{u^2(\beta^2 - \sigma^2)^2} + \frac{4\beta^2\sigma - 3\sigma^3}{2(\beta - \sigma)^4} \ln |p| + \left[\frac{3\sigma^3}{(\beta + \sigma)^3} - \frac{2\beta^2\sigma}{(\beta + \sigma)^4} \right] \ln |s| \\
&\quad + \left[\frac{12\beta\sigma^6 - 16\beta^5\sigma^2 - 4\beta^3\sigma^4}{(\beta^2 - \sigma^2)^4} \right] \ln |u| + \frac{12\beta^4\sigma^2 - 5\beta^2\sigma^4 - 3\sigma^6}{u(\beta^2 - \sigma^2)^3} + \frac{4\beta^2\sigma^2 - 3\sigma^4}{3u^3(\beta^2 - \sigma^2)}.
\end{aligned} \tag{2.174}$$

Assim, utilizando as relações para “p”, “s” e “u”, dividindo P3 em frações aparciais, é possível obter:

$$\begin{aligned}
P2 = & \frac{(4\beta^2\sigma^2 - 3\sigma^4) \left[6\beta\sigma(\beta^2 + \sigma^2)(\beta - \rho)^3 \ln |\rho^2 - \sigma^2| + \sigma(\beta^2 - \sigma^2)^3 \right]}{3\sigma(\beta^2 - \sigma^2)^4(\beta - \rho)^3} \\
& + [4\beta^2\sigma^2 - 3\sigma^4] \cdot \frac{\left[3\beta\sigma(\beta^2 - \sigma^2)^2(\beta - \rho) + 3\sigma(3\beta^2 + \sigma^2)(\beta^2 - \sigma^2)(\beta - \rho)^2 \right]}{3\sigma(\beta^2 - \sigma^2)^4(\beta - \rho)^3} \\
& + [4\beta^2\sigma^2 - 3\sigma^4] \cdot \frac{\left[3(\beta^4 + 6\beta^2\sigma^2 + \sigma^4) \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right) - 12\beta\sigma(\beta^2 + \sigma^2) \ln |\rho - \beta| \right]}{3\sigma(\beta^2 - \sigma^2)^4}.
\end{aligned} \tag{2.175}$$

Note que a solução de P1 e P2 estão na mesma base, ou seja, possui o mesmo divisor na parte fracionária, o que facilita a soma. Sendo assim, para obter n_2 , foi necessário resolver a Equação (2.146) para P3.

A solução para P3 é complexa como a de P1 e de P2 e pode ser obtida de maneira análoga, dividindo a Equação (2.146) em frações parciais. Assim, ao fazer as substituições com “u” e as substituições com “p” e “s”, utilizando as Equações (2.157) e (2.158), é possível obter:

$$\begin{aligned}
P3 = & \int \frac{2\beta^2\sigma^2}{(\beta^2 - \sigma^2)(\rho - \beta)^4} - \int 2 \frac{\beta^6 - 5\beta^2\sigma^4 - \sigma^6}{(\beta^2 - \sigma^2)^3(\beta - \rho)^2} \\
& + \int \frac{2\beta^2\sigma - 2\beta^3 + \sigma^3}{(\beta - \sigma)^4(\rho - \sigma)} + \int \frac{-2\beta^3 - 2\beta^2\sigma - \sigma^3}{(\beta + \sigma)^4(\rho + \sigma)} \\
& + \int \frac{4(\beta^5 - \beta^3\sigma^2 - \beta\sigma^4)}{(\beta^2 - \sigma^2)^2(\rho - \beta)^3} + \int \frac{4(\beta^7 + 2\beta^5\sigma^2 - 5\beta^3\sigma^4 - 2\beta\sigma^6)}{(\beta^2 - \sigma^2)^4(\rho - \beta)}.
\end{aligned} \tag{2.176}$$

Fazendo as substituições:

$$\begin{aligned}
P3 = & \int \frac{2\beta^2\rho^2}{(\rho^2 - \sigma^2)u^4} + \int \frac{4\beta^6 - 10\beta^2\sigma^4 - 2\sigma^6}{(\beta^2 - \sigma^2)^3u^2} \\
& - \int \frac{2\beta^2\sigma - 2\beta^3 + \sigma^3}{s} + \int \frac{2\beta^3 + 2\beta^2(\sigma +)gma^3}{p} \\
& + \int \frac{4(\beta^5 - \beta^3\sigma^2 - \beta\sigma^4)}{(\beta^2 - \sigma^2)^2u^3} + \int \frac{4(\beta^7 + \beta^5\sigma^2 - 5\beta^3\sigma^4 - 2\beta\sigma^6)}{(\beta^2 - \sigma^2)^4u}.
\end{aligned} \tag{2.177}$$

Com isso, resolvendo de maneira análoga as partes anteriores e utilizando as relações dadas na Equação (2.150), tem-se:

$$\begin{aligned}
P3 = & \left[\frac{\beta^2\sigma^2(\beta^2 - \sigma^2)^3}{(\beta - \rho)^3} + \frac{3(\beta^2 - \sigma^2)(-2\beta^5 + 5\beta^2\sigma^4 + \sigma^6)}{(\beta - \rho)} + \frac{3(-\beta^5 + \beta^3\sigma^2 + \beta\sigma^4)(\beta^2 - \sigma^2)^2}{(\beta - \rho)^2} \right. \\
& \left. - 3(\beta^7 + 2\beta^5\sigma^2 - 5\beta^3\sigma^4 - 2\beta\sigma^6) \ln |\rho^2 - \sigma^2| + 6(\beta^7 + 2\beta^5\sigma^2 - 5\beta^3\sigma^4 - 2\beta\sigma^6) \ln |\rho - \beta| \right]
\end{aligned}$$

$$-3\sigma(-6\beta^6 + 5\beta^4\sigma^2 + 8\beta^2\sigma^4 + 2\sigma^6) \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right) \cdot \frac{2}{3(\beta^2 - \sigma^2)^4}. \quad (2.178)$$

Note que multiplicando e dividindo a Equação (2.178) por $\sigma(\beta - \rho)^3$, obtém-se a mesma base (divisor) que nas Equações (2.164) e (2.175).

Disso tudo, basta somar P1, P2 e P3, e em seguida fatorar a expressão obtida. Ao multiplicar os dois lados da Equação (2.143), pelo fator $\frac{\lambda^2(\rho^2 - \sigma^2)}{4\alpha K_c(\rho - \beta)}$, obtém-se

$$n_2 = \frac{\lambda^2(\rho^2 - \sigma^2)}{4\alpha K_c(\rho - \beta)} \cdot \left[\frac{4\beta(\beta^2 + \sigma^2)}{(\beta^2 - \sigma^2)^2} \ln\left(\frac{\rho - \beta}{\rho_0 - \beta}\right) - \frac{2\beta}{(\beta - \sigma)^2} \ln\left(\frac{\rho^2 - \sigma^2}{\rho_0^2 - \sigma^2}\right) + \frac{(3(\beta^2 + \sigma^2)\rho^2 - \beta(7\beta^2 + \sigma^2)\rho + 5\beta^4 + \sigma^4 - 2\beta^2 + \sigma^2)}{(\sigma^2 - \beta^2)(\beta - \rho_0)^3} - A \right], \quad (2.179)$$

com

$$A = \frac{3(\beta^2 + \sigma^2)\rho_0^2 - \beta(7\beta^2 + \sigma^2)\rho_0 + 5\beta^4 + \sigma^4 - 2\beta^2 + \sigma^2}{(\sigma^2 - \beta^2)(\beta - \rho_0)^3}. \quad (2.180)$$

Como $n(t) = n_1 + l \cdot n_2$, então

$$n(t) = \frac{\lambda(\sigma^2 - \rho^2)}{2\alpha K_c(\beta - \rho)} B, \quad (2.181)$$

onde

$$B = 1 + \frac{\lambda l}{2} \left[\frac{4\beta(\beta^2 + \sigma^2)}{(\beta^2 - \sigma^2)^2} \ln\left(\frac{\rho - \beta}{\rho_0 - \beta}\right) - \frac{2\beta}{(\beta - \sigma)^2} \ln\left(\frac{\rho^2 - \sigma^2}{\rho_0^2 - \sigma^2}\right) + \frac{(3(\beta^2 + \sigma^2)\rho^2 - \beta(7\beta^2 + \sigma^2)\rho + 5\beta^4 + \sigma^4 - 2\beta^2 + \sigma^2)}{(\sigma^2 - \beta^2)(\beta - \rho_0)^3} - A \right]. \quad (2.182)$$

Mas das expressões para a densidade de precursores de nêutrons $C(t)$ e para a reatividade $\rho(t)$ obtidas por Nahla e válidas para $|\rho| < \sigma$, tem-se que:

$$\frac{dn(t)}{dt} + \frac{dC(t)}{dt} = \frac{d(n + C)}{dt} = \frac{\rho}{l} n. \quad (2.183)$$

Assim:

$$\frac{\frac{d(n+C)}{dt}}{\frac{d\rho}{dt}} = \frac{d(n + C)}{d\rho} = \frac{\frac{\rho}{l} n}{-\alpha K_c n} = \frac{-\rho}{\alpha l K_c}. \quad (2.184)$$

Aplicando então, o tempo de 0 até t, chega-se em:

$$\frac{\rho_0^2 - \rho^2}{2\alpha l K_c} = C(t) - C_0 + n(t) - n_0, \quad (2.185)$$

mas

$$\begin{cases} C(t)\lambda + \frac{\rho(t)-\beta}{l}n(t) = \frac{dn(t)}{dt} \\ \frac{dn(0)}{dt} = 0 \\ n(0) = n_0 \end{cases}. \quad (2.186)$$

Desse modo, conclui-se que:

$$C(t) = \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{2\alpha l K_c} + \left(1 + \frac{\beta}{\lambda l}\right)n_0 - n(t). \quad (2.187)$$

Substituindo a Equação (2.119) na Equação (2.56), tem-se que:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\alpha K_c \left(\frac{\lambda(\sigma^2 - \rho^2)}{2\alpha K_c(\beta - \rho)} \right) = -\frac{\lambda}{2} \frac{(\sigma^2 - \rho^2)}{(\beta - \rho)}. \quad (2.188)$$

Note que

$$\frac{\beta - \rho}{\sigma^2 - \rho^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\sigma - \rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma} + 1 \right) \cdot \frac{1}{\sigma + \rho}, \quad (2.189)$$

portanto, integrando a Equação (2.188) com a condição inicial $\rho(0) = \rho_0$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma} - 1 \right) \int \frac{d\rho}{\sigma - \rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma} + 1 \right) \int \frac{d\rho}{\sigma + \rho} = \frac{-\lambda t}{2}. \quad (2.190)$$

Então

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\sigma} - 1 \right) (-\ln|\sigma - \rho|) + \left(\frac{\beta}{\sigma} + 1 \right) (-\ln|\sigma + \rho|) \Big|_0^t = -\lambda \sigma t \quad (2.191)$$

e

$$\ln \left| \frac{(\sigma + \rho)^{\beta+\sigma}}{(\sigma - \rho)^{\beta-\sigma}} \right|_0^t = -\lambda \sigma t. \quad (2.192)$$

Sabendo que

$$-\lambda\sigma t = \ln \frac{(\sigma + \rho)^{\beta+\sigma}}{(\sigma - \rho)^{\beta-\sigma}} - \ln \frac{(\sigma + \rho_0)^{\beta+\sigma}}{(\sigma - \rho_0)^{\beta-\sigma}} = \ln \frac{(\sigma + \rho)^{\beta+\sigma}}{(\sigma - \rho)^{\beta-\sigma}} \frac{(\sigma - \rho_0)^{\beta-\sigma}}{(\sigma + \rho_0)^{\beta+\sigma}}, \quad (2.193)$$

e fatorando adequadamente, obtém-se

$$\lambda\sigma t = \ln \left(\frac{\rho - \sigma}{\rho_0 - \sigma} \right)^\beta \left(\frac{\rho_0 + \sigma}{\rho + \sigma} \right)^\beta \left(\frac{\rho_0^2 - \sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \right)^\sigma. \quad (2.194)$$

Por fim, um expressão explícita do tempo pode ser definida como:

$$t = \frac{1}{\lambda\sigma} \ln \left[\left(\frac{\rho - \sigma}{\rho_0 + \sigma} \right)^\beta \left(\frac{\rho_0^2 - \sigma^2}{\rho^2 - \sigma^2} \right)^\sigma \left(\frac{\rho_0 + \sigma}{\rho + \sigma} \right)^\beta \right]. \quad (2.195)$$

Essa Equação pode ser interpretada como uma formulação analítica para a reatividade do sistema, mas sua utilidade prática é limitada, pois não expressa explicitamente a dependência temporal. Para facilitar a implementação computacional das expressões contidas na equação diferencial para $n_2(t)$, conforme a Equação (2.119), e da relação da reatividade em função da temperatura, seria benéfico se a Equação (2.192) pudesse ser invertida de maneira fácil, proporcionando uma expressão com dependência explícita do tempo, ou seja, $\rho(t)$. [10]

Uma abordagem para lidar com esse desafio seria inverter a equação para cada momento específico t , utilizando o Método de Newton-Raphson ou outro método apropriado para encontrar raízes reais de funções reais. No entanto, esse processo poderia não ser menos exigente em termos computacionais do que o método convencional de diferenças finitas. Uma alternativa seria empregar uma técnica de ajuste polinomial como uma abordagem alternativa para inverter a equação.[10]

2.4.1 Aplicação da Técnica de Ajuste

O processo de ajuste polinomial envolve escolher um polinômio (normalmente de baixa ordem) que minimize a discrepância entre os valores reais dos dados e os valores previstos pelo polinômio. Isso é geralmente feito minimizando a soma dos quadrados dos resíduos, que são as diferenças entre os valores reais e os valores estimados pelo polinômio. [24]

Essa técnica é frequentemente utilizada quando não se conhece a forma exata da relação funcional entre as variáveis, mas deseja-se encontrar uma representação

simples e suave que capture a tendência geral dos dados. Pode ser aplicada em diversas áreas, como análise de dados experimentais, modelagem estatística e interpolação.[25]

É importante notar que o ajuste polinomial pode ser sensível a outliers e pode resultar em interpolações inadequadas se não for usado com cuidado. Além disso, ao escolher a ordem do polinômio, é necessário considerar o equilíbrio entre a complexidade do modelo e a capacidade de generalização para novos dados. Em alguns casos, outras técnicas de ajuste, como regressão não polinomial ou métodos mais avançados, podem ser preferíveis dependendo da natureza dos dados.[24]

Portanto, substituindo a Equação (2.56) na Equação (2.192), é possível expressar a dependência da reatividade em termos da temperatura global do sistema:

$$t = \frac{1}{\lambda\sigma} \ln \left[\left(\frac{\rho - \sigma - \alpha(T - T_0)}{\rho_0 + \sigma - \alpha(T - T_0)} \right)^\beta \left(\frac{\rho_0^2 - \sigma^2}{(\rho - \sigma - \alpha(T - T_0))^2 - \sigma^2} \right)^\sigma \left(\frac{\rho_0 + \sigma}{\rho + \sigma} \right)^\beta \right]. \quad (2.196)$$

Considerando que ρ_0 é uma função de β e que a temperatura varia desde seu valor inicial até seu valor assintótico, é possível determinar uma expressão para tal temperatura:

$$T_{ass}(t) \approx T_0 + \left(\frac{\sigma + \rho_0}{\alpha} \right). \quad (2.197)$$

Fazendo um ajuste polinomial de quinto grau, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados, chega-se a uma solução de forma que :

$$T(t) = \sum_{n=0}^5 A_n t^n$$

Porém assumindo que em relação a T_0 , $A_0 = 0$, pois $\Delta T_0 = 0$, tem-se que:

$$T(t) = \sum_{n=1}^5 A_n t^n \quad (2.198)$$

Por fim, com o intuito de otimizar a implementação computacional, recorreu-se a uma aproximação em série de Taylor de primeira ordem para a constante σ , a qual é válida para os parâmetros típicos do reator PWR.

Como

$$\sigma = \sqrt{\rho_0^2 + \frac{2}{\lambda} \alpha K_c n_0 (\beta - \rho_0)},$$

tem-se que $(1 + x)^n; x \gg 1$, e portanto $y \approx 1 + nx$.

Assim

$$\sigma = \rho_0 \left(1 + \frac{2\alpha K_c n_0}{\lambda \rho_0} \right) \left(\frac{\beta}{\beta} - 1 \right),$$

e portanto

$$\sigma \approx \rho_0 + \frac{2\alpha K_c n_0}{\lambda} \left(\frac{\beta}{\rho_0} - 1 \right) \quad (2.199)$$

Capítulo 3

Resultados

3.1 Considerações iniciais

Este capítulo apresenta uma análise detalhada dos estudos feitos na literatura abordada, a partir de uma metodologia capaz de implementar numericamente as soluções analíticas.

O foco principal é examinar o pico de potência e o instante de tempo em que ele ocorre, visando prever qual dos métodos apresentados é mais eficaz.

Serão adotados os parâmetros cinéticos específicos,[10] presentes na tabela 3.1, para gerar gráficos da solução analítica e compará-los ao gráfico da solução numérica. Ambos os conjuntos de dados serão analisados por um software desenvolvido em Python, considerando os mesmos parâmetros cinéticos.

Em reatores rápidos, com tempo médio de geração dos nêutrons da ordem de 10^{-3} segundos, a potência nuclear aumenta rapidamente, dificultando o controle. Já em reatores térmicos, com tempo de geração na ordem de 10^{-4} segundos, o controle é mais viável. Empiricamente, percebe-se que, quando a reatividade se aproxima do ponto crítico ($\rho \approx \beta$), o impacto do tempo de geração é insignificante, destacando a importância dos nêutrons retardados na determinação da densidade neutrônica. No entanto, quando a reatividade está próxima do ponto crítico, o reator se torna praticamente incontrolável, indicando que a contribuição dos nêutrons retardados é negligenciável em relação aos nêutrons prontos.[15]

A reatividade desempenha um papel crucial na gestão e operação segura do reator nuclear, pois qualquer alteração na composição isotópica do núcleo, resultante da queima de combustível ou do uso em mecanismos de segurança e controle do reator, pode provocar mudanças drásticas na reatividade nuclear.[26]

Na subseção 3.4.1,são apresentados os resultados das simulações numéricas para uma reatividade que varia linearmente com o tempo.

Grandezas	Valor
α	$5,0 \times 10^{-5} K^{-1}$
k_c	$5,0 \times 10^{-2} K/MW, s$
β	$6,5 \times 10^{-4}$
λ	$7,741 \times 10^{-2} s^{-1}$
l	$10^{-4} s$
T_0	$300 K$
n_0	$10 MW$
ρ_0	$\frac{\beta}{k}, k \in [2, 5]$

Tabela 3.1: Parâmetros cinéticos.

3.2 O método Runge-Kutta

Foi desenvolvido por Carl Runge e Martin Kutta no final do século XIX. Carl Runge, um matemático alemão, foi responsável por propor a ideia geral do método em 1895, enquanto Martin Kutta, um engenheiro alemão, publicou uma versão mais precisa do método em 1901. O método de Runge-Kutta foi uma extensão do método de Euler e foi projetado para melhorar a precisão das soluções numéricas de equações diferenciais ordinárias [27].

O método de Runge-Kutta, especialmente o método de quarta ordem, é um dos métodos mais comumente usados para obter soluções de valores iniciais aproximados. O método consiste em comparar polinômios de Taylor apropriados para eliminar o cálculo de derivadas, com múltiplas avaliações da função f dada a cada passo. Pode ser entendido como um aperfeiçoamento do método de Euler, que possui uma melhor estimativa da derivada da função [27]. No método de Euler, a estimativa do valor de y_{n+1} é realizada com o valor de y_n e a derivada do ponto x_n [28]. No método de Runge-Kutta, busca-se obter melhores estimativas de derivadas avaliando a função em mais pontos no intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ [28]. Um método Runge-Kutta de ordem n tem um erro da ordem de $O(h^{n+1})$ [29].

O método Runge-Kutta é dado por

$$y_{n+1} = y_n + h.k \quad (3.1)$$

Onde k é uma constante que é obtida através do cálculo da inclinação em vários pontos no interior do subintervalo. A ordem do método indica o número de passos usados em um intervalo para determinar o valor de k .

O procedimento de Runge-Kutta de quarta ordem consiste em encontrar constantes apropriadas de tal forma que

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3 + c_4 k_4)*$$

Onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes a determinar e

$$k_1 = f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1),$$

$$k_3 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2),$$

$$k_4 = f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 h k_1 + \beta_5 h k_2 + \beta_6 h k_3)$$

Igualando (*) com o polinômio de Taylor de grau 4, resultará um sistema não-linear de 11 equações e 13 incógnitas, ou seja, haverá infinitas soluções), onde as 13 incógnitas são $c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3,$

β_4, β_5 e β_6 [27][30].

3.3 A linguagem Python

Criado por Guido van Rossum do Instituto Nacional Holandês de Matemática e Ciência da Computação (CWI) no final de 1989, Python surgiu como um sucessor do ABC, capaz de lidar com exceções e fornecer uma interface para o sistema operacional Amoeba por meio de scripts Python.

É uma das linguagens de programação mais populares devido à sua sintaxe e versatilidade fáceis de aprender. Python é usada para desenvolver sistemas de software, aplicativos da web, scripts, jogos entre outros. Por ser uma das linguagens mais ativas da comunidade, novas bibliotecas são construídas e aprimoradas a cada dia. Do processamento de imagens aos algoritmos de inteligência artificial, existem funções e módulos prontos para uso [31].

Python é uma linguagem de fonte aberta, o que significa que com a colaboração da comunidade, novas bibliotecas vão surgindo e as que existem vão sendo aprimoradas de forma contínua e gratuita.

Para o desenvolvimento da presente dissertação, foi utilizada a versão Python 3.10.9, fazendo uso das bibliotecas *matplotlib.pyplot*, *numpy*, *time*, *math* e *gc*, para resolver numericamente as equações e plotar os gráficos das mesmas. No Anexo 1 está disposto integralmente o código Python utilizado.

3.4 Análise qualitativa

Nesta seção são apresentadas as análises dos resultados considerando a reimplementação termohidráulica e a aproximação prompt jump, tomando-se como referência a solução das equações da cinética pontual para um grupo sem fonte externa de nêutrons, usando-se o método de Runge-Kutta com passo da ordem de $10^{-4}s$ como referência. Todos os gráficos foram modelados por meio de um software desenvolvido em Python.

3.4.1 Método de referência

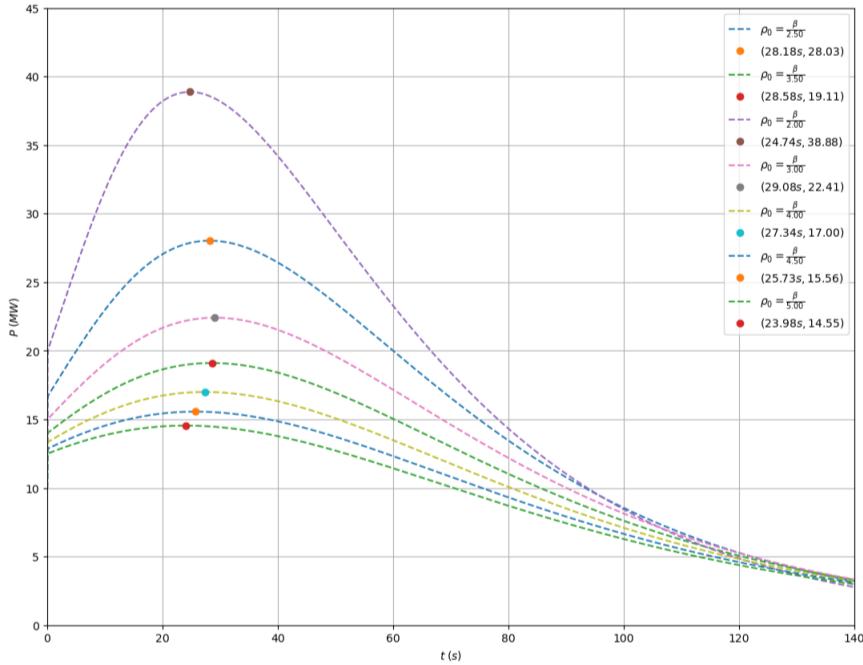


Figura 3.1: Potência em função do tempo. Solução numérica - método de Runge - Kutta.

As curvas de variação da potência com o tempo, sob diferentes potências iniciais, são mostradas na figura 3.1.

Os picos de potência e o instante de tempo em que os mesmos ocorrem para cada valor de reatividade inicial também são mostrados, evidenciando o impacto da mesma na potência do reator.

3.4.2 Método proposto por Li.*et.al*

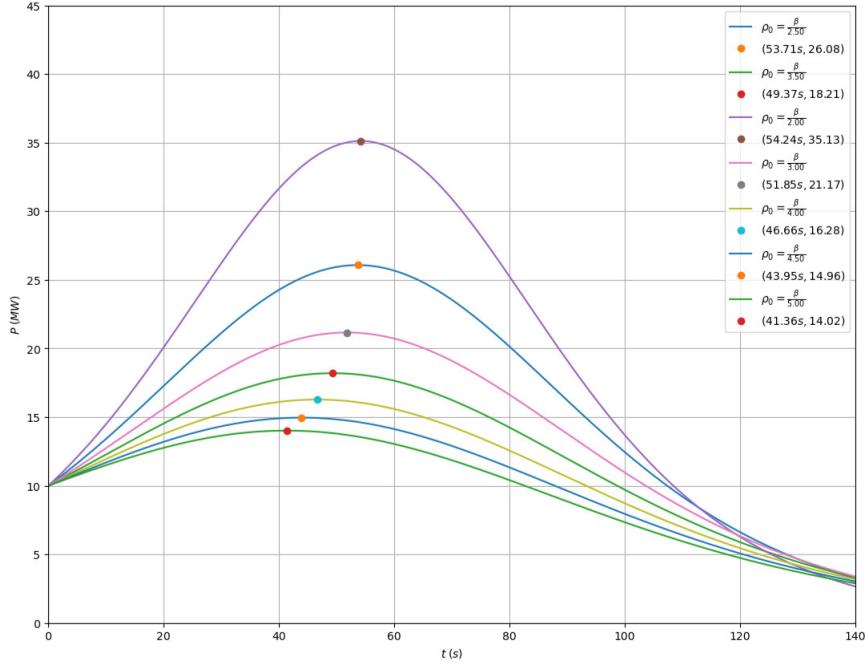


Figura 3.2: Potência em função do tempo. Solução numérica - Li, 2007.

Na figura (3.2), da Equação (2.42), observa-se os picos de potência entre 40s e 60s, enquanto que na solução numérica esses picos ocorrem entre 20s e 40s.

É possível observar também que o método proposto por Li, tende a aproximar-se do método numérico de referência, tanto quanto menor for o valor de ρ_0 .

3.4.3 Método proposto por Chen

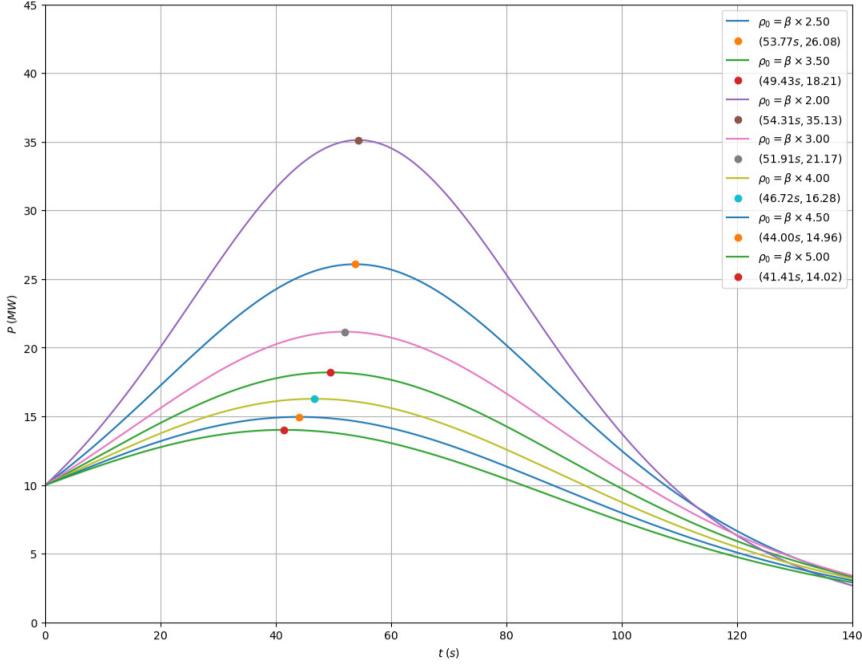


Figura 3.3: Potência em função do tempo. Solução numérica com $\rho_0 > \beta$ - Chen, 2007.

A figura (3.3), da Equação (2.84), possibilita as seguintes análises:
O modelo utilizado para o supercrítico imediato não pode ser aplicado à análise do supercrítico atrasado, vice-versa;^[8] Não importa se o processo supercrítico é imediato ou retardado, a potência inicial é um fator muito importante e não pode ser negligenciada, caso contrário ocorrerá um erro maior na análise;^[8] A solução analítica do modelo 2, só é válida no intervalo de 0s a 1s. Para $\rho_0 < \beta$, a densidade de nêutrons sofre uma queda acentuada no primeiro décimo de segundo; A solução analítica tende a se aproximar da numérica apenas quando $\rho_0 > \beta$;

3.4.4 Método proposto por Nahla

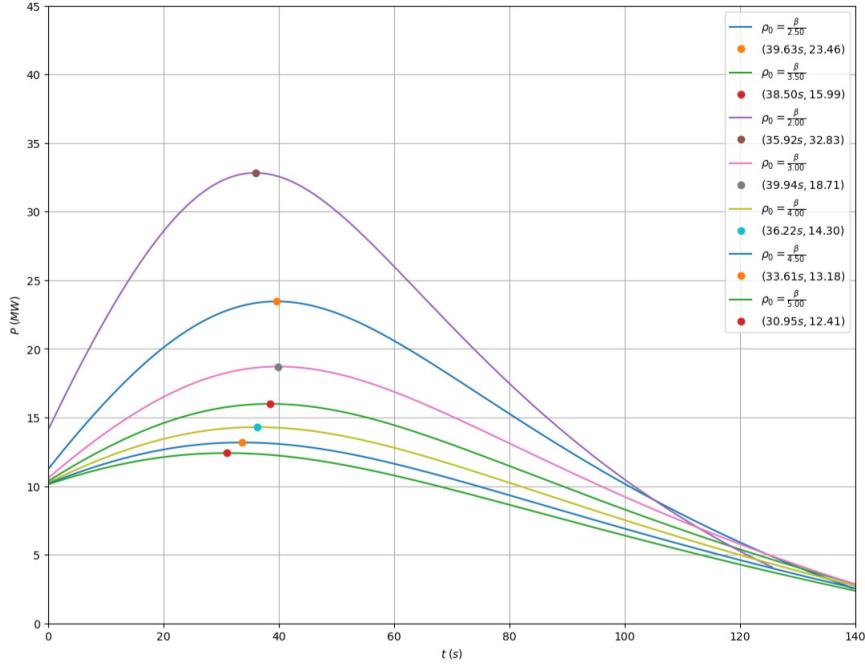


Figura 3.4: Potência em função do tempo. Solução numérica - Nahla, 2009.

Na figura (3.4), é possível observar os picos de potência ocorrem dentro de um mesmo intervalo de tempo, na solução da Equação (2.104). Observa-se também o mesmo padrão para o método de referência, indicando a necessidade apenas de um ajuste na variável tempo. A estabilização da potência também ocorre de forma sistemática apesar de tempos ligeiramente diferentes.

3.4.5 Método Nahla aproximado proposto por Palma.*et.al*

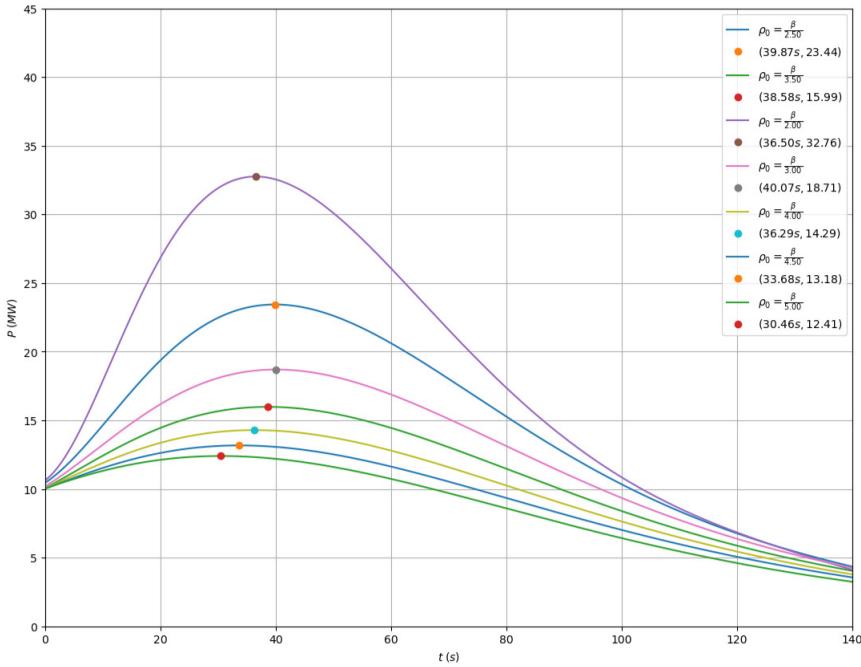


Figura 3.5: Potência em função do tempo. Solução numérica - Palma, 2009.

A figura (3.5), mostra que, por se tratar de uma técnica de ajuste polinomial do método proposto por Nahla, a solução da Equação (2.181) é válida apenas para um intervalo de tempo definido. A solução proposta por Palma se aproxima do método de referência, tanto quanto maior for o valor de ρ_0 .

3.5 Análise quantitativa

Definido o método numérico de referência, fez-se uma análise gráfica mais detalhada a fim de compará-lo com as soluções analíticas dos métodos apresentados pela literatura. O objetivo dessa análise é identificar os valores de potência máxima e o instante de tempo em que essa potência ocorre. Os resultados dessa análise foram como segue:

Assumindo que n depende de ρ , como descrito na Equação (2.12), e considerando a relação $\rho = \frac{\beta}{k}$, tabela (3.2), apresenta um "salto" no pico de potência. Tal fato é justificado pelo fato de que nesse caso, a reatividade inicial equivale a metade da fração de nêutrons atrasados. Isso demonstra que a reatividade inicial impacta diretamente na potência do sistema.

Grandeza	Numérico	Li	Chen	Nahla	Palma
Potência (MW)	38,88	35,13	35,13	32,83	32,76
Tempo (s)	24,74	76,19	76,28	35,92	48,97
Desvio % Potência		9,64	9,64	15,56	15,74
Desvio % Tempo		207,96	208,32	45,19	97,93

Tabela 3.2: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{2.0}$.

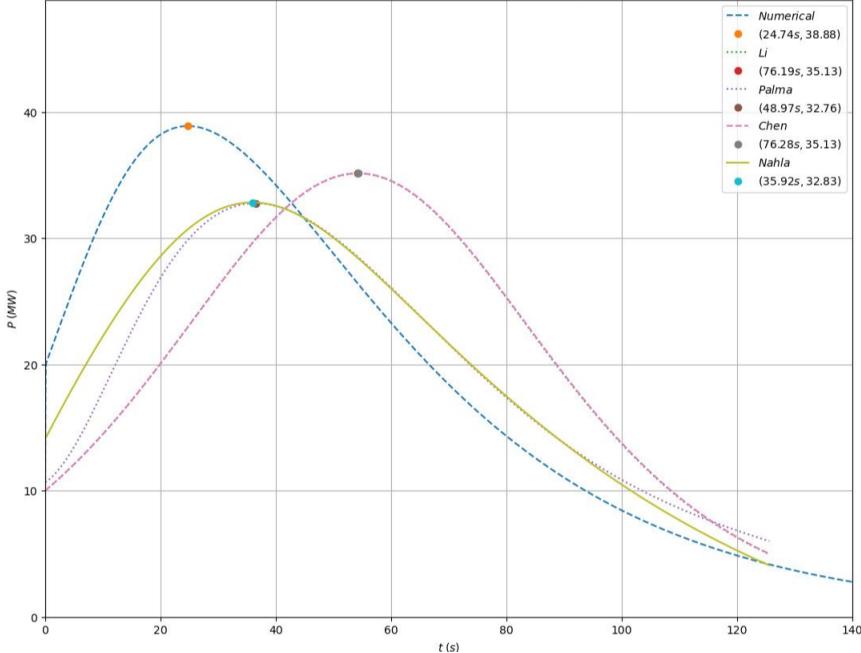


Figura 3.6: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{2.0}$.

A figura (3.6) demonstra que de fato, os métodos propostos por Li e Chen coincidem ao longo do intervalo analisado, como previsto nos dados da tabela (3.2). Para este caso, esses métodos predizem melhor o pico de potência.

Com o aumento do valor de k , ρ_0 diminui linearmente e as curvas dos gráficos vão lentamente suavizando, pois as potências previstas nas soluções analíticas se aproximam cada vez mais do método de referência.

Grandeza	Numérico	Li	Chen	Nahla	Palma
Potência (MW)	28,03	26,08	26,08	23,46	23,44
Tempo (s)	28,18	64,26	64,34	39,63	46,04
Desvio % Potência		6,95	6,95	15,90	15,95
Desvio % Tempo		128,03	128,31	40,63	63,37

Tabela 3.3: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{2.5}$.

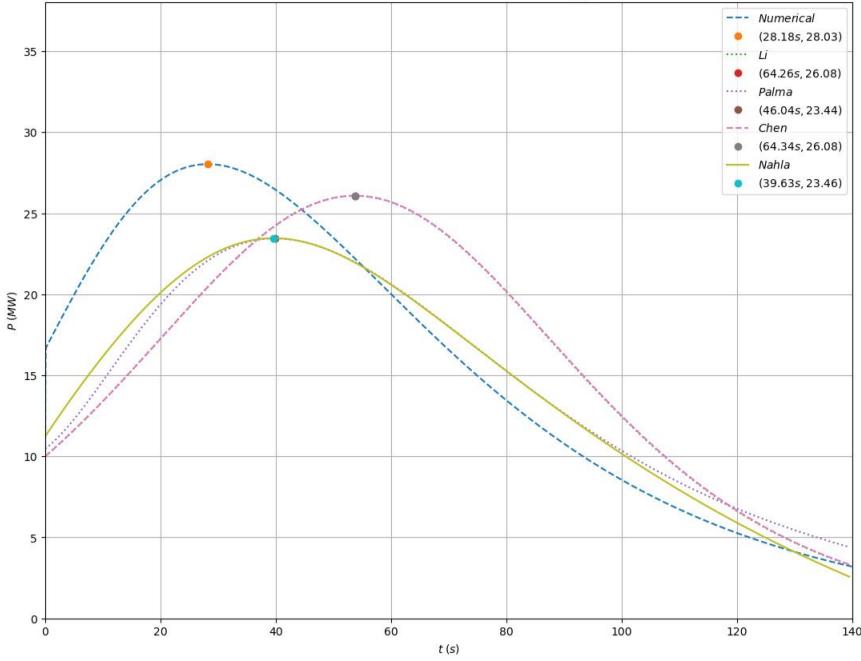


Figura 3.7: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{2.5}$.

A figura (3.7) mostra que o método proposto por Nahla apresenta um tempo para o pico de potência menor. Como a fração de nêutrons atrasados diminui, em relação a tabela (3.2), a reatividade inicial também é menor, portanto a potência também diminui em todos os métodos.

Com a reatividade inicial equivalendo $1/3$ da fração de nêutrons atrasados, a tabela (3.4) apresenta uma diminuição no desvio percentual da potência previstos por Li e Chen, indicando que para esse valor, os picos de potência se aproximam mais do método de referência, como mostrado na figura (3.8).

Grandeza	Numérico	Li	Chen	Nahla	Palma
Potência (MW)	22,41	21,17	21,17	18,71	18,71
Tempo (s)	29,08	56,10	56,17	39,94	42,19
Desvio % Potência		5,33	5,33	16,51	16,51
Desvio % Tempo		92,91	93,15	37,34	45,08

Tabela 3.4: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{3.0}$.

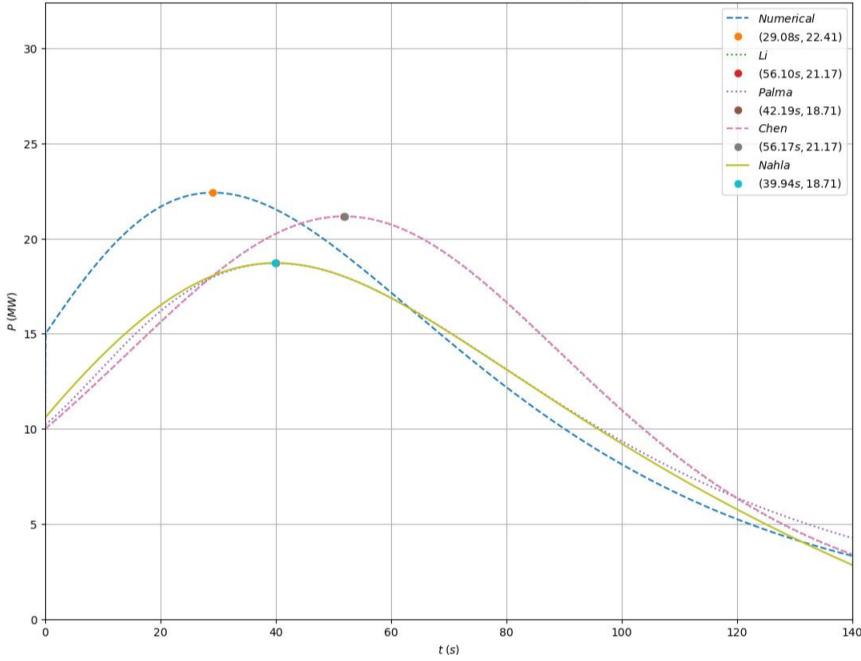


Figura 3.8: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{3.0}$.

A figura (3.8) indica uma proximidade maior dos métodos propostos por Li e Chen, do método de referência.

Na tabela (3.5), observa-se que o desvio percentual para os valores da potência é menor nos métodos propostos por Li e Chen, enquanto que para o tempo, o método proposto por Palma apresenta o menor desvio percentual.

Grandeza	Numérico	Li	Chen	Nahla	Palma
Potência (MW)	19,11	18,21	18,21	15,99	15,99
Tempo (s)	28,58	50,06	50,12	38,50	38,29
Desvio % Potência		4,70	4,70	16,32	16,32
Desvio % Tempo		75,15	75,36	34,70	33,97

Tabela 3.5: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{3.5}$.

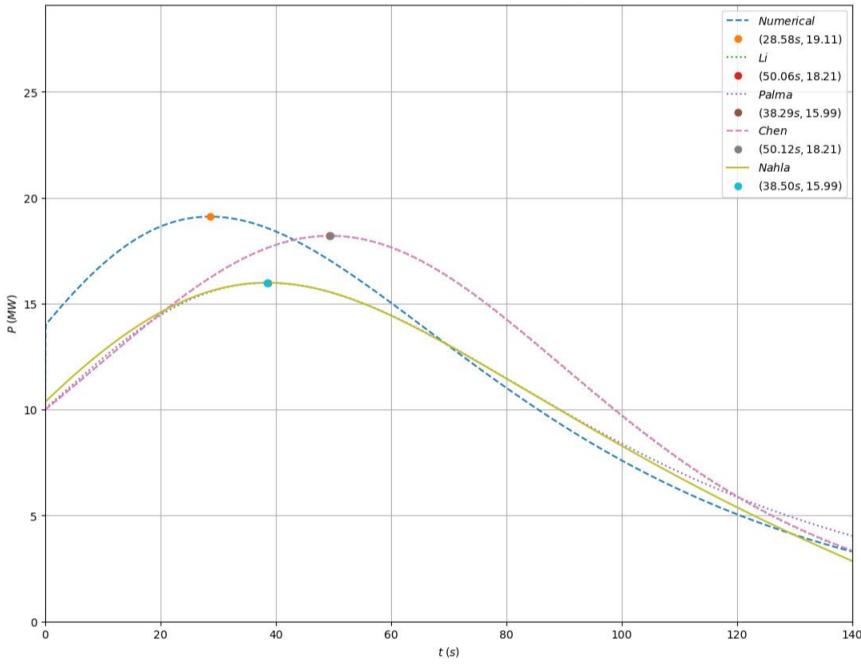


Figura 3.9: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{3.5}$.

O gráfico da figura (3.9) indica uma tendência de aproximação dos picos de potência dos métodos propostos por Nahla e Palma.

A tabela (3.6) mostra que a diferença entre os picos de potência e o instante em que o pico acontece, diminui entre os métodos propostos por Nahla e Palma.

Grandeza	Numérico	Li	Chen	Nahla	Palma
Potência (MW)	17,00	16,28	16,28	14,30	14,30
Tempo (s)	27,34	45,33	45,38	36,22	34,63
Desvio % Potência		4,23	4,23	15,88	15,94
Desvio % Tempo		65,80	65,98	32,47	26,66

Tabela 3.6: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{4.0}$.

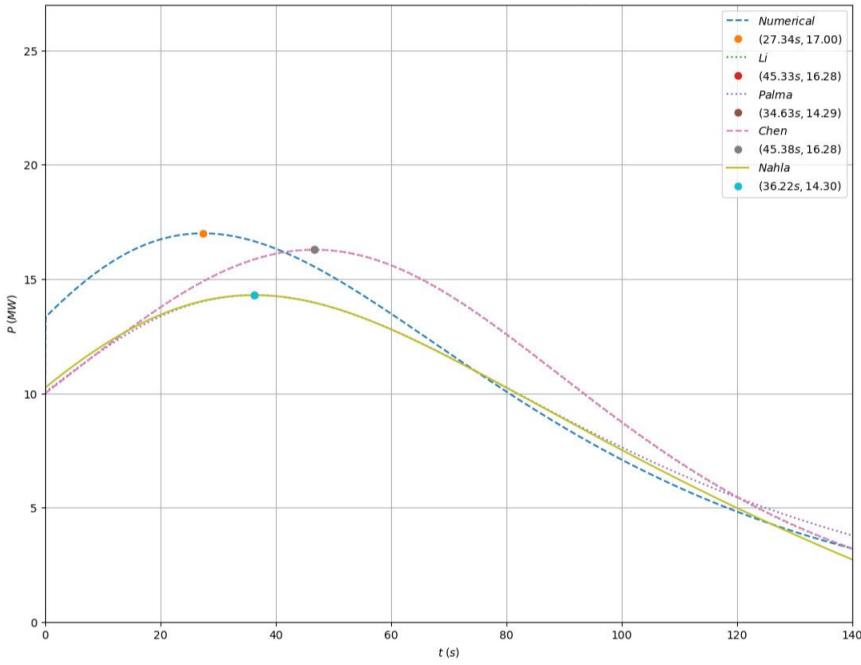


Figura 3.10: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{4.0}$.

A figura (3.10) confirma a diminuição da diferença entre o tempo de pico para os métodos propostos por Nahla e Palma, porém para os outros métodos essa diferença se mantém proporcionalmente.

A tabela (3.7) mostra os picos de potência dos métodos propostos por Li e Chen, e Nahla e Palma, coincidentes entre si.

Grandeza	Numérico	Li	Chen	Nahla	Palma
Potência (MW)	15,56	14,96	14,96	13,18	13,18
Tempo (s)	25,73	41,46	41,51	33,61	31,29
Desvio % Potência		3,85	3,85	15,29	15,29
Desvio % Tempo		61,13	61,32	30,62	21,60

Tabela 3.7: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{4.5}$.

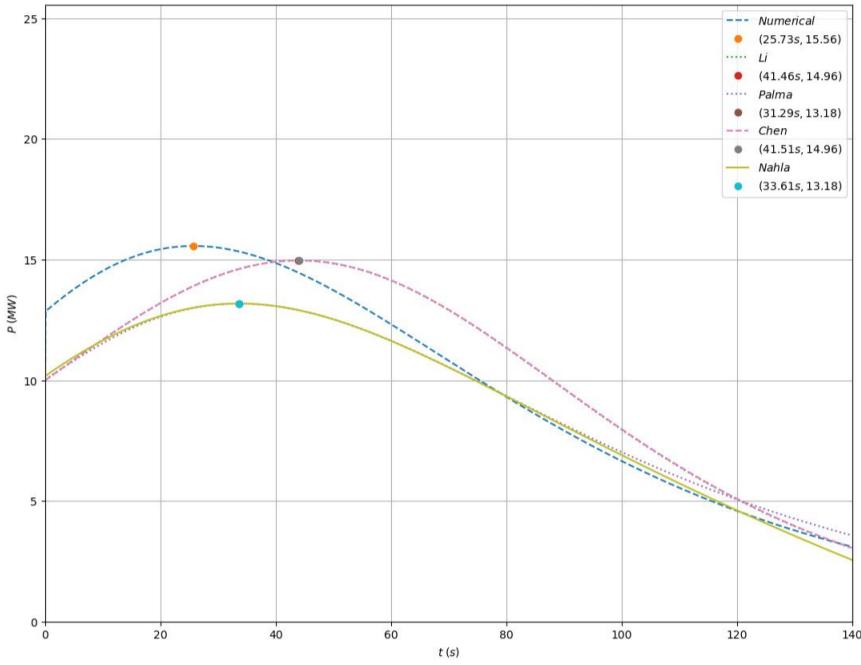


Figura 3.11: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{4.5}$.

Na figura (3.11) observa-se os métodos propostos por Nahla e Palma com o mesmo pico de potência tempos ligeiramente diferentes.

A tabela (3.8) mostra que os métodos propostos por Li e Chen apresentam o menor desvio percentual para a potência, considerando o cenário analisado, enquanto que o método proposto por Nahla apresenta o menor desvio percentual para o tempo.

Grandeza	Numérico	Li	Chen	Nahla	Palma
Potência (MW)	14,55	14,02	14,02	12,41	12,41
Tempo (s)	23,98	38,21	38,26	30,95	2775
Desvio % Potência		3,64	3,64	14,70	12,72
Desvio % Tempo		59,34	59,54	29,06	15,72

Tabela 3.8: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{5.0}$.

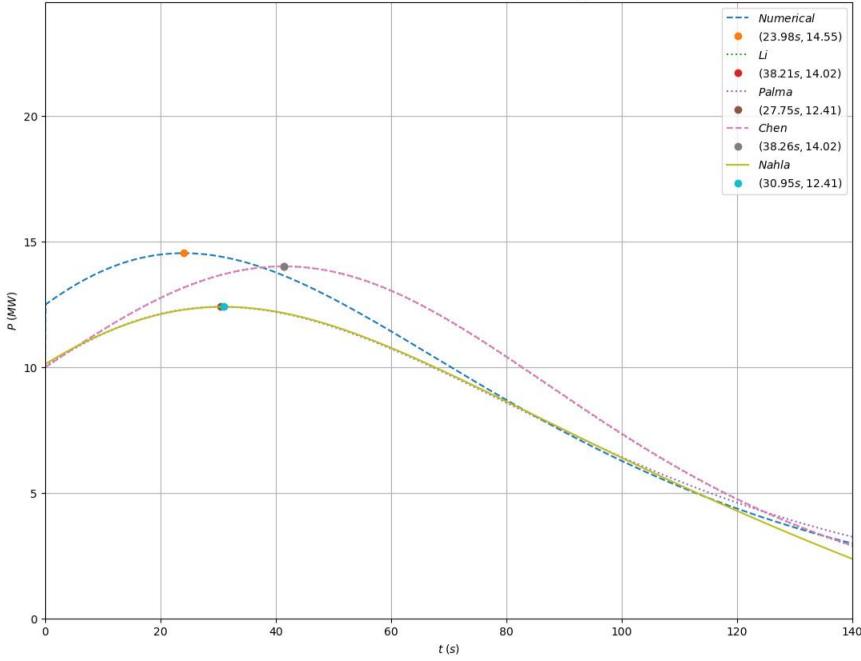


Figura 3.12: Variação do pico de Potência com $\rho_0 = \frac{\beta}{5.0}$.

Quanto menor a reatividade inicial, menor será a potência do sistema. É o que mostra a figura (3.12), onde é possível observar também que o desvio percentual diminui, implicando numa maior eficácia dos métodos analíticos.

3.5.1 Análise do desvio percentual médio (%)

O desvio percentual é a razão da diferença entre o valor medido e o valor verdadeiro pelo valor verdadeiro multiplicado por 100. É uma métrica fundamental para avaliar a precisão ou acurácia de uma medida ou cálculo em relação ao valor verdadeiro ou desejado. Expresso como uma porcentagem, o desvio percentual indica a magnitude da discrepância entre o resultado obtido e o valor de referência. Esse valor é uma maneira fácil de quantificar e comunicar a qualidade ou confiabilidade de uma medição ou previsão.

Nesta pesquisa, definiu-se como desvio percentual médio, a média dos desvios percentuais dos quatro métodos discutidos, considerando os sete valores de ρ_0 analisados.

Desvio % Médio	Li	Chen	Nahla	Palma
Potência (MW)	5,51	5,51	15,80	15,53
Tempo (s)	98,62	71,73	35,72	43,48

Tabela 3.9: Média dos desvios percentuais.

Observa-se na tabela (3.9), que os métodos propostos por Li e Chen apresentam menor desvio percentual médio em relação a potência máxima atingida durante

o transiente, porém apresentam maiores desvios percentuais médios menor no tocante ao instante em que esse máximo de potência é atingido. Logo, conclui-se que os métodos de Li e Chen seriam recomendados para predizer a potência máxima atingida e embora com desvios ainda altos, o método proposto por Nahla seria recomendado (com ressalvas) para estimar o instante em que esse pico de potência ocorre.

Capítulo 4

Conclusão e Perspectivas futuras

Este trabalho foi conduzido com o objetivo central de apresentar uma avaliação das Equações da Cinética Pontual (ECP) com realimentação termo hidráulica por intermédio de uma demonstração didática de diferentes modelagens e do desenvolvimento de uma metodologia computacional para obtenção de um benchmark em linguagem de programação moderna (PYTON). A proposta da metodologia foi a de realizar uma análise comparativa de quatro métodos distintos de solução aproximada das ECPs. Nesse contexto, um transiente de inserção de reatividade foi considerado com o propósito de identificar a abordagem mais eficaz.

Em relação ao pico de potência atingido após o transiente postulado, os métodos propostos por Li e Chen apresentaram a menor média dos desvios percentuais (5,51%) em relação ao método numérico de referência. Já em relação ao instante em que esse pico de potência ocorre, o método proposto por Nahla tem maior precisão, com uma média dos desvios percentuais de 35,72% em relação ao Benchmark. Globalmente, ou seja, considerando ponto a ponto, o método proposto por Nahla foi o que apresentou maior concordância (menor desvio percentual médio) com o método numérico de referência, apesar de não ser um método de fácil implementação, uma vez que o tempo não é uma variável explícita na equação proposta, necessitando inversões numéricas inconvenientes com o que se espera de uma aproximação analítica.

Aprimoramentos na metodologia computacional e investigações adicionais podem contribuir, no futuro, para uma melhor compreensão dos fatores que influenciam a eficácia de cada metodologia apresentada nesta dissertação.

Referências Bibliográficas

- [1] NOJIMA, D. “ENERGIA NO PARANÁ: BREVE PANORAMA E INDICAÇÕES SOBRE A DEMANDA FUTURA”, *Revista Paranaense de Desenvolvimento - RPD*, v. 43, n. 143, fev 2023.
- [2] DUDENSTADT, J. J., HAMILTON, L. J. *Nuclear Reactor Analisys*. 1 ed. New York, USA, John Wiley & Sons, 1976.
- [3] PARREIRA, C. C. A., BOSCH NETO, J. C., CORRÊA, B. H. B. C. “Modelagem e simulação dinâmica de um reator nuclear por fissão: uma revisão”, *Engineering and Exact Sciences*, v. 7, n. 3, pp. 12184–01, sep 2021. doi: 10.18540/jcecvl7iss3pp12184-01-15e.
- [4] TUMELERO, F., DE VILHENA, M. T. M. B., LAPA, C. M. F. *Solução do problema da Cinética de Difusão de Nêutrons com representação analítica livre de rigidez geométrica cartesiana unidimensional*. Tese de doutorado, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2019.
- [5] LAMARSH, J. R., BARATTA, A. J. *Introduction to Nuclear Engineering*. 3 ed., New Jersey, USA, Prentice-Hall, 2001.
- [6] LI, H., CHEN, W., ZHANG, F., et al. “Approximate solutions of point kinetics equations with one delayed neutron group and temperature feedback during delayed supercritical process”, *Annals of Nuclear Energy*, v. 34, pp. 521–526, feb 2007. doi: 10.1016/j.anucene.2007.02.014.
- [7] PAGANIN, T., VILHENA, M. “On a point kinetic model for nuclear reactors considering the variation in fuel composition”, *Progress in Nuclear Energy*, v. 118, pp. 103134., feb 2020. doi: 10.1016/j.pnucene.2019.103134.
- [8] CHEN, W., GUO, L., ZHU, B., et al. “Accuracy of analytical methods for obtaining supercritical transients with temperature feedback”, *Progress in Nuclear Energy*, v. 49, n. 4, pp. 290–302, jan 2007. doi: 10.1016/j.pnucene.2007.01.004.

- [9] NAHLA., A. A. “An analytical solution for the point reactor kinetics equations with one group of delayed neutrons and the adiabatic feedback model”, *Progress in Nuclear Energy*, v. 51, pp. 124–428., jan 2009. doi: 10.1016/j.pnucene.2008.01.008.
- [10] PALMA, D. A. P., DA SILVA, A. C., GONÇALVES, A. D. C., et al. “AN ALTERNATIVE TECHNIQUE FOR THE IMPLEMENTATION OF AN ANALYTICAL APPROXIMATION FOR TRANSIENTS WITH TEMPERATURE FEEDBACK”. In: *Nuclear International Atlantic Conference*, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, oct 2009.
- [11] DA SILVA, M. W. *Uma representação analítica não rígida para a solução das equações de cinética pontual de nêutrons considerando retroalimentação de temperatura e uma extensão estocástica*. Tese de doutorado, UFRGS, Porto Alegre, RS, Brasil, 2017.
- [12] HETRICK, D. *Dynamics of Nuclear Reactors*. 2 ed. New York, USA, American Nuclear Society, 1993.
- [13] DINIZ, R. C. *Modelo de cinética inversa para o cálculo da reatividade de reatores a sal fundido*. Tese de doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2022.
- [14] ZHANG, F., CHEN, W.-Z., GUI, X.-W. “Analytic method study of point-reactor kinetic equation when cold start-up”, *Annals of Nuclear Energy*, v. 35, pp. 746–749, apr 2008. doi: 10.1016/j.anucene.2007.08.015.
- [15] DA SILVA, M. V. S. *Generalização da aproximação prompt-jump para solução das equações da cinética pontual a um grupo de precursores*. Mestrado em engenharia nuclear, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2019.
- [16] JR, W. M. S. *Modal Approximations: Theory and an Application to Fast-Reactor Physics*. 1 ed. Massachusetts, EUA, The MIT Press, 1967.
- [17] JOHNSON, M., LUCAS, S., TSVETKOV, P. “Modeling of Reactor Kinetics and Dynamics”, *Laboratório Nacional de Idaho (INL)*, , n. 41, sep 2010. doi: 10.2172/989898.
- [18] DINIZ, R. C. *Análise das Equações da Cinética Pontual para Reatores com Combustível Líquido Circulante*. Mestrado em engenharia nuclear, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2018.
- [19] PALMA, D. A. P. *Formulações analíticas para as funções de alargamento Doppler*. Tese de doutorado, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.

- [20] GLASSTONE, S., SESONSKE, A. *Nuclear Reactor Engineering*. 1 ed. , New York, USA, Springer New York, 1994.
- [21] GLASSTONE, S., SESONSKE, A. *Nuclear Reactor Engineering*. 2 ed. , New York, USA, Springer New York, 2012.
- [22] HETRICK, D. *Dynamics of Nuclear Reactors*. 1 ed. Chicago, USA, University of Chicago Press, 1971.
- [23] DE SOUZA SILVA, M. A. *SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DA CINÉTICA PONTUAL*. Trabalho de conclusão de curso, UECE, Iguatu, CE, Brasil, 2014.
- [24] DOTTO, J. O., FILHO, A. A. D. “Polinômio dos quadrados mínimos condicionado”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 28, n. 3, pp. 397–401, sep 2006. doi: 10.1590/S1806-11172006000300017.
- [25] BORES, C. H. D. P. “Ajuste polinomial para refinamento do resultado de segmentação de imagem para cálculo de volume de ovos. 2023. 63 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Sistemas de Informação) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2023”. jun 2023.
- [26] GONÇALVES, A. D. C. *Monitoração da Reatividade Através do Histórico da Potência Nuclear*. Mestrado em engenharia nuclear, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2006.
- [27] VALLE, K. N. F. “Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta. 2012. 40 f. Monografia (Especialização) - Programa de Pós-graduação em Matemática Para Professores Com Ênfase em Cálculo, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2022”. dec 2022.
- [28] DE LIMA STERZA, R., COSTACURTA BRANDI, A. . “Comparação entre métodos numéricos: Runge-Kutta de quarta ordem e previsor-corretor”, *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 7, pp. 12–22, dec 2016. doi: 10.21167/cqdvol7ermac201623169664rlsacb1222.
- [29] DE MESQUITA FILHO, J. “Métodos de Euler aperfeiçoado e modificado para solução de equações diferenciais ordinárias”, *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, v. 7, pp. 4–11, dec 2016. doi: 10.21167/cqdvol7ermacic201623169664blcacb0411.
- [30] BARROSO, L. C. E. A. *Cálculo numérico com aplicações*. 2 ed. São Paulo, Brasil, Harbra, 1987.

[31] DEVELOPER., A. “The Making of Python A Conversation with Guido van Rossum, Part I”. dec 2022.

Apêndice A

Código Python

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 import time
4 import math
5 import gc
6 from sympy import *
7
8 plt.rcParams["savefig.bbox"] = "tight"
9 plt.rcParams['figure.figsize'] = 13, 10
10
11 tempo_total = time.time()
12
13 #Parametros
14 alpha = 0.00005
15 k_c = 0.05
16 beta = 0.0065
17 lam = 0.07741
18 l = 0.0001
19 k = 2.0
20 rho0 = beta/k
21 T0 = 300.0
22 n0 = 10.0
23
24 t_0, t_n = (0.0, 140.0)
25 n_steps = 100001
26 t = np.linspace(t_0, t_n, n_steps)
27 h = t[1] - t[0]
28
29 C0 = (beta/(lam*l))*n0
```

```

30 sigma = math.sqrt(rho0**2 + 2*alpha*k_c*n0*(beta-rho0)/lam)
31 rho1 = math.sqrt(rho0**2 + 2*alpha*k_c*n0*(beta+lam*l)/lam)
32 A_Chen = math.sqrt((rho0-beta)**2+2*l*alpha*k_c*n0)
33
34 def runge_kutta_4( f, x0, t ):
35     """Método de Runge Kutta de 4ª ordem para resolver x' = f(x,t)
36     com x(t[0]) = x0.
37
38     Uso:
39
40     Entrada:
41
42         f      - função de x e t que representa dx/dt. No caso de
43         mais de uma dimensão, x pode ser
44
45         uma lista ou um array numpy, neste caso f
46         deverá ter a mesma dimensão de x.
47
48         x0     - condições iniciais. Especifica os valores de x
49         quando t=t[0]. Escalar ou uma lista/array numpy se
50
51         um sistema de equações estiver sendo
52         resolvido.
53
54         t      - lista ou array numpy de valores de t para os
55         quais as soluções são obtidas. t[0] é o ponto inicial e
56         h=t[i+1]-t[i] é o valor do passo h.
57
58     Saída:
59
60         x      - Array NumPy com as soluções correspondentes a
61         cada entrada de t. Se for um sistema, x será um array de arrays.
62
63         """
64
65
66     n = len( t )
67     x = np.array( [ x0 ] * n )
68     for i in range( n - 1 ):
69         h = t[i+1] - t[i]
70         k1 = h * f( x[i], t[i] )
71         k2 = h * f( x[i] + 0.5 * k1, t[i] + 0.5 * h )
72         k3 = h * f( x[i] + 0.5 * k2, t[i] + 0.5 * h )
73         k4 = h * f( x[i] + k3, t[i+1] )

```

```

64             x[i+1] = x[i] + ( k1 + 2.0 * ( k2 + k3 ) + k4 ) / 6.0
65         return x
66
67 #-----
68
69 def f(x,t):
70     vec=np.zeros(4)
71     vec[0]=(x[2]-beta)/l*x[0] + lam*x[1]
72     vec[1]=beta*x[0]/l - lam*x[1]
73     vec[2]=-alpha*k_c*x[0]
74     vec[3]=k_c*x[0]
75     return vec
76
77 # determina a expansão em série de Taylor simbolicamente
78 def Taylor_minha(sympy_function,x,x0,degree):
79     i = 0
80     taylor_exp = Integer(0)
81     while i <= degree:
82         taylor_exp = taylor_exp +
83         (diff(sympy_function,x,i).subs(x,x0))/(factorial(i))*(x-x0)**i
84         i += 1
85     return taylor_exp
86
87 def n_Li(x):
88     vec = np.zeros(len(x))
89     for i in range(len(x)):
90         vec[i] =
91             (lam/(2*alpha*k_c*(beta+lam*l)))*(rho0**2-(rho1*(rho1+rho0-(rho1-rho0)*\
92                         math.exp(rho1*lam*x[i]/beta+lam*l))/\
93             (rho1+rho0+(rho1-rho0)*math.exp(rho1*lam*x[i]/beta+lam*l)))**2) + n0
94     return vec
95
96 def n_Palma(x):
97     vec = np.zeros(len(x))
98     for i in range(0,len(x)):
99         vec[i] =
100            (lam/(2*alpha*k_c*(beta+lam*l)))*(rho0**2-((rho1+rho0-(rho1-rho0)*\
101                          math.exp((rho1*lam*x[i])/(beta+lam*l)))/(rho1+rho0+(rho1-rho0)*\
102                          math.exp((rho1*lam*x[i])/(beta+lam*l))))**2) + n0

```

```

100         return vec
101
102 def n_Chen(x):
103     vec = np.zeros(len(x))
104     for i in range(0,len(x)):
105         vec[i] =
106             (1/(2*alpha*k_c*l))*((rho0-beta)**2-(A_Chen*(A_Chen+\
107             (rho0-beta)-(A_Chen-(rho0-beta))*math.exp(A_Chen*x[i]/l))/\
108             (A_Chen+(rho0-beta)+(A_Chen-(rho0-beta))*\
109             math.exp(A_Chen*x[i]/l)))*2)+n0
110     return vec
111
112
113 fig1, ax = plt.subplots(1, 1)
114
115 tempo = time.time()
116
117 #Nahla
118 A=((3*beta**2+sigma**2)*rho0**2-beta*(7*beta**2+sigma**2)*rho0+5*\
119 beta**4+sigma**4-2*beta**2*sigma**2)/((sigma**2-beta**2)*(beta-rho0)**3)
120
121 rho = symbols('rho')
122
123 n_Nahla=(lam*(sigma**2-rho**2)/((2*alpha*k_c)*(beta-rho)))*(1+lam*l*(\
124 ((4*beta*(beta**2+sigma**2))/(beta**2-sigma**2)**2)*log((rho-beta)/(rho0-beta))\
125 -((2*beta)/(beta-sigma)**2)*log((rho-sigma)/(rho0-sigma))-((2*beta)/\
126 (beta+sigma)**2)*log((rho+sigma)/(rho0+sigma))+(((3*beta**2+sigma**2)*rho**2\
127 -beta*(7*beta**2+sigma**2)*rho+5*beta**4+sigma**4-2*beta**2*sigma**2\
128 )/((sigma**2-beta**2)*(beta-rho)**3))-A)/2)
129
130 t_Nahla=(1/(lam*sigma))*((beta-sigma)*log(rho-sigma)+(beta+sigma)*log(rho0+sigma)+\
131 (sigma-beta)*log(rho0-sigma)-(beta+sigma)*log(rho+sigma))
132
133 n_vec_Nahla = []
134 t_vec_Nahla = []
135 n_serie_Nahla = Taylor_minha(n_Nahla,rho,0.0,3)
136 t_serie_Nahla = Taylor_minha(t_Nahla,rho,0.0,3)
137

```

```

138 rho_vec_Nahla =
139     np.linspace(-float(sigma),float(sigma),n_steps,endpoint=False)
140
141 for i in range(n_steps):
142     n_vec_Nahla.append(n_serie_Nahla.subs(rho,rho_vec_Nahla[i]))
143     t_vec_Nahla.append(t_serie_Nahla.subs(rho,rho_vec_Nahla[i]))
144 #-----#
145 x0=[n0,C0,rho0,T0]
146
147 x = np.transpose(runge_kutta_4(f,x0,t))
148
149 tempo = time.time() - tempo
150
151 n_max_N = npamax(x[0])
152 indx_n_N = np.argmax(x[0])
153
154 print('\nComputation time = ' + ('%.2f' %tempo) + 's')
155
156 # Gráficos dos resultados
157
158 ax.plot(t, x[0], linestyle='dashed', label=r'$Numerical$')
159 ax.plot(t[indx_n_N], n_max_N, 'o',
160         label=r'$(%.2fs,%.2f)$' %(t[indx_n_N],n_max_N))
161 ax.plot(t, n_Li(t), linestyle='solid', label=r'$Li$')
162 ax.plot(t, n_Palma(t), linestyle='solid', label=r'$Palma$')
163 #ax.plot(t, n_Chen(t), linestyle='solid', label=r'$Chen$')
164 ax.plot(t_vec_Nahla, n_vec_Nahla, linestyle='solid', label=r'$Nahla$')
165 ax.legend()
166 ax.grid(True)
167 ax.set_xlim([t_0,t_n])
168 ax.set_ylim([0.0,(n_max_N+5.0)])
169 ax.set_xlabel(r'$t$')
170 ax.set_ylabel(r'$n(t)$')
171 ax.set_title(r'$Variation\; of\; power\; with\; time\; while\; \rho_0 ='
172               r'$\frac{\beta}{2}\; %k$')
173
174 print('\nDone!')
175
176 tempo_total = time.time() - tempo_total

```

```
176 print('\nComputation time = ' + ('%.2f' %(tempo_total/60)) + 'min')  
177  
178 plt.show()
```
