

Francisco Rogério Teixeira do Nascimento

CÁLCULO DE CAMPOS MAGNETOSTÁTICOS COM PRECISÃO UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação submetida ao programa de Pós
Graduação em Ciência e Tecnologia Nucleares
do Instituto de Engenharia Nuclear da Comissão
Nacional de Energia Nuclear como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do Grau
de Mestre em Ciências em Engenharia Nuclear –
Ênfase Acadêmico em Engenharia de Reatores.

Orientador: Prof. Reinaldo Jacques Jospin (PPGIEN/CNEN) e

Rio de Janeiro
2013

Cálculo de campos magnetostáticos com precisão,
com uso do Método dos Elementos Finitos / Francisco
Rogério Teixeira do Nascimento Rio de Janeiro:
CNEN/IEN, 2013.

99f. : il.. ; 32 cm.

Orientadores: Reinaldo Jacques Jospin
Dissertação (Mestrado em Engenharia de Reatores)
– Instituto de Engenharia Nuclear, PPGIEN, 2013.

Eletrromagnetismo, Guia de ondas, Método dos
Elementos Finitos, modos espúrios, Elemento finito
nodal e de aresta CDD.
CDU

CÁLCULO DE CAMPOS MAGNETOSTÁTICOS COM PRECISÃO UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Francisco Rogério Teixeira do Nascimento

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E
TECNOLOGIA NUCLEARES DO INSTITUTO DE ENGENHARIA NUCLEAR DA
COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA NUCLEAR – ÊNFASE ACADÊMICO EM ENGENHARIA DE
REATORES

Aprovada por:

Prof. Reinaldo Jacques Jospin, D.Sc.

Prof. Celso Marcelo Franklin Lapa, D.Sc.

Prof. Cláudio Márcio do Nascimento Abreu Pereira, D.Sc.

Prof. Antonio Carlos Ferreira, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
ABRIL DE 2013

Dedico esta dissertação a Deus, meus pais,
meus professores de graduação e mestrado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus professores de mestrado, em especial o professor Jospin pela sua paciência e dedicação na orientação desse trabalho. Agradeço também ao aluno de iniciação científica, Cristiano Teixeira, pela sua grande ajuda no entendimento de alguns conceitos envolvendo eletromagnetismo e remalhagem adaptativa. Por fim, agradeço ao IEN (CNEN), CAPES e aos meus familiares pelo apoio financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGIEN/CNEN como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

CÁLCULO DE CAMPOS MAGNETOSTÁTICOS COM PRECISÃO UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Francisco Rogério Teixeira do Nascimento

ABRIL de 2013

Orientadores: Prof. Reinaldo Jacques Jospin (PPGIEN/CNEN)

Programa: Ciência e Tecnologia Nucleares – IEN/CNEN

O objetivo principal deste trabalho é simular campos eletromagnéticos utilizando o Método dos Elementos Finitos. Mesmo nos casos mais acadêmicos de simulação numérica da eletrostática e da magnetostática dificuldades aparecem quando o elemento finito nodal é utilizado. A modelagem de campos vetoriais com funções escalares, principalmente em materiais heterogêneos, podem não apresentar os melhores resultados. Com o objetivo de resolver estes problemas, dois tipos de técnicas são experimentadas: o uso de remalhagem adaptativa para elementos finitos nodais e a utilização do elemento finito de aresta que assegura a continuidade dos componentes tangenciais. Na análise numérica são abordados alguns problemas eletromagnéticos simples tais como os guias de onda imersos em materiais homogêneos e heterogêneos, materiais ferromagnéticos submetidos a uma densidade de campo magnético constante ou ainda sujeitos a uma densidade de corrente. No caso dos guias de onda, os campos são discretizados utilizando o método dos elementos finitos nodais e de arestas enquanto nos outros utiliza-se unicamente o elemento nodal. Aborda-se também a possibilidade de utilização da remalhagem adaptativa baseada em vários indicadores de erro.

Palavras-chave: eletromagnetismo, guias de ondas, método dos elementos finitos, modos espúrios, elemento finito de aresta.

Abstract of dissertation submitted to PPGIEN/CNEN as part of the necessary requirements for obtaining of Master's degree of Science (M. Sc.)

Precise Magnetostatic Field using the Finite Element Method

Francisco Rogério Teixeira do Nascimento
April / 2013

Advisors: Prof. Reinaldo Jacques Jospin (PPGIEN/CNEN) e
Program: Ciência e Tecnologia Nucleares – IEN/CNEN

The main objective of this work is to simulate electromagnetic fields using the Finite Element Method. Even in the easiest case of electrostatic and magnetostatic numerical simulation some problems appear when the nodal finite element is used. It is difficult to model vector fields with scalar functions mainly in non-homogeneous materials. With the aim to solve these problems two types of techniques are tried: the adaptive remeshing using nodal elements and the edge finite element that ensure the continuity of tangential components. Some numerical analysis of simple electromagnetic problems with homogeneous and non-homogeneous materials are performed using first, the adaptive remeshing based in various error indicators and second, the numerical solution of waveguides using edge finite element.

Keywords: electromagnetism, wave guide, finite element method, spurious modes, edge finite element.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Divisão das equações de Maxwell de acordo com sua aplicação (A. Bastos, 2003).	24
Figura 2: Representação das partes que compõem o domínio Γ	26
Figura 3: Decomposição ortogonal do campo H.	31
Figura 4: Componentes transversais e longitudinais do campo E.....	61
Figura 5: Guia de onda retangular com a condição de contorno em y.	70
Figura 6: Quatro modos de vibração para caso TE com condição de contorno em Y....	71
Figura 7: Guia de onda retangular com a condição de contorno em x.	72
Figura 8: Quarto modos de vibração para caso TE com condição de contorno em X....	73
Figura 9: Guia de onda retangular heterogêneo.....	73
Figura 10: Potencial magnético A_z em 2D.	76
Figura 11: Fio quadrado Fio e condições de contorno.	77
Figura 12: Fio Potencial vetor magnético A (MEF).....	79
Figura 13: Potencial magnético A_z em 3D (Comsol).....	79
Figura 14: cubo homogêneo.....	81
Figura 15: Potencial Magnético Vetor para as formulações com e sem o termo de penalização de Coulomb.	82
Figura 16: Densidade de fluxo B_z ao longo da linha $y=z=0$ (vermelho e verde) e ao longo da linha $y=10[\text{mm}]$ e $z=0$ (azul) utilizando a formulação com penalização.	83
Figura 17: Densidade de fluxo B_z ao longo da linha $y=z=0$ (vermelho e verde) e ao longo da linha $y=10[\text{mm}]$ e $z=0$ (azul) utilizando a formulação sem penalização.	83
Figura 18: Densidade de fluxo B_z ao longo da linha $y=0$ e $z=0$. e ao longo da linha $y=10[\text{mm}]$ e $z=0$ obtidas por (Kuczmann, 2009).	84
Figura 19: Potencial vetor magnético na forma vetorial e de linhas de contorno	85
Figura 20: Densidade do fluxo magnético	85
Figura 21: um quarto do colimador.....	86
Figura 22: Discretizações em elementos finitos T4N para as malhas A, B e C respectivamente.	88
Figura 23: Potencial vetor magnético correspondente à malha C.	88
Figura 24: Representação de preenchimento de contorno para B_z com as malhas B e C	89
Figura 25: Elemento finito triangular.....	97
Figura 26: Elemento finito triangular de lado unitário em termos das coordenadas naturais ξ e η	98
Figura 27: Elemento finito triangular de aresta.....	99
Figura 28: Elemento finito retangular nodal.....	101
Figura 29: Elemento finito vetor retangular. (G. Pan, 2006)	102
Figura 30: Elemento finito retangular vetorial.....	102
Figura 31: Fluxo magnético médio em torno de um nó.	105
Figura 32: Representação das forças.	107
Figura 33: malha adaptativa para: 1-indicador de erro baseado na continuidade da densidade de fluxo e 2-indicador de erro baseado na continuidade da força magneto motriz.	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Frequência de corte para um guia de onda retangular no modo TE usando elemento finito nodal.	71
Tabela 2: Frequência de corte para um guia de onda retangular no modo TE usando elemento finito vetor.	72
Tabela 3: Frequência de corte para o modo LSM de guia de onda quadrado com $\beta = 10$	74
Tabela 4: Potencial vetor $A = (0, 0, A_z \times 10^2)$ usando elemento nodal triangular.	76
Tabela 5: Potencial vetor $A = (0, 0, A_z \times 10^2)$ usando elemento tetraédrico escalar e vetorial.....	78
Tabela 6: Condições de contorno de (Biro, 1989) para o cubo homogêneo	81
Tabela 7: Condições de contorno para o colimador.	87
Tabela 8: Comparação da densidade de fluxo magnético B_z	90

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GiD -- The Personal Pre And Post Processor

MEF -- Método dos Elementos Finitos

MEF(programa) -- Programa de cálculo de campos baseado no livro de Gouri Dhatt e Touzot

2D -- Bidimensional

3D -- Tridimensional

T3N -- Elemento finito triangular nodal

R4N -- Elemento finito retangular nodal

R4E -- Elemento finito retangular de aresta (“edge” ou vetorial)

IEN -- Instituto de Engenharia Nuclear

LAPACK -- Conjunto de rotinas para a resolução de problemas numéricos envolvendo álgebra linear (sistemas lineares, autovalores e autovetores, etc).

LISTA DE SÍMBOLOS

B	--	Densidade de fluxo magnético
H	--	Campo magnético
E	--	Campo elétrico
D	--	Densidade fluxo elétrico
μ	--	Permeabilidade magnética
σ	--	Condutividade elétrica
ϵ	--	Permissividade
J	--	Densidade de corrente
ρ	--	Densidade de carga elétrica
k_c	--	Frequência de corte
j	--	Unidade imaginária
ω	--	Frequência angular
ξ, η	--	Coordenadas naturais

k_0		Frequência de corte em Hertz
\mathbf{n}		Normal direcionada para o exterior do domínio
α_i	--	Representa a base dos elementos finitos
w_{im} e w_{in}	--	Representam a base vetorial dos elementos finitos
$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$	--	Componente tangencial do campo elétrico.
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0$	--	Componente normal do campo elétrico.
$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$	--	Componente tangencial do campo magnético.
$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$	--	Componente normal do campo magnético.
$E _{\Omega_{pce}} \approx 0$	--	Condição de perfeita condução elétrica no domínio Ω
$H _{\Omega_{pcm}} \approx 0$	--	Condição de perfeita condução magnética no domínio Ω
Γ_D	--	Parcela da fronteira onde a densidade de cargas é conhecida ou é imposta.
Γ_E	--	Parcela da fronteira onde o campo elétrico é conhecido ou é imposto.
T_E	--	Modo de vibração transversal elétrico

T_M -- Modo de vibração transversal magnético

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	17
1.2	OBJETIVO	19
1.3	CONTRIBUIÇÃO	20
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	21
2	ALGUNS CONCEITOS FUNDAMENTAIS	22
2.1	EQUAÇÕES DE MAXWELL	22
2.2	MODELO ELETROSTÁTICO	25
2.3	MODELO MAGNETOSTÁTICO	26
2.3.1	<i>Potenciais</i>	27
2.3.2	<i>Formulação potencial vetor e suas dificuldades</i>	27
2.3.3	<i>Formulação integral</i>	29
2.4	CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE	30
2.4.1	<i>Interior</i>	30
2.4.2	<i>Interfaces</i>	31
2.4.3	<i>Condição Externa</i>	32
2.5	PERFEITA CONDUÇÃO ELÉTRICA (PCE)	33
2.6	PERFEITA CONDUÇÃO MAGNÉTICA (PCM)	34
3	ELEMENTO FINITO	35
3.1	ELEMENTO FINITO NODAL	37
3.2	REMALHAGEM ADAPTATIVA	39
3.3	ELEMENTO FINITO VETORIAL	40
3.3.1	<i>Relação entre elementos nodais e elementos vetoriais</i>	43
3.3.2	<i>Elemento vetorial e suas dificuldades</i>	44
4	MAGNETOSTÁTICA	46
4.1	CAMPO MAGNETOSTÁTICO - POTENCIAL ESCALAR	46
4.2	CAMPO MAGNETOSTÁTICO - POTENCIAL VETOR	47
4.2.1	<i>Condição de Coulomb</i>	48
4.3	FORMA INTEGRAL - POTENCIAL ESCALAR	48
4.4	FORMA INTEGRAL - POTENCIAL VETOR	49
4.5	DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS	50
4.5.1	<i>Discretização de um potencial escalar</i>	50
4.5.2	<i>Discretização de um potencial vetor em 2D e 3D</i>	51
5	ONDAS ELETROMAGNÉTICAS	53
5.1	EQUAÇÃO DE ONDA	53
5.2	FORMULAÇÃO POTENCIAL ESCALAR	54
5.3	FORMULAÇÃO POTENCIAL VETOR	55
5.4	FORMULAÇÃO INTEGRAL-POTENCIAL ESCALAR	55
5.5	FORMULAÇÃO INTEGRAL – POTENCIAL VETOR	57
5.6	FORMULAÇÃO INTEGRAL-POTENCIAL VETOR DE 3 CAMPOS	59
5.6.1	<i>Constante de propagação nula ($\beta = 0$)</i>	60
5.6.2	<i>Constante de propagação não nula ($\beta \neq 0$)</i>	62
5.7	DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS	63
5.7.1	<i>Potencial Escalar</i>	64

5.7.2	Potencial Vetor.....	65
5.8	DISCRETIZAÇÃO EM E.F. COM TRÊS CAMPOS ($\beta \neq 0$)	66
5.9	DISCRETIZAÇÃO EM E.F. COM TRÊS CAMPOS ($\beta \neq 0$)	67
6	RESULTADOS NUMÉRICOS.....	69
6.1	GUIA DE ONDAS HOMOGÊNEO COM DOIS CAMPOS.	70
6.1.1	<i>Guia de onda retangular.....</i>	70
6.2	GUIA DE ONDAS HETEROGÊNEO COM TRÊS CAMPOS.....	73
6.3	FIO QUADRADO 2D	75
6.4	FIO QUADRADO 3D	77
6.5	CUBO EM UM CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÊNEO	80
6.6	COLIMADOR.....	85
	CONCLUSÃO	91
	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS	93
7	BIBLIOGRAFIA	94
8	ANEXOS A: DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTOS FINITOS	97
8.1	DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTOS TRIANGULARES NODAIS	97
8.1.1	<i>Discretização em termos de coordenadas naturais.....</i>	98
8.2	DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTO FINITO TRIANGULAR DE ARESTA	99
8.3	DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTO FINITO RETANGULAR NODAL	100
8.4	DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO ELEMENTO RETANGULAR DE ARESTA.....	102
9	ANEXO B: REMALHAGEM ADAPTATIVA.....	104
9.1.1	<i>Continuidade da densidade de fluxo magnético.....</i>	104
9.1.2	<i>Continuidade das segundas derivadas do potencial magnético</i>	105
9.1.3	<i>Continuidade na força magneto motriz</i>	107
9.1.4	<i>Observações:.....</i>	109

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Dentre as novas perspectivas para a geração de energia, a energia nuclear figura como uma das mais promissoras por ser uma fonte limpa e independente de sazonalidade. Nesse sentido muitos esforços estão sendo feitos para que os chamados reatores de quarta geração se tornem uma realidade. Entre esses reatores, figuram aqueles refrigerados a metais líquidos, bem como os reatores subcríticos. Esses últimos apontam para a possibilidade de que se tenham reatores com uma fonte externa de nêutrons ou seja, os nêutrons complementares necessários à fissão seriam produzidos através da utilização de um acelerador de partículas. Em comum, esses reatores têm o fato de utilizarem campos eletromagnéticos em parte dos seus equipamentos e portanto, vislumbra-se a necessidade de métodos numéricos apropriados para o cálculo preciso desses campos.

A busca por parte das ciências como um todo, em especial das engenharias, por métodos de cálculo que venham a fornecer resultados cada vez mais precisos, fez com que muitos métodos de cálculo numérico fossem desenvolvidos. Alguns já existentes foram aprimorados. Um exemplo disso é o método dos elementos finitos. Esse método, utilizado em aplicações de engenharia civil e mecânica, apresentava bom desempenho enquanto para outras nem tanto. Para aplicações em cálculo de campos eletromagnéticos os elementos finitos eram vistos com certa desconfiança, dada a sua dificuldade em modelar de forma satisfatória esses campos. Em especial, pode se citar as aplicações em problemas magnetostáticos em 3D devido à dificuldade de se satisfazer certas condições a serem mencionadas no decorrer da dissertação. As primeiras aplicações do método dos elementos finitos em eletromagnetismo remontam

aos anos 60 e versam sobre a modelagem dos guias de ondas em meios homogêneos. A partir dessa aplicação, tem início uma fase de muitas publicações sobre as várias possibilidades do MEF para a resolução de problemas de eletromagnetismo (P.Silvester,1969], em especial no estudo de guias de onda óticos. Por volta dos anos 80, o MEF se estabeleceu como a mais robusta ferramenta numérica para a resolução desses problemas. Para aplicações que envolviam anisotropia e/ou não homogeneidade transversal, a solução numérica apresentava problemas (P.Silvester,1980). Nessas aplicações, constatou-se o aparecimento de soluções não físicas, a qual se chamou de modos espúrios. Esses modos são resultado de uma inapropriada imposição da livre divergência (Konrad, 1976). Na tentativa de sanar esse problema, ocorreram muitos avanços, um dos quais resultou na criação do chamado elemento finito de aresta (edge). Esse elemento é um dos resultados dos trabalhos que tiveram início na metade da década de sessenta, com Fraeijs de Veubeke onde o mesmo juntamente com outros engenheiros propuseram a mistura de formulação (Arnold, 2009). A ideia era usar essa formulação em problemas de elasticidade, entretanto, os mesmos não obtiveram êxito. Já na década seguinte, Raviat e Thomas atacaram o problema mais simples para a formulação mista do laplaciano com essa mesma formulação e, inventaram os elementos de Raviat-Thomas. Na década de oitenta, as publicações dão continuidade a essa chamada ‘mistura de formulação’, com os trabalhos de: Nédélec, Brezz-Douglas-Marine e Bossavit. Em seu trabalho intitulado ‘Mixed Element are Whitney Form, Rediscovered’, Bossavit classifica os elementos de Raviat-Thomas e de Nédélec especialmente os de baixa ordem como elementos Whitney. Os elementos Whitney foram definidos em 1957 por Hassler Whitney no seu livro intitulado ‘Geometric Integration Theory’. De acordo com essa definição, as chamadas “formas Whitney” encontram aplicação em vários problemas de acordo com seu tipo. As formas Whitney tipo zero (elementos de Lagrange) são utilizados em problemas que envolvem cálculo de temperaturas e potenciais elétricos. As formas tipo dois, as quais vão ser tratadas neste trabalho, são utilizadas nos problemas que envolvem o cálculo de gradiente de temperatura e de campos elétricos e magnéticos. Além dessas formas citadas, existe ainda a forma do tipo três com suas respectivas aplicações.

1.2 OBJETIVO

O objetivo desse trabalho basicamente consiste em construir um arcabouço numérico eficiente para a solução de problemas eletrostáticos e magnetostáticos utilizando o método dos elementos finitos sejam eles os elementos nodais e ou os elementos de arestas. O primeiro elemento é amplamente conhecido na literatura e utilizado em diversas áreas e o segundo, talvez menos conhecido, mas que tem sua funcionalidade reconhecida na solução de problemas magnetostáticos 3D por satisfazer certas condições inerentes aos problemas magnetostáticos. Este arcabouço numérico será montado em um programa de elementos finitos desenvolvido no IEN e denominado MEF que tem por base o programa apresentado por (Batoz e Touzot, 1981). Dentro do âmbito das aplicações realizadas com o elemento de aresta (edge) ou forma Whitney tipo dois, consta nesse trabalho a solução já conhecida das frequências de corte de guias de ondas. O intuito dessas aplicações é de certificar a implementação desse elemento no seio do programa MEF através de soluções já bem conhecidas e divulgadas na literatura. Serão também abordados problemas homogêneos e não homogêneos de guias de ondas utilizando os elementos nodais e/ou elementos de arestas com o intuito de certificar a utilização simultânea desses elementos. Para os problemas envolvendo materiais magnéticos, dentre os quais estão os problemas magnetostáticos e os de circulação de correntes, utilizaremos unicamente o elemento finito nodal. A solução desses problemas é de grande interesse não só da área nuclear, mas das engenharias como um todo, devido a sua aplicação em ensaios não destrutivos, em bombas eletromagnéticas de circulação de metais líquidos utilizados em reatores rápidos, no confinamento do plasma em reatores de fusão, etc.... Com o intuito de tornar o cálculo do campo eletromagnético ainda mais preciso, o presente trabalho faz ainda um estudo comparativo de vários indicadores de erro para serem empregados em uma remalhagem adaptativa quando da utilização de elementos finitos nodais. O ganho em precisão provém do fato de o refinamento da malha se processar em regiões onde o erro é mais acentuado tendo por consequência uma homogeneização dos erros em todo domínio.

A adoção do elemento finito de aresta foi tomada em virtude da imposição da continuidade da componente tangencial dos campos magnéticos nas interfaces entre dois meios não homogêneos implicando em maior precisão dos resultados obtidos além de satisfazer a condição de divergência livre ao menos no subdomínio do elemento.

1.3 CONTRIBUIÇÃO

Do ponto de vista das aplicações em eletromagnetismo, a discussão de problemas estáticos pode ser considerada uma abordagem muito simplista dessas aplicações uma vez que em grande parte delas, os dispositivos eletro e eletrônicos em geral são compostos por partes móveis. Entretanto, um conhecimento mais aprofundado do comportamento numérico de tais problemas passa necessariamente pelo entendimento dos aspectos mais básicos. Nesse sentido, são abordados nesse trabalho problemas estáticos consideravelmente simples, que possibilitam uma discussão de alguns dos principais problemas em eletromagnetismo no que diz respeito à solução numérica. Dentro dessa proposta, foram implementadas no âmbito do programa MEF algumas funções especificadas a seguir tais como: a) desenvolvimento de uma estruturação de dados propícia à utilização de elementos finitos nodais ou de arestas, isto é, onde as conectividades dos elementos podem ser definidas tanto por nós quanto por arestas, b) introdução de subrotinas do Lapack para o cálculo dos autovalores e autovetores (frequência de corte) dos guias de ondas, c) implementação da possibilidade de utilização conjunta de elementos finitos nodais e de arestas para a solução das frequências de corte numa modelagem de 2 campos (transversal) ou 3 campos (transversal e longitudinal), d) implementação da matriz de penalização de Coulomb para resolver problemas magnetostáticos em 3D, e) implementação do cálculo da matriz de equações do sistema e do cálculo do vetor de densidade de corrente em trechos de geometria reta e/ou circular e finalmente, f) implementação do cálculo de indicadores de erro para a remalhagem adaptativa de elementos finitos nodais.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

No capítulo dois é feita uma breve explanação, de alguns dos principais conceitos envolvendo eletromagnetismo. Esses conceitos são relativos aos principais potenciais elétricos e magnéticos bem como suas propriedades.

No capítulo três são abordados os conceitos básicos de elementos finitos nodais e de arestas e a relação existente entre eles.

No capítulo quatro, são desenvolvidas as formas integrais escalares e vetoriais para um problema de obtenção das frequências de corte para os guias de onda retangular em meios homogêneos e heterogêneos. Aplica-se em seguida o método de Galerkin e o método dos elementos finitos nodais e de arestas.

No capítulo cinco, são desenvolvidas as formas integrais escalares e vetoriais para um problema de magnetostática. Aplica-se em seguida o método de Galerkin e o método dos elementos finitos nodais e de arestas.

No capítulo seis, são apresentados os resultados numéricos obtidos para os problemas de guias de ondas em meios homogêneos e heterogêneos utilizando na discretização, elementos finitos nodais e de arestas. Em seguida, são apresentados problemas clássicos da literatura em 2D e 3D utilizando uma solução numérica baseada no potencial vetor total e discretizados unicamente pelo elemento finito nodal.

2 ALGUNS CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 EQUAÇÕES DE MAXWELL

As equações de Maxwell podem ser apresentadas na sua forma diferencial por:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.4)$$

ou ainda na sua forma integral:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{\Gamma} \quad (2.5)$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{\Gamma} \quad (2.6)$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{\Gamma} = 0 \quad (2.7)$$

$$\oint_{\Gamma} D \cdot d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Omega \quad (2.8)$$

Para o caso em que esses campos estão em presença de matéria, as chamadas equações constitutivas devem ser adicionadas. Essas equações descrevem não só as relações entre os campos e a matéria, mas também as relações entre campos, propriamente ditos. Para o caso linear, essas equações são definidas abaixo:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{H} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \quad (2.11)$$

Para os casos em que as propriedades constitutivas são dependentes das direções, μ, σ e ε são definidos como tensores e os materiais são ditos anisotrópicos. Para os materiais anisotrópicos, as relações constitutivas são definidas pelas relações tensoriais abaixo:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}$$

onde: $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}$ sendo que

se $[\boldsymbol{\mu}]_{ij} = [\boldsymbol{\sigma}]_{ij} = [\boldsymbol{\varepsilon}]_{ij} = 0$ para $i \neq j$ recaímos no caso dos materiais ortotrópicos.

Existem ainda situações em que essas relações constitutivas dependem da frequência de excitação. Neste caso tem-se:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(f), \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(f), \text{ e } \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(f)$$

Para um caso mais geral, a indução magnética \mathbf{B} depende do campo magnético \mathbf{H} , da posição \mathbf{r} do ponto considerado dentro do material e da frequência f de excitação a qual o mesmo esteja exposto.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}\{\mathbf{H}, \mathbf{r}, f\}$$

Do ponto de vista das aplicações práticas, as equações de Maxwell ainda sofrem uma subdivisão de acordo com o esquema abaixo:

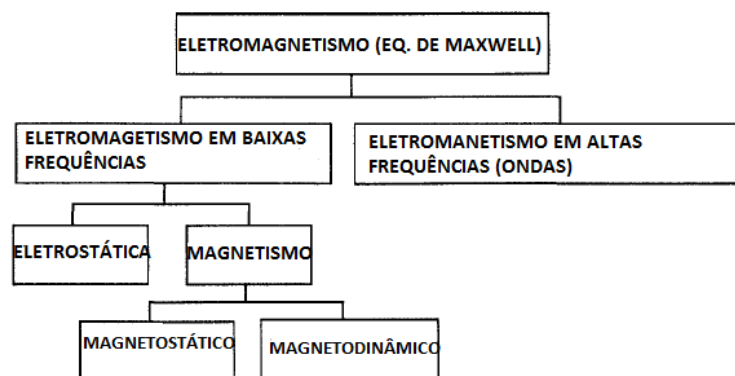


Figura 1: Divisão das equações de Maxwell de acordo com sua aplicação (A. Bastos, 2003).

Essa subdivisão permite melhor situar o problema que se deseja resolver e conseqüentemente, a escolha do método de cálculo mais adequado para a solução de um determinado tipo de problema.

Tudo na natureza varia com o tempo entretanto, o estudo e o conseqüente entendimento de problemas de ordem prática em eletromagnetismo encontram nos modelos estáticos e quase estáticos, entre outras coisas, uma forma de adquirir bases para o trato de um problema real. A maioria das questões físicas associadas à engenharia elétrica pode ser descritas como fenômenos quase estáticos. Nesse contexto, trataremos agora as formulações do eletromagnetismo independente do tempo onde os fenômenos elétricos e magnéticos podem ser desacoplados.

2.2 MODELO ELETROSTÁTICO

O modelo eletrostático consiste no estudo da distribuição espacial do campo elétrico \mathbf{E} devido a uma distribuição de cargas elétricas. Essa distribuição de cargas pode ser dada assumindo a condição de perfeita condução elétrica ou utilizando um potencial elétrico escalar. O modelo em questão, aplicado a um domínio de estudo Ω , e que seja limitado por uma fronteira Γ é caracterizado por: equações diferenciais, equações constitutivas ou leis materiais, e condições de fronteira (Gèrard,1998). Portanto, temos um típico problema de valor de contorno representado pelas equações abaixo:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{D} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{em} \quad \Omega$$

e onde $\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_D$ com as seguintes condições:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \Gamma_E,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_D$$

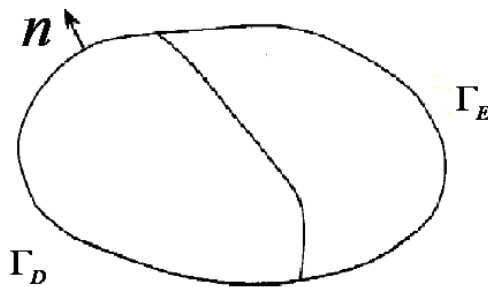


Figura 2: Representação das partes que compõem a fronteira Γ .

2.3 MODELO MAGNETOSTÁTICO

O modelo magnetostático aborda o estudo de fenômenos magnéticos em condições extraordinárias. Esse campo sendo invariante no tempo é resultado devido a uma imposição de uma densidade de corrente \mathbf{J} ou devido a um permanente magnético (resíduo remanescente de indução magnética \mathbf{B}). Então, da mesma forma explicitado anteriormente para o modelo eletrostático, esse modelo é descrito pelas equações diferenciais e constitutivas definidas no domínio Ω :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \text{ em } \Omega$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

e onde $\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_D$ com as seguintes condições:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad \text{em} \quad \Gamma_H,$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_B$$

2.3.1 Potenciais

Um dos passos para obter-se a solução numérica de problemas eletrostáticos ou magnetostáticos é a obtenção dos chamados potenciais, escalar e ou vetor. A introdução desses potenciais é equivalente a propor, sob certas condições, um campo admissível de solução para o problema de interesse. A escolha do potencial tem também implicações no custo computacional, pois é essa escolha que define entre outras coisas, os graus de liberdade a serem utilizados no problema bem como suas quantidades (Biró, 1991,1999), e (Trowbrige, 1978).

2.3.2 Formulação potencial vetor e suas dificuldades

Levando em conta a equação 2.3, e sendo $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, então existe um \mathbf{A} tal que:

$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, verifica a equação 2.3. Com um devido arranjo algébrico desse resultado na equação 2.1 chega-se a:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu \cdot \mathbf{J} \tag{2.12}$$

A solução da equação 2.12 em um domínio tridimensional tem sido fruto de muitas pesquisas nos últimos anos e é também uma das motivações para nossa pesquisa.

Esse tipo de equação apresenta um problema além daqueles inerentes às propriedades físicas dos campos. Esse problema reside na não unicidade de solução para o problema. Ou seja:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla f) = 0 \quad (\text{Jin, 2002}).$$

Temos portanto mais de um candidato à solução da equação. De outra forma, isso equivale a dizer que o fluxo não é afetado pela adição de um gradiente de uma função escalar. Na literatura são propostas várias formas de contornar esse problema. Uma dessa forma é a imposição do chamado termo de penalização de Coulomb. Esse processo consiste basicamente em impor, que $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Tal procedimento aplicado à equação 2.15 resulta em:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \mathbf{A})^2 = \mu \cdot \mathbf{J} \mathbf{A} \quad (2.13)$$

onde o segundo termo do lado esquerdo da equação 2.13, representa o termo de penalização de Coulomb. Para os problemas magnetostáticos em 2D, essa condição de Coulomb é automaticamente satisfeita quando o rotacional da equação original recai em um gradiente. Existem ainda os casos que são passíveis de serem simplificados ou seja, se pudermos fazer uma aproximação bidimensional para um problema tridimensional. Um exemplo desse tipo de análise é o caso de querermos calcular o campo magnético criado em torno de um fio infinito percorrido por uma corrente axial. Ou ainda quando se deseja calcular o campo elétrico produzidos nas linhas de transmissão. Em ambos os casos é encontrada simetria cilíndrica, que pode ser estudada no plano através das funções de Green. Desde que se tenha independência da componente longitudinal do campo em questão, este pode ser reduzido de 3D para 2D. Portanto, se considerarmos um potencial A da equação 2.13, aplicada ao problema do fio infinito, e com uma fonte de corrente que possua apenas a componente longitudinal em Z , tal que:

sendo ($A_x = 0$, $A_y = 0$, $A_z = A_z(x, y)$) e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ então:

$$B_x(x, y) = \frac{\partial A_z}{\partial y} \text{ e } B_y(x, y) = \frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

O divergente dessas componentes, B_x e B_y , é nulo desde que $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z(x, y)}{\partial z} = 0$

Sempre que for possível fazer esse tipo de redução, a solução numérica não apresenta problemas relacionados à unicidade ou seja, para os casos assimétricos bem como para os puramente planos. Para os outros casos que não possam ser simplificados como anteriormente descrito, temos problemas em verificar a condição de penalização. Portanto a nossa primeira dificuldade no trato com problemas magnetostáticos reside justamente na dificuldade em verificar certas condições (condição de penalização).

2.3.3 *Formulação integral*

Uma forma integral para o problema em questão pode ser apresentada de duas formas, uma escalar e outra vetorial. A primeira é dada por:

$$\int_{\Omega} \nabla w \cdot \mu \nabla V_m d\Omega - \oint_{\Gamma} w \mu \nabla V_m \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$$

onde V_m representa o potencial magnético escalar, w é uma função de ponderação.

Uma forma integral vetorial para o mesmo é dada por:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) \cdot (\nabla \times \mathbf{w}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{w} d\Omega = 0, \text{ para o caso 3D}$$

$$\text{e } \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} \cdot \nu \nabla \mathbf{A} dS - \oint_{\Gamma} w \nu \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dL = \int_{\Omega} \mathbf{w} \mathbf{J} dS, \text{ para o caso 2D}$$

onde \mathbf{A} representa um potencial magnético vetor, e \mathbf{W} uma função de ponderação

2.4 CONDIÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Para um caso mais geral, que não seja necessariamente estático, a modelagem de problemas de eletromagnetismo deve verificar certas condições de compatibilidade. Segundo Mur (1994), essas condições, que são consequência das equações dos campos, estão divididas em:

2.4.1 Interior

Aplicando o operador divergente nas equações 2.1 e 2.2 temos:

$$\nabla \cdot (-\nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) = \nabla \cdot \mathbf{J}^{imp}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) = -\nabla \cdot \mathbf{M}^{imp}$$

Com o intuito de dar maior clareza à exposição das próximas condições de compatibilidade, algumas considerações devem ser feitas. Estas são a respeito da decomposição ortogonal dos campos.

$\vec{H} = n \cdot \mathbf{H} + n \times \mathbf{H}$ onde H é um vetor qualquer e n um vetor unitário ortogonal à superfície que contém H .

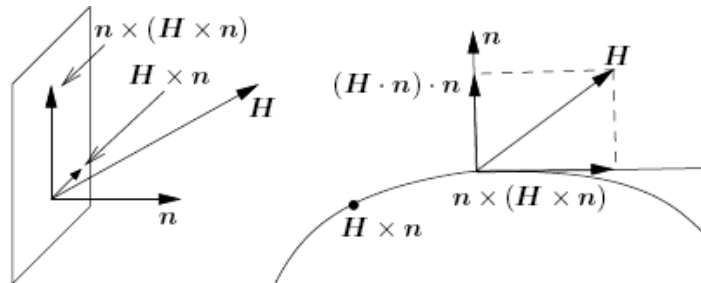


Figura 3: Decomposição ortogonal do campo H (Kuczmann, 2009).

Na figura (3), $n \cdot \mathbf{H}$ representa a componente normal do campo. Da mesma forma $n \times \mathbf{H}$ a componente tangencial. Essa decomposição será importante para o entendimento das próximas condições de compatibilidade. A utilização desta decomposição se justifica ainda pelo fato de que, para fins numéricos em eletromagnetismo, essas são relevantes.

2.4.2 Interfaces

Os campos não são contínuos com relação às coordenadas espaciais nas interfaces entre dois meios distintos. Para as componentes normais do campo elétrico e magnético respectivamente, as condições de continuidade nas interfaces entre dois materiais diferentes é dada por:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}^{imp}$$

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{imp}$$

onde o índice *imp*, que aparece juntamente com a densidade de corrente \mathbf{J} e com a magnetização \mathbf{M} , identifica as fontes que não dependem do campo. Estas fontes são também conhecidas como fontes primárias.

2.4.3 Condição Externa

Essa relação é encontrada quando estudamos o comportamento do campo nas proximidades externas ao domínio de interesse. Seja então \mathbf{E}^{ext} o campo elétrico imediatamente externo ao domínio. Da mesma forma \mathbf{H}^{ext} um campo magnético nas mesmas condições que \mathbf{E}^{ext} . Então, do exposto acima, e generalizado à representação das componentes tangenciais dos campos \mathbf{E} e \mathbf{H} , temos:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{ext} \text{ na fronteira } \Gamma_E$$

e da mesma forma:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{ext} \text{ na fronteira } \Gamma_H$$

sendo $\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_H$ e $\Gamma_E \cap \Gamma_H = \emptyset$. Com isso fica completo o conjunto de condições de compatibilidade.

2.5 PERFEITA CONDUÇÃO ELÉTRICA (PCE)

Seja Ω_{pce} denotando uma região com perfeita condução elétrica ($\sigma \approx \infty$) então da lei de Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ implica $\mathbf{E}|_{\Omega_{pce}} \approx 0$, desde que as correntes \mathbf{J} sejam limitadas. Então nós podemos assumir que:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_{pce}$$

Impondo essa condição a um problema de ondas, resulta que:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (2.14)$$

sendo $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}$, e levando em conta o exposto nas condições do item 2.4.2, podemos escrever:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{E}_2 \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = \nabla \times \mathbf{E}_2 \quad (2.16)$$

então, considerando a igualdade 2.16, temos que a continuidade da componente normal do campo magnético \mathbf{B} é assegurada pela componente tangencial do campo \mathbf{E} .

2.6 PERFEITA CONDUÇÃO MAGNÉTICA (PCM)

São considerados os materiais com alta permeabilidade, onde podemos assumir que o campo magnético $H|_{\Omega_{pcm}} \approx 0$. Então:

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{em } \partial\Omega_{pcm}$$

Da mesma forma que descrito anteriormente no item 2.5 chegamos à conclusão que a continuidade da componente normal \mathbf{D} do campo elétrico é assegurada pela componente tangencial do campo magnético \mathbf{H} .

Como visto, as condições de compatibilidade nada mais são que formas de limitar e simplificar o problema que se deseja resolver. Complementarmente as condições de perfeita condução elétrica e perfeita condução magnética também desempenham esse papel.

3 ELEMENTO FINITO

O método dos elementos finitos é uma das muitas ferramentas numéricas utilizadas para reduzir um problema de dimensão infinita para um problema de dimensão finita. Essa diminuição de dimensão do problema é realizada substituindo o domínio Ω por subdomínios Ω^e caracterizados por formas geométricas simples que satisfaçam a relação:

$$\Omega = \sum_{e=1}^{ne} \Omega^e$$

onde ne é o número de elementos e Ω^e corresponde ao domínio elementar

Nesse subdomínio são construídas funções de interpolação unitárias definidas para cada ponto e amplificadas por variáveis, no caso os valores dos campos, definidas também nos vértices da figura geométrica que define o subdomínio. Isto permite reduzir o número infinito de graus de liberdade do subdomínio para um número finito definido apenas nos vértices mas com uma variação pré-definida no interior do domínio dependendo da função de base utilizada. A discretização pode ser realizada tanto para a geometria quanto para os campos em questão. Uma forma apropriada para solução do problema eletrostático e magnetostático via discretização pelo método dos elementos finitos é obtida pela utilização da forma integral das equações de Maxwell. Esta forma pode ser obtida fazendo uso do método de Galerkin. Este método consiste em construir um par apropriado de espaços para as funções envolvidas no processo de discretização, ou seja, para uma dada função potencial ϕ_h deve-se ter uma base: $\{f_i\}_{i=1}^N$. Onde N representa o número de elementos dessa base. Então uma aproximação do campo escalar ϕ_h pode ser definida por:

$$\phi_h = \sum_{i=1}^n \phi_i f_i \quad (3.1)$$

onde ϕ_i é o vetor contendo os graus de liberdade a serem calculados, e n corresponde ao número de graus de liberdade.

Da mesma forma que anteriormente, um potencial vetor \mathbf{A} pode ser discretizado no domínio elementar Ω^e pela relação:

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j \mathbf{W}_j \quad (3.2)$$

onde \mathbf{a}_j representa um vetor contendo os graus de liberdade, e \mathbf{W}_j a base a ser utilizada na discretização.

Como exposto anteriormente, a utilização do método dos elementos finitos é composta por uma sequência de passos. Um desses passos consiste na escolha do tipo de elemento a ser utilizado. Nesse sentido, as possibilidades são muitas, pois existem várias classes e tipos de elementos. De acordo com os objetivos desse trabalho, vamos nos ater a apenas dois tipos de elementos, os nodais e os vetoriais. No decorrer desse trabalho se verá que os princípios de discretização com um ou outro elemento são basicamente os mesmos. Entretanto, com o intuito de mostrar as peculiaridades de cada um no que diz respeito à aplicação se faz necessária a divisão que se segue.

3.1 ELEMENTO FINITO NODAL

Uma função, seja escalar ou vetorial, pode ser representada como:

$$U_h = \sum_{i=1}^n \phi_i f_i \quad (3.3)$$

ou seja, o campo U_h é representado por uma combinação linear das funções de forma ou funções de interpolação, associadas com os nós e pelos valores assumidos pela mesma nos nós.

Onde:

f_i é a função de forma nodal correspondente ao nó i , e ϕ_i é o valor assumido pela função no nó i .

O índice n corresponde ao número de nós do elemento, o qual pode assumir os valores: três para elementos triangulares, quatro para retangulares etc. Nessa linha, caso consideremos uma função vetorial \mathbf{A} no espaço R^3 , cada nó do elemento considerado terá três graus de liberdade. Logo essa função pode ser aproximada como:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n A_i N_i = \sum_{i=1}^n (A_{xi} \vec{x} + A_{yi} \vec{y} + A_{zi} \vec{z}) N_i \quad (3.4)$$

onde, da mesma forma que anteriormente, tem-se respectivamente A_i o valor assumido pela função no nó i e N_i a função de forma nodal correspondente ao nó i .

Pelo exposto acima, vemos entre outras coisas que: os elementos que partilham o mesmo nó apresentam o mesmo valor para a função interpolada. Essa constatação levada à totalidade dos elementos que compõem um determinado domínio, permite concluir que se tem continuidade da função interpolada através das interfaces de todos os elementos que compõem a chamada malha de elementos. Caso levemos em conta apenas funções escalares não se terá grandes problemas em verificar essa continuidade. Por outro lado, em se tratando de funções vetoriais, essa propriedade não é simples assim de ser verificada. Isso fica mais claro ao se tomar como exemplo as restrições adotadas para a modelagem das condições de contorno onde essas restrições são impostas às componentes normais e ou tangenciais dos campos. Para tanto, as restrições físicas são transformadas em relações lineares entre as componentes cartesianas. De modo geral, a base nodal apresenta dificuldades em modelar de forma apropriada os potenciais vetores em especial em dois tipos de problemas: o primeiro quando se tem uma região constituída por um material de alta permeabilidade (ferro) e modelada com um potencial vetor, circunscrita por uma região de material com baixa permeabilidade (o ar) modelada com potencial escalar. Essa configuração de potenciais para essas regiões resulta em um cancelamento do potencial escalar na interface dos materiais. O fraco acoplamento de potenciais não é bom, uma vez que isso pode resultar em erros, devido à continuidade da componente normal de acordo com (Trowbrige,1978) e (Biró, 1999). O outro problema na utilização da base nodal é a dificuldade que esta base encontra em tratar geometrias complexas. Essa dificuldade é devida ao fato de que: em problemas onde estão presentes cantos e entrâncias, a componente tangencial do potencial vetor desaparece. Assim sendo, de acordo com (Biró, 1999), o potencial vetor descreve o mesmo campo em ambos os lados do canto ou entrância. Assim em vez de um alto valor como era esperado, no local em questão campo obtido com o rotacional no canto é zero.

Como foi descrito muitas são as dificuldades encontradas na resolução numérica de problemas de eletrostáticos magnetostáticos. Muitas também são as formas de tentar sanar esses problemas. Essas tentativas vão desde a utilização de potenciais modificados, passando então por uma mistura dos mesmos, bem como o uso da

remalhagem adaptativa. Associado a isso tudo, uma alternativa que também se mostra válida é aquela que aponta para o uso de elementos finitos modificados, ou seja, que possuam características diferentes do elemento finito nodal. Nessa linha temos como exemplo o chamado elemento finito de aresta (edge ou vetorial), o qual conta com certas propriedades que vão ao encontro de certas condições a serem satisfeitas em eletromagnetismo.

3.2 REMALHAGEM ADAPTATIVA

Foi descrito anteriormente que os elementos finitos nodais encontram dificuldade em satisfazer certas condições. Dentre as razões para essas dificuldades está o fato de que por questões computacionais, se utilizar rotineiramente funções de interpolação lineares, isto é, com funções de classe C^0 . Essas funções são contínuas, mas o mesmo não ocorre com suas derivadas. Para tentar mitigar esse problema, a remalhagem adaptativa é uma das possibilidades.

A remalhagem adaptativa é um processo no qual uma nova malha é gerada em todo o domínio na tentativa de que o erro envolvido no cálculo em questão seja homogeneizado e minimizado em todo o domínio. Para esse processo temos duas possibilidades; a primeira é reduzir o tamanho dos elementos (remalhagem em h) e a segunda é alterar a ordem das funções de interpolação (remalhagem em p). Levando em consideração o aspecto computacional envolvido, a remalhagem em p torna o custo computacional elevado e atribui complexidade à formação do sistema de equações. Além disto, esse processo não soluciona o problema de descontinuidade das derivadas entre elementos situados em meios distintos já que elas continuam sendo de ordem C^0 . Uma opção seria aumentar-se a quantidade de nós por elemento. Isso também envolve um aumento no custo computacional. Portanto, dentre esses métodos,

a remalragem em h se mostra como a mais apropriada, embora esta não exclua um aumento no custo computacional.

A implementação da remalragem adaptativa é baseada nos chamados indicadores de erro. Esses indicadores medirão a necessidade de um maior ou menor refinamento da malha. Na literatura são propostos diversos indicadores de erro, entretanto, no programa MEF só foram introduzidos os apresentados no anexo B (Cristiano T.Vieira, 2011).

3.3 ELEMENTO FINITO VETORIAL

Além da continuidade da componente tangencial, a base w_{ij} , do elemento finito de aresta é também livre divergente, isto é, satisfaz a equação $\nabla \cdot w_{ij} = 0$. Então a utilização desses elementos implica na satisfação automática da condição de penalização de Coulomb. Isso é verificado para os problemas anteriormente descritos bem como para problemas envolvendo guias de ondas. Em especial nesses últimos o elemento de arestas é bastante utilizado. Historicamente, a aplicação de elementos finitos em problemas de eletromagnetismo deu-se inicialmente na resolução de problemas envolvendo ondas óticas. A primeira aplicação do método dos elementos finitos em eletromagnetismo foi publicada por P. Silvester em 1969. Nessas primeiras aplicações verificou-se que elemento finito nodal tinha um bom desempenho em problemas imersos em meios homogêneos e/ou isotrópicos. Em meios heterogêneos e/ou anisotrópicos a solução encontrada vinha acompanhada do que se chamou de modos espúrios (soluções não físicas). Esses por sua vez, para os problemas de ondas, estão associados aos modos de vibração. Muitas publicações dessa época tentavam explicar a origem dos modos espúrios. Konrad foi o primeiro a resolver a equação de onda na forma vetorial em termos de $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ utilizando elementos finitos. Em sua tese de PhD (Konrad, 1974) propôs que os modos espúrios eram

causados pela natureza não solenoidal dos elementos finitos, ou seja devido à dificuldade destes em satisfazer a lei de Gauss. Dentro do mesmo ponto de vista, acreditava-se que esses modos eram devidos a não imposição da livre divergência nos problemas elétricos ou magnéticos. Isso se justificava, uma vez que os modos espúrios não apresentavam livre divergência. Outra maneira também utilizada para tentar sanar o problema em questão foi à imposição de um termo de penalização. Nesses métodos, as soluções espúrias são deslocadas para longe das soluções físicas, de forma a separá-las. Entretanto, esse método apresentava um problema: nem sempre o termo penalização adequado ao problema era fácil de ser encontrado. Por outro lado, a utilização do elemento vetor é bastante justificável, uma vez que esses contam com propriedades que vão ao encontro de alguns problemas em eletromagnetismo como será visto posteriormente. Uma representação estável para as funções de onda através de elementos finitos é possível (M.Hano, 1985). Para tanto, é proposto que as bases dos elementos finitos sejam expressas como gradientes de funções escalares. Entretanto, se levarmos em conta que o gradiente de algumas funções escalares é zero e que o operador da equação de onda é um rotacional e que a função vetorial $\nabla \times (\nabla \mathbf{A})$ é nula, dificuldades na solução podem aparecer. Em termos matemáticos, isto quer dizer que teremos, como geradores do núcleo do operador rotacional, vetores que não geram esse núcleo. Em termos físicos, especificamente para o caso das ondas, o resultado também não é apreciável. Nesse caso, os autovalores do espaço núcleo, que precisam ser nulos, são aumentados para valores diferentes de zero. Tem-se uma fonte de modos espúrios, uma vez que esse comportamento da aproximação interfere nas frequências resultantes da equação vetorial de onda (Z.Cendes, 1990).

Da mesma forma que anteriormente descrito para o elemento nodal, o elemento de aresta também possui uma base, nesse caso contudo, ela é composta por vetores. Então, uma base vetorial w_i aplicada para aproximar um potencial vetor \mathbf{A} resulta na seguinte representação para o potencial:

$$\mathbf{A} \approx \sum_{i=1}^n w_i A_i$$

onde w_i representa a função de forma corresponde não mais ao nó como anteriormente, mas à aresta i do elemento. Da mesma forma, A_i corresponde à integral de linha do potencial vetor ao longo da aresta i . Considerando as funções de forma vetoriais lineares, tem-se que:

$$\int_l w_i \cdot dl = \begin{cases} 1 & \text{ao longo da aresta } i \\ 0 & \text{ao longo das outras arestas} \end{cases} \quad (3.5)$$

Portanto, a integral em (3.5) é zero quando w_i e dl forem perpendiculares entre si. Para outros casos, tem-se que $|w_i| \cdot |dl| > 0$. Para a base w_i em questão, a principal propriedade desse elemento é apresentar continuidade da componente tangencial. Essa propriedade, caso aplicada a um potencial implicará no seguinte: para os casos 3D, w_i terá componente nula ao longo de cada uma das faces que não partilhem a aresta i . O mesmo é verificado para os casos 2D nos elementos que não partilham as mesmas arestas. Em adição, essa nova estrutura, trazida pelos elementos de aresta, fornece uma representação afim para os campos vetoriais, bem como para operações em domínios triangulares (Cendes, 1993). Nesse sentido, apresenta-se aqui os elementos finitos triangulares de aresta que tem a seguinte representação:

$$W_{ij} = l_i(L_i \nabla L_j - L_j \nabla L_i) \quad (3.6)$$

onde ij representa a aresta compreendida entre os nós i e j , L_i e L_j são as coordenadas baricêntricas do triângulo e l_i o comprimento da aresta i . O campo vetorial, de acordo com a decomposição acima descrita, pode ser escrito na forma:

$$A = \sum_{i=1}^m A_{ij} W_{ij} \quad (3.7)$$

onde m é o número de nós do elemento.

3.3.1 Relação entre elementos nodais e elementos vetoriais.

Levando em consideração uma das propriedades da base nodal exposta no anexo 8.1.1, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n N_j = 1$$

$$\sum_{j=1}^n \nabla N_j = 0$$

onde N_j é a base nodal, o gradiente da base nodal pode ser expresso pela seguinte relação:

$$\nabla N_j = \sum_{i=1}^m c_{ij} W_i, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.8)$$

onde W_i a base nodal, n é o número de nós e m o número de arestas do elemento.

Portanto, a quantidade máxima de gradientes linearmente independentes na base nodal é $n-1$. Aplicando-se o operador rotacional à equação 3.8 resulta:

$$\sum_{i=1}^m c_{ij} \nabla \times W_i = 0, \quad j = 1 \dots n-1$$

Assim, o número de rotacionais linearmente independentes produzidos pela base vetor é $m-1$. Isso implica que para a formulação não penalizada, o sistema resultante é singular.

3.3.2 Elemento vetorial e suas dificuldades.

Apesar de sua considerável aceitação bem como aplicabilidade, o elemento finito vetorial não é capaz de resolver toda a gama de problemas de eletromagnetismo de forma satisfatória.

Como dito anteriormente, este tipo de elemento impõe a continuidade da componente tangencial do campo enquanto que a componente normal fica livre para saltos. O fato de essa última componente ficar livre pode resultar em problemas, especialmente quando se faz necessária a continuidade da componente normal do campo. Um exemplo disso ocorre quando se deseja calcular o campo elétrico em um perfeito condutor elétrico localizado em uma singularidade. Nesse caso, nenhum elemento nodal ou de arestas simples é capaz de obter bons resultados de acordo com (J.P.Webb,1993). Outra característica apresentada por esse elemento é a baixa convergência em problemas magnetostáticos de circulação de corrente onde a convergência só é atingida para altas ordens polinomiais (Cendes, 1993). Esse comportamento pode ser evidenciado também em problemas magnetostáticos, não necessariamente de circulação de corrente, onde a convergência só é atingida quando se utiliza elementos de segunda ordem. Tal comportamento é devido à inconsistência do elemento de aresta para determinados graus de aproximação (Mur, 1985). Nesse sentido, a utilização de elementos tetraédricos de primeira ordem permite uma interpolação direta dos campos. Entretanto, esta aproximação quando aplicada aos campos, é de ordem zero ao longo das arestas dos elementos. Essas são apenas algumas das muitas dificuldades encontradas pelo elemento finito de aresta na modelagem dos campos. Um resumo completo dessas características pode ser encontrado em (Mur, 1998).

É possível constatar ainda, que o conjunto das limitações apresentadas pelo elemento de aresta interfere não só na capacidade deste em modelar certos problemas mas também, no seu desempenho comparado ao elemento nodal. Embora se deva

reconhecer sua eficácia na resolução de determinados problemas, o elemento de aresta representa apenas mais uma das ferramentas destinadas a melhorar a solução numérica em problemas de eletromagnetismo.

4 MAGNETOSTÁTICA

Com objetivo de resolver problemas magnetostáticos desenvolve-se a seguir as formas integrais, escalar e vetorial para o mesmo.

4.1 CAMPO MAGNETOSTÁTICO - POTENCIAL ESCALAR

A formulação do potencial escalar é usada quando as bobinas não estão presentes no domínio e portanto, a densidade de corrente \mathbf{J} não pode ser considerada nesse caso. Portanto, a equação 2.1 de Maxwell se reduz à:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

e o potencial escalar magnético V_m pode então ser definido por: $\mathbf{H} = -\nabla V_m$. Partido dessa igualdade, da equação de Maxwell 2.3 e da equação 4.1 resulta:

$$\nabla \cdot \mu \nabla V_m = 0 \quad (4.2)$$

Nesse caso não se considera uma densidade de corrente como geradora do campo, mais sim a força magneto-motriz (mmf) gerada por colimadores. Essa força é aplicada em alguns contornos do domínio como um potencial escalar magnético V_m (Bastos, 1996).

4.2 CAMPO MAGNETOSTÁTICO - POTENCIAL VETOR

Quando a densidade de corrente \mathbf{J} é considerada como uma fonte de campo magnético no domínio, a equação: $\mathbf{H} = -\nabla V_m$ não é mais válida. Neste caso, um potencial vetor magnético \mathbf{A} deve ser definido tal que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.3)$$

Da equação 2.1 de Maxwell e da relação constitutiva 2.9, a equação 4.3 toma a seguinte forma

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J} \quad (4.4)$$

onde $\nu = \frac{1}{\mu}$ é a relutância magnética. Da solução da equação 4.4 e da equação 4.3, a densidade de fluxo magnético \mathbf{B} pode ser obtida e portanto utilizando a equação constitutiva 2.9, o campo magnético \mathbf{H} também pode ser obtido. Para simulações em 2D em coordenadas cartesianas, a equação 4.4 se reduz a equação de Poisson:

$$\nabla \cdot \nu \nabla A_z = -J_z \quad (4.5)$$

onde as variáveis A_z e J_z são as componentes de \mathbf{A} e \mathbf{J} na direção z , isto é, normal ao plano da simulação 2D.

4.2.1 *Condição de Coulomb*

A solução numérica de problemas de potencial vetor como o problema descrito na equação 4.4 requer uma solução na qual o rotacional é aplicado duas vezes. Nessa equação, a solução almejada é o vetor de indução magnética \mathbf{B} , o qual é derivado do potencial vetor através da equação 4.3. Embora a solução de \mathbf{A} não seja única, isso não representa um problema, desde que o campo resultante \mathbf{B} seja único. Por outro lado, o fato de \mathbf{A} não ser único pode causar problemas de convergência na solução numérica das equações, quando o elemento finito nodal é usado para resolver o problema de potencial vetor. A condição de penalização dada pelo calibre de Coulomb (Coulomb, 1981) e apresentada na equação 4.6 abaixo, reforça a unicidade da solução de \mathbf{A} , conduzindo a solução do sistema de equações à convergência.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{4.6}$$

4.3 FORMA INTEGRAL - POTENCIAL ESCALAR

A formulação integral pode ser derivada usando o método dos resíduos ponderados ou a aproximação variacional. O método dos resíduos ponderados lida com equações diferenciais enquanto o método variacional lida equações de equilíbrio da energia as quais dão uma noção do fenômeno físico envolvido. Neste trabalho, se fará uso do método dos resíduos ponderados

Aplicando na equação 4.2 identidades vetoriais, utilizando o método de Galerkin dos resíduos ponderados para uma função de ponderação ϕ , e impondo as condições de contorno descritas no item 2.3, a forma integral para o potencial escalar assume a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \mu \nabla \hat{V}_m d\Omega - \oint_{\Gamma} \phi \mu \nabla \hat{V}_m \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (4.7)$$

Assim a equação 4.7 representa uma forma integral para o potencial escalar magnético.

4.4 FORMA INTEGRAL - POTENCIAL VETOR

Aplicando-se à equação 4.4 novamente as identidades vetoriais pode-se obter a forma integral do potencial vetor utilizando o método de Galerkin para esse problema:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\varphi} \right] d\Omega = 0, \quad \forall \Omega \quad (4.8)$$

onde $\boldsymbol{\varphi}$ é a função de ponderação.

Para os caso 2D em coordenadas cartesianas , a equação 4.8 pode ser reduzida à equação de Poisson (Bastos, 1996). Nesse caso, uma forma integral para a equação 4.5, seguindo o mesmo processo descrito para a equação 4.8, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nu \nabla A_z d\Omega - \oint_{\Gamma} \phi \nu \nabla A_z \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Omega} \phi J_z d\Omega \quad (4.9)$$

4.5 DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS.

O processo em questão é realizado pela substituição dos campos escalares ou vetoriais e das funções de ponderação pela discretização em elementos finitos, definida pela equação 8.5, na forma integral. Portanto, a discretização das formas integrais escalares e vetoriais inicialmente descritas, é feita nos moldes a seguir.

4.5.1 Discretização de um potencial escalar.

Considerando a utilização de elementos finitos, a discretização da equação 4.7 pela aproximação definida em 8.5 resulta na seguinte equação:

$$\sum_{m=1}^{ne} \int_{\Omega^e} \mu \nabla f_i \cdot \nabla f_j d\Omega^e - \sum_{m=1}^{ne} \oint_{\Gamma^e} f_i \mu \nabla f_j \cdot \mathbf{n} d\Gamma^e, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

onde ne é o número total de elementos finitos e n o número de nós do elemento. Essa equação pode ser expressa por um sistema de equações do tipo:

$$[\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\varphi}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.11)$$

onde:

$$[\mathbf{K}]_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \nabla f_i \cdot \nabla f_j d\Omega^e, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.12)$$

$$\{\mathbf{F}\}_i^e = \int_{\Gamma^e} f_i \mu \nabla f_j \cdot \mathbf{n}_j d\Gamma^e \quad , \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.13)$$

4.5.2 Discretização de um potencial vetor em 2D e 3D.

Para o caso 3D, como descrito na equação 4.8, a discretização do potencial vetor e da função de ponderação em elementos finitos nodais resulta na equação:

$$\sum_{m=1}^{ne} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\mu} (\nabla \times \mathbf{f}_i) \cdot (\nabla \times \mathbf{f}_j) d\Omega^e = \sum_{i=1}^{ne} \int_{\Gamma} \mathbf{f}_i J d\Gamma^e \quad , \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.14)$$

Da mesma forma descrita anteriormente, essa equação pode ser expressa por um sistema de equações do tipo:

$$[\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\phi}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.15)$$

onde:

$$[\mathbf{K}]_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{f}_i \cdot \nabla \times \mathbf{f}_j d\Omega^e \quad , \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.16)$$

$$\{\mathbf{F}\}_i^e = \int_{\Gamma^e} \mathbf{f}_i J d\Gamma^e \quad , \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

Para o caso 2D, como descrito na equação 4.9, a discretização do potencial vetor e da função de ponderação em elementos finitos nodais resulta na equação:

$$\sum_{m=1}^{ne} \int_{\Omega^e} (\nabla f_i) \cdot \nu (\nabla f_j) d\Omega^e = \sum_{i=1}^{ne} \int_{\Omega^e} f_i J d\Omega^e, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.18)$$

Da mesma forma descrita anteriormente, essa equação pode ser expressa por um sistema de equações do tipo:

$$[\mathbf{K}]\{\phi\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.19)$$

onde:

$$[\mathbf{K}]_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \nabla f_i \cdot \nu \nabla f_j d\Omega^e, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.20)$$

$$\{\mathbf{F}\}_i^e = \int_{\Omega^e} f_i J d\Omega^e, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.21)$$

5 ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

5.1 EQUAÇÃO DE ONDA

Com o objetivo de resolver problemas de campos eletromagnéticos oscilantes, e assumindo que os mesmos assim o façam em uma única velocidade angular (Kitho, 2001), define-se então um vetor \mathbf{A} que representa um campo eletromagnético. Assim, esse vetor pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)\}. \quad (5.1)$$

Estendendo essa mesma representação para os campos \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} e \mathbf{D} resultam:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)\} \quad (5.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\bar{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)\} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\bar{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)\} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)\} \quad (5.5)$$

Onde $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{B}}$, $\bar{\mathbf{H}}$ e $\bar{\mathbf{D}}$ são uma representação fasorial dos campos \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} e \mathbf{D} . Essa mesma representação nos possibilita escrever as equações de Maxwell como:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \quad (5.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} = j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} \quad (5.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.8)$$

$$\nabla \cdot \varepsilon_r \mathbf{E} = 0 \quad (5.9)$$

De posse dessas simplificações agora é possível desenvolver as equações de onda para os campos elétricos e magnéticos.

5.2 FORMULAÇÃO POTENCIAL ESCALAR

Aplicando o operador rotacional às equações 5.6 e 5.7 e utilizando a identidade vetorial: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ obtém-se as seguintes equações:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k_c^2 \mathbf{E} = 0 \quad (5.10)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k_c^2 \mathbf{H} = 0 \quad (5.11)$$

Tais equações representam, respectivamente, a equação de Helmholtz para os campos elétrico e magnético respectivamente nas quais o número de ondas é definido por: $k_c = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

5.3 FORMULAÇÃO POTENCIAL VETOR

Para solucionar o problema de um guia de ondas retangular homogêneo com dois campos faz-se necessária uma representação vetorial para este problema. Assim as equações 5.6 e 5.7 expressas em termos de rotacionais são:

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E} \right) = k_c^2 \epsilon_r \mathbf{E} \quad (5.12)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H} \right) = k_c^2 \mu_r \mathbf{H} \quad (5.13)$$

5.4 FORMULAÇÃO INTEGRAL-POTENCIAL ESCALAR

Considerando inicialmente o caso de um guia de ondas em 2D de formato retangular homogêneo e isotrópico, o fenômeno físico envolvido nesse tipo de aplicação pode ser descrito pela equação de Helmholtz que conduz à solução de um problema de autovalores e autovetores. Supondo então, uma formulação potencial escalar para equação que satisfaça a equação de Helmholtz e, considerando as equações 5.10 e 5.11, pode-se reescrever de maneira genérica que:

$$\nabla_t^2 \psi + k_c^2 \psi = 0 \quad (5.14)$$

onde k_c representa o número de ondas, e $\nabla_t = \partial_x \bar{x} + \partial_x \bar{y}$ é uma representação alternativa para o operador gradiente.

Para possibilitar a solução numérica aproximada da equação diferencial 5.14 via o método dos elementos finitos, deve-se encontrar uma forma integral para representá-la. Uma das formas é utilizar o chamado método dos resíduos ponderados de Galerkin, Portanto, aplicando esse método ao problema em questão e utilizando uma função de ponderação T_s resulta:

$$\int_{\Omega} T_s (\nabla_t^2 \psi + k_c^2 \psi) d\Omega = 0 \quad (5.15)$$

Utilizando-se as identidades vetoriais:

$$\nabla_t \cdot [T_s \nabla_t \psi] = \nabla_t T_s \cdot \nabla_t \psi + T_s (\nabla_t \cdot \nabla_t \psi) \quad (5.16)$$

$$\int_{\Omega} \nabla_t \cdot \nabla_t \psi d\Omega = \int_{\Gamma} \nabla_t \psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.17)$$

onde \mathbf{n} é um vetor unitário normal à fronteira Γ então, a equação 5.15 pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} (\nabla_t T_s \cdot \nabla_t \psi) d\Omega - k_c^2 \int_{\Omega} T_s \psi d\Omega = \int_{\Gamma} T_s \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Gamma \quad (5.18)$$

onde $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ é a derivada de ψ , normal à fronteira Γ . Então pela condição de perfeita condução elétrica (PCE) se têm-se duas possibilidades de condições de contorno: a primeira se refere ao caso transversal magnético (TM) e a segunda ao caso transversal elétrico (TE). No caso TM, o termo T_s desaparece na fronteira Γ e no caso TE, o termo $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ desaparece na fronteira Γ . Portanto, tanto para o cálculo de TM quanto para o de TE, o termo do lado direito da equação 5.18 desaparece, e essa se reduz á:

$$\int_{\Omega} (\nabla_r T_s \cdot \nabla_r \psi) d\Omega = k_c^2 \int_{\Gamma} T_s \psi d\Gamma \quad (5.19)$$

O fato de a parcela do lado direito desaparecer nos casos TM e TE, está associado às condições de fronteira homogêneas (C.J.Reddy, 1994). Ou seja, essa parcela se anula devido ao fato de se impor a condição de fronteira homogênea de Dirichlet à derivada da função potencial ψ , que seja normal a fronteira em TE. Da mesma forma, ela também se anula devido ao fato de se impor a condição de fronteira homogênea de Neuman à função de ponderação T_s em TM.

5.5 FORMULAÇÃO INTEGRAL – POTENCIAL VETOR

Considerando ainda, o caso de um guia de ondas 2D homogêneo e isotrópico, o desenvolvimento da formulação integral potencial vetor inicia-se com as equações 5.12 e 5.13. A equação 5.12 representa a formulação potencial vetor para o modo de vibração TE enquanto que a equação 5.13 representa a mesma formulação para o modo de vibração TM. Assim sendo, tomando como exemplo o modo TE e buscando a forma integral para a equação 5.12 chega-se a:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{T}_t \cdot \left[\nabla_r \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla \times \mathbf{E}_t \right) - k_c^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_t \right]] d\Omega = 0 \quad (5.20)$$

Onde \mathbf{T}_t é a função de ponderação. Convenciona-se ainda, que \mathbf{E}_t é a parte transversal do campo elétrico e é igual a: $\mathbf{E}_t = \vec{x}E_x + \vec{y}E_y$.

Por fim, aplicando-se na equação 5.20 a identidade vetorial e as condições de contorno apresentadas abaixo:

$$\mathbf{T}_t \cdot (\nabla_t \times \mathbf{A}) = (\nabla_t \times \mathbf{T}_t) \cdot \mathbf{A} - \nabla_t \cdot (\mathbf{T}_t \times \mathbf{A}) \quad (5.21)$$

$$-\mathbf{T}_t \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) = (\mathbf{T}_t \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \quad (5.22)$$

$$\int \nabla_t \cdot (\mathbf{T}_t \times \mathbf{A}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_t \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (5.23)$$

resulta:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t \times \mathbf{T}_t) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) d\Omega = k_c^2 \epsilon_r \int_{\Omega} \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{E}_t d\Omega \quad (5.24)$$

O mesmo procedimento utilizado acima para o campo TE pode ser aplicado para o caso do campo TM encontrando-se uma equação semelhante para o campo magnético, dada por:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\epsilon_r} (\nabla_t \times \mathbf{T}_t) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{H}_t) d\Omega = k_c^2 \mu_r \int_{\Omega} \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{H}_t d\Omega \quad (5.25)$$

onde $\mathbf{H}_t = \vec{x}H_x + \vec{y}H_y$

5.6 FORMULAÇÃO INTEGRAL-POTENCIAL VETOR DE 3 CAMPOS

A caracterização de um guia de ondas não homogêneo necessita de uma formulação matemática que inclua mais de uma componente do campo. Portanto, para que se possa fazer aplicações desse tipo de guia de ondas, faz-se necessário o desenvolvimento uma discretização com três campos.

As soluções para as frequências de corte dos guias de ondas apresentadas até então, levavam em consideração apenas as componentes transversais dos campos. Tal simplificação foi feita supondo que a constante de propagação β da onda é nula. Para o desenvolvimento da discretização proposta, deve-se considerar inicialmente a igualdade apresentada a seguir:

$$\nabla = \vec{x}\partial_x + \vec{y}\partial_y + \vec{z}\partial_z = \nabla_t + \vec{z}\partial_z = \nabla_t - j\beta\vec{z} \quad (5.26)$$

que é uma representação alternativa para o operador gradiente.

Considera-se ainda, que um campo vetorial qualquer possa ser decomposto em três componentes, duas transversais e uma outra longitudinal conforme a equação a seguir:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_t - V_z \vec{z} \quad (5.27)$$

Partindo desse rearranjo de componentes, podemos então generalizar e reescrever os campos de interesse (\mathbf{H} e \mathbf{E}), da mesma forma. Assim temos: para o campo \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t - E_z \vec{z} \quad (5.28)$$

e para o campo \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_t - H_z \vec{z} \quad (5.29)$$

5.6.1 Constante de propagação nula ($\beta = 0$)

Substituindo as equações 5.28 e 5.29 nas equações 5.24 e 5.25 respectivamente e utilizando ainda a equação 5.26 em ambas, o problema das frequências de corte para o caso elétrico toma a seguinte forma:

$$\nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{E}_t \right) - k_c^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_t = 0, \quad \text{para a componente transversal de } \mathbf{E}.$$

$$\nabla_t \cdot \frac{1}{\mu_r} \nabla_t E_z + k_c^2 \varepsilon_r E_z = 0, \quad \text{para a componente longitudinal de } \mathbf{E},$$

enquanto que, para o problema das frequências de corte para o caso magnético, as seguintes equações são válidas:

$$\nabla_t \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla_t \times \mathbf{H}_t \right) - k_c^2 \mu_r \mathbf{H}_t = 0, \quad \text{para a componente transversal de } \mathbf{H},$$

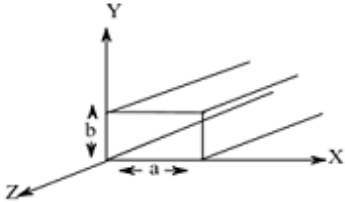
$$\nabla_t \cdot \frac{1}{\varepsilon_r} \nabla_t H_z + k_c^2 \mu_r H_z = 0, \quad \text{para a componente longitudinal de } \mathbf{H},$$

Com o objetivo de obter uma solução numérica aproximada através dos elementos finitos, utiliza-se uma formulação integral e o método de Galerkin. De acordo com esse último, deve-se ter para a função de ponderação o mesmo tipo de função

utilizada para os campos propriamente ditos. Ou seja, a função \mathbf{T} de ponderação, para o problema em questão deve ser da forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_t - T_z \bar{z}$$

Assim, uma discretização das componentes transversais e longitudinais dos campos pode ser representada de forma esquemática como na figura abaixo.



$$\mathbf{E}_z = \sum_{i=1}^4 e_{zi} \alpha_i$$

$$\mathbf{E}_t = \sum_{m=1}^4 e_{tm} w_{tm}$$

Figura 4: Componentes transversais e longitudinais do campo E.

onde campo E_z representa a discretização da componente longitudinal do campo com uma base nodal. Da mesma forma, \mathbf{E}_t representa a discretização das componentes transversais do campo elétrico utilizando uma base vetor. Portanto, considerando a decomposição anteriormente descrita para os campos, uma forma integral para essa equação pode ser dada por:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t \times \mathbf{T}_t) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) d\Omega = k_c^2 \epsilon_r \int_{\Omega} \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{E}_t d\Omega \quad (5.30)$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t T_z \cdot \nabla_t E_z) d\Omega = k_c^2 \epsilon_r \int_{\Omega} T_z \cdot E_z d\Omega \quad (5.31)$$

Do mesmo modo anteriormente descrito, o problema de frequências de corte para o caso de um campo magnetostático resulta em:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t \times \mathbf{T}_t) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{H}_t) d\Omega = k_c^2 \varepsilon_r \int_{\Omega} \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{H}_t d\Omega \quad (5.32)$$

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_r} (\nabla_t T_z \cdot \nabla_t H_z) d\Omega = k_c^2 \varepsilon_r \int_{\Omega} T_z \cdot H_z d\Omega \quad (5.33)$$

5.6.2 Constante de propagação não nula ($\beta \neq 0$)

Para a formulação integral há a possibilidade ainda de se desenvolver a discretização do potencial vetor com três campos, Nesta hipótese, considera-se que necessariamente a constante de propagação β seja diferente de zero ou seja, para um dado valor de β , o objetivo é se calcular k_0 .

Substituindo as equações 5.28 e 5.29 nas equações 5.24 e 5.25 respectivamente e utilizando ainda a equação 5.26 com $\beta \neq 0$ em ambas, o problema de frequência de corte para o caso elétrico pode ser expresso da seguinte forma:

$$\nabla_t \times \left(\frac{1}{\mu_r} \nabla_t \times \mathbf{E}_t \right) - \frac{1}{\mu_r} (j\beta \nabla_t E_z - \beta^2 \mathbf{E}_t) = k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E}_t, \quad \text{para a componente transversal de E.}$$

$$-\frac{1}{\mu_r} [\nabla_t \cdot (\nabla_t E_z + j\beta \mathbf{E}_t)] = k_0^2 \varepsilon_r E_z, \quad \text{para a componente longitudinal de E.}$$

e para o problema das frequências de corte no caso magnético obtém-se as equações:

$$\nabla_t \times \left(\frac{1}{\varepsilon_r} \nabla_t \times \mathbf{H}_t \right) - \frac{1}{\varepsilon_r} (j\beta \nabla_t H_z - \beta^2 \mathbf{H}_t) = k_0^2 \mu_r \mathbf{H}_t, \quad \text{para a componente transversal de H}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_r} [\nabla_t \cdot (\nabla_t H_z + j\beta \mathbf{H}_t)] = k_0^2 \mu_r H_z, \quad \text{para componente longitudinal de H}$$

e novamente, utilizando o método de Galerkin juntamente com algumas identidades vetoriais bem como com as condições de contorno, chega-se as seguintes equações para o caso elétrico:

$$\frac{1}{\mu_r} \int_{\Omega^e} [(\nabla_t \times \mathbf{T}_t) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) + (\beta^2 \mathbf{T}_t \cdot \nabla_t E_z + \beta^2 \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{E}_t)] d\Omega^e = k_0^2 \varepsilon_r \int_{\Omega^e} \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{E}_t d\Omega^e$$

$$\frac{\beta^2}{\mu_r} \int_{\Omega^e} (\nabla_t T_z \cdot \nabla_t E_z + \nabla_t T_z \cdot \mathbf{E}_t) d\Omega^e = k_0^2 \beta^2 \varepsilon_r \int_{\Omega^e} T_z E_z d\Omega^e$$

e para o caso magnético resulta:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} \int_{\Omega^e} [(\nabla_t \times \mathbf{T}_t) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{H}_t) + (\beta^2 \mathbf{T}_t \cdot \nabla_t H_z + \beta^2 \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{H}_t)] d\Omega^e = k_0^2 \mu_r \int_{\Omega^e} \mathbf{T}_t \cdot \mathbf{H}_t d\Omega^e$$

$$\frac{\beta^2}{\varepsilon_r} \int_{\Omega^e} (\nabla_t T_z \cdot \nabla_t H_z + \nabla_t T_z \cdot \mathbf{H}_t) d\Omega^e = k_0^2 \beta^2 \mu_r \int_{\Omega^e} T_z H_z d\Omega^e$$

5.7 DISCRETIZAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS

Para o processo de discretização em elementos finitos, apresentaremos a seguir a discretização na base nodal e na base vetorial para as variáveis escalares e vetoriais. Assim sendo, uma discretização por meio destas bases, de acordo com o anexo do capítulo 8, é dada por:

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \phi_i f \quad \text{para a variável escalar e} \quad (5.34)$$

onde n é o número de nós do elemento finito nodal e

$$\mathbf{A}(x, y) = \sum_{i=1}^m \mathbf{a}_i \mathbf{W}_i \quad \text{para a variável vetorial} \quad (5.35)$$

onde m é o número de arestas do elemento finito de aresta.

5.7.1 Potencial Escalar

A equação 5.19, que representa a formulação potencial escalar, pode ser discretizada tanto para o campo escalar quanto para a função de ponderação. Utilizando-se a relação 5.34 obtém-se as seguintes equações:

$$\sum_{e=1}^{ne} \phi_i \int_{\Omega^e} (\nabla f_j \cdot \nabla f_i) d\Omega^e = k_c^2 \sum_{i=1}^n \phi_i \int_{\Omega^e} f_i f_j d\Omega^e, \quad i, j = 1, \dots, n \quad (5.36)$$

Onde n é o número de nós do elemento finito nodal e NE é o número tal de elementos nodais resultado da discretização. Considerando-se que o domínio Ω é composto pela união de todos os subdomínios Ω^e base dos elementos finitos, a equação 5.37 pode ser reescrita na forma matricial e no sistema global por:

$$[\mathbf{S}][\boldsymbol{\varphi}] = k_c^2 [\mathbf{T}][\boldsymbol{\varphi}] \quad (5.37)$$

onde o vetor $[\boldsymbol{\varphi}]$ reúne todos os graus de liberdade definidos no domínio, $[\mathbf{S}]$ e $[\mathbf{T}]$ são as matrizes globais resultantes da inserção das matrizes elementares correspondentes e k_c^2 o autovetor que fornece as frequências de corte dos guias de ondas. As matrizes elementares são definidas á partir de:

$$[\mathbf{S}]_{ij}^e = \int_{\Omega^e} (\nabla f_j \cdot \nabla f_i) d\Omega^e$$

$$[T]_{ij}^e = \int_{\Omega^e} f_i f_j d\Omega^e$$

5.7.2 Potencial Vetor

A discretização da formulação potencial vetor para o caso elétrico ou magnético é obtida pela substituição da equação 5.35 do campo vetorial discretizado em um domínio elementar Ω^e nas equações 5.24 e 5.25 respectivamente. Tal procedimento aplicado para o caso magnético resulta numa equação da forma:

$$\sum_{e=1}^{ne} e_{t_i} \int_{\Omega^e} \frac{1}{\epsilon_r} (\nabla_t \times \mathbf{W}_{t_i}) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{W}_{t_j}) d\Omega^e = k_c^2 \mu_r \sum_{i=1}^n e_{t_i} \int_{\Omega^e} \mathbf{W}_{t_i} \cdot \mathbf{W}_{t_j} d\Omega^e \quad j \quad (5.38)$$

Da mesma forma que anteriormente a equação 5.35, resulta num sistema matricial do tipo:

de matrizes dado por:

$$[\mathbf{S}][\mathbf{e}_t] = k_c^2 [\mathbf{T}][\mathbf{e}_t] \quad (5.39)$$

onde as matrizes elementares são definidas por:

$$[\mathbf{S}]_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \frac{1}{\epsilon_r} (\nabla_t \times \mathbf{W}_{t_i}) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{W}_{t_j}) d\Omega^e \quad (5.40)$$

$$[T]_{ij}^e = \mu_r \int_{\Omega} (\mathbf{W}_{ti} \cdot \mathbf{W}_{tj}) d\Omega \quad (5.41)$$

5.8 DISCRETIZAÇÃO EM E.F. COM TRÊS CAMPOS ($\beta \neq 0$)

Discretizando as equações 5.32 e 5.33 da mesma forma explicitada anteriormente, obtém-se uma formulação em elementos finitos, dada pelas equações abaixo:

$$\sum_{e=1}^{ne} \frac{1}{\mu_r} \int_{\Omega^e} (\nabla_t \times W_m) \cdot (\nabla_t \times W_n) d\Omega^e e_{tm} = k_c^2 \epsilon_r \sum_{m=1}^{ne} \int_{\Omega^e} W_m \cdot W_n d\Omega^e e_{tm} \quad (5.42)$$

$$\frac{1}{\mu_r} \sum_{i=1}^{ne} e_{zi} \int_{\Omega^e} (\nabla_t \alpha_i \cdot \nabla_t \alpha_j) d\Omega^e = k_c^2 \epsilon_r \sum_{i=1}^4 e_{zi} \int_{\Omega^e} (\alpha_i \cdot \alpha_j) d\Omega^e \quad (5.43)$$

onde $n, m = 1, \dots, na$, na é número de arestas do elemento finito de arestas, $i, j = 1, \dots, n$ e n é o número de nós do elemento finito nodal.

O sistema de equações a ser resolvido é dependente agora de 3 campos. Assim, podemos escrever as equações 5.42 e 5.43 da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = k_c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

onde:

$$[\mathbf{S}_t]_{mm}^e = \frac{1}{\mu_r} \int_{\Omega^e} (\nabla_t \times \mathbf{W}_{tm}) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{W}_{tm}) d\Omega^e$$

$$[\mathbf{S}_z]_{ij}^e = \frac{1}{\mu_r} \int_{\Omega^e} (\nabla_t f_i \cdot \nabla_t f_j) d\Omega^e$$

$$[\mathbf{T}_t]_{mm}^e = \varepsilon_r \int_{\Omega^e} (\mathbf{W}_{tm} \cdot \mathbf{W}_{tm}) d\Omega^e$$

$$[\mathbf{T}_z]_{ij}^e = \varepsilon_r \int_{\Omega^e} (f_i \cdot f_j) d\Omega^e$$

e W_m representa a função de interpolação na base vetorial e_t e f_i a função na base nodal e_z . Portanto a matriz global pode ser representada como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = k_c^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_t & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

5.9 DISCRETIZAÇÃO EM E.F. COM TRÊS CAMPOS ($\beta \neq 0$)

Utilizando os mesmos procedimentos utilizados anteriormente e levando em consideração que:

$$\mathbf{H}_t = \sum_{m=1}^4 \mathbf{e}_{tm} \mathbf{W}_{tm}$$

$$H_z = \sum_{i=1}^4 e_{zi} f_i$$

onde \mathbf{e}_{tm} e \mathbf{e}_{zi} representam as incógnitas na base vetorial e nodal respectivamente, o caso da formulação de 3 campos com ($\beta \neq 0$) recai num sistema de equações de autovalores e autovetores dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{tt} & \mathbf{S}_{tz} \\ \mathbf{S}_{zt} & \mathbf{S}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = k_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{tt} & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

onde:

$$[\mathbf{S}_{tt}]_{nm}^e = \frac{1}{\epsilon_r} \int_{\Omega^e} [(\nabla_t \times \mathbf{W}_m) \cdot (\nabla_t \times \mathbf{W}_n) + \beta^2 \mathbf{T}_m \cdot \mathbf{H}_n] d\Omega^e$$

$$[\mathbf{S}_{tz}]_{nm}^e = \frac{1}{\epsilon_r} \int_{\Omega^e} [\beta^2 \mathbf{W}_m \cdot \nabla_t f_n] d\Omega^e$$

$$[\mathbf{S}_{zt}]_{nm}^e = \frac{\beta^2}{\epsilon_r} \int_{\Omega^e} (\nabla_t f_m \cdot \mathbf{W}_n) d\Omega^e$$

$$[\mathbf{S}_{zz}]_{nm}^e = \frac{\beta^2}{\epsilon_r} \int_{\Omega^e} (\nabla_t f_m \cdot \nabla_t f_n) d\Omega^e$$

$$[\mathbf{T}_{tt}]_{nm}^e = \mu_r \int_{\Omega^e} \mathbf{W}_m \cdot \mathbf{W}_n d\Omega^e$$

$$[\mathbf{T}_{zz}]_{nm}^e = \beta^2 \mu_r \int_{\Omega^e} f_m f_n d\Omega^e$$

6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Como mencionado anteriormente, a aplicação do método dos elementos finitos em eletromagnetismo se deu primeiro em problemas de ondas. Dessa forma e de acordo com os objetivos desse trabalho, os primeiros resultados aqui obtidos também estão associados a esses problemas. Posteriormente são apresentados exemplos numéricos de cálculo de campos magnéticos. Para a obtenção da solução numérica dos vários exemplos apresentados a seguir, várias funções e elementos finitos, inclusive o elemento de aresta, foram implementados em um código computacional denominado MEF. Este código foi escrito em Fortran 90 e baseado na estrutura do código apresentado por Dhatt e Touzot (1981). Os detalhes de funcionamento do MEF podem ser encontrados em Jospin (2012).

Com o intuito de verificar a aplicação do elemento finito de aresta foram resolvidos problemas de guias de ondas. Nesse tipo de problema, tem-se a necessidade de calcular entre outras coisas, os chamados autovalores e autovetores. Respectivamente, esses representam as frequências de corte e os campos elétricos e ou magnéticos. Os resultados obtidos mostraram que o módulo de solução original do programa MEF não era capaz de calcular os autovalores e autovetores para esse tipo de sistema de equações. Para contornar esse problema, foi introduzido um conjunto de rotinas comerciais do LAPACK. Com essa modificação foi possível se determinar as frequências de corte e os campos elétricos e ou magnéticos, inclusive os nulos ou negativos, nos problemas de guias de ondas.

6.1 GUIA DE ONDAS HOMOGENEO COM DOIS CAMPOS.

6.1.1 Guia de onda retangular.

Nesse primeiro exemplo pretende-se calcular as frequências de corte para um guia de ondas retangular de dimensões $a \times b$ e com b satisfazendo a relação $b = 2a$. Na figura 5 são mostradas a geometria e as condições de contorno utilizadas nesse guia de ondas para representar o modo TE.

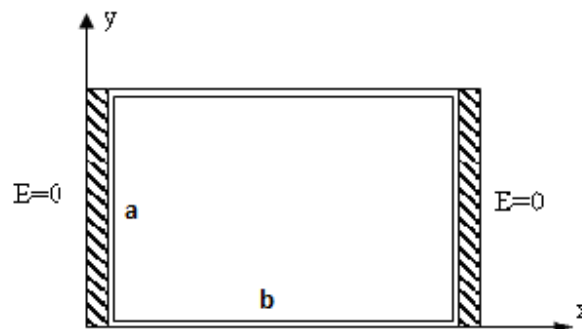


Figura 5: Guia de onda retangular com a condição de contorno em y .

Na tabela 1 apresentam-se os resultados obtidos pelo programa MEF utilizando dois tipos de elementos nodais; o retangular linear com 4 nós (R4N) e o triangular linear com 3 nós (T3N). A solução numérica foi obtida utilizando discretizações variadas de 4, 62 e 428 elementos T3N e de 4, 60 e 400 elementos R4N. Esses resultados são comparados aos resultados obtidos pelo programa HELM10 e pela solução analítica apresentada por Reddy em um relatório técnico (Reddy, 1994). É possível constatar que o programa MEF obteve resultados semelhantes principalmente para as malhas mais refinadas.

Tabela 1: Frequência de corte para um guia de onda retangular no modo TE usando elemento finito nodal.

modo TE	Solução analítica [Reddy, 1994]	HELM10 [Reddy, 1994]	MEF (4T3N)	MEF (62T3N)	MEF (428T3N)	MEF (4R4N)	MEF (60R4N)	MEF (400R4N)
10	3,142	3,144	3,464	3,160	3,144	3,464	3,155	3,145
20	6,285	6,308	6,928	6,422	6,306	6,928	6,355	6,290
01	6,285	6,308	7,746	6,463	6,308	6,928	6,387	6,309
11	7,027	7,027	7,746	7,290	7,057	7,746	7,095	7,032
12	8,889	8,993	-	9,383	8,947	-	9,010	8,909
30	9,428	-	-	9,873	9,499	-	9,776	9,512
31	11,331	-	-	12,278	11,457	-	11,660	11,404
-	-	-	-	13,588	12,741	-	13,145	12,618
02	12,571	-	-	13,831	12,758	-	13,400	12,774
21	12,958	13,201	-	14,295	13,165	-	13,519	13,004

Na Figura 6 são apresentados os campos elétricos (autovetores) para os casos TE10, TE11, TE20 e TE22 com condições de contorno na linha $x=0$ e $x=b$.

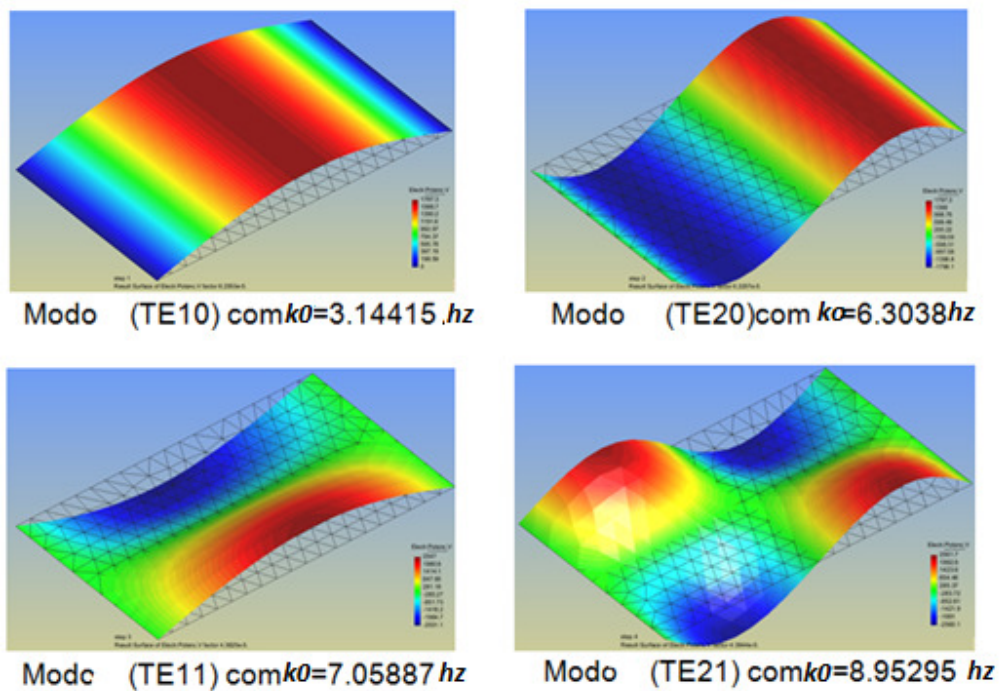


Figura 6: Quatro modos de vibração para caso TE com condição de contorno em Y

Na Tabela 2, são apresentados, para o mesmo guia de ondas, os valores obtidos pelo programa MEF para as frequências de corte utilizando os elementos finitos retangular de aresta (R4E) e triangular de aresta(T3E). Novamente, são utilizadas discretizações variadas de 4, 62 e 428 elementos T3E e de 4, 60 e 400 elementos R4E. Os resultados obtidos são novamente comparados com a solução numérica apresentada por (C.J.Reddy, 1994) utilizando o programa Helm10 e com a solução analítica desenvolvida pela NASA Langley Research Center. Constata-se mais uma vez que os elementos de aresta se aproximam bem da solução analítica e observa-se uma pequena vantagem para o elemento R4E.

Tabela 2: Frequência de corte para um guia de onda retangular no modo TE usando elemento finito vetor.

modo TE	Solução analítica [30]	HELM10	MEF (4T3E)	MEF (62T3E)	MEF (428T3E)	MEF (4R4E)	MEF (60R4E)	MEF (400R4E)
10	3,142	3,144	3,639	3,411	3,144	3,464	3,155	3,145
20	6,285	6,308	5,908	5,508	6,304	7,746	6,355	6,290
01	6,285	6,308	8,764	6,334	6,303	7,746	6,387	6,309
11	7,027	7,027	-	6,968	7,057	-	7,095	7,032
12	8,889	8,993	-	8,180	8,954	-	9,010	8,909
30	9,428	-	-	8,480	-	-	9,776	9,512
31	11,331	-	-	9,551	-	-	11,660	11,404
-	-	-	-	11,149	-	-	13,145	12,618
02	12,571	-	-	11,769	-	-	13,400	12,774
21	12,958	13,201	-	13,306	-	-	13,519	13,004

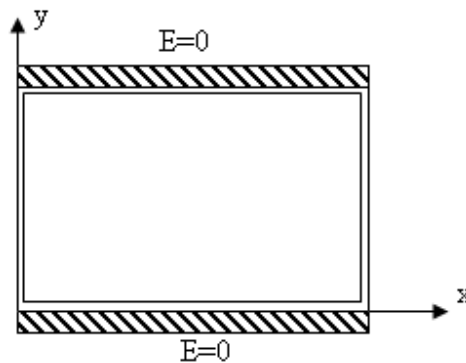


Figura 7: Guia de onda retangular com a condição de contorno em x.

Na Figura 8 apresentam-se os campos elétricos para os modos TE01, TE11, TE21 e TE31 supondo a condição de contorno nula nas bordas $y=0$ e $y=a$ conforme apresentado na Figura 7.

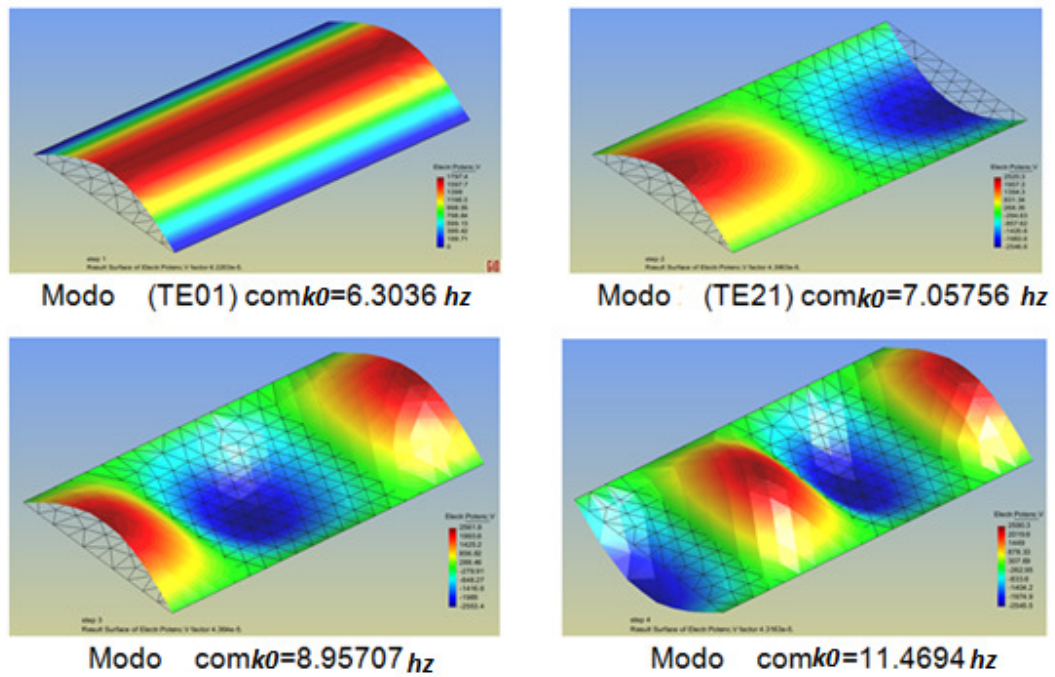


Figura 8: Quarto modos de vibração para caso TE com condição de contorno em X

6.2 GUIA DE ONDAS HETEROGÊNIO COM TRÊS CAMPOS.

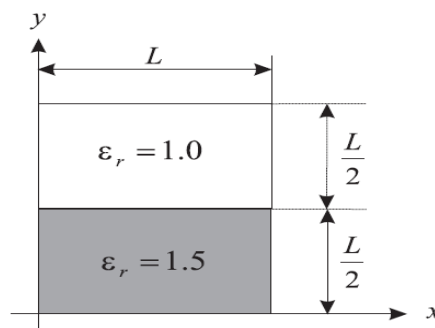


Figura 9: Guia de onda retangular heterogêneo.

Nesse exemplo, são calculadas as frequências de corte de um guia de ondas retangular para o modo LSM (longitudinal secção magnética). O guia é composto de dois materiais com permissividades elétricas distintas, como mostra a figura 9. As frequências de corte k_c desse guia de ondas são obtidas utilizando-se 3 campos. Dois desses campos representam os modos transversais nas direções x e y e o outro o modo longitudinal na direção z. A solução numérica desse problema é obtida a partir do sistema de equações 5.46 o qual é rerepresentado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_r} \mathbf{S}_{tt} + \frac{\beta_2^2}{\mu_r} T_{tt} & \frac{\beta_2^2}{\mu_r} \mathbf{S}_{tz} \\ \frac{\beta_2^2}{\mu_r} \mathbf{S}_{zt} & \frac{\beta_1^2}{\mu_r} \mathbf{S}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = k_0^2 \begin{bmatrix} \varepsilon_r \mathbf{T}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \beta_1^2 \varepsilon_r \mathbf{T}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}$$

onde β_1, β_2 são as constantes funções da constante de propagação das ondas β do guia. Para $\beta_1 = 1$ e $\beta_2 = 0$ recaímos no caso do guia de onda homogêneo e para $\beta_1 = \beta$ e $\beta_2 = \beta$ recaímos no caso do guia de onda não homogêneo. Na interpolação dos campos desse guia de ondas foram utilizados elementos de aresta nos campos transversais e elementos nodais no campo longitudinal.

Tabela 3: Frequência de corte para o modo LSM de guia de onda quadrado com $\beta = 10$

$k_0 L$					
modo LSM	HAYATA et al	HELM-VEC2	MEF (4R4NE)	MEF (100R4NE)	MEF (400R4NE)
1	8.8093	8.8150	8.9100	8.776	8.7735
2	9.3896	9.4430	9.1738	9.1231	9.1167
3	10.2752	5.8859	9.6200	9.5001	9.4913
4	11.1030	6.3083	10.1887	9.8918	9.8562
5	11.2677	8.1650	-	10.2567	10.2270
6	11.4501	8.1650	-	10.5728	10.5337
7	11,331	8.6197	-	10.8915	10.8371
8	12.6686	9.8579	-	11.0987	11.0652
9	12.8092	8.6162	-	11.2830	11.2249
10	12.9575	1.29997	-	11.3668	11.2966

As soluções numéricas obtidas pelo programa MEF são apresentados na Tabela 3 utilizando elementos finitos retangulares nodais e de aresta (R4NE). Para a discretização do problema utilizou-se um número variado de elementos: 4, 100 e 400 elementos. Esses resultados são comparados as soluções analíticas obtidas por (Hayata,1986) e as soluções numéricas apresentadas pelo programa Helmvec2 desenvolvido por Reddy (1994).

Na Tabela 3 é ainda possível se observar que a utilização dos elementos retangulares nodais e de aresta (R4NE) produz valores próximos aos apresentados na literatura e a medida que se aumenta a discretização, os valores de k_0L tendem para a solução analítica.

6.3 FIO QUADRADO 2D

Esse exemplo aborda o caso de um problema magnetostático com densidade de corrente. Como se trata de um problema 2D, pode-se utilizar para a solução tanto uma formulação potencial escalar magnético quanto uma potencial vetor magnético. O domínio do problema é definido por um condutor quadrado de aresta $a = 0.02 [m]$ constituído por um material com permeabilidade $\mu = 1.2566366 \times 10^{-6} [H/m]$ e submetido a uma densidade de corrente $J_0 = 1.0 [A/mm^2]$. Esse condutor é envolvido por um quadrado de aresta $b = 0.06 [m]$ constituído de um material ferromagnético com permeabilidade $\mu = 1.2566366 \times 10^{-3} [H/m]$. Supõe-se que o fluxo magnético está contido no domínio e que portanto, o potencial vetor é nulo na superfície externa do material ferromagnético. Na Figura 10 apresentam-se os resultados obtidos pelo programa MEF para o potencial magnético A_z utilizando o elemento T3N. No lado esquerdo dessa figura mostra-se o resultado para uma malha de 72 elementos enquanto no lado direito, para uma malha mais refinada de 32662 elementos.

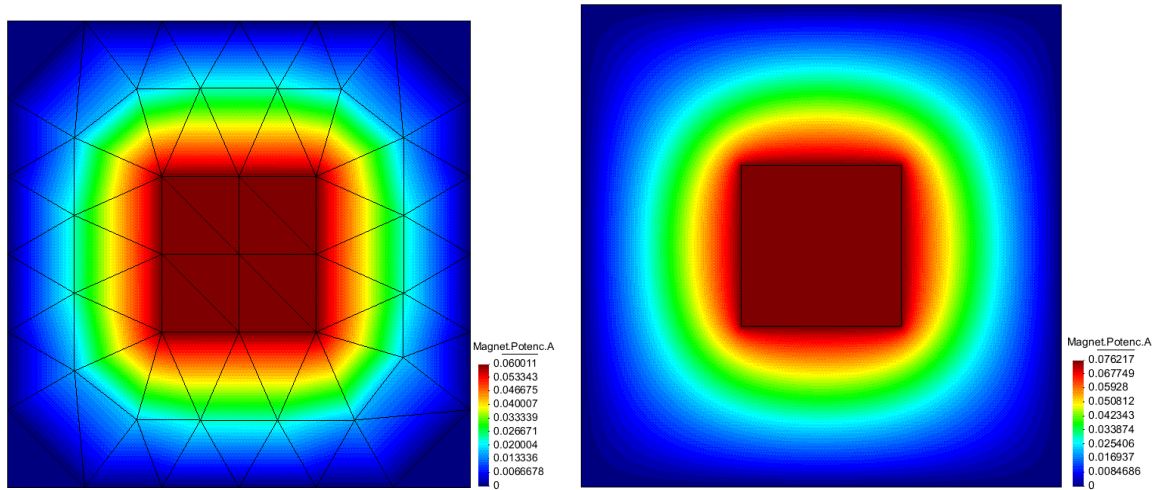


Figura 10: Potencial magnético A_z em 2D.

Na tabela 4 apresentam-se os resultados obtidos pelo programa MEF para as formulações potencial escalar e vetor utilizando o elemento triangular a 3 nós (T3N). Esses resultados são comparados aqueles obtidos por (A. Bastos, 2003) e pelo programa comercial Comsol. Avalia-se também a evolução da precisão dos resultados com o aumento do número de elementos T3N usados na discretização, no caso, 72, 306, 7928 e 32662 para o programa MEF e 293 e 36864 elementos para o programa Comsol.

Tabela 4: Potencial vetor $A = (0,0,A_z \times 10^2)$ usando elemento nodal triangular.

Coordenadas (x,y)	Bastos 72 elem	MEF* 72 elem	MEF** 72 elem	MEF** 306 elem	MEF** 7928 elem	MEF** 32662 elem	Comsol 293 elem	Comsol 36864 elem
(0.01,0.01)	1.5325	15325	1.5425	1.5869	1.5626	1.4863	1.5342	1.5764
(0.02,0.01)	3.0651	3.0649	3.0850	3.0535	3.0134	2.8677	3.0684	3.041
(0.03,0.01)	3.3723	3.3723	3.3960	3.5216	3.5583	3.3908	3.5076	3.5958
(0.01,0.03)	3.3723	3.3723	3.3959	3.5213	3.5587	3.3901	3.5076	3.5958
(0.02,0.03)	7.3598	7.3596	7.4059	7.7976	7.9849	7.6180	7.8938	8.0785
(0.05,0.02)	3.0645	3.0644	3.0493	3.0599	3.0128	2.8668	3.0684	3.041

*: $\nabla A \bullet \nabla A$: potencial escalar

** : $\nabla \times A \bullet \nabla \times A$ potencial vetor

É possível se observar na Tabela 4 que os valores obtidos pelo programa MEF, com a utilização, tanto de um potencial escalar quanto de um potencial vetor, são compatíveis com os da literatura (A. Bastos, 2003) bem como com os valores calculados utilizando o programa comercial Comsol. Pode-se então concluir que, para os casos em 2D, a utilização de ambos os potenciais produz bons resultados.

6.4 FIO QUADRADO 3D

No modelo tridimensional do fio quadrado foi utilizada a formulação potencial vetor total $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ com a inclusão do termo de penalização definida por Coulomb. Como explicitado na literatura, esse termo permite uma convergência mais rápida na solução do problema 3D, via gradiente conjugado, sem no entanto interferir na precisão dos resultados. A geometria e o potencial vetor são discretizados com elementos finitos tetraédricos a 4 nós. Em todas as faces do fio quadrado são impostas a condição de que a componente normal da densidade de fluxo \mathbf{B} seja nula. Essa condição é definida pela equação abaixo:

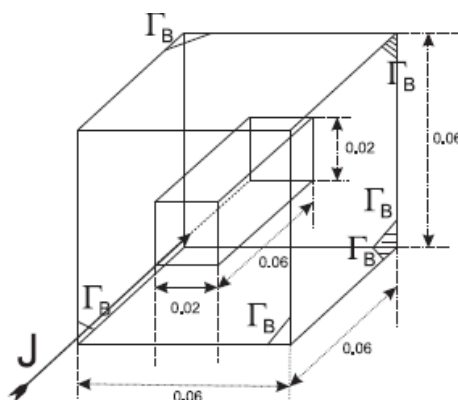


Figura 11: Fio quadrado Fio e condições de contorno.

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{in } \Gamma_B \quad (6.1)$$

Essa condição de contorno apresentada na equação 6.1 pode ser colocada em função do potencial vetor total \mathbf{A} pela relação expressa na equação 6.2:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Gamma_B \quad (6.2)$$

Esta condição implica que para os planos $x=0[m]$ e $x=0.06[m]$, as componentes do potencial vetor tomam os seguintes valores $A_y = A_z = 0$. Para os planos $y=0[m]$ e $y=0.06[m]$ o potencial é definido por $A_x = A_z = 0$ e finalmente, para os planos $z=0[m]$ e $z=0.06[m]$ ele toma o seguinte valor $A_x = A_y = 0$.

Os valores do potencial vetor obtidos pelo programa MEF, utilizando uma discretização de 17648(T4N), são apresentados na Tabela 5 para determinadas coordenadas e são comparados aos resultados obtidos pelo programa comercial Comsol. Esse programa conta com uma variedade de ferramentas para a definição do problema de interesse e uma vasta biblioteca de elementos finitos, dentre os quais; os elementos finitos de aresta, prismáticos, tetraédricos e de fronteira. Para a solução do problema, o Comsol é capaz de utilizar vários tipos de elementos e ainda fazer uso da remalhagem adaptativa no intuito de melhorar a precisão da solução.

Tabela 5: Potencial vetor $A = (0,0, A_z \times 10^2)$ usando elemento tetraédrico escalar e vetorial.

Coordenadas (x,y)	COMSOL 600 elem. Prismáticos			MEF 17648 elem tetraédricos		
	Z=0	Z=0,03	Z=0,06	Z=0	Z=0,03	Z=0,06
(0.001,0.01)	1.6687	1.626	1.6758	1.6918	1.5647	1.6372
(0.02,0.01)	3.1922	3.156	3.1851	3.1675	3.0876	3.1303
(0.03,0.01)	3.6274	3.64293	3.615	3.6355	3.5601	3.6193
(0.01,0.03)	3.6274	3.6032	3.6379	3.6352	3.5457	3.5825
(0.02,0.03)	7.9232	7.8897	7.8865	7.8677	7.8628	7.8666
(0.05,0.02)	3.134	3.2631	3.1766	3.164	3.0975	3.0864

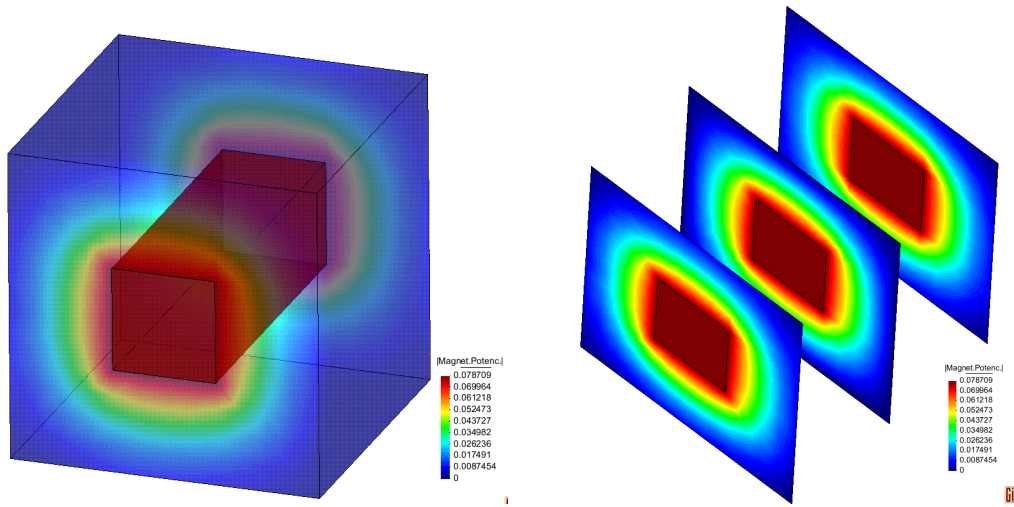


Figura 12: Fio Potencial vetor magnético A (MEF)

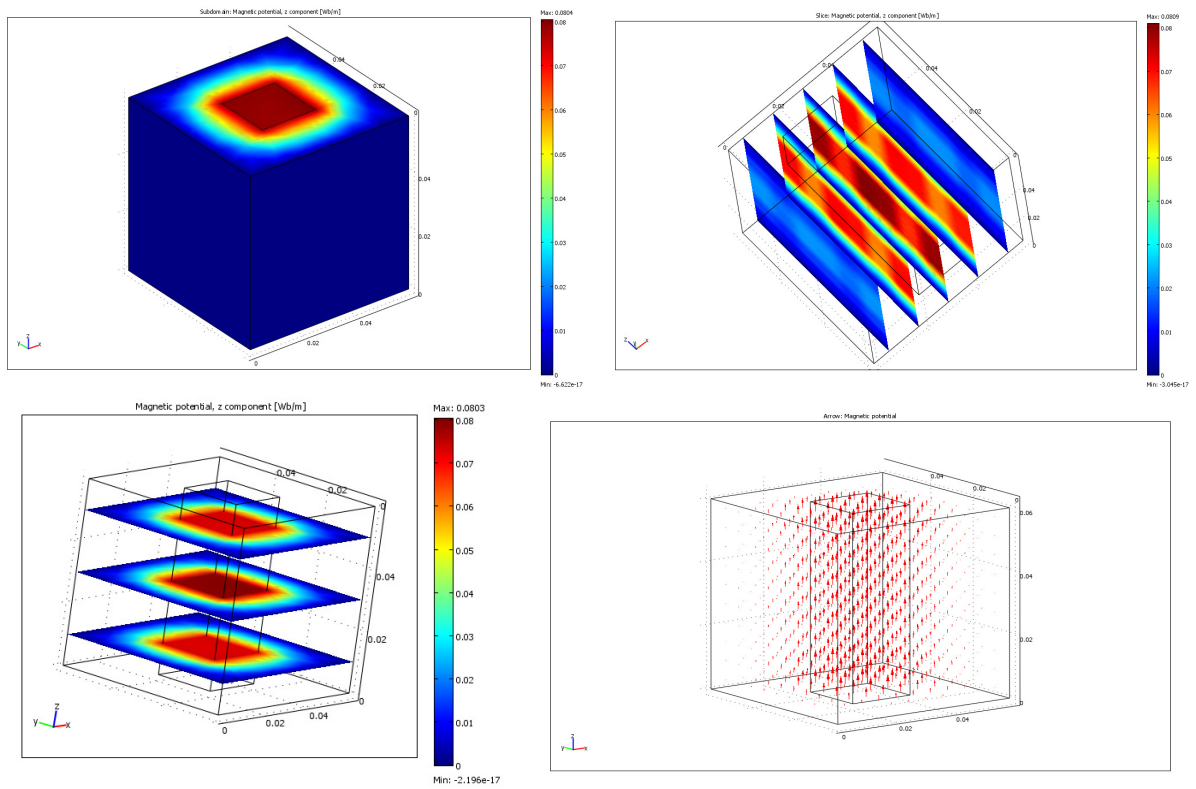


Figura 13: Potencial magnético A_z em 3D (Comsol)

Na Figura 12 apresenta-se uma imagem do potencial nas secções $z=0[m]$, $z=0.03[m]$ e $z=0.06[m]$ obtida pelo programa MEF e na Figura 13 os resultados obtidos pelo programa Comsol respectivamente.

Os resultados produzidos tanto pelo programa MEF bem como pelo programa comercial Comsol são compatíveis com os da literatura. Observa-se também que o programa Comsol exigiu uma discretização menos refinada do que a utilizada no programa MEF para obter resultados próximos aos da literatura. Isso pode ser justificado pelo fato de que o MEF utiliza elementos tetraédricos menos eficientes que os prismáticos e que ainda não disponibiliza o acoplamento com os elementos de aresta. O programa Comsol ajusta automaticamente a utilização de vários tipos de elementos, dentre eles o elemento de aresta, para melhor satisfazer as condições de contorno nas interfaces entre dois meios diferentes.

6.5 CUBO EM UM CAMPO MAGNÉTICO HOMOGÊNIO

O objetivo nesse exemplo é mostrar as diferenças obtidas nas soluções entre a formulação que leva em consideração o termo de penalização de Coulomb e aquela que não o leva em consideração.

Analisa-se aqui o caso de um cubo de aço com aresta a e com permeabilidade $\mu = 10^3 \mu_0$, imerso em um campo magnético homogêneo onde; $B_0 = (0, 0, 1)[T]$ e μ_0 é a permissividade do vácuo. Supõem-se que este cubo esteja envolto por outro cubo de aresta b e constituído de um material com permeabilidade $\mu = \mu_0$. A disposição dos mesmos, levando em consideração a simetria nos planos $x=0$, $y=0$ e $z=0$ é mostrada na Figura 14 (Preis, 1989).

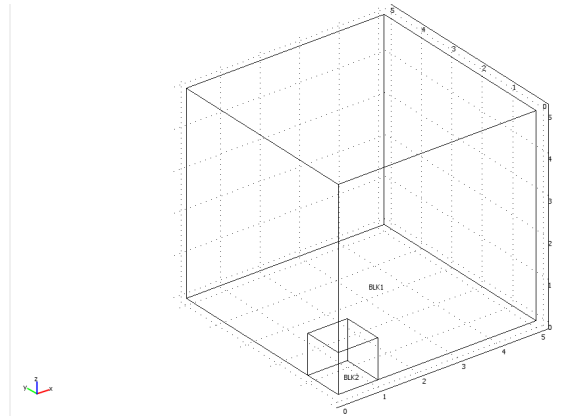


Figura 14: cubo homogêneo.

As condições de contorno para este exemplo numérico são apresentadas por Biro (1989) e Kuczmann (2009) e definidas na Tabela 6 onde o campo de indução magnética $B_0 = 1 [T]$ é imposto nos planos $x = b$ e $y = b$.

Tabela 6: Condições de contorno de (Biro, 1989) para o cubo homogêneo

Plano	$A_x = 0$	$A_y = 0$	$A_z = 0$	Tipo
$x = 0$	livre	0.0	0.0	Γ_B
$y = 0$	0.0	livre	0.0	Γ_B
$z = 0$	Livre	livre	0.0	Γ_H
$x = b$	0.0	$+B_0 \cdot b/2$	0.0	Γ_B
$y = b$	$-B_0 \cdot b/2$	0.0	0.0	Γ_B
$z = b$	Livre	livre	0.0	Γ_H

Essas condições são baseadas nas seguintes equações:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_B \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma_B \quad (6.3)$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Gamma_H \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_H \quad (6.4)$$

A solução numérica, utilizando o método do gradiente conjugado, chegou a convergência após 326 iterações para o caso com o termo de penalização e 1712 iterações para o caso sem esse termo. A distribuição do potencial vetor magnético A é apresentada no lado esquerdo da Figura 15 para o caso da formulação penalizada e, no lado direito para o caso da formulação não penalizada. Para a discretização do problema foram utilizados 170.940 e 234.494 elementos finitos tetraédricos nodais lineares (T4N).

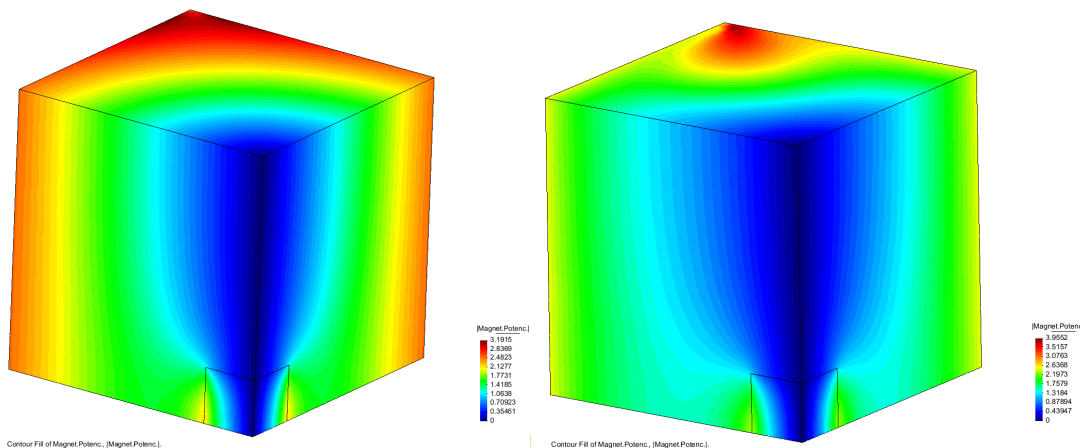


Figura 15: Potencial Magnético Vetor para as formulações com e sem o termo de penalização de Coulomb.

Na Figura 16 apresenta-se a evolução da densidade de fluxo B_z ao longo da linha $y = z = 0$ e ao longo da linha $y = 10[mm]$ e $z = 0$ para a formulação com penalização e na Figura 17 o mesmo para a formulação sem penalização. Não obstante ter sido calculado por formulações diferentes, a variável B_z , teoricamente deveria apresentar valores semelhantes. A partir das figuras supracitadas pode ser observado que isto não acontece. A razão para esse fato é que a penalização pode estar introduzindo, por pequeno que seja, valores espúrios na solução

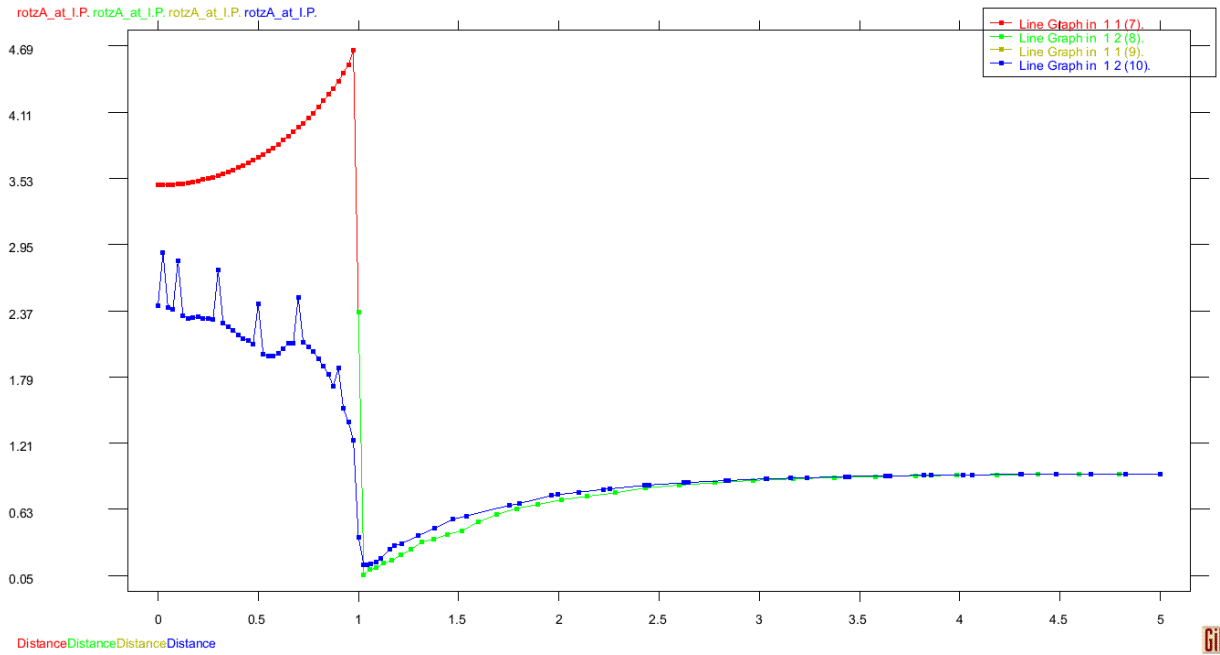


Figura 16: Densidade de fluxo B_z ao longo da linha $y=z=0$ (vermelho e verde) e ao longo da linha $y=10[\text{mm}]$ e $z=0$ (azul) utilizando a formulação com penalização.

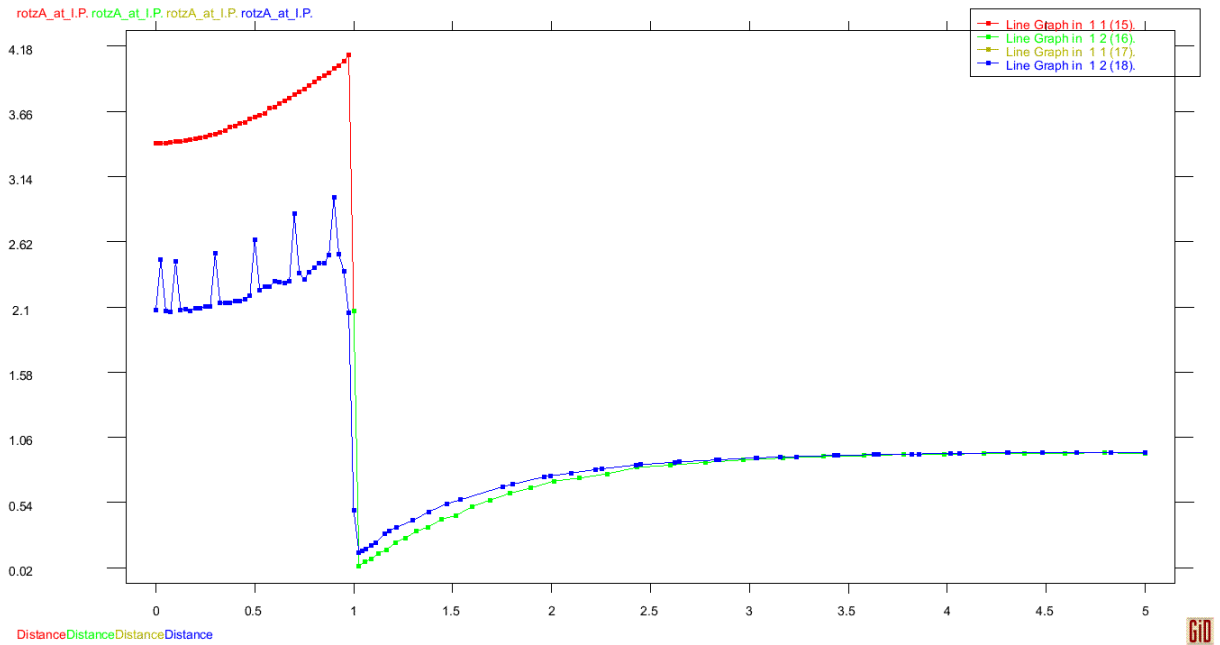


Figura 17: Densidade de fluxo B_z ao longo da linha $y=z=0$ (vermelho e verde) e ao longo da linha $y=10[\text{mm}]$ e $z=0$ (azul) utilizando a formulação sem penalização.

No caso do potencial vetor A , como pode ser visto nos lados esquerdo e direito da Figura 15, ele assume valores diferentes. Isto pode ser explicado pelo fato de que o potencial vetor magnético, no caso da formulação sem penalização, poder assumir outros valores já que não se pode garantir unicidade da solução.

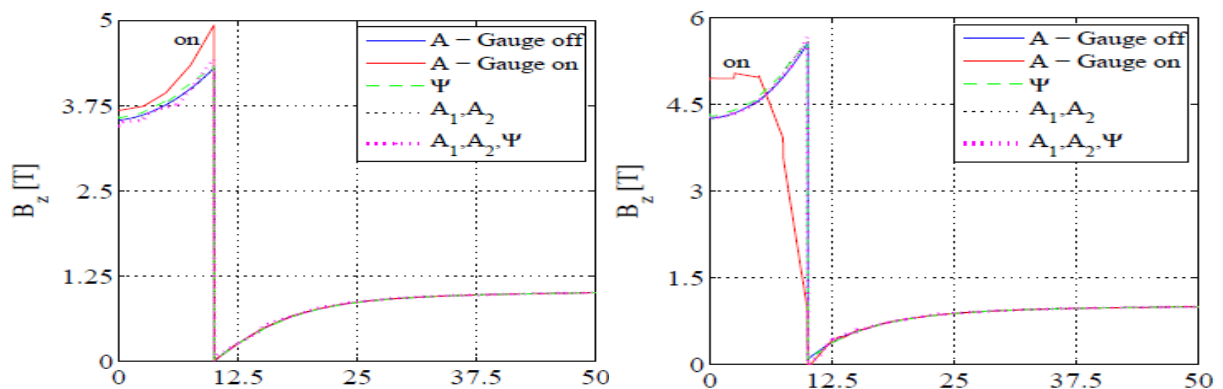


Figura 18: Densidade de fluxo B_z ao longo da linha $y=0$ e $z=0$, e ao longo da linha $y=10$ [mm] e $z=0$ obtidas por (Kuczmann, 2009).

Na Figura 18 apresentam-se os resultados obtidos por (Kuczmann, 2009) para a densidade de fluxo magnético. A figura da esquerda apresenta a densidade de fluxo ao longo da linha $y=z=0$ e a da direita ao longo da linha $y=10$ [mm] e $z=0$ para diversos tipos de formulação inclusive a formulação do potencial vetor total com e sem penalização. Comparando esses resultados com os obtidos pelo programa MEF nas Figura 17 e Figura 18 pode-se observar que as formas de comportamento das curvas são semelhantes e que os valores têm pequenas divergências ao longo da linha $y=z=0$ e divergências maiores ao longo da linha $y=10$ [mm] e $z=0$.

Na Figura 19 apresenta-se o potencial vetor magnético na forma vetorial (lado esquerdo) e na forma de linhas de contorno (lado direito). Na Figura 20 apresenta-se a densidade do fluxo magnético na forma de preenchimento de contorno suave.

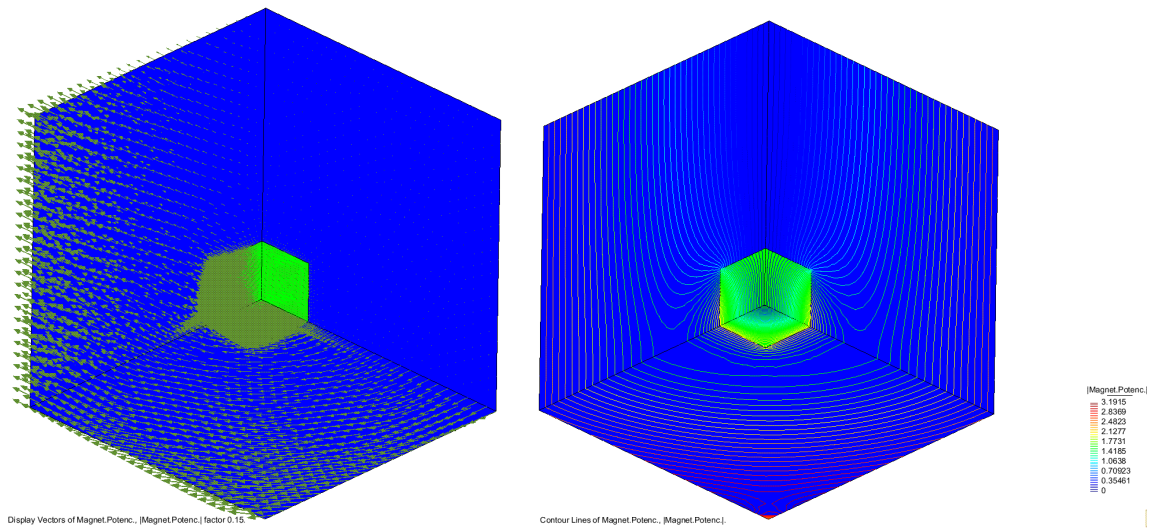


Figura 19: Potencial vetor magnético na forma vetorial e de linhas de contorno

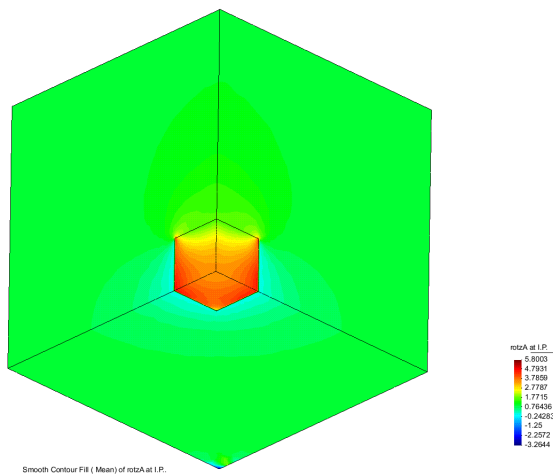


Figura 20: Densidade do fluxo magnético

6.6 COLIMADOR

Nesse último exemplo apresenta-se um típico modelo 3D desenvolvido pelo Instituto de Engenharia Elétrica do Japão (IEEJ) que serviu de 'benchmark' numérico

para vários autores (Nakata,1990). Esse modelo é composto de um núcleo retangular prismático de aço envolto por uma bobina de cobre com 457 voltas produzindo uma força magneto motriz de $F = 3.000 [At]$. Uma caixa de proteção magnética feita de aço envolve todo o modelo. Essa cobertura tem uma espessura de 1,6 [mm]. A permeabilidade relativa entre o núcleo e a proteção é assumida ser de $\mu_r = 1000$. Devido à simetria do modelo, apenas um quarto do modelo é analisado como apresentado na Figura 21 abaixo.

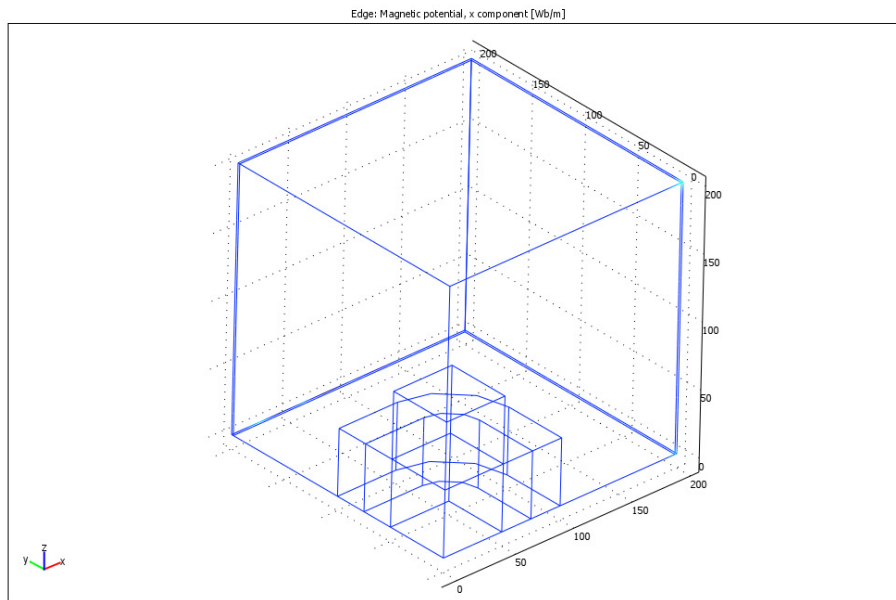


Figura 21: Um quarto do colimador.

Desde que a área transversal da bobina é de $A_c = 2500 [mm^2]$, a corrente pode ser calculada através da relação:

$$J = \frac{F}{A_c} = 1,2 \times 10^6 [A/m^2]$$

Para a simulação da corrente no trecho circular da bobina é suposto que esta corrente se localiza no plano xy e portanto pode ser decomposta da seguinte forma:

$$J = J_x + J_y = -|J|\sin\theta + |J|\cos\theta$$

onde θ é o ângulo medido em relação à coordenada x usando como centro de rotação o vértice do núcleo de aço quadrado. Definindo esse vértice como (x_c, y_c) então as coordenadas locais com origem no vértice e o raio de um determinado ponto da bobina são dados por:

$$x_l = x - x_c, \quad y_l = y - y_c, \quad r_c = \sqrt{x_l^2 + y_l^2}$$

e portanto:

$$\sin\theta = \frac{y_l}{r_c}, \quad \cos\theta = \frac{x_l}{r_c}$$

As condições de contorno utilizadas aqui são definidas em função da forma que o campo de densidade magnética \mathbf{B} assume. Para os planos $x=0$, $x=b$, $y=0$ e $y=b$ vale a relação $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ (condição de contorno Γ_B) pois, não se espera que haja densidade de fluxo magnético normal a estas facetas. Nas facetas $z=0$ e $z=b$ não se espera que não haja densidade de fluxo magnético tangencial a estas facetas portanto $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ (condição de contorno Γ_H). Estas condições de contorno podem ser traduzidas em função do potencial vetor A na forma apresentada na Tabela 7.

Tabela 7: Condições de contorno para o colimador.

Plano	$A_x = 0$	$A_y = 0$	$A_z = 0$	Tipo
$x = 0$	0.0	livre	livre	Γ_B
$y = 0$	livre	0.0	livre	Γ_B
$z = 0$	livre	livre	0.0	Γ_H
$x = b$	0.0	livre	livre	Γ_B
$y = b$	livre	0.0	livre	Γ_B
$z = b$	livre	livre	0.0	Γ_H

Na Figura 23 apresentam-se as discretizações em elementos finitos tetraédricos nodais (T4N) usadas para a malha A, B e C com respectivamente 171.509, 394.341 e 240.277 elementos. A distribuição do potencial vetor magnético.

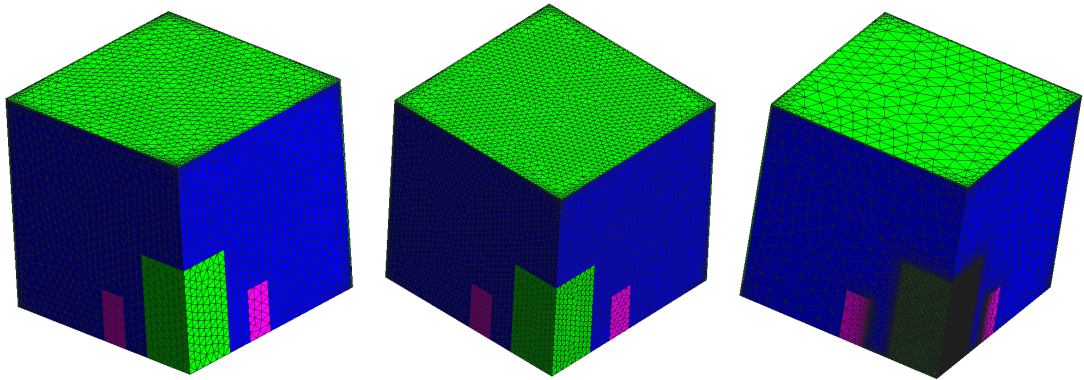


Figura 22: Discretizações em elementos finitos T4N para as malhas A, B e C respectivamente.

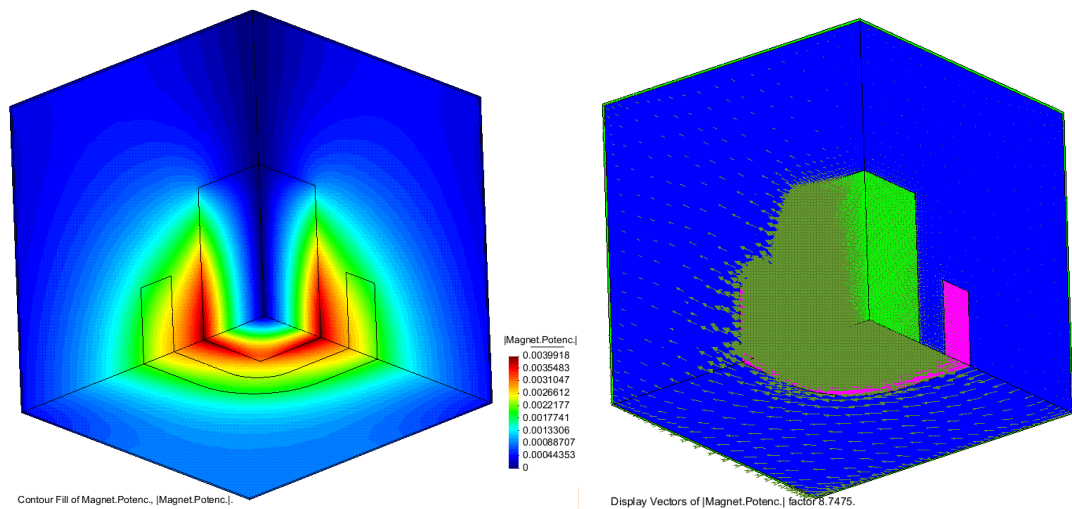


Figura 23: Potencial vetor magnético correspondente à malha C.

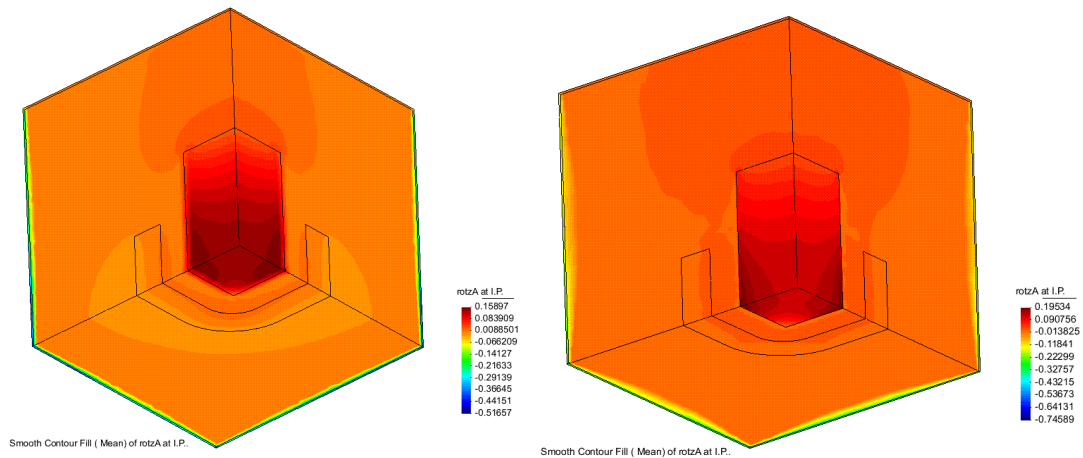


Figura 24: Representação de preenchimento de contorno para B_z com as malhas B e C

A distribuição da densidade de fluxo magnético B_z para as malhas B e C é apresentada na Figura 24. A diferença entre essas distribuições, apesar do número elevado de elementos, mostra a necessidade de utilização de uma remalhagem adaptativa de elementos finitos, como apresentado no anexo B, no intuito de homogeneizar o erro e de se obter uma convergência mais direta para os resultados analíticos.

Na Tabela 8 são apresentados os valores das densidades dos fluxos magnéticos B_z obtidos pelo programa MEF utilizando a formulação com penalização e várias malhas de elementos finitos. Para a malha C também são apresentados os valores de B_z para a formulação sem penalização. Verifica-se que os resultados apresentados pelo programa MEF tem boa concordância com os resultados apresentados por (Nakata, 1990) e outros na forma experimental e por simulação e (Batalha,1995). Novamente verifica-se também que a utilização da penalização traz alguma mudança nos valores do fluxo.

Tabela 8: Comparação da densidade de fluxo magnético B_z

Coordenadas [mm]			Densidade de Fluxo [Gauss]						
			Nakata		Batalha	MEF com penalização			MEF sem penalização
x	y	z	medido	calculado		Malha A	Malha B	Malha C	Malha C
0.	0.	110.	240.0	237.0	231.9	231.5	242.5	229.5	247.0
40.	0.	110.	298.1	287.0	280.2	282.5	299.0	276.2	297.3
40.	40.	110.	355.	335.7	326.9	320.0	332.0	317.0	341.5
0.	0.	190.	109.0	-	127.6	116.0	123.1	116.0	129.5

CONCLUSÃO

Essa dissertação representa o passo inicial para a implantação de uma infraestrutura computacional para o cálculo de campos eletromagnéticos e trajetórias de partículas. O cálculo em questão, é de fundamental importância dentro das perspectivas dos reatores de quarta geração. Isso porque, entre esses reatores estão aqueles refrigerados a metais líquidos. Portanto, faz-se necessário um instrumento de cálculo de campos eletromagnéticos capaz de modelar tais campos com certa precisão. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é iniciar a construção desse instrumento de cálculo, utilizando para tanto o método dos elementos finitos. Especificamente, as análises para os cálculos de ondas apresentados aqui tem o objetivo único de averiguar a precisão do elemento de aresta como uma etapa dos macro objetivos já descritos.

Em relação a isso, a solução numérica de guias de onda, pelo método dos elementos finitos, apresenta problemas que surgem em função do mau condicionamento das matrizes oriundas da discretização. Apesar desse mau condicionamento, foi possível constatar que para o caso 2D e utilizando dois ou três campos, tanto o elemento finito nodal quanto o de aresta ou a mistura dos dois produziram bons resultados para os problemas propostos.

Embora nesse trabalho não tenham sido tratados problemas eletrostáticos, esses não apresentam grandes dificuldades na obtenção de uma solução numérica via o método dos elementos finitos tanto para a formulação escalar quanto a vetorial. O caso de problemas magnetostáticos em geometrias 2D também não apresentam grandes dificuldades. O mesmo não acontece para os problemas magnetostáticos em geometrias 3D. Nesse caso, o problema recai na dificuldade de se criar um campo eletromagnético que seja livre divergente e que nas interfaces entre materiais diferentes as condições de contorno sejam satisfeitas.

Como era de se esperar, para os casos de problemas magnetostáticos em geometrias 2D, os resultados não apresentam divergências acentuadas. Mesmo se tratando de um campo em um meio não homogêneo, os resultados foram satisfatórios com o uso de elemento finito nodal. Esse mesmo exemplo em geometrias 3D é mais bem modelado com uma mistura de elementos nodais e de aresta como afirmam certos autores. Essa mistura permite tratar melhor os problemas eletromagnéticos nas interfaces entre materiais diferentes. Esse trabalho mostra que a utilização somente de elementos finitos nodais apresenta bons resultados, no que pese o custo computacional elevado já que é exigido uma malha relativamente refinada de elementos finitos nodais. Esse comportamento em relação à solução é verificado tanto para o cubo em campo homogêneo como para o colimador. Portanto, para os problemas em geometrias 3D e materiais não homogêneos, a utilização do elemento finito de aresta, como apresentado na literatura, é de grande utilidade na solução de problemas magnetostáticos principalmente no que se refere ao custo computacional.

Nessa busca por resultados mais precisos, a utilização da remalhagem adaptativa bem como dos elementos de arestas são alternativas válidas. No caso da primeira opção é fundamental que sejam utilizados indicadores de erro adequados ao problema cuja solução é almejada. Como foi visto anteriormente, cada indicador de erro apresenta um comportamento distinto frente ao mesmo problema. Devido as peculiaridade de cada problema, a utilização da remalhagem adaptativa ou dos elementos de arestas, por si só, não são capazes de contornar todas as dificuldades envolvidas na solução de problemas magnetostáticos.

SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestões para dar prosseguimento às implementações realizadas podemos enumerar as seguintes evoluções:

utilização do elemento de aresta em geometrias 2D para o cálculo de campos eletromagnéticos,

implementação de um elementos finito de aresta para geometrias 3D e sua utilização para o cálculo de campos eletromagnéticos,

utilização concomitante de elementos nodais e de aresta em geometrias 2D e 3D para o cálculo de campos eletromagnéticos,

implementação de remalhagem adaptativa em 3D com o intuito de homogeneizar o erro envolvido no cálculo dos campos eletromagnéticos em 3D e

desenvolvimento e implementação de remalhagem adaptativa em elementos finitos de aresta para geometrias 2D e 3D.

7 BIBLIOGRAFIA

A.Bermúdez R. Rodríguez, P. Salgado Finite Element Method for 3D Eddy Current Problems in Bounded Domains Subject to Realistic Electrodes [Artigo].

A.Bastos J. P Electromagnect Modelin Finite Element Method [Livro]. - Florianópolis : Universidade Federal de Santa Catarina , 2003.

A.Bastos J.P Eletromagnetismo e Cálculo de Campos, 3ª ed. ver, [Livro]. J.P.A – Editora da Universidade UFSC, 1996.

Arnold Douglas N. Colloquium “50 Years Numerische Mathematik” School of Mathematics, University of Minnesota, Society for Industrial and Applied Mathematics- 16 de June de 2009.

Biró Oskár Edge element formulations of eddy current problems. - 1999.

Bossavit Alain COMPUTATIONAL ELECTROMAGNETICM Variational Formulations, Complementarity, Edge Element [Livro]. - New York : Academic Press.

C. J. Reddy Mohar D.Deshpand, C. R.Cockrell Finite Element Method for Eigenvall Problems in Eletromagnetics [Relatório] / Nasa. - 1994. - p. 38. - 3485.

Cendes John Manges and Zoltan Geration of Tangential Vector Finite elements [Artigo] // IEEE Transations on Magnetics. - march de 1993. - Vol. 29.

Cristiano T. Vieira Reinaldo J. Jospin, Francisco Rogério T. Do Nascimento Error Estimator for Adaptive Rimeshing in Electromagnetism [Artigo]. - 2011.

G.Pan and X.Zhou Aplicacion of Physical Spline Fnite Element Method(PSFEM) [Artigo] // Progress In Electromagnetics Research. - Arizona : [s.n.], 2006.

Gouri Dhatt, Gilbert Touzot Une présentation de la méthode des éléments finis, [Livro] - Maloine S.A. Editeur - Paris, 1981.

Holmberg Touma Three Dimensional Finite Element Computational of Eddy Currets on Sychronows Machines. - 1998.

Hoop Gerrit Mur and Andrianus T.De Finite Element Method for Computing Thee-Dimesional Electromagnetic Field in Inhomogeneous Media [Artigo] // IEEE Transations on Magnetic. - november de 1985. - Vol. 6.

Hayata, Kazuya; Koshiba, Massnori; Eguchi, Massasshi; and Suzuki, Michio; vectorial Finite-Element Method Without Any Spurious Solutions for Dielectric Waveguiding Problems Using Transverse Magnetic-Field Component [Artigo] // IEEE Transactions. Microw. Theory & Tech., MTT-34 no. 11, Nov. 1986

J.P.Webb Edge Element and What They can do for you [Artigo] // IEEE Transactions on Magnetics, vol.29.No.2. - March de 1993.

Jin Jianming The finite element method in electromagnetics [Livro]. - USA : [1098765432.], 2002.

Kitoh Kenji Kawano and Tsutomu Introductions to optical waveguide de analysis [Livro]. - 2001.

Konrad A. On the reduction of the number of spurious mode in the vector finite element solution of three-Dimensional cavidades and Waveguides [Artigo] // IEEE Transactions on Microwave Theory And Techniques, Vol. Mit-34, No.2, February 1986.

Konrad A. Vector Variation formulation of Electromagnetic Field in Anisotropic media. [Artigo] // IEEE transation Theory And Techniques, Vol.Mit-24. N.9. - September de 1976.

Konrad A. "Triangular Finite Elements for Fields in Electromagnetics" PhD theses. Department of Electrical Engineering, McGill University 1974.

Kuczmann Mikós Potential formulations in magnetics Appying the Finite element [Lecture notes] Laboratory of Eelectromagnetic Fields " Szechenyi Istvan" University Győr Hungary - 2009.

L.Lebenstajn, Luiz e Cardoso J.R Linear and Nonlinear Self-Adaptive Finite Element Field Calculation [Artigo] // IEEE Transactions. - 1995. - Vol. 2.

M.D.Deshpand Vigyan, Inc, Hampton Application of finite element method to Analyze Inflatable Waveguide [Relatório]. - 1998.

M.Hano Finite Element Analysis of Dielectric-loaded Waveguide [Artigo] // IEEE Transactions. - 1994. - Vols. MTT-32.

Meunier Gérard The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling [Livro]. - USA : [2007046086.], 1988.

Mur Gerrit Compatibility relations and the finite Element Formulation Formulation of Electromagnetic Field Problems. IEEE Transation on Magnetic vol. 29. No. 5 [Artigo]. - september de 1994.

Mur Gerrit The Fallcy of Edge Element .IEEE Transations on Magnetics vol. 34. No. [Artigo]. - September de 1998.

T. Nakata, n. Takahashi, κ. Fujiwara and T. Imai EFFECTS OF PERMEABILITY OF MAGNETIC MATERIALS ON ERRORS OF THE T-Q METHOD [Artigo] // IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 26, NO. 2, MARCH 1990

NASA Langley Research Center Information and Electromagnetic Technology Division
Electromagnetic Research Branch M.S. 490 Division Hampton VA 23681-0001

Ozakár Biró Kurt Preis, Kurt R. Richter On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems [Artigo] // IEEE Transactions on magnetics . - 1996. - Vol. 32.

P. Silvester, "A General High-Order Finite-Element Waveguide Analysis Program," *IEEETrans*, Vol MTT-17, pp. 204-210, April 1969.

P. Silvester, M. V. K. Chari, *Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems*, John Wiley & Sons Inc, 1980. ISBN 0-471-27578-6

Oszkár Biro and Kurt Preis On the use of the vector potential in the finite element analysis of tree-dimensional in Eddy currents [Artigo] // IEEE Transactions Magnetics. - Austrália : [s.n.], 1989. - Vol. 25.

Reinado Jacques Jospin Francisco R. T. Nascimento Eletromagnetic Field Calculations Using Edge Finite Element [Relatório]. - Rio de Janeiro : [01-2012.], 2012.

Trowbrige J. Simkin and C. W On the use the total scalar potential in the numerical solution of field problems in electromagnetics. - Oxfordsshire : [s.n.], 1978.

K. Preis, I. Ardi, Biro, Magele. W, Remhart. R, Richeter. G. Numerical analysis of 3D Magnetostatic field .IEEE Transaction on magnetic vol.27. No.5. - september de 1991.

Webb J. P. Webb Edge Element and what they cam do for you.IEEE Transations on Magnetic. Vol. 29. No. 2 [Artigo]. - 1993.

Z. J. Cendes D. Hudak, J.F. Lee, D. Q. Sum. Development of new Methods for Predicting the Bistatic Electromagnetic Scattering form Absorbing Shape. [Artigo]. - 19 de march de 1990.

Rose Mary de Souza Batalha MÉTODO DO POTENCIAL ESCALAR REDUZIDO USANDO ELEMENTOS FINITOS NODAIS E DE ARESTA [MESTRADO] / A. Rose Mary de Souza Batalha, PPEE, UFMG- 1995.

8 ANEXOS A: DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTOS FINITOS

8.1 DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTOS TRIANGULARES NODAIS

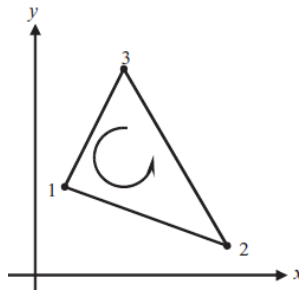


Figura 25: Elemento finito triangular.

Considerando apenas as funções de interpolação lineares dadas por:

$$\phi = a + bx + cy \quad (8.1)$$

Onde ϕ é função potencial escalar que satisfaz a relação acima nos três pontos nodais.

$$\phi_1 = a + bx_1 + cy_1 \quad (8.2)$$

$$\phi_2 = a + bx_2 + cy_2 \quad (8.3)$$

$$\phi_3 = a + bx_3 + cy_3 \quad (8.4)$$

Sejam x_i e y_i as coordenadas dos vértices do triângulo e ϕ_i o valor da função em cada vértice. Então temos que a função ϕ pode ser escrita por:

$$\phi = \sum_{i=1}^3 \phi_i f_i(x, y) \quad (8.5)$$

$$f_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (8.6)$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

onde: $a_i = x_j y_k - x_k y_j$, $b_i = y_j - y_k$, $c_i = x_k - x_j$ e i, j, k satisfazem uma permutação cíclica de $1, \dots, 3$.

8.1.1 Discretização em termos de coordenadas naturais

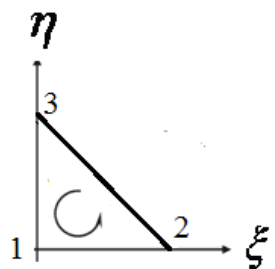


Figura 26: Elemento finito triangular de lado unitário em termos das coordenadas naturais ξ e η .

Considerando a interpolação anteriormente descrita no início de 8.1 e a figura 26, as equações 8.2, 8.3, e 8.4 podem ser expressas respectivamente como:

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (8.8)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \xi \quad (8.9)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \eta \quad (8.10)$$

Portanto $N_1 + N_2 + N_3 = 1$

8.2 DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTO FINITO TRIANGULAR DE ARESTA

Para este tipo de elemento, as funções de interpolação não são definidas através dos nós como anteriormente, mas sim através dos lados. Uma representação genérica para o mesmo pode ser dada na figura abaixo.

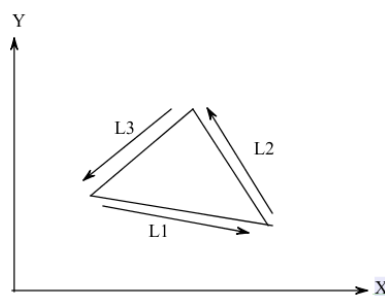


Figura 27: Elemento finito triangular de aresta.

De acordo com a definição, as bases para o elemento vetorial triangular são dadas por:

$$W_{ij} = l_{ij} (f_i \nabla f_j - f_j \nabla f_i) \quad (8.11)$$

onde l_{ij} é o comprimento da aresta ij e f_i é a função definida pela equação 8.6 no nó i . Então, de acordo com as equações 8.6, 5.11 e com a Figura 27, e levando em consideração que a aresta 1 do elemento é definida por $ij = 12$, a aresta 2 por $ij = 23$ e a aresta 3 por $ij = 31$ pode-se escrever que:

$$W_{12} = W_1 = l_1(f_1 \nabla_i f_2 - f_2 \nabla_i f_1) \quad (8.12)$$

$$W_{23} = W_2 = l_2(f_2 \nabla_i f_3 - f_3 \nabla_i f_2) \quad (8.13)$$

$$W_{31} = W_3 = l_3(f_3 \nabla_i f_1 - f_1 \nabla_i f_3) \quad (8.14)$$

Portanto, para a discretização de um campo vetorial \mathbf{A} qualquer, utilizando esse elemento triangular de aresta é:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 a_i W_i \quad (8.15)$$

8.3 DISCRETIZAÇÃO COM ELEMENTO FINITO RETANGULAR NODAL

Apresentaremos aqui unicamente o elemento linear a 4 nós. Uma representação genérica desse elemento é dado na Figura 28. As funções de base desses elementos já são bastante conhecidas e são dadas abaixo:

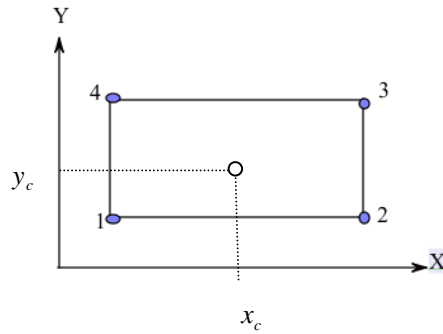


Figura 28: Elemento finito retangular nodal.

$$N_1(x, y) = \frac{1}{l_x l_y} \left(x_c + \frac{l_x}{2} - x \right) \left(y_c + \frac{l_y}{2} - y \right) \quad (8.16)$$

$$N_2(x, y) = \frac{1}{l_x l_y} \left(x - x_c + \frac{l_x}{2} \right) \left(y_c + \frac{l_y}{2} - y \right) \quad (8.17)$$

$$N_3(x, y) = \frac{1}{l_x l_y} \left(x - x_c + \frac{l_x}{2} \right) \left(y - y_c + \frac{l_y}{2} \right) \quad (8.18)$$

$$N_4(x, y) = \frac{1}{l_x l_y} \left(x_c + \frac{l_x}{2} - x \right) \left(y - y_c + \frac{l_y}{2} \right) \quad (8.19)$$

Onde (x_c, y_c) são as coordenadas do baricentro do retângulo e l_x, l_y são o comprimento das arestas do retângulo nas direções (x, y) respectivamente. Portanto, a discretização de uma determinada função escalar $\phi(x, y)$, utilizando esse tipo de elemento é da forma:

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^4 \phi_i N_i \quad (8.20)$$

8.4 DISCRETIZAÇÃO UTILIZANDO ELEMENTO RETANGULAR DE ARESTA

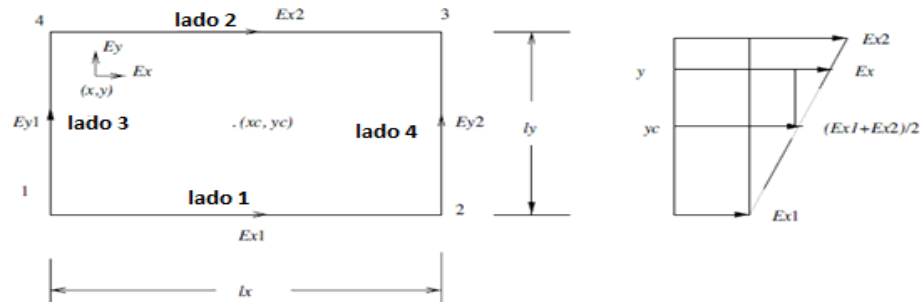


Figura 29: Elemento finito vetor retangular. (G. Pan, 2006)

Apresenta-se de uma forma esquemática na Figura 29 o elemento finito retangular de aresta com os comprimentos das arestas definidas por l_x e l_y nas direções x e y respectivamente e coordenadas do seu centro geométrico por (x_c, y_c) . A dedução das funções de base para esse elemento pode ser obtida da relação abaixo equacionada, por semelhança de triângulos (G. Pan, 2006):

$$\frac{E_{x2} - E_{x1}}{l_y} = \frac{E_x - (E_{x1} - E_{x2})/2}{y - y_c} \quad (8.21)$$

Considerando-se a definição dos vetores no retângulo da Figura 30 abaixo, as seguinte base podem ser estabelecidas para o elemento em questão:

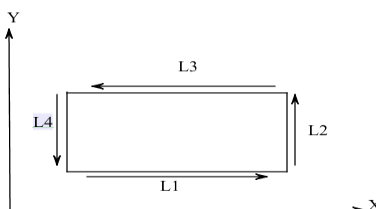


Figura 30: Elemento finito retangular vetorial.

$$N_1(y) = \frac{1}{l_y} \left(y_c + \frac{l_y}{2} - y \right) \vec{x} \quad (8.22)$$

$$N_2(x) = \frac{1}{l_x} \left(x - x_c + \frac{l_x}{2} \right) \vec{y} \quad (8.23)$$

$$N_3(y) = \frac{1}{l_y} \left(y - y_c + \frac{l_y}{2} \right) \vec{x} \quad (8.24)$$

$$N_4(x) = \frac{1}{l_x} \left(x_c + \frac{l_x}{2} - x \right) \vec{y} \quad (8.25)$$

Assim sendo, a discretização de um campo vetorial \mathbf{A} , tem para suas componentes a seguinte forma:

$$A_x = \frac{1}{l_y} \left(y_c + \frac{l_y}{2} - y \right) A_{x1} + \frac{1}{l_y} \left(y - y_c + \frac{l_y}{2} \right) A_{x2} \quad (8.26)$$

$$A_y = \frac{1}{l_x} \left(x_c + \frac{l_x}{2} - x \right) A_{y1} + \frac{1}{l_x} \left(x - x_c + \frac{l_x}{2} \right) A_{y2} \quad (8.27)$$

Verifica-se que a componente horizontal A_x é função somente de y e que a componente vertical A_y é função somente de x .

9 ANEXO B: REMALHAGEM ADAPTATIVA

Apresentam-se nesse anexo, três estimadores de erros implementados no programa MEF. Esses estimadores fornecem uma razão de redução da área ou volume do elemento com o intuito principal de homogeneizar o erro no domínio do problema. Essa remalhagem é realizada por programas livres externos, TRIANGLE (2D) e TETGEN(3D) controlados pelo MEF que através de arquivos indicam o fator de redução da área (2D) ou do volume (3D) respectivamente.

9.1.1 Continuidade da densidade de fluxo magnético

O primeiro indicador de erro é baseado na premissa de que o fluxo magnético é contínuo nas interfaces entre elementos. Definida uma densidade de fluxo magnético real B , sejam então $\hat{\mathbf{B}} = \nabla \times \mathbf{A}$ uma aproximação de \mathbf{B} derivada do potencial vetor \mathbf{A} discretizado em elementos finitos e \mathbf{B}^* uma melhor aproximação de \mathbf{B} que $\hat{\mathbf{B}}$. \mathbf{B}^* é uma aproximação feita considerando os \mathbf{B}_i^* como sendo os fluxos em cada nó dos elementos finitos. Então, uma expressão para \mathbf{B}^* pode ser dada como:

$$\mathbf{B}^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i^* \quad (9.1)$$

onde n é o número de nós do elemento finito escolhido. A diferença entre as duas aproximações de \mathbf{B} resulta em uma medida de erro ε , ou seja:

$$\varepsilon = \left| \mathbf{B}^* - \hat{\mathbf{B}} \right| \quad (9.2)$$

Convêm ressaltar que esse indicador de erro foi utilizado apenas em 2D com elementos triangulares. O exemplo do fio quadrado 2D é mostrado na Figura 33.

9.1.2 Continuidade das segundas derivadas do potencial magnético

Esse estimador de erro foi proposto por (L.Lebnstajn et al, 1995). Considerando o fato de que a expressão $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ fornece a primeira derivada surge a questão: como calcular a segunda derivada de funções para as quais a primeira derivada é nula? Uma das alternativas é calcular a densidade de fluxo magnético \mathbf{B} , em um ponto x , pela média aritmética dos fluxos desenvolvidos nos elementos vizinhos ao entorno do ponto considerado. Portanto, o cálculo da segunda derivada que é nula no caso dos elementos finitos lineares (C^0), pode ser aproximado por:

$$\mathbf{B}(x) = \sum_{e=1}^{n_v} \frac{\mathbf{B}_e}{n_v} \quad (9.3)$$

onde n_v representa o número de elementos vizinhos no entorno de x .

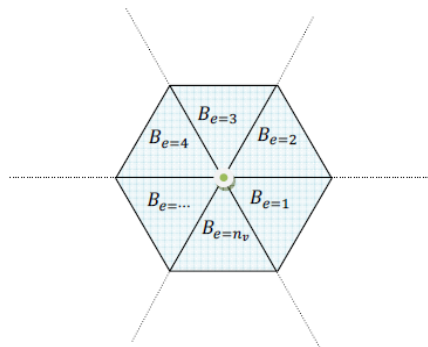


Figura 31: Fluxo magnético médio em torno de um nó.

Então partindo dos valores nodais da densidade de fluxo magnético, uma interpolação linear é definida sob o domínio elementar Ω_e . Esta mesma interpolação fornece uma aproximação para o cálculo da segunda derivada do potencial vetor \mathbf{A} :

$$\mathbf{B}_e = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{B}_i \quad (9.4)$$

Onde n corresponde ao número de nós do domínio elementar Ω_e , $\mathbf{B}_e = \{B_e^x, B_e^y, B_e^z\}$ é o vetor das componentes da densidade de fluxo magnético associado ao elemento e e \mathbf{N}_i são as funções de interpolação.

Segundo os autores citados no início desse item, e de acordo com uma interpolação polinomial devida a Dhatt e Touzot, uma função erro para as segundas derivadas é proporcional à relação:

$$\varepsilon = l_{\max}^2 \text{máx} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial^2 x}, 2 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} \right] \quad (9.5)$$

Onde $l_{\max}^2 = \text{máx}(l_{12}, l_{23}, l_{31})$ e l_{ij} corresponde aos lados de um triângulo ligado pelos vértices i, j . Portanto, as segundas derivadas do potencial \mathbf{A} podem ser expressas em termos dessa fórmula como nas relações abaixo:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial^2 x} = \sum_{i=1}^{n_n} N_{ix} B_i^x \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^{n_n} N_{iy} B_i^y \quad (9.7)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{n_n} N_{ix} B_i^x + \sum_{i=1}^{n_n} N_{iy} B_i^y \quad (9.8)$$

De posse dessas relações, o erro pode ser calculado e conseqüentemente o fator de redução r_f para a área dos elementos:

$$r_f = (\varepsilon^T - \varepsilon) / \varepsilon^T \quad (9.9)$$

9.1.3 Continuidade na força magneto motriz

O terceiro estimador de erro apresentado nesse trabalho foi desenvolvido também por Lebenstajn e Cardoso. Ele é baseado na premissa que a componente tangencial do campo magnético deve ser contínua. Uma medida da componente tangencial do campo magnético pode ser dada pelo cálculo da força magneto motriz em cada aresta do elemento. A diferença dessas grandezas inter-elementos pode ser calculada propiciando calcular o erro envolvido na solução numérica relativa à componente tangencial do campo magnético. Como dito anteriormente, esse erro é devido ao fato de que certas condições não são completamente satisfeitas pela solução numérica. Seja então, a força magneto motriz definida em cada elemento calculada por:

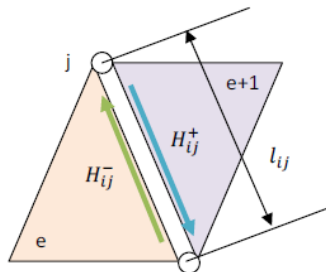


Figura 32: Representação das forças.

$$J_{ij}^e = |(H_i^e)_{ij} - (H_i^{e+1})_{ij}| l_{ij} \quad (9.10)$$

onde os índices $i, j=1,2; 2,3$ e $3,1$ representam os nós do elemento em ordem de alocação cíclica. Define-se então, um estimador de erro pela expressão:

$$\mathcal{E}^e = \sum_{j=1}^{n_s} \frac{J_{ij}^e}{n_s} \quad (9.11)$$

Segundo (Cristiano T.Vieira, 2011), todos esses estimadores de erro, satisfazem as leis de Gauss e de Ampère. Entretanto, cada um apresenta um determinado comportamento de acordo com o problema proposto. Ou seja, cada um destes atua de maneira diferente num mesmo problema. Esse comportamento fica mais claro observando a figura abaixo onde são apresentadas as remalhagens adaptativa para dois indicadores de erro para o mesmo problema: o do fio quadrado em 2D.

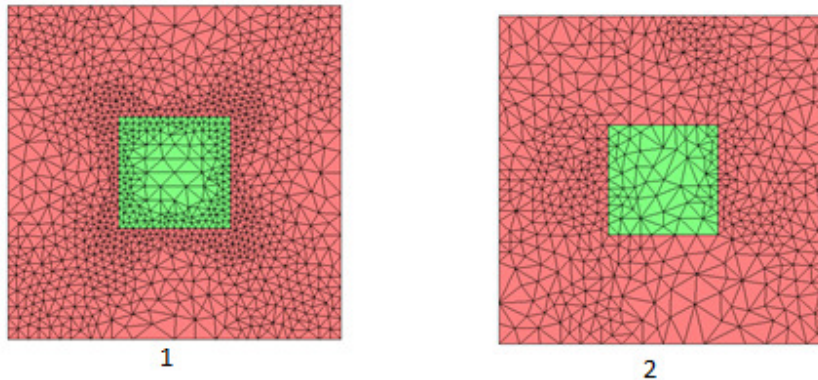


Figura 33: malha adaptativa para: 1-indicador de erro baseado na continuidade da densidade de fluxo e 2-indicador de erro baseado na continuidade da força magneto motriz.

9.1.4 Observações:

Se por um lado a remalhagem adaptativa homogeneíza o erro no domínio do problema, por outro, dependendo do indicador, ele pode concentrar elementos indiscriminadamente em regiões onde se quer satisfazer certas propriedade e que devido as limitações das interpolações essa melhoria em certo nível, não é factível. Pode-se citar o caso, de se utilizar um elemento nodal para a discretização do domínio e se querer reduzir a malha até que a condição de continuidade do campo magnético nas interfaces dos elementos seja satisfeita. Nesse caso, pode acontecer que um outro indicador de erro consiga obter, mais rapidamente, melhores resultados. Devemos alertar para o fato de que, embora a remalhagem excessiva talvez seja desnecessária e que o custo computacional talvez se eleve, os resultados sempre caminharão no sentido da solução exata.