

MARCOS FILARDY CURI

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADA DE SEGUNDA-  
ORDEM NO TEMPO PARA ESCOAMENTOS VISCOSOS COM TRANSFERÊNCIA DE  
CALOR.

Dissertação submetida ao programa de Pós  
Graduação em Ciência e Tecnologia Nucleares do  
Instituto de Engenharia Nuclear da Comissão  
Nacional de Energia Nuclear como parte dos  
requisitos necessários para a obtenção do Grau de  
Mestre em Ciências em Engenharia Nuclear –  
Ênfase Profissional em Engenharia de Reatores.

Orientador: Prof. Paulo Augusto Berquó de Sampaio (PPGIEN/CNEN)

Rio de Janeiro

2011

CURI Curi, Marcos Filardy

Uma formulação de elementos finitos estabilizada de segunda-ordem no tempo para escoamentos viscosos com transferência de calor /  
Marcos Filardy Curi – Rio de Janeiro: CNEN/IEN, 2011.

111f

Orientador :Paulo Augusto Berquó de Sampaio

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Reatores) – Instituto de  
Engenharia Nuclear, PPGIEN, 2011.

1. Método de elementos finitos.
2. Fluidodinâmica Computacional.
3. Escoamentos Viscosos e Transferência de Calor.
4. Método Estabilizado de Elementos Finitos.

CDD  
CDU

*Dedico esta dissertação a minha namorada Ana Beatriz, a minha Mãe, meu Pai e minha Irmã, que sempre estiveram ao meu lado em todas as situações da minha vida me dando forças para sempre continuar progredindo e tendo esperanças.*

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Paulo Augusto Berquó de Sampaio por todo o ensinamento passado ao longo da elaboração desta dissertação. Pelo acompanhamento de perto no desenvolvimento deste trabalho e pela assistência dada sempre que foi necessário. Sendo um professor muito presente.

A todos os professores do PPGIEN pela atenção e disposição em ajudar. Procurando sempre o melhor ambiente para os alunos estudarem e desenvolverem suas dissertações.

A direção do PPGIEN que oferece sempre a melhor estrutura para os alunos, em especial o Laboratório de Computação Paralela do Instituto de Engenharia Nuclear.

Aos amigos e amigas da turma de 2009 do PPGIEN que estão no mesmo caminho ou já concluíram seus mestrados.

Ao Adino e Janaína que sempre com muita boa vontade ajudaram nas horas necessárias, oferecendo soluções simples e eficientes.

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADA DE SEGUNDA-  
ORDEM NO TEMPO PARA ESCOAMENTOS VISCOSOS COM TRANSFERÊNCIA DE  
CALOR.

Marcos Filardy Curi

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA NUCLEARES DO INSTITUTO DE ENGENHARIA  
NUCLEAR DA COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR – ÊNFASE PROFISSIONAL EM  
ENGENHARIA DE REATORES.

Aprovada por:

---

Prof. Paulo Augusto Berquó de Sampaio, Ph.D.

---

Prof. Reinaldo Jacques Jospin, D.Sc.

---

Prof. Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho, D.Sc.

---

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Abril de 2011

Resumo da dissertação apresentada ao PPGIEN/CNEN como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. SC.)

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADA DE SEGUNDA-  
ORDEM NO TEMPO PARA ESCOAMENTOS VISCOSOS COM TRANSFERÊNCIA DE  
CALOR

Marcos Filardy Curi

Abri 2011

Orientador: Prof. Paulo Augusto Berquó de Sampaio (PPGIEN/CNEN)

Programa: Ciência e Tecnologia de Reatores – IEN/CNEN

Com os problemas de aquecimento global e a busca por fontes energéticas limpas, o aumento do emprego de energia nuclear é esperado. Assim, o desenvolvimento de tecnologias e estudos científicos para o uso de usinas nucleares é imprescindível, em particular na área de engenharia de reatores. No desenvolvimento de reatores nucleares, a mecânica de fluidos e a transferência de calor assumem papel de destaque. A fluidodinâmica computacional, conhecida como CFD a partir da sigla em Inglês para *Computational Fluid Dynamics*, é cada vez mais utilizada para otimizar os custos e a segurança dos projetos. Esta dissertação apresenta um método estabilizado de elementos finitos de segunda ordem para a solução de problemas de mecânica de fluidos e transferência de calor. A discretização com segunda ordem no tempo precede a discretização espacial com elementos finitos. Os termos de estabilização surgem naturalmente do processo de discretização, ao invés de serem introduzidos a priori na formulação variacional. O método foi implementado no programa ‘ns\_new\_solver\_2d\_a\_v2\_MPI’, escrito em FORTRAN90, desenvolvido no Laboratório de Computação Paralela do Instituto de Engenharia Nuclear (LCP/IEN). Soluções numéricas de alguns exemplos representativos, envolvendo convecção natural, mista e forçada, demonstram que a formulação estabilizada proposta neste trabalho apresenta excelente concordância com resultados experimentais e computacionais disponíveis na literatura.

Palavras chave: Método de elementos finitos, fluidodinâmica computacional, escoamentos viscosos e transferência de calor, método estabilizado de elementos finitos.

Abstract of the dissertation submitted to PPGIEN / CNEN as part of the requirements for the degree of Master's Science (M. Sc.)

A STABILIZED SECOND-ORDER TIME ACCURATE FINITE ELEMENT  
FORMULATION FOR INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW WITH HEAT TRANSFER

Marcos Filardy Curi

April 2011

Advisor: Prof. Paulo Augusto Berquó de Sampaio (PPGIEN/CNEN)

Program: Programa Ciéncia e Tecnologia de Reatores – IEN/CNEN

In view of the problem of global warming and the search for clean energy sources, a worldwide expansion on the use of nuclear energy is foreseen. Thus, the development of science and technology regarding nuclear power plants is essential, in particular in the field of reactor engineering. Fluid mechanics and heat transfer play an important role in the development of nuclear reactors. Computational Fluid Mechanics (CFD) is becoming ever more important in the optimization of cost and safety of the designs. This work presents a stabilized second-order time accurate finite element formulation for incompressible flows with heat transfer. A second order time discretization preceeds a spatial discretization using finite elements. The terms that stabilize the finite element method arise naturally from the discretization process, rather than being introduced a priori in the variational formulation. The method was implemented in the program ‘ns\_new\_solver\_2d\_a\_v2\_MPI’ written in FORTRAN90, developed in the Parallel Computing Laboratory at the Institute of Nuclear Engineering (LCP/IEN). Numerical solutions of some representative examples, including free, mixed and forced convection, demonstrate that the proposed stabilized formulation attains very good agreement with experimental and computational results available in the literature.

Keywords: Finite elements methods, computational fluid dynamics, viscous flow and heat transfer, stabilized finite elements methods.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação esquemática de avanço de tempo da solução que usa passos de tempo locais e sincronização no tempo  $t^n + \Delta t^*$ .

Figura 2 – Exemplo de decomposição de um domínio usando quatro processadores: Os elementos pertencentes á mesma partição são pintados da mesma cor. Os pontos pequenos representam os nós interiores e pontos maiores ilustram os nós compartilhados.

Figura 3 – Janela do GiD para variáveis de entrada relativas a aplicação das condições de contorno e condições iniciais.

Figura 4 – Janela do GiD para escolha do tipo de material envolvido (fluido e/ou sólido) e os números de Reynolds, Prandtl e Richardson.

Figura 5 – Janela do GiD para informações a respeito do problema que será calculado.

Figura 6 – (1) Representa as linhas de pressão típicas de um problema de escoamento. (2) Representa a distribuição de temperatura em convecção natural. (3) Mostra a malha final gerada. (4) Um perfil de velocidades de escoamento.

Figura 7 – Domínio da análise do problema de convecção natural dentro de uma cavidade.

Figura 8 – Campos de pressão, temperatura, velocidade e malhas adaptativas para  $Ra = 10^4$  e  $Pr = 0.71$

Figura 9 – Campos de pressão, temperatura, velocidade e malhas adaptativas para  $Ra = 10^5$  e  $Pr = 0.71$

Figura 10 – Campos de pressão, temperatura, velocidade e malhas adaptativas para  $Ra = 10^6$  e  $Pr = 0.71$

Figura 11 – Número de Nusselt local ao longo da parede para  $Pr = 0.71$  e  $Ra = 10^4$ ,  $Ra = 10^5$  e  $Ra = 10^6$

Figura 12 – Tempo de cálculo e estimativa de *speed-up* em função do número de processadores envolvidos para o exemplo com  $Ra = 10^6$  e  $Pr = 0.71$ .

Figura 13: Detalhe do campo de temperatura e malha adaptativa para  $Pr = 0.71$  em  $t = 70d/u_0$  ( $Ra = 5 \times 10^4$ ).

Figura 14 – Comparaçāo do número de Nusselt obtido com correlaçāes experimentais de Churchill and Chu [31] e Hyman et al. [32].

Figura 15 – Domínio da análise do problema de escoamento em torno de um cilindro quente

Figura 16 – Evolução da malha adaptativa final e campos de temperatura em  $t = 9d/u_0$ ,  $t = 29d/u_0$ ,  $t = 59d/u_0$  e  $t = 99d/u_0$ , para  $Re = 100$  e  $Ri = 0$ .

Figura 17 – Número de Nusselt local em torno do cilindro para  $Re = 100$  e  $Pr = 0.71$ .

Figura 18 – Vetor fluxo de calor através da superfície do cilindro em  $t = 99d/u_0$ , para  $Re = 100$  e  $Ri = 0$

Figura 19 – Malhas adaptativas finais e campos de temperatura em  $t = 99d/u_0$ . De cima para baixo:  $Re = 100$  e  $Ri = 0$ ,  $Re = 125$  e  $Ri = 0$ ,  $Re = 150$  e  $Ri = 0$ , respectivamente.

Figura 20 – Campo vetorial da velocidade em  $t = 99d/u_0$ . De cima para baixo:  $Re = 100$  e  $Ri = 0$ ,  $Re = 125$  e  $Ri = 0$ ,  $Re = 150$  e  $Ri = 0$ , respectivamente.

Figura 21 – Comparação dos resultados obtidos nesta dissertação com dados obtidos de Baranyi [27] e Norberg [28]

Figura 22 – Comparação dos resultados obtidos para o número de Strouhal nesta dissertação com a correlação Strouhal-Reynolds de Williamson [29] e resultados numéricos de Baranyi [27].

Figura 23 – Comparação dos resultados obtidos para o número de Nusselt nesta dissertação com os resultados de Bernstein et al. [35] e Lange et al. [36].

Figura 24 – Malhas adaptativas finais e campo de temperatura para o escoamento em torno de um cilindro quente em  $t = 99d/u_0$ . De cima para baixo:  $Re = 100$  e  $Ri = 0$ ;  $Re = 100$ ,  $Ri = 0.25$  (escoamento contrário ao sentido da gravidade) e  $Re = 100$ ,  $Ri = 0.25$  (escoamento a favor do sentido da gravidade)

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Resultados obtidos para número de Nusselt máximo e médio.

Tabela 2 – Comparação de dados obtidos relativos ao Número de Nusselt com valores encontrados na literatura.

Tabela 3 – Dados obtidos relativos a quantidade de movimento e transferência de calor com resultados de para o escoamento cruzado na convecção mista e forçada com  $Pr = 1$

## LISTA DE SÍMBOLOS E VARIÁVEIS

|               |  |
|---------------|--|
| $\Omega$      | Domínio limitado aberto  |
| $\Gamma$      | Contorno do domínio  |
| $u_a$         | Componentes cartesianas da velocidade                          |
| $\bar{u}_a$   | Componentes cartesianas da velocidade de valor prescrito       |
| $\tau_{ab}$   | Componentes cartesianas do tensor de tensão viscosa            |
| $p$           | Pressão  |
| $\beta$       | Coeficiente de expansão volumétrica                            |
| $g_a$         | Componentes cartesianas da gravidade                           |
| $\rho$        | Densidade do material (a uma temperatura de referência $T_0$ ) |
| $c$           | Capacidade térmica do fluido                                   |
| $q_b$         | Componentes cartesianas do fluxo de calor                      |
| $\mu$         | Viscosidade do fluido  |
| $x_a$         | Componentes cartesianas da posição                             |
| $\kappa$      | Condutividade térmica  |
| $\delta_{ab}$ | Delta de Kronecker   |
| $n_b$         | Componentes cartesianas do vetor normal                        |
| $\bar{T}$     | Temperatura com valor prescrito                                |
| $\bar{q}$     | Fluxo de calor com valor prescrito                             |
| $\bar{p}$     | Pressão com valor prescrito                                    |
| $\bar{G}$     | Componentes cartesianas da velocidade normal a fronteira       |
| $u'_a$        | Componentes cartesianas adimensionais da velocidade            |
| $u_0$         | Velocidade de referência                                       |
| $p'$          | Pressão adimensional   |
| $T'$          | Temperatura adimensional                                       |
| $T_{\max}$    | Temperatura máxima do problema                                 |
| $T_{\min}$    | Temperatura mínima do problema                                 |
| $x'_a$        | Componentes adimensionais cartesianas da posição               |

|                  |  |
|------------------|--|
| $t'$             | Tempo adimensional   |
| $L$              | Comprimento de referência  |
| $\ \mathbf{g}\ $ | Módulo do vetor gravidade  |
| $c_s$            | Velocidade do som num meio   |
| $T_0$            | Temperatura inicial do fluido  |
| $g'_a$           | Componentes adimensionais cartesianas da gravidade                                 |
| $Re$             | Número de Reynolds   |
| $Pr$             | Número de Prandtl  |
| $Ri$             | Número de Richardson   |
| $Ra$             | Número de Rayleigh   |
| $p^{n+1}$        | Pressão num instante n+1   |
| $p^n$            | Pressão num instante n   |
| $\Delta t$       | Passo de tempo   |
| $\Delta p$       | Variação temporal do campo de pressão  |
| $u_a^n$          | Componentes cartesianas da velocidade num instante n                               |
| $\tau_{ab}^n$    | Componentes cartesianas do tensor de tensão viscosa num instante n                 |
| $T^n$            | Temperatura num instante n   |
| $N_j$            | Função de forma no nó j  |
| $\hat{u}_a^n$    | Componentes cartesianas da velocidade num instante n espacialmente<br>discretizada |
| $\hat{p}^n$      | Pressão num instante n espacialmente discretizada                                  |
| $\hat{T}^n$      | Temperatura num instante n espacialmente discretizada                              |
| $u_{aj}^n$       | Componentes cartesianas da velocidade num instante n no nó j                       |
| $p_j^n$          | Pressão num instante n no nó j   |
| $T_j^n$          | Temperatura num instante n no nó j   |
| $\Delta \hat{p}$ | Variação temporal das pressões espacialmente discretizadas                         |
| $\Delta p_j$     | Variação temporal das pressões de um nó j  |
| $\hat{S}_a$      | Componentes cartesianas do resíduo da equação da pressão                           |
| $\bar{G}^n$      | Componentes cartesianas da velocidade normal a fronteira num instante n            |

|                     |   |
|---------------------|---|
| $\Delta u_a$        | Variação temporal das componentes cartesianas da velocidade                                   |
| $\Delta t_M$        | Passo de tempo para as pressões e componentes cartesianas da velocidade                       |
| $\Delta t_E$        | Passo de tempo para a temperatura   |
| $\Delta T$          | Variação temporal da temperatura  |
| $q_b^n$             | Componentes cartesianas do fluxo de calor num instante n                                      |
| $u_a^{n+1}$         | Componentes cartesianas da velocidade num instante n+1  |
| $T^{n+1}$           | Temperatura num instante n+1  |
| $\Delta \hat{u}_a$  | Variação temporal das componentes da velocidade espacialmente discretizadas                   |
| $\Delta u_{aj}$     | Variação temporal das componentes da velocidade de um nó j                                    |
| $\Delta \hat{T}$    | Variação da temperatura espacialmente discretizada  |
| $\Delta T_j$        | Variação da temperatura de um nó j  |
| $\hat{R}_a$         | Componentes cartesianas do resíduo da discretização da eq. de quantidade de movimento         |
| $\hat{E}$           | Resíduo da discretização da equação de energia  |
| $\lambda$           | Parâmetro de normalização   |
| $\xi$               | Parâmetro de normalização   |
| $\Pi$               | Resíduos quadrados da discretização das eqs. energia e quantidade de movimento                |
| $\hat{q}_b^n$       | Componentes cartesianas do fluxo de calor num instante n espacialmente discretizada           |
| $\hat{\tau}_{ab}^n$ | Componentes cartesianas do tensor de tensão viscosa num instante n espacialmente discretizada |
| $\alpha$            | Parâmetro ótimo de upwind   |
| $h_e$               | Tamanho linear do elemento finito   |
| $\ \mathbf{u}^n\ $  | Módulo do vetor velocidade num instante n   |
| $Re_h$              | Numero de Reynolds do elemento finito   |
| $tc$                | Escala de tempo de convecção  |
| $td$                | Escala de tempo de difusão  |
| $\alpha'$           | Parâmetro ótimo de upwind definido pelas escalas de tempo de convecção/difusão                |

|                       |   |
|-----------------------|---|
| $Pe_h$                | Número de Peclet do elemento finito   |
| $\Delta t^*$          | Passo de tempo de sincronização   |
| $\Delta \hat{u}_a^*$  | Variação das componentes da velocidade espacialmente discretizadas de $t^n$ a $t^*$ |
| $\Delta \hat{p}^*$    | Variação temporal da pressão espacialmente discretizadas de $t^n$ a $t^*$           |
| $\Delta \hat{T}^*$    | Variação da temperatura espacialmente discretizada de $t^n$ a $t^*$                 |
| $\Delta u_{aj}^*$     | Variação temporal das componentes da velocidade de um nó $j$ de $t^n$ a $t^*$       |
| $\Delta p_j^*$        | Variação temporal da pressão de um nó $j$ de $t^n$ a $t^*$                          |
| $\Delta T_j^*$        | Variação da temperatura espacialmente discretizada de um nó Joe $t^n$ a $t^*$       |
| $\hat{u}_a^*$         | Componentes cartesianas da velocidade num instante $t^*$ espacialmente discretizada |
| $\hat{p}^*$           | Pressão num instante $t^*$ espacialmente discretizada                               |
| $\hat{T}^*$           | Temperatura num instante $t^*$ espacialmente discretizada                           |
| $h_{\min}$            | Tamanho mínimo escolhido para o elemento finito                                     |
| $q_w$                 | Fluxo de calor local da parede  |
| $Nu$                  | Número de Nusselt   |
| $\langle Nu \rangle$  | Número médio de Nusselt   |
| $\langle q_w \rangle$ | Fluxo médio de calor local da parede  |
| $F_D$                 | Força de arrasto  |
| $F_L$                 | Força transversal   |
| $St$                  | Número de Strouhal  |
| $f$                   | Freqüência do desprendimento de vórtices  |
| $C_D$                 | Coeficiente da força de arrasto   |
| $C_L$                 | Coeficiente da força transversal  |

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| 1. INTRODUÇÃO.....  | 17 |
| 1.1. Importância da energia nuclear no Brasil e no mundo, e a influência da mecânica dos fluidos e transferência de calor nesse contexto..... | 17 |
| 1.2. Um pouco sobre a fluidodinâmica computacional e o seu importante papel.....  | 19 |
| 1.3. Contribuição deste trabalho.....   | 22 |
| 1.4. Organização do trabalho.....   | 23 |
| 2. MODELO FÍSICO PARA ESCOAMENTO QUASE-INCOMPRESSÍVEL E TRANSFERÊNCIA DE CALOR.....   | 25 |
| 2.1. Equações governantes na forma adimensional.....  | 27 |
| 3. FORMULAÇÃO ESTABILIZADA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....   | 29 |
| 3.1. Discretização no tempo para pressão.....   | 29 |
| 3.2. Discretização no tempo para velocidade e temperatura.....  | 32 |
| 3.3. Passos de tempo local e sincronização.....   | 38 |
| 4. O CÓDIGO COMPUTACIONAL.....  | 45 |
| 4.1. Remalhagem adaptativa.....   | 45 |
| 4.2. Implementação em sistemas de computação paralela.....  | 47 |
| 4.3. Uso do GID para etapas de pré e pós-processamento.....   | 49 |
| 4.3.1. Pré-processamento.....   | 49 |
| 4.3.2. Processamento.....   | 52 |
| 4.3.3. Pós-processamento.....   | 53 |
| 5. EXEMPLOS NUMÉRICOS.....  | 54 |
| 5.1. Convecção natural em uma cavidade quadrada.....  | 54 |
| 5.2. Convecção natural em torno de um cilindro quente.....  | 62 |
| 5.3. Convecção forçada e mista em torno de um cilindro quente sob influência de forças de empuxo.....   | 66 |
| 5.3.1 Convecção forçada.....  | 67 |
| 5.3.2 Convecção mista.....  | 76 |
| 6. CONCLUSÃO.....   | 79 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....   | 81 |
| APÊNDICE A.....   | 87 |
| APÊNDICE B.....   | 91 |

|                 |     |
|-----------------|-----|
| APÊNDICE C..... | 96  |
| APÊNDICE D..... | 106 |
| APÊNDICE E..... | 110 |

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

#### **1.1. IMPORTÂNCIA DA ENERGIA NUCLEAR NO BRASIL E NO MUNDO, E A INFLUÊNCIA DA MECÂNICA DOS FLUIDOS E TRANSFERÊNCIA DE CALOR NESSE CONTEXTO**

O planeta Terra nessas últimas décadas, após sofrer intensas atividades humanas, vem passando por uma profunda transformação em seu ecossistema. Em particular merece destaque o problema das mudanças climáticas causadas pela emissão de gases de efeito estufa, principalmente metano e dióxido de carbono.

As concentrações de dióxido de carbono e metano na atmosfera em 2005 excederam enormemente o valor natural de concentração dos últimos 650.000 anos, em grande parte pelo uso de combustíveis fósseis, como petróleo e carvão. Estudos mostram que, até o fim do século XXI, a temperatura média da Terra poderá subir cerca de 4°C. Caso isso se confirme, algumas consequências poderão ser a extinção de 30% de espécies animais e vegetais, a fome em muitos países, e a escassez de água em regiões pobres da África e Ásia [1].

A procura por fontes energéticas que conduzam a humanidade a um desenvolvimento sustentável é de extrema importância. A energia nuclear entra como uma das principais fontes energéticas limpas, competitivas e confiáveis. Em 2008 foi constatado que há, em média, 0.92 acidentes para cada milhão de horas de operação de uma usina nuclear [5]. Apesar do grave acidente ocorrido em Fukushima recentemente, após terremoto e tsunami de proporções extremas, a fonte nuclear continuará a ser necessária para atender a crescente demanda mundial por energia. Novas tecnologias de reatores nucleares, cada vez mais seguros e economicamente competitivos, bem como o aprimoramento dos sistemas de gestão e governança do setor, serão de extrema valia para que a energia nuclear possa desempenhar o papel que dela se espera. Atualmente há no mundo 438 usinas nucleares em operação,

produzindo 16% de toda energia elétrica mundial [2]. Nesse contexto o Brasil ainda se insere de maneira tímida.

A partir do final dos anos 50 começaram a ser criados no Brasil institutos de pesquisa equipados com reatores experimentais, laboratórios e grupos de pesquisa. No Instituto de Engenharia Nuclear encontra-se o Reator Argonauta, o primeiro reator de pesquisa construído no país por empresa nacional [3]. Nos anos 70, o governo Geisel decidiu implantar no país, em dez anos, um importante parque nuclear. Um gigantesco projeto, a ser concretizado em etapas: 1) um complexo de nove usinas atômicas geradoras de energia nuclear; 2) um complexo de usinas destinadas ao ciclo completo de combustível nuclear [4].

No entanto, quase 40 anos depois, no Brasil há apenas dois reatores em operação, Angra-I e Angra-II, ambos em Angra dos Reis. Juntos geram uma potência de 1884 MWe [5]. Há ainda outro atualmente em construção, o reator Angra-III. Além destas usinas estão previstas mais quatro usinas que juntas poderão fazer a produção nuclear do Brasil subir para 7300 MWe até 2030 [6-7].

As usinas nucleares brasileiras empregam um sistema de geração de potência conhecido como PWR (Pressurized Water Reactor). Uma breve descrição desse sistema é apresentada a seguir para podermos identificar o papel da mecânica de fluidos e da transferência de calor tratados nesta dissertação.

Um PWR se baseia no uso de dois circuitos refrigerantes. O circuito primário utiliza água tanto como fluido refrigerante quanto moderador de nêutrons. A água do circuito primário entra no núcleo do reator a uma temperatura de 286°C e sai a 324°C. A pressão é de aproximadamente 15.5 MPa. Nessas condições o fluido encontra-se em um estado conhecido na termodinâmica como líquido sub-resfriado. A pressão no circuito primário é mantida controlada com o uso de um pressurizador. Após passar pelo núcleo do reator e ganhar energia, a água aquecida transfere calor para o circuito secundário através de um trocador de calor conhecido como gerador de vapor. No circuito secundário, onde também circula água, a água entra no gerador de vapor na fase líquida. O vapor é formado ao longo do percurso no gerador de vapor pelo recebimento do calor transferido do circuito primário. O vapor produzido no circuito secundário é dirigido para as turbinas da central nuclear para geração de energia elétrica. O processo completo está descrito na referência [8].

Fica claro que o escoamento dos fluidos e a transferência de calor são vitais para o funcionamento de usinas nucleares, tanto em condições normais de operação quanto em condições de acidente. Assim, é de suma importância o estudo desses temas na geração de energia através de reatores nucleares.

Em um núcleo de reator a geração de energia é intensa, havendo a necessidade de remover esse calor através da passagem de fluido refrigerante e da troca de calor entre o fluido e as varetas de combustível. Essa troca de calor resulta na efetiva geração de energia elétrica e no correto funcionamento de um reator. Caso ocorra alguma ineficiência ou anomalia na troca de calor, o reator poderá sofrer consequências graves, tais como o surgimento do chamado DNB (Departure from Nucleated Boiling [8]), que resulta em drástica diminuição da capacidade de resfriamento do núcleo e em superaquecimento das varetas.

Com os resultados obtidos através de uma simulação computacional adequada, capaz de predizer a distribuição de temperatura, as características do escoamento, os gradientes de pressão e o fluxo de calor, é possível analisar o desempenho térmico e as perdas de pressão do sistema. Logo, modelos apropriados e ferramentas computacionais são importantes para predizer e avaliar como um determinado componente de uma usina se comportará, mesmo antes de sua construção. Na solução de problemas em mecânica dos fluidos e transferência de calor, podemos fazer uso da fluidodinâmica computacional (comumente conhecida como CFD – Computational Fluid Dynamics do inglês) como ferramenta de análise.

## **1.2. UM POUCO SOBRE A FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL E O SEU IMPORTANTE PAPEL**

A fluidodinâmica computacional (CFD) emergiu do desenvolvimento e da aplicação de técnicas computacionais para o tratamento de problemas das disciplinas de mecânica dos fluidos e transferência de calor. O início deste campo de estudo foi limitado principalmente para áreas de alta tecnologia, como engenharia aeronáutica e aeroespacial, mas agora é uma metodologia amplamente adotada para resolver problemas complexos de muitos campos da engenharia e das ciências aplicadas. A concepção de novos e melhores projetos de sistemas

através de simulações computacionais está resultando em maior eficiência operacional e em menores custos. Hoje, com os problemas do aquecimento global e aumento da população mundial, os engenheiros na área de geração de energia passaram a utilizar cada vez mais a CFD para reduzir os custos dos desenvolvimentos. Estes estudos computacionais estão sendo realizados para tratar de questões relacionadas com as tecnologias de energia limpa e renovável e no controle de emissões e redução substancial de poluentes ambientais.

A CFD é especialmente dedicada aos fluidos que estão em movimento, e como o comportamento do escoamento desse fluido influencia os processos que podem incluir a transferência de calor e, até mesmo, reações químicas e nucleares. Além disso, as características físicas da mecânica de fluidos podem ser descritas através de equações, geralmente em forma diferencial parcial, que regem o processo de interesse. Estas equações são freqüentemente chamadas de equações governantes na CFD.

A CFD também se tornou uma das três abordagens básicas (as outras duas sendo fluidodinâmica experimental e fluidodinâmica analítica) que podem ser empregadas para resolver problemas de dinâmica dos fluidos e transferência de calor. Tradicionalmente, os métodos analíticos e experimentais têm sido utilizados para estudar os vários aspectos da dinâmica dos fluidos e para auxiliar os engenheiros na concepção de equipamentos e processos industriais que envolvem o escoamento de fluidos e transferência de calor. Com o advento dos computadores digitais, o aspecto computacional surgiu como uma outra abordagem viável. Embora o método analítico esteja sempre presente e as experiências em laboratórios continuem a ser realizadas de forma significativa, a tendência é claramente para uma maior confiança e expansão da abordagem computacional para projetos industriais.

A CFD realmente se tornou uma poderosa ferramenta a ser empregada tanto para ciência pura, ciência aplicada ou aplicações industriais. As simulações e análises computacionais são cada vez mais realizadas em muitas aplicações na engenharia, incluindo aviões (engenharia aeroespacial) e veículos automotores (engenharia automotiva). Um exemplo recente foi a substituição de túneis de vento no estudo aerodinâmico de carros de fórmula 1, como aconteceu com a equipe HRT do piloto brasileiro Bruno Senna na temporada 2010.

Entre os aspectos positivos do uso da Fluidodinâmica Computacional (CFD) pode-se destacar:

- 1) O desenvolvimento teórico das técnicas computacionais centra-se na construção e na solução das equações governantes e no estudo de várias aproximações para estas equações. A CFD apresenta a oportunidade para estudar os termos específicos das equações governantes de uma forma mais detalhada.
- 2) A CFD complementa as abordagens experimentais e analíticas. Particularmente, a CFD reduz substancialmente os prazos e os custos em projetos, em comparação com a abordagem experimental, e oferece a capacidade de resolver uma série de problemas complexos de escoamento, onde a abordagem analítica não existe [9].
- 3) A CFD apresenta a possibilidade de simular as condições de escoamento que não são reproduzíveis em testes experimentais, como cenários de acidente nuclear feito em [10], e para simular situações que são demasiadamente grandes no aspecto geométrico como feito em [11], entre outros.
- 4) A CFD pode fornecer informações bastante detalhadas das variáveis de interesse da engenharia, tais como vorticidade, distribuição de forças e de fluxo de calor, que por vezes são difíceis de serem estudados experimentalmente.

Apesar dos pontos positivos, devemos também estar plenamente cientes das limitações inerentes à aplicação da CFD. A visualização de soluções numéricas utilizando vetores, isolinhas (curvas de nível dos campos em estudo) ou filmes de animação dos escoamentos, são de longe as formas mais eficazes para interpretar a enorme quantidade de dados geradas a partir do cálculo numérico. No entanto, existe o perigo de que uma solução errônea possa parecer muito boa em uma animação e no entanto não corresponder ao comportamento real. Fotos coloridas e brilhantes podem proporcionar uma sensação de realismo, mas serão inúteis

se não forem quantitativamente corretas. Os resultados numéricos obtidos devem ser criteriosamente analisados antes de serem utilizados.

### 1.3. CONTRIBUIÇÃO DESTE TRABALHO

Formulações estabilizadas de elementos finitos corrigem a aproximação de Galerkin padrão pela adição de termos extras, responsáveis por garantir estabilidade. As formulações estabilizadas podem ser muitas vezes interpretadas como uma ponderação do tipo Petrov-Galerkin, onde a função de ponderação usual de Galerkin é modificada com a adição de uma perturbação. Os termos resultantes da interação da perturbação com os resíduos da aproximação geram o efeito de estabilização desejado. Normalmente, os termos de estabilização aparecem multiplicados por parâmetros de estabilização (ou escalas de tempo intrínsecas) que definem a quantidade de estabilização necessária, dependendo do tamanho da malha local, velocidade e propriedades físicas.

Neste trabalho, uma discretização temporal baseada em diferenças finitas precede a aproximação espacial realizada com elementos finitos. Como resultado, o passo de tempo utilizado na discretização temporal dos balanços de quantidade moveimento e energia desempenha o mesmo papel do parâmetro de estabilização (ou a chamada escala de tempo intrínseca) utilizada em outras formulações. O fato de que o parâmetro de estabilização é o próprio passo de tempo implica em que há menos um parâmetro para definir em casos transitentes. Mais importante, ele dá uma indicação sobre como escolher o parâmetro de estabilização de acordo com as escalas de tempo do processo físico dominante [14 – 15]. No entanto, a fim de introduzir a quantidade correta de estabilização em todo o domínio da análise, o passo de tempo deve ser definido localmente, levando a uma distribuição de passos de tempo que variam espacialmente. Em [11 – 13], algoritmos especiais foram utilizados para acomodar o uso de uma distribuição de passo de tempo e para sincronizar a computação em problemas transitentes. Nesta dissertação, o procedimento proposto em [14] é seguido. Passos de tempo locais e esquemas de sincronização necessários são incorporados no método. O resultado é um método que se assemelha com formulações estabilizadas clássicas, que empregam um único passo de tempo para todo o domínio e com definição de parâmetros de estabilização locais, mas cujas origens são baseadas no uso de passos de tempo locais combinadas com um esquema de sincronização.

Porém, diferentemente do método apresentado em [14], aqui as discretizações temporais empregadas são melhoradas para uma precisão de segunda ordem no tempo. No presente método, uma equação para a pressão é derivada de uma série Taylor de segunda ordem que combina as leis de conservação de quantidade de movimento e de massa. A cada passo de tempo, uma vez que a pressão tenha sido determinada, os campos de velocidade e de temperatura são calculados resolvendo equações discretizadas obtidas a partir de outra série Taylor de segunda ordem e de uma minimização dos mínimos quadrados dos resíduos dos balanços de quantidade de movimento e de energia. Os termos que estabilizam o método dos elementos finitos surgem naturalmente do processo, ao invés de serem introduzidos a priori na formulação variacional.

Em [40] foi apresentada uma formulação estabilizada de segunda ordem no tempo, onde também a estrutura dos termos de estabilização surge naturalmente a partir da aplicação de uma aproximação por mínimos quadrados de uma discretização temporal do balanço de quantidade de movimento. Aqui esta idéia foi estendida para incluir também o balanço de energia.

O método é demonstrado na solução de convecção natural em uma cavidade, na convecção natural gerada por um cilindro quente e no cálculo de um escoamento cruzado em torno de um cilindro circular. Excelente concordância com resultados experimentais e computacionais encontrados na literatura foram obtidos.

#### **1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

No capítulo 1 é descrito o contexto em que se encontra esta dissertação. Discute-se a necessidade de estudar mecânica de fluidos e transferência de calor e, em particular, desenvolver e aplicar a CFD em problemas da engenharia nuclear.

No capítulo 2 descrevemos o modelo físico empregado nesta dissertação para escoamento quase-incompressível com transferência de calor através das equações de Navier-Stokes e suas condições de contorno.

No capítulo 3 é apresentada a formulação estabilizada de elementos finitos proposta nesta dissertação.

No capítulo 4 é descrito o código computacional desenvolvido neste trabalho, o programa `ns_new_solver_2d_a_v2_MPI`. Apresenta-se uma breve descrição da técnica de remalhagem adaptativa, bem como a implementação em sistema de computação paralela. A integração do código `ns_new_solver_2d_a_v2_MPI` com o programa de pré e pós processamento utilizado, conhecido como GiD, também é descrita.

No capítulo 5 são descritos os exemplos utilizados para validação do método.

Finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões, comentários e futuros desenvolvimentos do trabalho aqui apresentado.

## CAPÍTULO 2

### MODELO FÍSICO PARA ESCOAMENTO QUASE-INCOMPRESSÍVEL E TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Consideramos um modelo contínuo para escoamentos viscosos quase-incompressíveis, incluindo forças de flutuação (empuxo) e transferência de calor. O problema é definido sobre um domínio limitado aberto  $\Omega$ , com contorno  $\Gamma$ , contido no espaço Euclidiano  $nde$ -dimensional.

O escoamento é modelado pelas equações de Navier-Stokes quase-incompressíveis e uma equação de convecção-difusão de energia [21]. Estas são escritas em coordenadas Cartesianas usando a convenção de soma, com  $a=1,2,\dots,nde$  e  $b=1,2,\dots,nde$  :

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial u_a}{\partial t} + u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \right] - \frac{\partial \tau_{ab}}{\partial x_b} + \frac{\partial p}{\partial x_a} + \rho_0 \beta g_a (T - T_0) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{\rho_0 c_s^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_a}{\partial x_a} = 0 \quad (2.2)$$

$$\rho_0 c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u_b \frac{\partial T}{\partial x_b} \right] + \frac{\partial q_b}{\partial x_b} = 0 \quad (2.3)$$

A equação (2.1) é resultado da utilização da hipótese de Boussinesq na equação da quantidade de movimento que pode ser visto em detalhes na referência [39]. As variáveis dependentes são as componentes de velocidade, pressão e temperatura, representadas por  $u_a$ ,  $p$  e  $T$ , respectivamente. A velocidade do som no meio é denotada por  $c_s$ . O calor específico (à pressão constante) do fluido é representado por  $c$ . Note que a tensão viscosa é dada por  $\tau_{ab} = \mu(\partial u_a / \partial x_b + \partial u_b / \partial x_a)$ , onde  $\mu$  é a viscosidade do fluido. O fluxo de calor é dado por

$q_b = -\kappa \partial T / \partial x_b$ , onde  $\kappa$  é a condutividade térmica do fluido. A massa específica (à temperatura de referência  $T_0$ ) é denotada por  $\rho_0$ . O coeficiente de expansão volumétrica do fluido é  $\beta = -\rho^{-1} \partial \rho / \partial T$ .

Completamos o modelo introduzindo as condições iniciais e de contorno.

As condições de contorno de velocidade e tração são prescritas através de valores fornecidos sobre partições de fronteira não sobreposta  $\Gamma_{ua}$  e  $\Gamma_{ta}$ , de tal forma que  $\Gamma_{ua} \cup \Gamma_{ta} = \Gamma$ :

$$u_a = \bar{u}_a(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ua} \quad (2.4)$$

$$(-p\delta_{ab} + \tau_{ab})n_b = \bar{t}_a(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{ta} \quad (2.5)$$

onde  $\delta_{ab}$  é o delta de Kronecker e  $n_b$  denota as componentes Cartesianas do vetor normal ao contorno e que aponta para fora.

As condições de contorno de temperatura e fluxo de calor são prescritas por valores fornecidos sobre partições de fronteira não sobreposta  $\Gamma_T$  e  $\Gamma_q$ , de tal forma que  $\Gamma_T \cup \Gamma_q = \Gamma$ :

$$T = \bar{T}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T \quad (2.6)$$

$$q_b n_b = \bar{q}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_q \quad (2.7)$$

As condições de contorno de pressão e velocidade normal à fronteira são associadas ao balanço de massa. Elas são prescritas por valores fornecidos sobre partições da fronteira não sobreposta  $\Gamma_p$  e  $\Gamma_G$ , de tal forma que  $\Gamma_p \cup \Gamma_G = \Gamma$ :

$$p = \bar{p}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p \quad (2.8)$$

$$u_b n_b = \bar{G}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_G \quad (2.9)$$

## 2.1. EQUAÇÕES GOVERNANTES NA FORMA ADIMENSIONAL

É conveniente representar as equações governantes na forma adimensional. Isto permite identificar os números adimensionais relevantes que caracterizam os regimes de convecção livre, mista e forçada.

Aqui as variáveis são adimensionalizadas com respeito a escalas de referência convenientemente escolhidas. Os campos de velocidades, pressão e temperatura adimensionais são representados por:  $u'_a = u_a / u_0$ ,  $p' = p / \rho u_0^2$  e  $T' = (T - T_0) / (T_{\max} - T_{\min})$ , respectivamente. Note que  $u_0$  é a velocidade de referência e  $T_{\max}$  e  $T_{\min}$  são o máximo e mínimo de temperatura no problema. As coordenadas espaciais são adimensionalizadas com respeito ao comprimento de referência  $L$ , ou seja,  $x'_a = x_a / L$ . O tempo adimensional é representado por  $t' = t u_0 / L$ . O campo gravitacional é adimensionalizado com respeito ao seu módulo, ou seja,  $g'_a = g_a / \| \mathbf{g} \|$ .

Em termos das variáveis adimensionais, as equações governantes tornam-se:

$$\frac{\partial u'_a}{\partial t'} + u'_b \frac{\partial u'_a}{\partial x'_b} - \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x'_b} \left( \frac{\partial u'_a}{\partial x'_b} + \frac{\partial u'_b}{\partial x'_a} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x'_a} + Rig'_a T' = 0 \quad (2.10)$$

$$M^2 \frac{\partial p'}{\partial t'} + \frac{\partial u'_a}{\partial x'_a} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + u'_b \frac{\partial T'}{\partial x'_b} - \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial x'_b} \left( \frac{\partial T'}{\partial x'_b} \right) = 0 \quad (2.12)$$

onde  $M = u_0/c_s$  é o número de Mach,  $Re = \rho \|\mathbf{u}\|L/\mu$  é o número de Reynolds,  $Ri = \beta(T_{\max} - T_{\min})\|\mathbf{g}\|L/u_0^2$  é o número de Richardson, e  $Pr = c\mu/\kappa$  é o número de Prandtl.

A forma adimensional usada nas Eqs. (2.10 - 2.12) é adequada para convecção mista e forçada, onde uma velocidade de referência é geralmente disponível a partir dos dados do problema. No entanto, este não é o caso de convecção livre, para o qual temos de obter a escala de tempo da velocidade de forma indireta, definindo-a como  $u_0 = \sqrt{\beta(T_{\max} - T_{\min})\|\mathbf{g}\|L}$ . Assim, para convecção livre, os números de Richardson e Reynolds que aparecem nas equações governantes na forma adimensional tornam-se  $Ri = 1$  e  $Re = \sqrt{Ra/Pr}$ , respectivamente, onde  $Ra = \rho^2 c \|\mathbf{g}\| \beta (T_{\max} - T_{\min}) L^3 / \mu \kappa$  é o número de Rayleigh.

As condições de contorno adimensionais permanecem com as mesmas formas apresentadas nas Eqs. (2.4 - 2.9).

## CAPÍTULO 3

### FORMULAÇÃO ESTABILIZADA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

No restante deste trabalho serão empregadas as equações adimensionalizadas. Assim, o sobrescrito “ $\cdot$ ” usado para indicar as quantidades adimensionais será abandonado. Neste capítulo é realizada a derivação da formulação estabilizada do método dos elementos finitos utilizado em nosso código computacional. As mesmas idéias presentes em [14] e [15] foram seguidas.

O método proposto pertence a uma classe de formulações de elementos finitos que são inherentemente estáveis, ao invés de serem estabilizadas por termos extras adicionados à formulação variacional. Nesta seção, será adotada uma mesma ordem de interpolação para aproximar velocidade e pressão. Tal escolha de espaços não é viável na formulação mista convecional, uma vez que viola a condição de Babuška-Brezzi [17]. Todavia, a formulação estabilizada que será apresentada evita essas dificuldades através do surgimento de termos que garantem a estabilização [12 – 13] e [16]. A formulação também conduz a aproximações adequadas para problemas onde a convecção é dominante, gerando o efeito de “upwind” na direção da linha de corrente (Streamline Upwinding – SUPG)[18].

Embora em trabalhos anteriores uma discretização de primeira ordem no tempo tenha sido empregada, em todo este trabalho usaremos discretizações de segunda ordem no tempo para as equações de Navier-Stokes quase-incompressíveis e para a equação de convecção-difusão de energia em suas formas adimensionais (Eqs. 2.10 – 2.12).

#### 3.1. A EQUAÇÃO PARA PRESSÃO

Para obtermos uma equação de atualização da pressão, usamos uma série de Taylor no tempo para pressão. Dessa série de Taylor temos:

$$\frac{p^{n+1} - p^n}{\Delta t} = \frac{\partial p^n}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)^{n+\theta} + O(\Delta t^2) \quad (3.1)$$

onde  $0 \leq \theta \leq 1$ . Os sobrescritos  $n$  e  $n+1$  indicam o nível de tempo e  $\Delta t$  indica o passo de tempo. A variação da pressão durante o passo de tempo  $\Delta t$  é representada por  $\Delta p = p^{n+1} - p^n$ .

Substituindo o balanço de massa (discretizado no nível de tempo  $n$ ), dado pela Eq. (2.11), na Eq. (3.1), obtemos:

$$M^2 \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{\partial u_a^n}{\partial x_a} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_a}{\partial x_a} \right)^{n+\theta} + O(\Delta t^2) \quad (3.2)$$

A Eq. (3.2) pode ser reescrita como:

$$M^2 \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{\partial u_a^n}{\partial x_a} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial u_a}{\partial t} \right)^{n+\theta} + O(\Delta t^2) \quad (3.3)$$

Nesse ponto podemos introduzir o balanço de quantidade de movimento dado pela Eq. (2.10) na Eq. (3.3). Considerando que o termo de gradiente de pressão na Eq. (2.10) é tomado no nível de tempo  $n+1$  e os demais termos são tomados no nível de tempo  $n$ , obtemos a seguinte equação:

$$M^2 \frac{\Delta p}{\Delta t} = -\frac{\partial u_a^n}{\partial x_a} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left[ u_b^n \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} - \left( \frac{\partial \tau_{ab}^n}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_a} + R_{ig_a} T^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (3.4)$$

mais uma vez note que  $p^{n+1} = \Delta p + p^n$ , assim:

$$M^2 \frac{\Delta p}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial \Delta p}{\partial x_a} \right) = -\frac{\partial u_a^n}{\partial x_a} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left[ u_b^n \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} - \left( \frac{\partial \tau_{ab}^n}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial p^n}{\partial x_a} + R_{ig_a} T^n \right] + O(\Delta t^2) \quad (3.5)$$

podendo ser representado na forma discretizada no tempo da seguinte maneira:

$$M^2 \frac{\Delta p}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial \Delta p}{\partial x_a} \right) = F_a + O(\Delta t^2) \quad (3.6)$$

onde:

$$F_a = \left[ - \frac{\partial u_a}{\partial x_a} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b} - \left( \frac{\partial \tau_{ab}}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_a} + R i g_a T \right) \right]^n \quad (3.7)$$

Note que o procedimento descrito acima começa com uma expansão de série de Taylor para pressão e posteriormente incorpora os balanços de massa e de quantidade de movimento. A discretização espacial é feita com elementos triangulares Lagrangianos em 2D. Para as variáveis do problema temos:  $\hat{u}_a^n = N_j u_{aj}^n$ ,  $\hat{T}^n = N_j T_j^n$ ,  $\hat{p}^n = N_j p_j^n$ , e  $\Delta \hat{p}^n = N_j \Delta p_j$ . Note que  $N_j$  representa as funções de forma (lineares) do elemento finito e as variáveis com o subscrito  $j$  são valores nodais.

Temos então o resíduo da discretização feita como:

$$\hat{S}_a = M^2 \frac{\Delta \hat{p}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} \right) - \hat{F}_a \quad (3.8)$$

onde:

$$\hat{F}_a = \left[ - \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial x_a} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a}{\partial x_b} - \left( \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_a} + R i g_a \hat{T} \right) \right]^n$$

Empregando o método clássico de Galerkin, usando a identidade de Green à Eq. (3.8), e introduzindo a condição de contorno dada pela Eq. (2.9), obtemos:

$$\int_{\Omega} M^2 N_i \frac{\Delta \hat{p}}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} d\Omega = \quad (3.9)$$

$$-\int_{\Omega} N_i \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_a} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \left( \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + Rig_a \hat{T}^n \right] - \int_{\Gamma_G} \frac{N_i}{2} \left( \bar{G}^{n+1} - \bar{G}^n \right) d\Gamma$$

$$\forall \Delta p_i \text{ livre}$$

Substituindo  $\Delta \hat{p} = N_j \Delta p_j$  na Eq. (3.9), obtemos um sistema de equações lineares simétricas para calcular os valores nodais da atualização da pressão:

$$[\mathbf{A}_{pp}] \{ \Delta \mathbf{p} \} = \{ \mathbf{F}_p \}_i \quad (3.10)$$

No Apêndice A, é demonstrada toda a etapa descrita para obtenção da Eq. (3.9) a partir da Eq. (3.8), e a forma das Eqs. (3.9 e 3.10) em 2D.

### 3.2. AS EQUAÇÕES PARA VELOCIDADE E TEMPERATURA

Uma vez que o campo de pressão foi determinado, usamos uma discretização de segunda ordem no tempo para o balanço de quantidade de movimento e energia dada pelas Eqs. (2.10 e 2.12) para obtermos as equações de atualização para as componentes da velocidade e para a temperatura.

Ao discretizarmos as Eqs. (2.10 e 2.12) com respeito ao tempo temos:

$$\frac{\Delta u_a}{\Delta t_M} + \frac{1}{2} \left( u_b^n \frac{\partial \Delta u_a}{\partial x_b} + \Delta u_b \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} \right) - \frac{I}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta u_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta u_b}{\partial x_a} \right) + \frac{Rig_a \Delta T}{2} = H_a + O(\Delta t^2) \quad (3.11)$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_E} + \frac{1}{2} \left( u_b^n \frac{\partial \Delta T}{\partial x_b} + \Delta u_b \frac{\partial T^n}{\partial x_b} \right) - \frac{I}{2RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial x_b} \right) = Q + O(\Delta t^2) \quad (3.12)$$

onde:

$$H_a = - \left[ u_b^n \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \tau_{ab}^n}{\partial x_b} + R_{ig_a} T^n \right] \quad (3.13)$$

$$Q = - \left[ u_b^n \frac{\partial T^n}{\partial x_b} + \frac{\partial q_b^n}{\partial x_b} \right] \quad (3.14)$$

No Apêndice B mostramos passo a passo que as Eqs. (3.11 e 3.12) são equações com discretizações exatas de segunda ordem no tempo. Como mencionado anteriormente, o sobrescritos  $n$  e  $n+1$  indicam o nível de tempo. Aqui, porém consideram-se dois passos de tempo diferentes:  $\Delta t_M$  para o balanço de quantidade de movimento e  $\Delta t_E$  para o balanço de energia. Estes passos de tempo serão idênticos se o número de Prandtl for unitário. De uma forma genérica, porém, vão diferir à medida que os processos de difusão de quantidade de movimento e de energia ocorram a taxas diferentes (número de Prandtl diferente de 1). A variação da velocidade durante o passo de tempo  $\Delta t_M$  é representada por  $\Delta u_a = u_a^{n+1} - u_a^n$ , e a variação da temperatura durante o passo de tempo  $\Delta t_E$  é  $\Delta T = T^{n+1} - T^n$ . O campo de pressão no nível de tempo  $n+1/2$  pode ser escrito como  $p^{n+1/2} = p^n + \frac{1}{2} \Delta p$ .

Consideremos a seguinte discretização espacial das variáveis do problema:

$\hat{u}_a^n = N_j u_{aj}^n$ ,  $\Delta \hat{u}_a = N_j \Delta u_{aj}$ ,  $\hat{T}^n = N_j T_j^n$  e  $\Delta \hat{T} = N_j \Delta T_j$ . Mais uma vez,  $N_j$  representa as funções de forma do elemento finito e as variáveis com o subscrito  $j$  são valores nodais. Usando os campos das variáveis discretizadas, podemos escrever as seguintes expressões para os resíduos quadrados gerados pela discretização:

$$\Pi = \int_{\Omega} \lambda \hat{R}_a \hat{R}_a d\Omega + \int_{\Omega} \zeta \hat{E} \hat{E} d\Omega \quad (3.15)$$

onde os parâmetros  $\lambda$  e  $\zeta$  são parâmetros de escala a serem definidos posteriormente e  $\hat{R}_a$  e  $\hat{E}$  são resíduos da discretização das Eqs. (3.11 e 3.12), dados por:

$$\hat{R}_a = \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2 Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_a} \right) + \frac{Rig_a \Delta \hat{T}}{2} - \hat{H}_a \quad (3.16)$$

$$\hat{E} = \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2 Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) - \hat{Q} \quad (3.17)$$

onde

$$\hat{H}_a = - \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + Rig_a \hat{T}^n \right] \quad (3.18)$$

$$\hat{Q} = - \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] \quad (3.19)$$

Minimizando  $\Pi$ , dado pela Eq. (3.15), em relação aos  $\Delta u_{ci}$  livres e aos valores nodais  $\Delta T_i$  livres, obtemos:

$$\int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \hat{R}_c d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \hat{R}_a d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \hat{E} d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

$\forall \Delta u_{ci}$  livre

$$\int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \hat{E} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \hat{R}_a d\Omega = 0 \quad (3.21)$$

$\forall \Delta T_i$  livre

Os parâmetros  $\lambda$  e  $\xi$  foram escolhidos como  $\Delta t_M$  e  $\Delta t_E$  respectivamente, com o objetivo de normalizar (e adimensionalizar) as funções de peso nas Eqs. (3.20 e 3.21).

Note que as funções de ponderação presentes nos primeiros termos dessas equações (3.20 e 3.21) têm a mesma estrutura da função peso do método SUPG de Brooks e Hughes [18]. As funções de peso restantes, afetando o segundo e terceiro termo na Eq. (3.20) e afetando o segundo termo na Eq. (3.21), são específicas do método aqui apresentado.

Em nosso trabalho e nas referências [14-16], a estrutura da função de ponderação obtida é diretamente dependente de qual discretização temporal das variáveis é utilizada. Assim, caso tivéssemos discretizado as variáveis de temperatura e velocidade explicitamente (ou seja, as variáveis tomadas num nível de tempo  $n$ ) nós obteríamos funções de ponderação do tipo Galerkin padrão.

Combinando a Eq. (3.20) e a condição de contorno de tração, dada pela Eq. (2.5), obtemos o seguinte balanço discretizado de quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \hat{R}_c d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \hat{R}_a d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \hat{E} d\Omega \\ + \int_{\Gamma_{t_c}} N_i \left[ (-p\delta_{cb} + \tau_{cb}) n_b - \bar{t}_c(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

$\forall \Delta u_{ci}$  livre

Mais uma vez, combinando a Eq. (3.21) e a condição de contorno de fluxo de calor, dada pela Eq. (2.7), obtemos o seguinte balanço discretizado de quantidade de energia:

$$\int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \hat{E} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \hat{R}_a d\Omega + \int_{\Gamma_q} N_i \left[ \bar{q}(\mathbf{x}, t) - q_b n_b \right]^{n+1/2} d\Gamma = 0 \quad (3.23)$$

$\forall \Delta T_i$  livre

Introduzindo as Eqs. (3.16 – 3.19) nas Eq. (3.22 e 3.23) e usando a identidade de Green, obtemos as equações governantes discretizadas da variação da velocidade e temperatura durante o passo de tempo. São elas:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_c + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_c^n}{\partial x_b} \right) \right] \right] d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2Re} \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_a} \right) \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left( \frac{Rig_a \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{Rig_c \Delta \hat{T}}{2} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right\} d\Omega \\
& = - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_c^n}{\partial x_b} + Rig_c \hat{T}^n \right] d\Omega \quad \forall \Delta u_{ci} \text{ libre} \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + Rig_a \hat{T}^n \right] d\Omega \quad (3.24) \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_c} d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial \hat{\tau}_{cb}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \hat{p}^{n+1/2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_c} \right] \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \hat{\tau}_{cb}^n \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{t_c}} N_i \left[ \hat{t}_c(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right\} d\Omega + \\
& \int \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{Rig_a \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{2} \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega + \quad (3.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_a} \right) \right) d\Omega = \\
& = - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + R_i g_a \hat{T}^n \right] d\Omega \quad \forall \Delta T_i \text{ livre} \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \hat{q}_b^n d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i \left[ \bar{q}(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma
\end{aligned}$$

No Apêndice C é detalhado o procedimento que resulta nas Eqs. (3.24 e 3.25) e suas formas em 2D.

Substituindo as variáveis do problema por:  $\Delta \hat{u}_a = N_j \Delta u_{aj}$  (identicamente  $\Delta \hat{u}_b = N_j \Delta u_{bj}$ ) e  $\Delta \hat{T} = N_j \Delta T_j$  nas Eqs. (3.24 e 3.25), obtemos um sistema de equações simétricas para calcular os valores nodais para a atualização da velocidade e da temperatura. Para problemas em 2D temos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{uu} & \mathbf{A}_{uv} & \mathbf{A}_{uT} \\ \mathbf{A}_{uv}^T & \mathbf{A}_{vv} & \mathbf{A}_{vT} \\ \mathbf{A}_{uT}^T & \mathbf{A}_{vT}^T & \mathbf{A}_{TT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{T} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_v \\ \mathbf{F}_T \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

No apêndice D mostramos a forma das Eqs. (3.26) em 2D.

É importante notar que a discretização temporal é realizada antes da discretização espacial, que por sua vez é feita usando elementos finitos convencionais da classe  $C_0$  [19]. Os termos multiplicado por  $\Delta t_M$  e  $\Delta t_E$  na equação (3.22 e 3.23) são responsáveis pelo controle das oscilações espaciais (wiggles) em escoamentos com convecção dominante, e pela estabilização do cálculo, independentemente das restrições Babuška-Brezzi na escolha dos espaços de interpolação para velocidade e pressão. Em particular, o uso de interpolação de mesma ordem para todas as variáveis adotadas aqui se torna possível através de uma escolha

adequada de  $\Delta t_M$  e  $\Delta t_E$ . É importante ressaltar que ao invés de serem propostos *a priori*, os termos de estabilização no método presente surgem naturalmente da minimização dos mínimos quadrados dos resíduos quadrados da quantidade de movimento e energia discretizados no tempo com respeito aos graus de liberdade de temperatura e de velocidade.

Note que a abordagem presente conduz a um sistema de equações parcialmente acoplado, onde a solução para os graus de liberdade de pressão é obtido primeiro e, em seguida, a solução para os componentes de velocidade e temperatura são realizadas. Quando comparado com o trabalho anterior de [14], observamos que a precisão do método de segunda ordem no tempo foi alcançada à custa do acoplamento da solução para componentes de velocidade e temperatura, enquanto que em [14], as componentes de velocidade e temperatura são computadas de forma totalmente segregada.

Por outro lado, com uma implementação adequada de uma solução elemento-por-elemento, como o gradiente conjugado por exemplo, um código com base no método atual é suscetível de ser mais escalável para aplicações paralelas do que um baseado no procedimento totalmente segregado apresentado em [14]. Esperamos isso, pois teremos comparativamente mais cálculos por elemento no presente método. Assim, como os cálculos de elemento-por-elemento são realizados em paralelo, isso resulta em um aumento do número de operações paralelas no código.

### 3.3. PASSOS DE TEMPO LOCAL E SINCRONIZAÇÃO

As funções de ponderação presentes nos primeiros termos das equações (3.20 e 3.21) têm a mesma estrutura da função de ponderação do método SUPG de Brooks e Hughes [18],

onde  $W_i = N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b}$ , assim temos uma idéia de como escolher o passo de tempo, pois

para elementos lineares, uma quantidade apropriada [18] de “upwind” é introduzida no balanço de quantidade de movimento se escolhermos o passo de tempo como:

$$\Delta t = \alpha \frac{h_e}{\|\mathbf{u}^n\|} \quad (3.27)$$

onde

$$\alpha = \left[ \coth\left(\frac{Re_h}{2}\right) - \frac{2}{Re_h} \right] \quad (3.28)$$

Nas equações acima  $\|\mathbf{u}^n\| = \sqrt{u_a^n u_a^n}$  é o módulo da velocidade local e  $h_e$  é o tamanho característico do elemento (tomamos a raiz quadrada da área do elemento). O número de Reynolds do elemento é  $Re_h = \rho \|\mathbf{u}^n\| h_e / \mu$ . Note que  $\alpha$ , definido na Eq. (3.28), é o chamado parâmetro ótimo de “upwind”, cuja escolha conduz a soluções nodalmente exatas para problemas unidimensionais estacionários de convecção-difusão [16]. Além disso, como mostrado por Sampaio [11-13], [15-16], a escolha do passo de tempo de acordo com as Eqs. (3.27 – 3.28) também conduz a estabilização da solução da pressão, independentemente das restrições de Babuška-Brezzi nas escolhas dos espaços de interpolação da velocidade e da pressão.

É interessante notar que o passo de tempo definido acima é apropriado para seguir o ritmo de evolução dos processos de convecção-difusão resolvíveis numa malha com tamanho local  $h_e$  [16]. Para convecção forte,  $Re_h \gg 1$ , obtemos  $\Delta t \rightarrow h_e / \|\mathbf{u}^n\|$ , enquanto que para difusão pura,  $Re_h = 0$ , temos  $\Delta t = \rho h_e^2 / 6\mu$ .

Neste trabalho propomos um caminho alternativo para escolha do passo de tempo. Em vez de usar as Eqs. (3.27 e 3.28), escolhemos para passo de tempo o valor mínimo entre as escalas de tempo características de convecção e de difusão, ou seja,  $\Delta t = \min(tc, td)$ , onde  $tc = h_e / \|\mathbf{u}^n\|$  é a escala de tempo de convecção e  $td = \rho h_e^2 / 6\mu$  é a escala de tempo de difusão.

Isto é equivalente a aproximar o valor de  $\alpha$  na Eq. (3.28) por  $\alpha'$  dado pela função:

$$\alpha'(Re_h) = \begin{cases} Re_h/6 & \text{se } Re_h \leq 6 \\ 1 & \text{se } Re_h > 6 \end{cases} \quad (3.29)$$

e então calcular  $\Delta t = \alpha' h_e / \|\mathbf{u}^n\|$ . O valor de  $\alpha'$ , dado pela Eq. (3.29), é exatamente a aproximação assintótica para  $\alpha$  introduzida por Hughes e Brooks [18] para simplificar o cálculo da função peso do método SUPG. É interessante observar que a mesma aproximação assintótica foi obtida aqui escolhendo o passo de tempo de acordo com a escala de tempo do processo físico dominante (o mais rápido).

Por outro lado, com o objetivo de introduzir “upwind” ótimo na equação de energia, o número de Reynolds do elemento na Eq. (3.29) deve ser substituído pelo número de Peclet do elemento  $Pe_h = Re_h Pr$ . A menos que o número de Prandtl seja  $Pr = 1$ , o passo de tempo para as equações de quantidade de movimento e energia serão diferentes (a diferença é maior dentro da camada limite, onde os efeitos de difusão são dominantes). Além disso, note que o passo de tempo dado por  $\Delta t = \alpha' h_e / \|\mathbf{u}^n\|$  varia espacialmente de acordo com a velocidade local, propriedades físicas e o tamanho da malha local. Portanto, para aplicar “upwind” ótimo tanto para quantidade de movimento quanto para energia, precisamos usar duas variações espaciais distintas para o passo de tempo. Para a quantidade de movimento usamos  $\Delta t_M = \alpha'(Re_h)h_e / \|\mathbf{u}^n\|$ , enquanto  $\Delta t_E = \alpha'(Pe_h)h_e / \|\mathbf{u}^n\|$  é usada para energia. Isso é equivalente a selecionar  $\Delta t_M = \min(t_c, t_{dM})$  e  $\Delta t_E = \min(t_c, t_{dE})$ , onde  $td_M = \rho h_e^2 / 6\mu$  e  $td_E = \rho c h_e^2 / 6\kappa$ , são as escalas de tempo de difusão de quantidade de movimento e energia respectivamente.

Assim, por utilizarmos passos de tempo ótimos, que variam com a posição de acordo com a quantidade transportada (quantidade de movimento ou energia), devemos recorrer a um esquema especial para sincronizar o avanço do tempo durante o cálculo. Neste trabalho, adotamos o procedimento introduzido na referência [14]. Esse esquema é baseado na seleção de um passo de tempo de sincronização  $\Delta t^*$ , que deverá ser o mesmo para todas as variáveis e para todos os pontos do domínio (na verdade, o conceito usual para passo de tempo).

A figura 1 é um esquema que ilustra distribuições espaciais típicas de passo de tempo para quantidade de movimento e energia, além do passo de tempo de sincronização  $\Delta t^*$ , tornando uniforme o passo de tempo para todas as variáveis, como dito acima. O passo de tempo de sincronização é escolhido para ser muito próximo do passo de tempo mínimo do

problema, sendo calculado como  $\Delta t^* = 0.999 \min(\Delta t_M, \Delta t_E)$ . O passo de tempo  $\Delta t^*$  é o passo de tempo usado para sincronizar o avanço da simulação numérica.

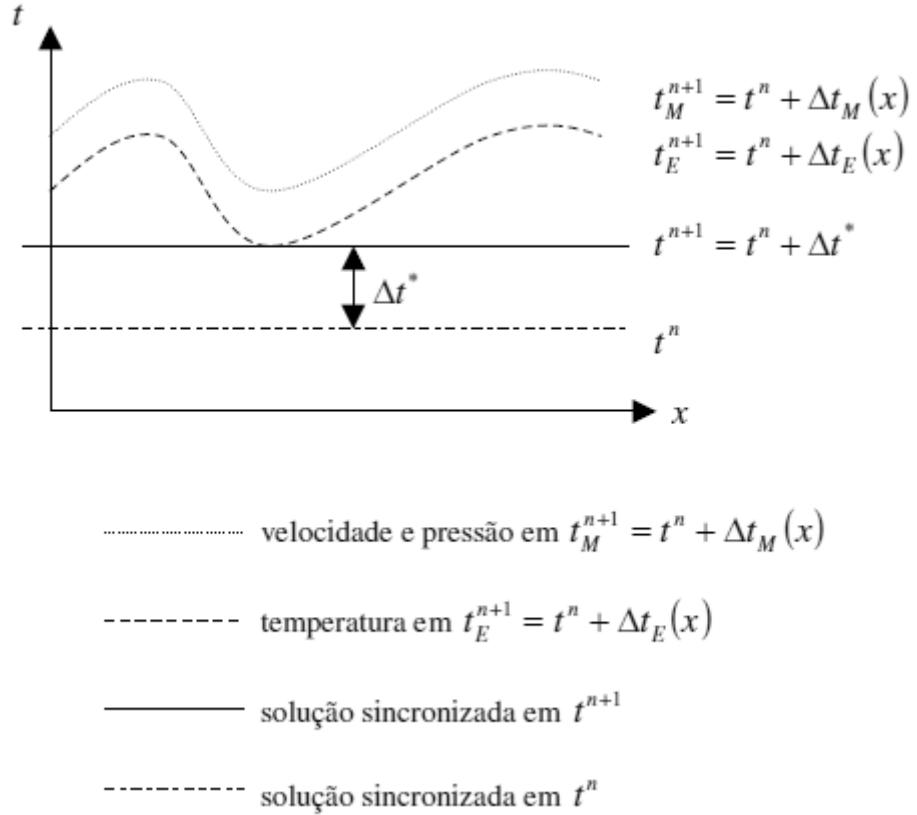


Figura 1 – Representação esquemática de avanço de tempo da solução que usa passos de tempo locais e sincronização no tempo  $t^n + \Delta t^*$ .

Considere que  $\Delta\hat{u}_a$ ,  $\Delta\hat{p}$  e  $\Delta\hat{T}$  são as variações das variáveis obtidas quando são usados os passos de tempo locais apropriados para resolver as Eqs. (3.9, 3.24 e 3.25). Por outro lado, vamos representar as variações das variáveis do tempo  $t^n$  ao tempo  $t^n + \Delta t^*$  (o tempo de sincronização) como  $\Delta\hat{u}_a^*$ ,  $\Delta\hat{p}^*$  e  $\Delta\hat{T}^*$ . Desta forma, mantendo a mesma taxa de variação temporal, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\Delta\hat{u}_a^*}{\Delta t^*} = \frac{\Delta\hat{u}_a}{\Delta t_M} \quad (3.30)$$

$$\frac{\Delta \hat{p}^*}{\Delta t^*} = \frac{\Delta \hat{p}}{\Delta t_M} \quad (3.31)$$

$$\frac{\Delta \hat{T}^*}{\Delta t^*} = \frac{\Delta \hat{T}}{\Delta t_E} \quad (3.32)$$

onde  $\Delta \hat{u}_a^* = \hat{u}_a(\mathbf{x}, t^n + \Delta t^*) - \hat{u}_a(\mathbf{x}, t^n)$ ,  $\Delta \hat{u}_a = \hat{u}_a(\mathbf{x}, t^n + \Delta t_M) - \hat{u}_a(\mathbf{x}, t^n)$ ,  $\Delta \hat{p}^* = \hat{p}(\mathbf{x}, t^n + \Delta t^*) - \hat{p}(\mathbf{x}, t^n)$ ,  $\Delta \hat{p} = \hat{p}(\mathbf{x}, t^n + \Delta t_M) - \hat{p}(\mathbf{x}, t^n)$ ,  $\Delta \hat{T}^* = \hat{T}(\mathbf{x}, t^n + \Delta t^*) - \hat{T}(\mathbf{x}, t^n)$ , e  $\Delta \hat{T} = \hat{T}(\mathbf{x}, t^n + \Delta t_E) - \hat{T}(\mathbf{x}, t^n)$ .

Na prática, a computação baseada no passo de tempo local e a etapa de sincronização não precisam ser executadas separadamente. As Eqs.(3.30-3.32), que representam a etapa de sincronização, podem ser inseridas diretamente nas Eqs. (3.9, 3.24 e 3.25). Assim, a solução sincronizada em  $t^n + \Delta t^*$  pode ser obtida diretamente resolvendo as seguintes equações:

$$\int_{\Omega} M^2 N_i \frac{\Delta \hat{p}^*}{\Delta t^*} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M^2}{2 \Delta t^*} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \frac{\partial \Delta \hat{p}^*}{\partial x_a} d\Omega = \quad (3.33)$$

$$- \int_{\Omega} N_i \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_a} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \left( \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + Rig_a \hat{T}^n \right] - \int_{\Gamma_G} \frac{N_i}{2} \left( \bar{G}^{n+1} - \bar{G}^n \right) d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{\Delta t^*} \left[ \Delta \hat{u}_c + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_c^n}{\partial x_b} \right) \right] \right] d\Omega +$$

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{\Delta t^*} \frac{1}{2Re} \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M^2}{2 \Delta t^*} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t^*} \left[ \Delta \hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{\Delta t_M}{\Delta t^*} \frac{1}{2 Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_a} \right) \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left( \frac{\Delta t_E}{\Delta t^*} \frac{Rig_a \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\Delta t_E}{\Delta t^*} \frac{Rig_c \Delta \hat{T}}{2} \right] d\Omega \quad (3.34) \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t^*} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} + \frac{\Delta t_M}{2} \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right] - \frac{\Delta t_E}{\Delta t^*} \frac{1}{2 Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right\} d\Omega \\
& = - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_c^n}{\partial x_b} + Rig_c \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + Rig_a \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_c} d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial \hat{\tau}_{cb}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \hat{p}^{n+1/2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_c} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_c} N_i \left[ \hat{t}_c(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma \right. \\
& \left. \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left\{ \frac{1}{\Delta t^*} \left[ \Delta \hat{T}^* + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{\Delta t_E}{\Delta t^*} \frac{1}{2 Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial x_b} \right) \right\} d\Omega + \right. \\
& \left. \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{\Delta t_E}{\Delta t^*} \frac{Rig_a \Delta \hat{T}^*}{2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{2} \frac{\Delta t_M}{\Delta t^*} \Delta \hat{u}_b^* \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{1}{\Delta t^*} \left[ \Delta \hat{u}_a^* + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a^*}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b^* \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{\Delta t_M}{\Delta t^*} \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a^*}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b^*}{\partial x_a} \right) \right) d\Omega = \\
& = - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega \quad (3.35) \\
& - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + Rig_a \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \hat{q}_b^n d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i \left[ \hat{q}(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma
\end{aligned}$$

onde  $\hat{p}^{n+1/2} = \hat{p}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t_M}{\Delta t^*} \Delta \hat{p}^*$ ,  $\Delta \hat{u}_a^* = N_j \Delta u_{aj}^*$ ,  $\Delta \hat{p}^* = N_j \Delta p_j^*$  e  $\Delta \hat{T}^* = N_j \Delta T_j^*$ . Aqui  $\Delta u_{aj}^*$ ,  $\Delta p_j^*$  e  $\Delta T_j^*$  são os valores nodais das variações do problema do tempo  $t^n$  ao tempo  $t^* = t^n + \Delta t^*$ . A nova solução sincronizada em  $t^* = t^n + \Delta t^*$  é dada por  $\hat{u}_a^* = \hat{u}_a^n + \Delta \hat{u}_a^*$ ,  $\hat{p}^* = \hat{p}^n + \Delta \hat{p}^*$  e  $\hat{T}^* = \hat{T}^n + \Delta \hat{T}^*$ .

O procedimento de solução do problema é semi-segregado, no sentido que a pressão é computada em primeiro, e independentemente a cada passo, enquanto a solução das componentes da velocidade e temperatura encontra-se acoplada, como visto nas Eqs. (3.26). Depois de cada passo, as variáveis do problema são atualizadas e a computação procede até que um tempo final especificado para análise seja alcançado.

Todos os sistemas de equações resultam em matrizes simétricas positivas definidas. Os sistemas de equações são resolvidos usando o método de gradientes conjugados com pré-condicionador de Jacobi [20], em uma implementação Elemento-por-Elemento (Element-by-Element – EBE), onde no método de gradientes conjugados a tolerância usada nos exemplos desta dissertação é  $10^{-6}$  para o cálculo da pressão e  $10^{-3}$  para o cálculo de velocidade e temperatura.

## CAPÍTULO 4

### O CÓDIGO COMPUTACIONAL

O código computacional ‘ns\_new\_solver\_2d\_a\_v2\_MPI’ utilizado neste trabalho foi desenvolvido a partir do programa ‘ns\_solver\_MPI\_2d\_a’ escrito em FORTRAN90 por Sampaio [14-15] e validado em diversos problemas clássicos da mecânica de fluidos e transferência de calor. Na referência [14] foram mostradas aplicações envolvendo convecção forçada, mista e natural.

Para o presente trabalho foi necessário modificar o programa ‘ns\_solver\_MPI\_2d\_a’ de modo a introduzir uma nova rotina para solução de sistemas acoplados em velocidade e temperatura, mas mantendo a organização básica do programa original. Também foram feitas pequenas alterações na entrada e saída de dados, para introduzir os números adimensionais de Reynolds, Prandtl e Richardson, e para a preparação de arquivos de saída com os números de Nusselt, e as forças transversais e de arrasto.

Deste modo o programa ‘ns\_new\_solver\_2d\_a\_v2\_MPI’ utilizado neste trabalho manteve as principais características do programa original ‘ns\_solver\_MPI\_2d\_a’. Estas são, o emprego de técnicas de remalhagem adaptativa baseadas em estimativa de erros de discretização dos gradientes de velocidades e implementação em sistemas de computação paralela através de técnicas de partição de domínio e comunicação entre processadores utilizando rotinas MPI. Essas técnicas são descritas a seguir.

#### 4.1. REMALHAGEM ADAPTATIVA

Neste trabalho, o estimador de erro a *posteriori* de Zienkiewicz E Zhu [22] é usado para estimar o erro do gradiente de velocidade e para orientar um procedimento de remalhagem baseado na distribuição igualitária do erro entre os elementos finitos. A estratégia, apresentada em detalhes em [13], requer que o usuário especifique o número de

elementos desejados e tamanho mínimo de elementos ( $h_{\min}$ ) para ser empregado na simulação. Note que as discretizações do espaço e do tempo são relacionadas, como discutido na seção 3.2. Assim, além de limitar o número de elementos necessários para cobrir uma dada região do domínio, a escolha do tamanho mínimo do elemento indiretamente limita também o passo de tempo.

A remalhagem é baseada na utilização de uma malha de base mais grosseira que é refinada localmente com a criação de novos nós e elementos à medida que estes são necessários. Os novos nós são conectados à malha de base original usando o algoritmo de Bowyer [23].

Estamos lidando com problemas onde o escoamento é transiente. Em geral, à medida que a simulação procede, uma malha que está bem ajustada a uma configuração particular do escoamento em um dado tempo, poderá não ser mais adequada posteriormente. Em trabalhos anteriores [11], [13] foi adotado um algoritmo de remalhagem automático que implicava em estimar o erro a cada passo de tempo. Aqui empregamos uma estratégia diferente, a qual é descrita abaixo.

Primeiro, estimamos a escala de tempo adequada para seguir a evolução dos maiores vórtices. Se  $u_0$  é a velocidade característica do problema e  $L$  é o comprimento espacial característico, definimos a escala de tempo para acompanhar o grande vórtice como  $t_{large} = L/2u_0$ . Iniciando com a primeira malha, e então para cada nova malha gerada, definimos o número de passos para o qual a malha será usada de acordo com  $nsteps = t_{large}/\Delta t^*$ , onde  $\Delta t^*$  é o passo de tempo de sincronização usado para avançar a solução ( $nsteps$  é arredondado para o número inteiro mais próximo). Quando o número de passos  $nsteps$  estabelecido para uma malha particular é alcançado, o erro do gradiente de velocidade é estimado e uma nova malha é gerada utilizando a estimativa de erro.

Considere, por exemplo, a aplicação desse algoritmo de remalhagem automática ao problema de desprendimento de vórtices a partir de um cilindro circular em escoamento cruzado. Se tomarmos  $u_0$  como a velocidade de corrente livre e  $L$  como o diâmetro do cilindro, teremos aproximadamente de 10-12 malhas adaptativas para cada período de

desprendimento de vórtices. Este número de malhas é adequado para seguir detalhadamente a evolução do escoamento através de malhas de elementos finitos bem ajustados ao problema.

## 4.2. IMPLEMENTAÇÃO EM SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO PARALELA

A implementação computacional em sistemas de computação paralela da classe Beowulf é baseada no conceito de decomposição do domínio. A biblioteca METIS [24] é usada para distribuir os elementos finitos (e os nós) entre os processadores disponíveis, balanceando a carga computacional e minimizando a comunicação. A biblioteca *message passing interface* (MPI) é usada para transferir os dados entre os processadores. A figura 2 ilustra a decomposição de um domínio para o caso de quatro processadores.

A rotina “METIS\_PartMeshDual” divide os elementos finitos e os nós entre os processadores. A saída da “METIS\_PartMeshDual” é processada para criar listas de elementos pertencentes a cada partição, listas de nós que estão estritamente dentro de cada partição (nós inteiros), e uma lista de nós nas interfaces (i. e. nós que são compartilhados por elementos alocados em diferentes partições). A organização dessa estrutura de dados é realizada em modo seqüencial, porém uma vez preparada, podemos explorar o paralelismo na computação dos “loops” sobre os elementos e nós da seguinte forma:

- i) Todo “loop” sobre elementos pode ser transformado em “loops” paralelos sobre as partições do domínio e “loops” sobre os elementos pertencentes a cada partição correspondente;
- ii) Todo “loop” sobre nós é desmembrado em “loops” sobre nós interiores e “loops” sobre os nós compartilhados. Os “loops” sobre os nós interiores podem ser processados em “loops” paralelos sobre as partições do domínio e “loops” sobre os nós dentro de cada partição correspondente. Por outro lado, os “loops” sobre os nós compartilhados têm de ser processados em modo seqüencial. Além disso, rotinas MPI “reduce type” são usadas para combinar, nos nós compartilhados, as contribuições provenientes das diferentes partições do domínio.

Note que a razão “número de nós compartilhados/número de nós interiores” tende a diminuir quando a discretização é refinada, significando que podemos esperar um melhor desempenho de cálculo paralelo à medida que o número de graus de liberdade é aumentado.

Em vista do processo automático de remalhagem, precisamos realizar uma partição de domínio toda vez que uma nova malha é criada. Como mencionado na seção 4.1, cada malha tem duração de  $nsteps = t_{large} / \Delta t^*$  passos de tempo, que é também o número de passos para o qual uma específica partição do domínio será mantida em uso. Deste modo, o desempenho do paralelismo aumenta à medida que  $nsteps$  cresce, significando que a mesma malha e o mesmo particionamento serão usados por um número maior de passos de tempo, resultando em mais operações realizadas em modo paralelo. Note que  $t_{large} = L / 2u_0$  é fixado para um dado problema, dependendo somente das escalas de velocidade e comprimento escolhidas,  $u_0$  e  $L$ , respectivamente. Desta forma,  $nsteps$  aumenta quando  $\Delta t^*$  diminui i.e. se elementos menores são introduzidos pela redução do tamanho mínimo do elemento  $h_{min}$ .

Portanto, a presente implementação paralela adaptativa tem a prioridade desejada de melhorar o desempenho em paralelo à medida que aumenta o refinamento de discretização no tempo e espaço. No capítulo 5 podemos demonstrar a eficiência da computação paralela em relação ao tempo de cálculo dos exemplos numéricos.

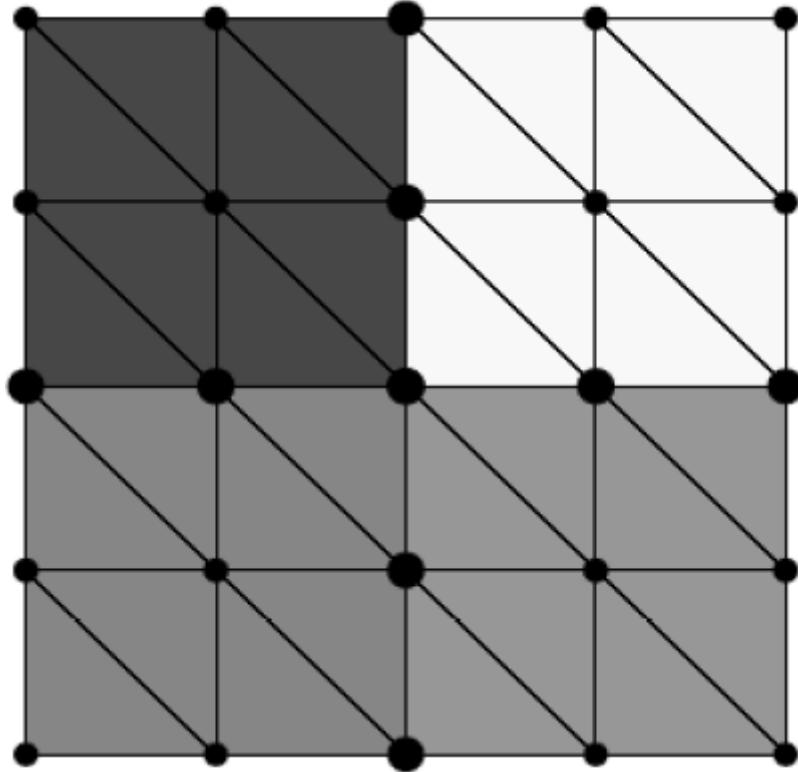


Figura 2: Exemplo de decomposição de um domínio usando quatro processadores: Os elementos pertencentes á mesma partição são pintados da mesma cor. Os pontos pequenos representam os nós interiores e pontos maiores ilustram os nós compartilhados

### 4.3. USO DO GID PARA ETAPAS DE PRÉ E PÓS-PROCESSAMENTO

#### 4.3.1. PRÉ-PROCESSAMENTO

O programa GID versão 10.0.4 é utilizado para pré e pós-processamento na simulação numérica em ciência e engenharia.

Na etapa de pré-processamento, consiste em construir a geometria do problema a ser estudado, aplicar as condições de contorno, tipo de material, definições físicas como gravidade, e finalmente gerar a malha do problema.

Os arquivos ‘ns\_new\_solver\_2d.bas’, ‘ns\_new\_solver\_2d.cnd’ e ‘ns\_new\_solver\_2d.prb’, que configuram um tipo de problema no GID foram elaborados para atender as necessidades de informações do programa ns\_new\_solver\_2d\_a\_v2\_MPI e manter a interface intuitiva de utilização do programa GID.

No arquivo ‘ns\_new\_solver\_2d.bas’ são definidas as variáveis de entrada relativas a aplicação das condições de contorno e condições iniciais. Veja figura 3.

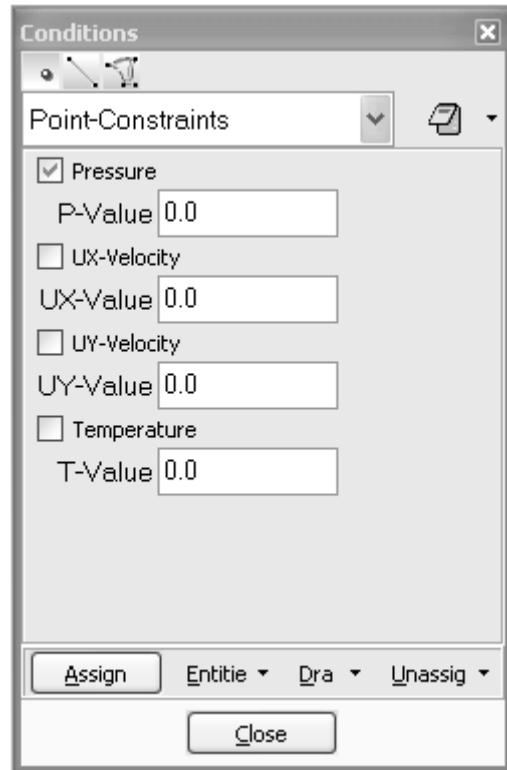


Figura 3: Janela do GiD para variáveis de entrada relativas a aplicação das condições de contorno e condições iniciais.

O arquivo ‘ns\_new\_solver\_2d.cnd’ define uma caixa de diálogo do programa GID referente à escolha do tipo de material envolvido (fluído e/ou sólido) e os números de Reynolds, Prandtl e Richardson. Veja figura 4.

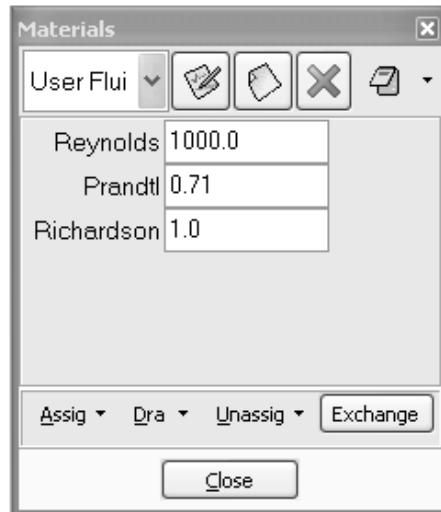


Figura 4: Janela do GiD para escolha do tipo de material envolvido (fluido e/ou sólido) e os números de Reynolds, Prandtl e Richardson.

O arquivo ‘ns\_new\_solver\_2d.prb’ também define uma caixa de diálogo do programa GID, esta caixa, chamada de Problem Data solicita informações a respeito do problema que será calculado, as informações solicitadas com uma sugestão de valores estão listadas na figura 5 a seguir.

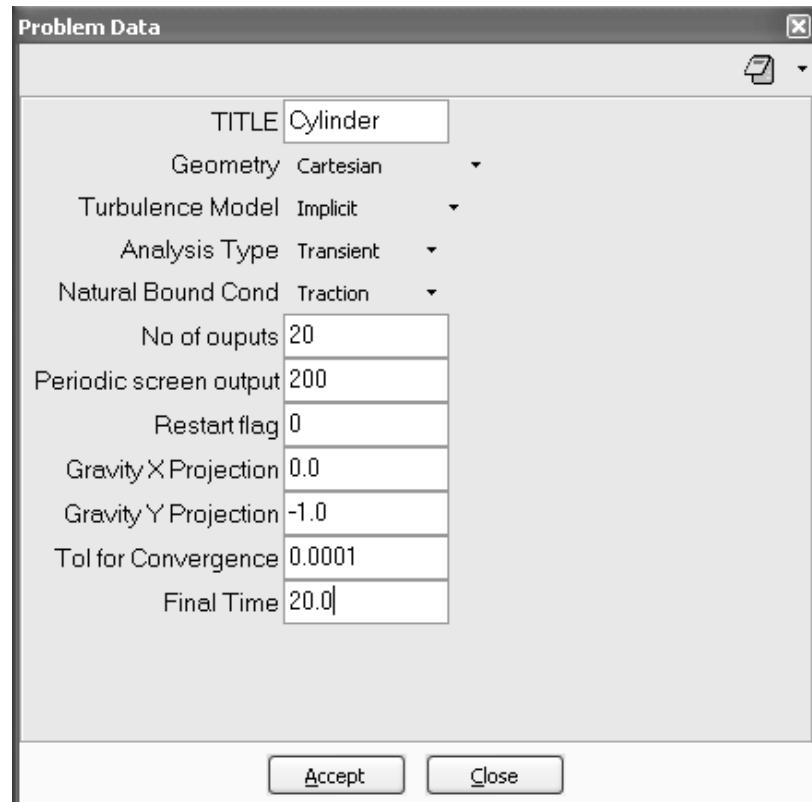


Figura 5: Janela do GiD para informações a respeito do problema que será calculado.

Durante a utilização do GID pode-se primeiramente definir o tipo de problema, ‘O arquivo ‘ns\_new\_solver\_2d’ e então desenhar a geometria do problema, tendo o cuidado de manter as dimensões características do problema com valor um (como o raio de um cilindro ou o tamanho da parede de um cavidade) e os demais proporcionais.

Define-se o local da aplicação das condições de contorno e iniciais em linhas e superfícies, como pressão, velocidades e temperatura. Em seguida define-se os tipos de materiais envolvidos (como por exemplo fluido ou sólido) e os números adimensionais caracteristicos de cada problema (números de Reynolds, Prandtl e Richardson).

Feito isso, podemos montar o ‘Problem Data’, com o nome do trabalho, tipo de geometria, gravidade, tolerância para convergência, tempo final de análise entre outros.

Finalmente define-se o tipo de malha para cada região/superfície e contorno, gera-se a malha e seleciona-se o comando *calculate*. Cria-se assim o arquivo ‘nomedotrabalho.dat’ que contém as informações necessárias para rodar o problema.

#### 4.3.2. PROCESSAMENTO

Edita-se um arquivo ‘ns2d.dat’ para que este contenha o nome do trabalho a ser executado e o caminho do diretório onde o arquivo gerado pelo pré-processamento do GID (‘nomedotrabalho.dat’) se encontra.

O programa ns\_new\_solver\_2d\_a\_v2\_MPI inicialmente lê o arquivo ‘ns2d.dat’ e define o nome dos arquivos de saída em função do nome do projeto e do diretório. Inicia a leitura das informações do arquivo ‘nomedotrabalho.dat’, realiza cálculos. Daí gera, dados como pressão, temperatura, distribuição de velocidades, cálculo do número médio de Nusselt e forças transversais e de arrasto. Até que o tempo final ou a tolerância sejam alcançados.

### 4.3.3. PÓS-PROCESSAMENTO

Os arquivos ‘nomedotrabalho01.flavia.msh’, ‘nomedotrabalho01.flavia.res’, são as saídas do programa ns\_new\_solver\_2d\_a\_v2\_MPI que serão tratadas no GiD a fim de visualizarmos os perfis de temperatura, pressão, malhas adaptativas finais e etc. Os gráficos típicos gerados pelo GiD (‘nomedotrabalho01.flavia.msh’ e ‘nomedotrabalho01.flavia.res’) e que serão utilizados nesta dissertação são mostradas na figura 6.

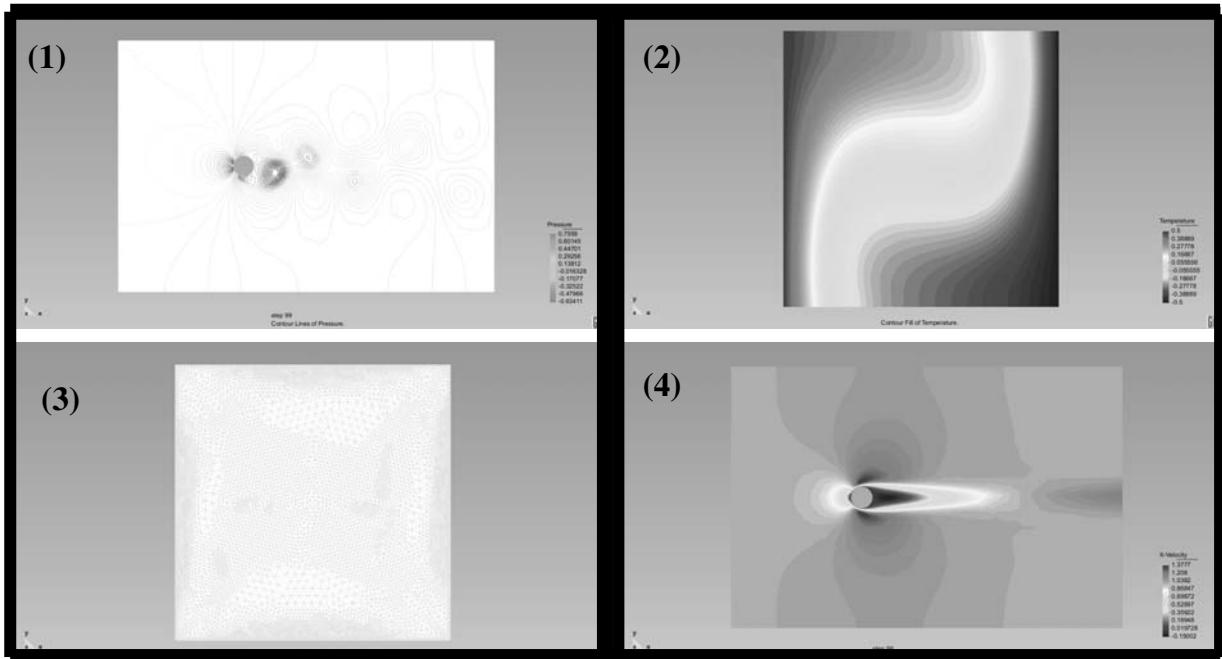


Figura 6: (1) Representa as linhas de pressão típicas de um problema de escoamento. (2) Representa a distribuição de temperatura em convecção natural. (3) Mostra a malha final gerada. (4) Um perfil de velocidades de escoamento.

Os arquivos ‘nomedotrabalho\_history.dat’ e ‘nomedotrabalho\_surface.dat’ geram os dados referentes ao número médio de Nusselt, às forças transversais e de arrasto ao final de cada passo de tempo e o número de Nusselt máximo. Esses dados serão tratados no programa Origin [38] para alguns problemas onde gráficos serão necessários.

## CAPÍTULO 5

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

Apresentaremos aqui exemplos numéricos de aplicação do programa ‘ns\_new\_solver\_2d\_a\_v2\_MPI’. Este código foi compilado em FORTRAN90 no cluster de computadores que se encontra no Laboratório de Computação Paralela do IEN. Em todos os casos consideramos exemplos 2D e uma discretização espacial empregando elementos finitos triangulares com interpolação linear. Utilizamos o novo programa na análise de três problemas bem conhecidos em CFD: convecção natural em uma cavidade quadrada; convecção natural em torno de um cilindro quente; escoamento em torno de um cilindro sob influência de forças de empuxo.

#### 5.1. CONVECÇÃO NATURAL EM UMA CAVIDADE QUADRADA

Nesse exemplo analisaremos as distribuições das variáveis envolvidas e os números de Nusselt. Nós consideramos uma cavidade quadrada com lado  $L$ , que é o comprimento escolhido como a escala espacial (ou comprimento característico). O domínio é termicamente isolado no topo e na base. Uma pressão de referência  $p = 0$  é imposta no centro da cavidade. Outra condição de contorno é aplicada nas paredes da cavidade, impondo que as velocidades sejam nulas. Condições de contorno de temperatura prescrita são impostas nas paredes laterais. A parede esquerda tem temperatura  $T = T_0 + \Delta T/2$  e a parede da direita tem temperatura  $T = T_0 - \Delta T/2$ . Essas condições de contorno geram convecção natural dentro da cavidade. Para números de Rayleigh suficientemente grandes ocorre a estratificação térmica. A figura 7 mostra uma representação esquemática do domínio de análise deste problema. Inicialmente a cavidade contém um fluido que está em repouso com temperatura  $T_0$ .

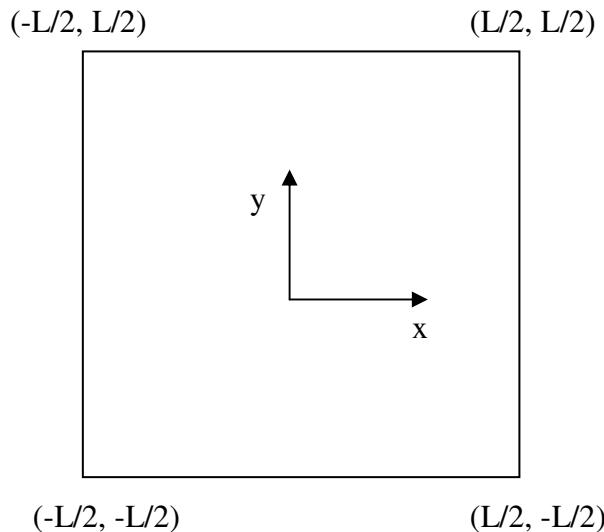


Figura 7: Domínio da análise do problema de convecção natural dentro de uma cavidade

Os resultados numéricos são parametrizados com relação aos números de Prandtl e Rayleigh. Foram feitas simulações com  $Ra = 10^4$ ,  $Ra = 10^5$  e  $Ra = 10^6$ . Em todas estas simulações o número de Prandtl foi  $Pr = 0.71$ . O transiente então acontece de  $t = 0$  até  $t = 60L/u_0$ , onde  $u_0 = \sqrt{\beta(T_{\max} - T_{\min})\|\mathbf{g}\|L}$ . Todos os casos foram longos o suficiente para obtermos uma convergência ao estado estacionário.

A figura 8 representa a malha adaptativa final, distribuição de temperaturas, campo de pressão e campo de velocidade para  $Ra = 10^4$ , e  $Pr = 0.71$ . A malha final contém 9574 nós e 18346 elementos, com tamanho mínimo do elemento de  $0.005L$ .

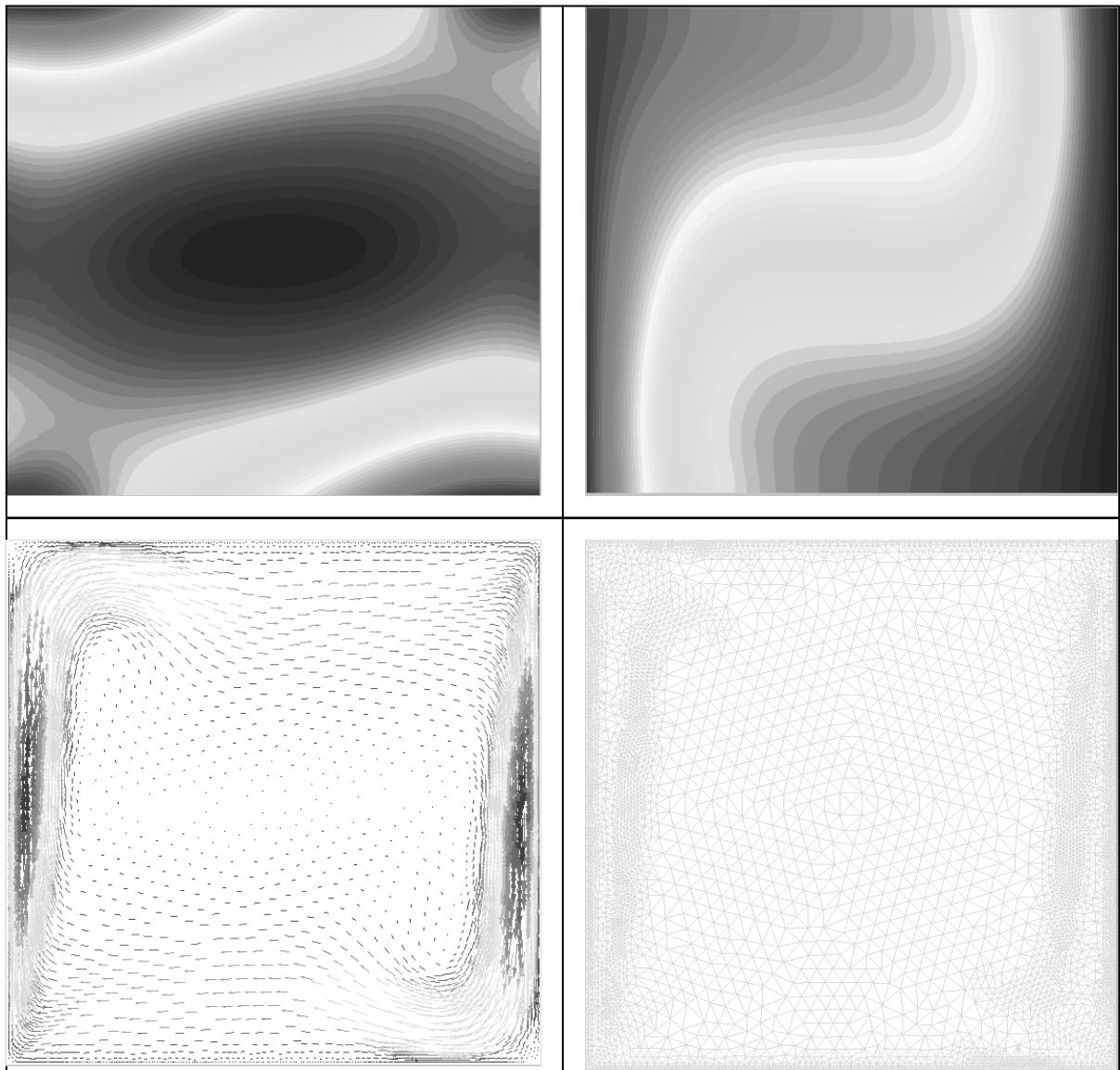


Figura 8: Campos de pressão, temperatura, velocidade e malhas adaptativas finais para  $Ra = 10^4$ , e  $Pr = 0.71$ .

A figura 9 representa a malha adaptativa final, campo de temperaturas, campo de pressão e campo de velocidade para  $Ra = 10^5$  e  $Pr = 0.71$ . A malha final contém 7357 nós e 13912 elementos, com tamanho mínimo do elemento de  $0.005L$ .

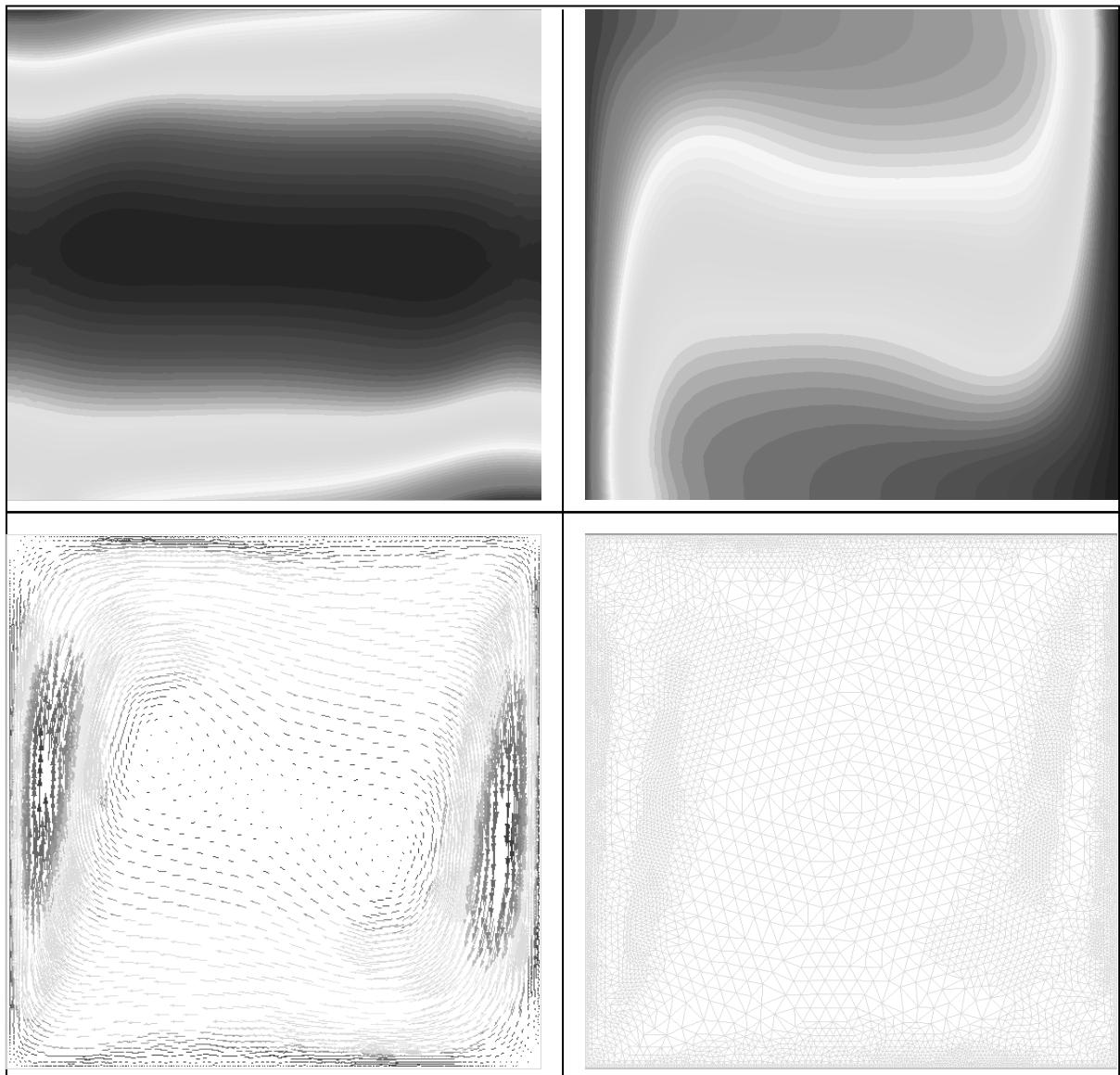


Figura 9: Campos de pressão, temperatura, velocidade e malhas adaptativas finais para  $Ra = 10^5$  e  $Pr = 0.71$ .

A figura 10 representa a malha adaptativa final, campo de temperatura, campo de pressão e campo de velocidade para  $Ra = 10^6$ , e  $Pr = 0.71$ . A malha final contém 6008 nós e 11214 elementos, com tamanho mínimo do elemento de  $0.005L$ .

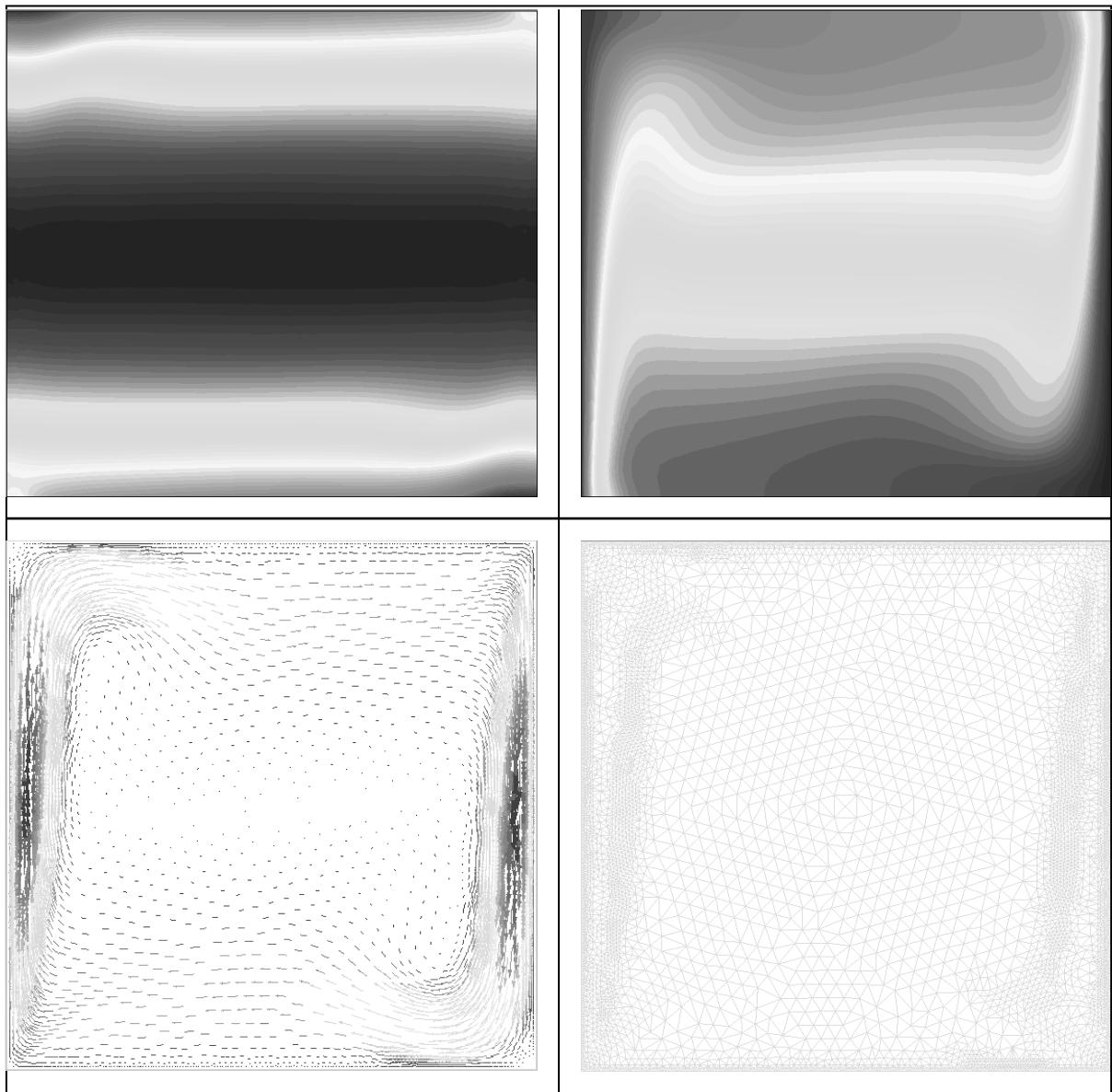


Figura10: Campos de pressão, temperatura, velocidade e malhas adaptativas finais para  $Ra = 10^6$ , e  $Pr = 0.71$ .

É possível observar a estratificação térmica com o aumento do número de Rayleigh. A figura 11 mostra a distribuição do fluxo de calor na parede da esquerda de baixo para cima, em termos do número de Nusselt, que por sua vez é dado por

$$Nu = q_w L / \kappa (T_{\max} - T_{\min}) \quad (5.1)$$

onde  $q_w$  é o fluxo de calor local da parede.

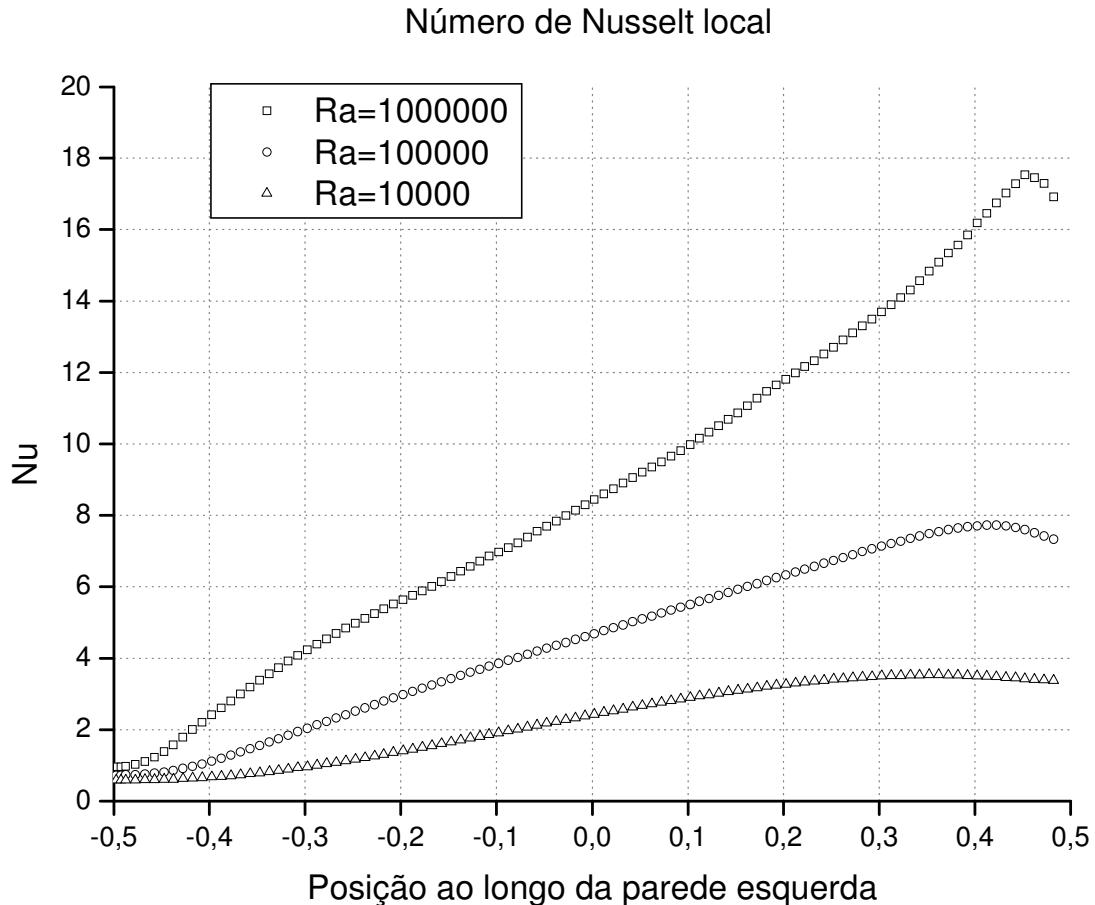


Figura 11: Número de Nusselt local ao longo da parede para  $Pr = 0.71$  e  $Ra = 10^4$ ,  $Ra = 10^5$  e  $Ra = 10^6$

A tabela 1 compara nossos resultados obtidos para o número de Nusselt médio da parede da esquerda e número de Nusselt máximo da parede da esquerda com referências fornecidas por Hortmann et al [26] e Sampaio [14]. O uso de malhas adaptativas em nossos cálculos nos permitiu obter resultados que concordam muito bem com valores de referência, com um erro máximo de aproximadamente 0,28 % em relação à Hortmann et al. [26] e 0,09% em relação Sampaio [14] apenas.

|                     | $Ra = 10^4$<br>$Nu$ máx. | $Ra = 10^4$<br>$Nu$ médio | $Ra = 10^5$<br>$Nu$ máx. | $Ra = 10^5$<br>$Nu$ médio | $Ra = 10^6$<br>$Nu$ máx. | $Ra = 10^6$<br>$Nu$ médio |
|---------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| Hortmann et al.[26] | 3.530                    | 2.244                     | 7.720                    | 4.521                     | 17.536                   | 8.825                     |
| Sampaio [14]        | 3.525                    | 2.239                     | 7.703                    | 4.512                     | 17.457                   | 8.807                     |
| Resultados Obtidos  | 3.529                    | 2.243                     | 7.723                    | 4.519                     | 17.527                   | 8.807                     |

Tabela 1: Resultados obtidos para número de Nusselt máximo e médio.

Estes resultados nos mostram que o método empregado nesta dissertação apresentam excelente concordância com os valores esperados.

A figura 12 mostra o tempo de cálculo para  $Ra = 10^6$  e  $Pr = 0.71$ , com tamanho mínimo do elemento de  $0.005L$ . Podemos notar que o tempo de cálculo para este exemplo diminui com o aumento do número de processadores envolvidos na computação em paralelo. No entanto, percebe-se que ao chegar em 12 processadores a curva tende a atingir um valor mínimo de tempo cálculo. Esse comportamento é esperado, pois como dito na seção 4.2, a razão “número de nós compartilhados/número de nós interiores” e, portanto, a relação “cálculo sequencial/cálculo em paralelo”, aumenta à medida que mais processadores são empregados. Uma estimativa do *speed-up* também é mostrada na figura 12. Como o programa desenvolvido roda apenas em paralelo, isto é, a partir de dois processadores, assume-se que de um para dois processadores tem-se o *speed-up* ótimo, plotando-se então uma estimativa da deterioração do *speed-up* com o aumento do número de processadores.

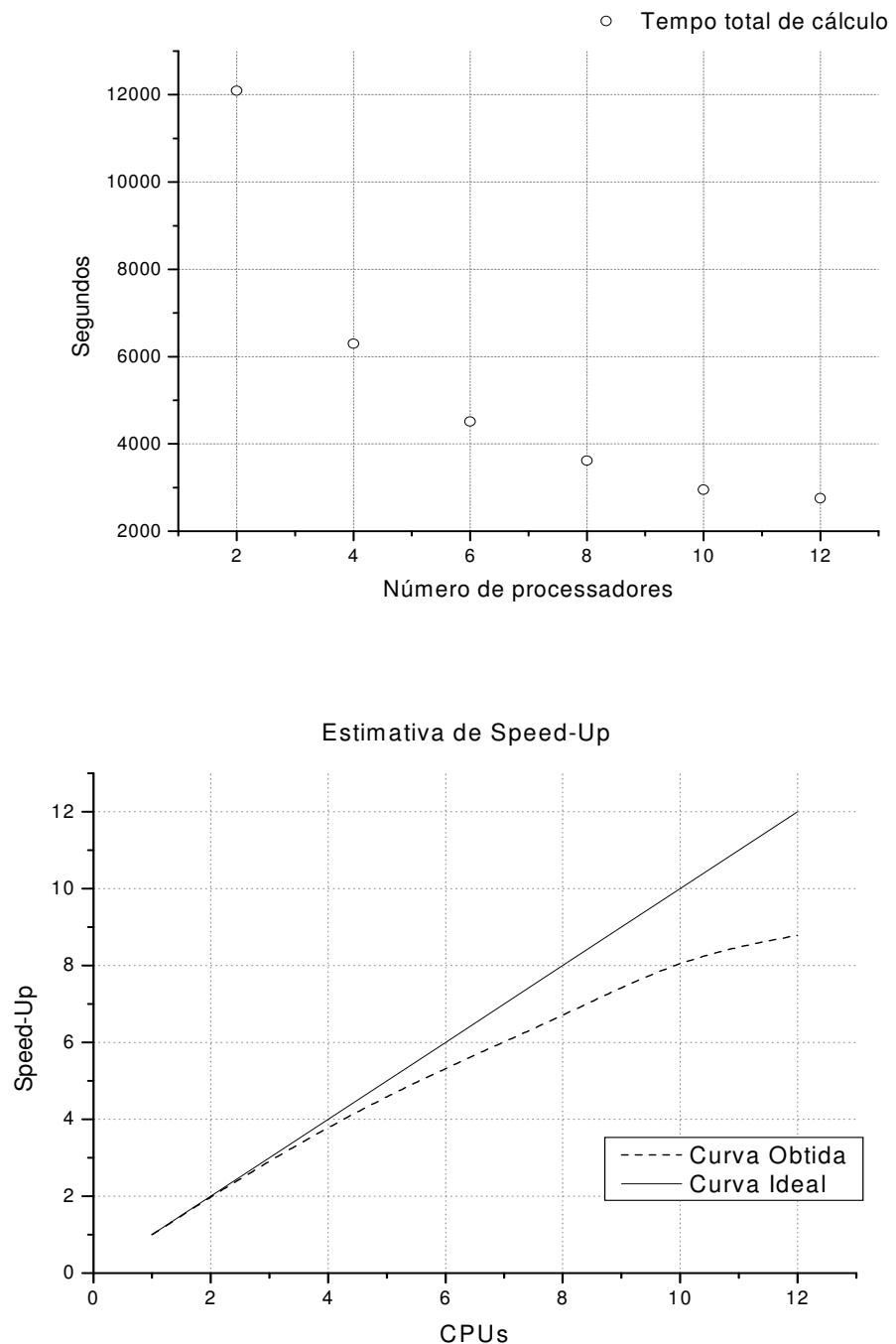


Figura 12: Tempo de cálculo e estimativa de *speed-up* em função do número de processadores envolvidos para o exemplo com  $Ra = 10^6$  e  $Pr = 0.71$ .

## 5.2 CONVEÇÃO NATURAL EM TORNO DE UM CILINDRO QUENTE

Neste exemplo mostraremos a convecção natural externa em torno de um cilindro quente. O fluido em contato com o cilindro está inicialmente em repouso a uma temperatura  $T_{\min} = T_0$ . A temperatura na superfície do cilindro vale  $T_{\max} = T_0 + \Delta T$ . As condições de contorno na superfície do cilindro são velocidades nulas. A gravidade tem direção vertical e sentido para baixo. O diâmetro do cilindro  $d$  é escolhido como comprimento característico do problema.

Foram feitas simulações com números adimensionais  $Pr = 0.71$  e  $Ra = 10^4, 5 \times 10^4, 10^5, 1.5 \times 10^5, 2 \times 10^5, 5 \times 10^5$  e  $10^6$ . Os transientes ocorrem de  $t = 0$  a  $t = 70d/u_0$ , onde  $u_0 = \sqrt{\beta(T_{\max} - T_{\min})\|g\|d}$ . Em todos os casos a malha inicial continha 44.225 elementos. Usando o tamanho mínimo de elemento como  $h_{\min} = 0.02d$  obtivemos malhas adaptativas finais com mais de 200.000 elementos.

A figura 13 representa o campo de temperatura e as malhas adaptativas finais em torno da superfície do cilindro em  $t = 70d/u_0$  para  $Ra = 5 \times 10^4$

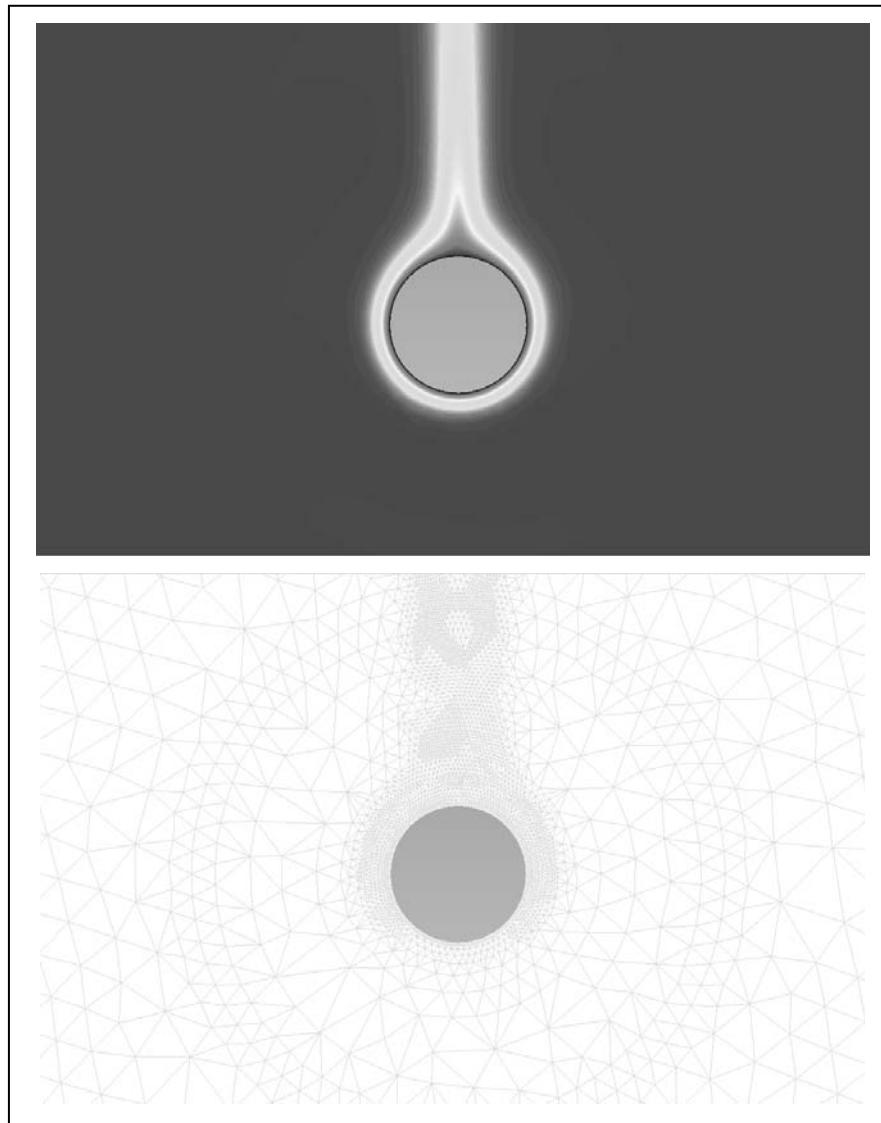


Figura 13: Detalhe do campo de temperatura e malha adaptativa para  $Pr = 0.71$  em  $t = 70d/u_0$  ( $Ra = 5 \times 10^4$ ).

Além destes resultados, foram também obtidos resultados usando o tamanho mínimo de elemento como  $h_{\min} = 0.01d$  para  $Ra = 5 \times 10^5$  e  $10^6$ , usando o tamanho mínimo de elemento como  $h_{\min} = 0.005d$  para  $Ra = 10^6$  e  $10^7$ , usamos também  $h_{\min} = 0.002d$  para  $Ra = 10^7$  e  $10^8$  e por fim usamos  $h_{\min} = 0.001d$  para  $Ra = 10^8$ . No final de todas as soluções numéricas, obtivemos uma malha adaptativa final de máximo refinamento na casa dos 300.000 elementos.

Assim como para o caso da seção 5.1, também comparamos o número de Nusselt médio na superfície do cilindro com correlações experimentais disponíveis na literatura. O número de Nusselt médio é dado por  $\langle Nu \rangle = \langle q_w \rangle d / \kappa \langle T_{\max} - T_{\min} \rangle$ .

De acordo com Churchill e Chu [31], dados experimentais em um intervalo laminar (até  $Ra = 10^9$ ) são bem correlacionados com a expressão:

$$\langle Nu \rangle = 0.36 + \frac{0.518 Ra^{\frac{1}{4}}}{\left[ 1 + (0.559/Pr)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{4}{9}}} \quad (5.3)$$

Uma correlação alternativa em um intervalo laminar é fornecida por Hyman et al. [32]:

$$\langle Nu \rangle = 0.53 \left[ \left( \frac{Pr}{Pr + 0.952} \right) Ra \right]^{\frac{1}{4}} \quad (5.4)$$

A figura 14 mostra comparações dos nossos resultados obtidos para o valor do número de Nusselt médio para todos os valores do número de Rayleigh aqui vistos, com as expressões dadas pelas Eqs. (5.3 – 5.4). Observe que nós obtivemos resultados muito bons comparados as correlações experimentais.

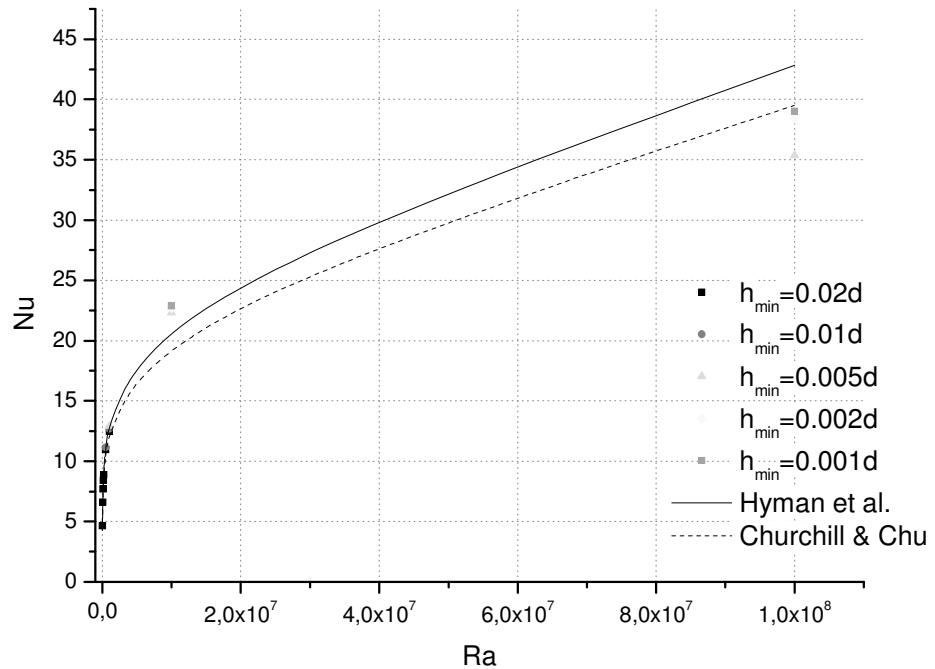


Figura 14: Comparação do número de Nusselt obtido com correlações experimentais de Churchill and Chu [31] e Hyman et al. [32].

Na tabela 2 para demonstramos todos os valores obtidos em nossa simulação computacional e comparamos com os valores de Churchill e Chu e Hyman et al.

|                        | $h_{\min}$<br>$0.02d$ | $h_{\min}$<br>$0.01d$ | $h_{\min}$<br>$0.005d$ | $h_{\min}$<br>$0.002d$ | $h_{\min}$<br>$0.001d$ | Churchil<br>e Chu | Hyma<br>et al. |
|------------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------|----------------|
| $Ra = 10^4$            | 4.651                 |                       |                        |                        |                        | 4.278             | 4.285          |
| $Ra = 5 \times 10^4$   | 6.601                 |                       |                        |                        |                        | 6.219             | 6.407          |
| $Ra = 10^5$            | 7.699                 |                       |                        |                        |                        | 7.328             | 7.619          |
| $Ra = 1.5 \times 10^5$ | 8.395                 |                       |                        |                        |                        | 8.071             | 8.433          |
| $Ra = 2 \times 10^5$   | 8.878                 |                       |                        |                        |                        | 8.646             | 9.061          |
| $Ra = 5 \times 10^5$   | 10.963                | 11.153                |                        |                        |                        | 10.779            | 11.394         |
| $Ra = 10^6$            | 12.469                | 12.691                | 12.941                 |                        |                        | 12.75             | 13.549         |
| $Ra = 10^7$            |                       |                       | 22.321                 | 22.682                 | 22.872                 | 22.393            | 24.095         |
| $Ra = 10^8$            |                       |                       | 35.349                 | 38.401                 | 39.033                 | 39.542            | 42.848         |

Tabela 2: Comparação de dados obtidos relativos ao Número de Nusselt com valores encontrados na literatura.

### 5.3 CONVEÇÃO FORÇADA E MISTA EM TORNO DE UM CILINDRO QUENTE SOB INFLUÊNCIA DE FORÇAS DE EMPUXO

Neste exemplo nós analisamos o escoamento em torno de um cilindro e o efeito das forças de empuxo contrárias e favor ao escoamento. O fluido que cerca o cilindro está inicialmente em repouso e a uma temperatura  $T_{\min} = T_0$ . A temperatura na superfície do cilindro  $T_{\max} = T_0 + \Delta T$ . As condições de contorno na superfície do cilindro impõem velocidades nulas. A velocidade inicial do escoamento a uma temperatura  $T_0$ , vale  $u_0$ . O diâmetro do cilindro  $d$  é escolhido como comprimento característico do problema. A figura 15 é uma representação esquemática do domínio de análise deste problema, no qual mostra o sentido da gravidade. Assim teremos três casos, no primeiro caso nós consideramos as forças de empuxo desprezíveis em relação ao escoamento, em outro caso a gravidade auxilia a convecção e noutro a gravidade é oposta a convecção.

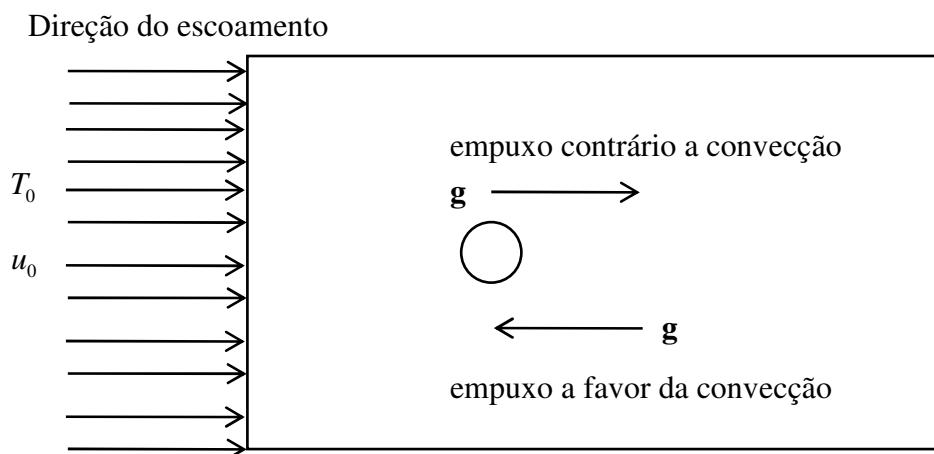


Figura 15: Domínio da análise do problema de escoamento em torno de um cilindro quente

Como dito acima, três casos foram estudados. Em todos os casos a malha inicial contém 3077 elementos finitos, com tamanho mínimo de elemento  $h_{\min} = 0.02d$ , número de Prandtl  $Pr = 0.71$  para convecção forçada e  $Pr = 1$  para convecção mista. Os exemplos ocorreram num intervalo de tempo  $t = 0$  até  $t = 99d/u_0$ .

Nossos resultados são avaliados em termos das forças de arrasto e transversal,  $F_D$  e  $F_L$ , agindo no cilindro (são originados a partir do desprendimento de vórtices). Essas forças são calculadas a partir do campo de escoamento de acordo com:

$$F_D = - \int_{\Gamma_c} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} n_x - p n_x \right] d\Gamma \quad (5.2)$$

$$F_L = - \int_{\Gamma_c} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} n_y - p n_y \right] d\Gamma \quad (5.3)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal a superfície do cilindro com interface  $\Gamma_c$  (com sentido apontado para o centro do cilindro). Note que nas Eqs. (5.2 – 5.3), nós usamos  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $u_1 = u$  e  $u_2 = v$ . A freqüência do desprendimento de vórtices  $f$  é obtida da análise da força transversal ao longo do tempo. É dada em forma adimensional pelo número de Strouhal  $St = fd/u_0$ . Os coeficientes das forças de arrasto e transversal são dados por  $C_D = 2F_D/\rho u_0^2 d$  e  $C_L = 2F_L/\rho u_0^2 d$ , respectivamente. Nós também calculamos o fluxo de calor médio na superfície do cilindro, expressando-o em uma forma adimensional em termos do número médio de Nusselt:

$$\langle Nu \rangle = \langle q_w \rangle d / \kappa \langle T_{\max} - T_{\min} \rangle \quad (5.4)$$

onde  $\langle q_w \rangle$  é o fluxo de calor médio da superfície do cilindro.

### 5.3.1 CONVEÇÃO FORÇADA

O primeiro caso estudado é aquele em que desprezamos as forças de empuxo em relação a forças viscosas. Logo esse caso é puramente regido pela convecção forçada, ou seja,  $Ri = 0$ . Neste caso foram usados  $Re = 100$ ,  $Re = 110$ ,  $Re = 125$ ,  $Re = 140$ ,  $Re = 150$  e

$Pr = 0.71$ . Iremos comparar os valores obtidos para  $C_{D,\text{médio}}$ ,  $C_{L,\text{rms}}$  e  $St$  com valores encontrados na literatura.

A figura 16 representa a evolução da malha adaptativa final e o campo de temperatura para  $Re = 100$  e  $Ri = 0$  em  $t = 9d/u_0$ ,  $t = 29d/u_0$ ,  $t = 59d/u_0$  e  $t = 99d/u_0$ . A malha adaptativa nos instantes selecionados contém 12881, 13276, 13235 e 12945 elementos respectivamente. Podemos perceber que o desprendimento de vórtices neste caso se estabiliza a partir de  $t = 29d/u_0$  apresentando um comportamento oscilatório constante.

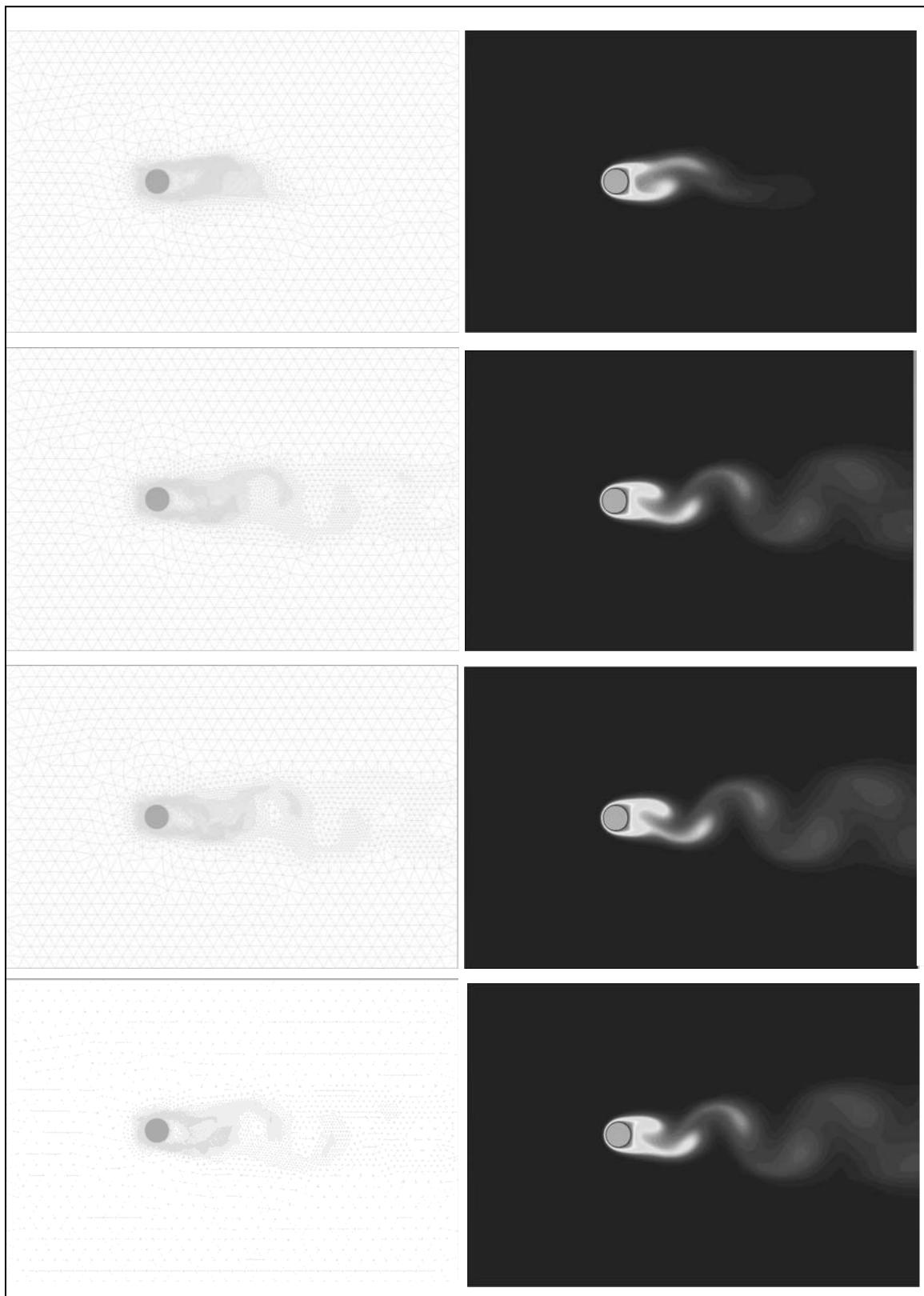


Figura 16: Evolução da malha adaptativa final e campos de temperatura em  $t = 9d/u_0$ ,  $t = 29d/u_0$ ,  $t = 59d/u_0$  e  $t = 99d/u_0$ , para  $Re = 100$  e  $Ri = 0$ .

A figura 17 nos fornece a curva característica para o número de Nusselt local para cada ponto da superfície do cilindro para  $Re = 100$  e  $Ri = 0$  em  $t = 99d/u_0$ , o valor máximo obtido para o número de Nusselt é 9.31, comparando com resultados fornecidos por Yoon et al. [37], do qual obteve 9.28 temos uma discrepância de apenas 0,3%.

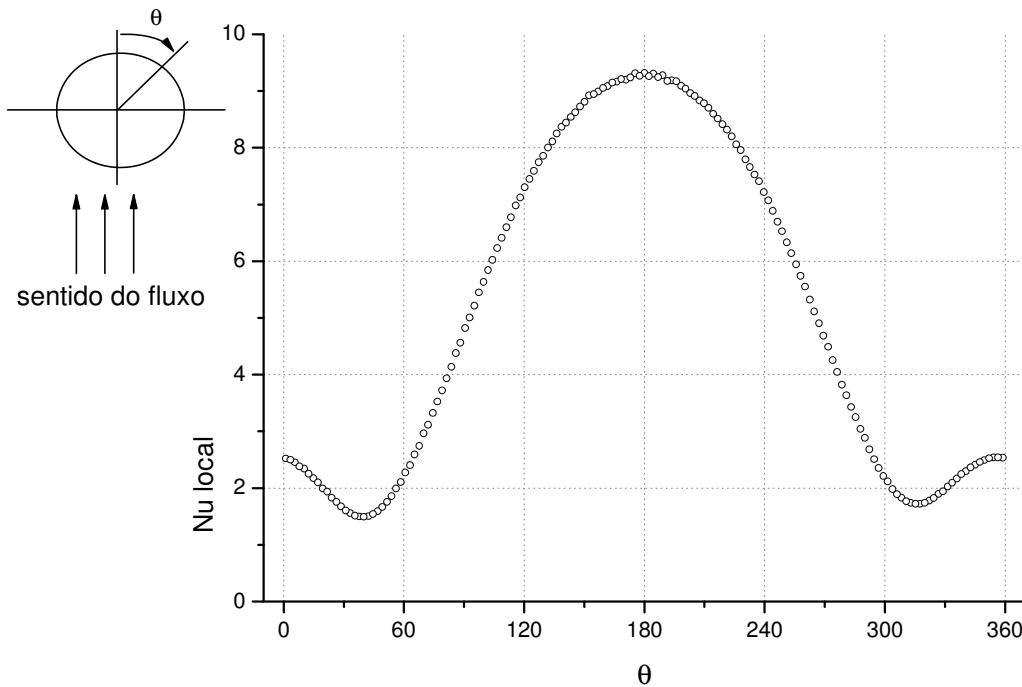


Figura 17: Número de Nusselt local em torno do cilindro para  $Re = 100$  e  $Pr = 0.71$ .

Na figura 18 podemos observar em detalhe o vetor do fluxo de calor através da superfície do cilindro, nota-se que o ponto de máximo ocorre no ponto frontal ao escoamento, o que de fato é o esperado pela teoria.

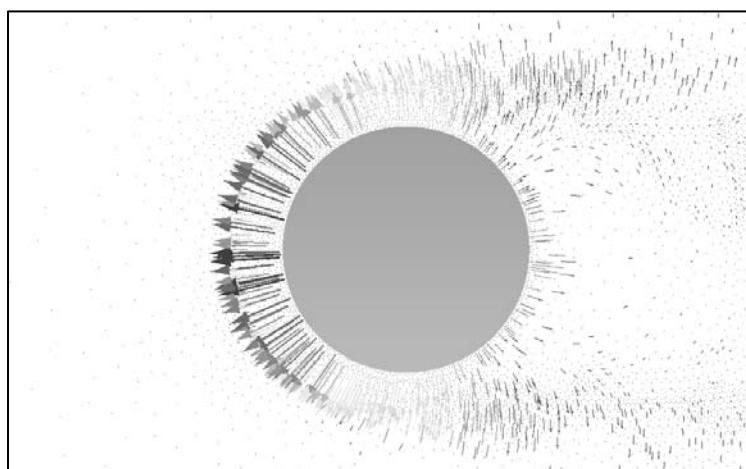


Figura 18: Vetor fluxo de calor através da superfície do cilindro em  $t = 99d/u_0$ , para  $Re = 100$  e  $Ri = 0$

A evolução das malhas adaptativas e campo de temperatura são bem semelhantes para todos os números de Reynolds simulados. Como visto na evolução da pluma do caso para  $Re = 100$ , podemos garantir que aproximadamente em  $t = 29d/u_0$  (no mínimo) teremos um padrão oscilatório constante para cada caso. A figura 19 representa a malha adaptativa final e campo de temperatura no instante  $t = 99d/u_0$ , para os 3 casos, que contém 12926 elementos para  $Re = 100$ , 12236 elementos para  $Re = 125$  e 12135 elementos para  $Re = 150$ . Onde é possível observar o desprendimento de vórtices para cada caso e o aumento de sua freqüência com o aumento do número de Reynolds.

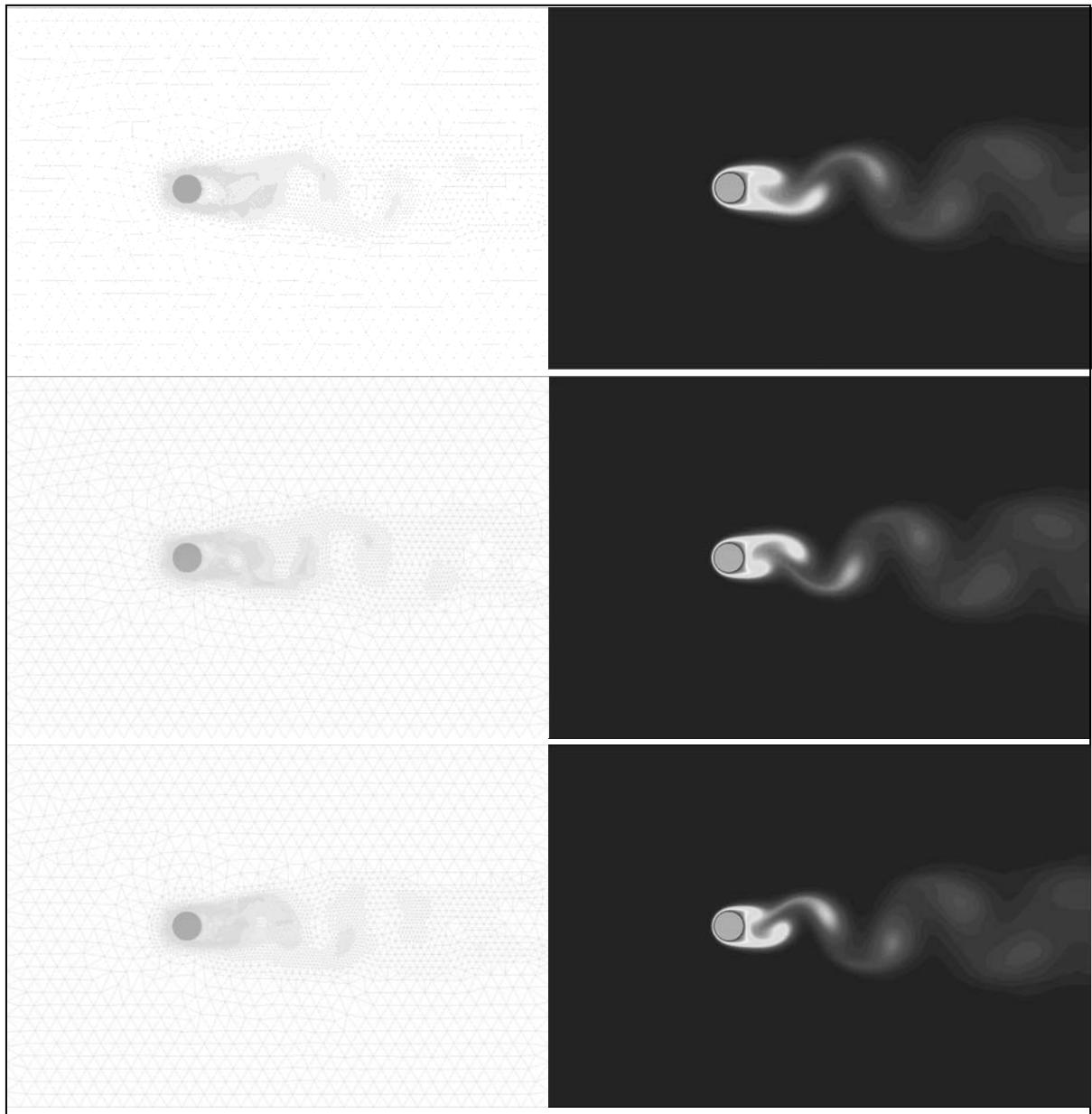


Figura 19: Malhas adaptativas finais e campos de temperatura em  $t = 99d/u_0$ . De cima para baixo:  $Re = 100$  e  $Ri = 0$ ,  $Re = 125$  e  $Ri = 0$ ,  $Re = 150$  e  $Ri = 0$ , respectivamente.

Na figura 20 podemos observar o cilindro em detalhe e a dinâmica do fluido que o cerca, através dos vetores de velocidade para os casos em que  $Re = 100$ ,  $Re = 125$  e  $Re = 150$ .

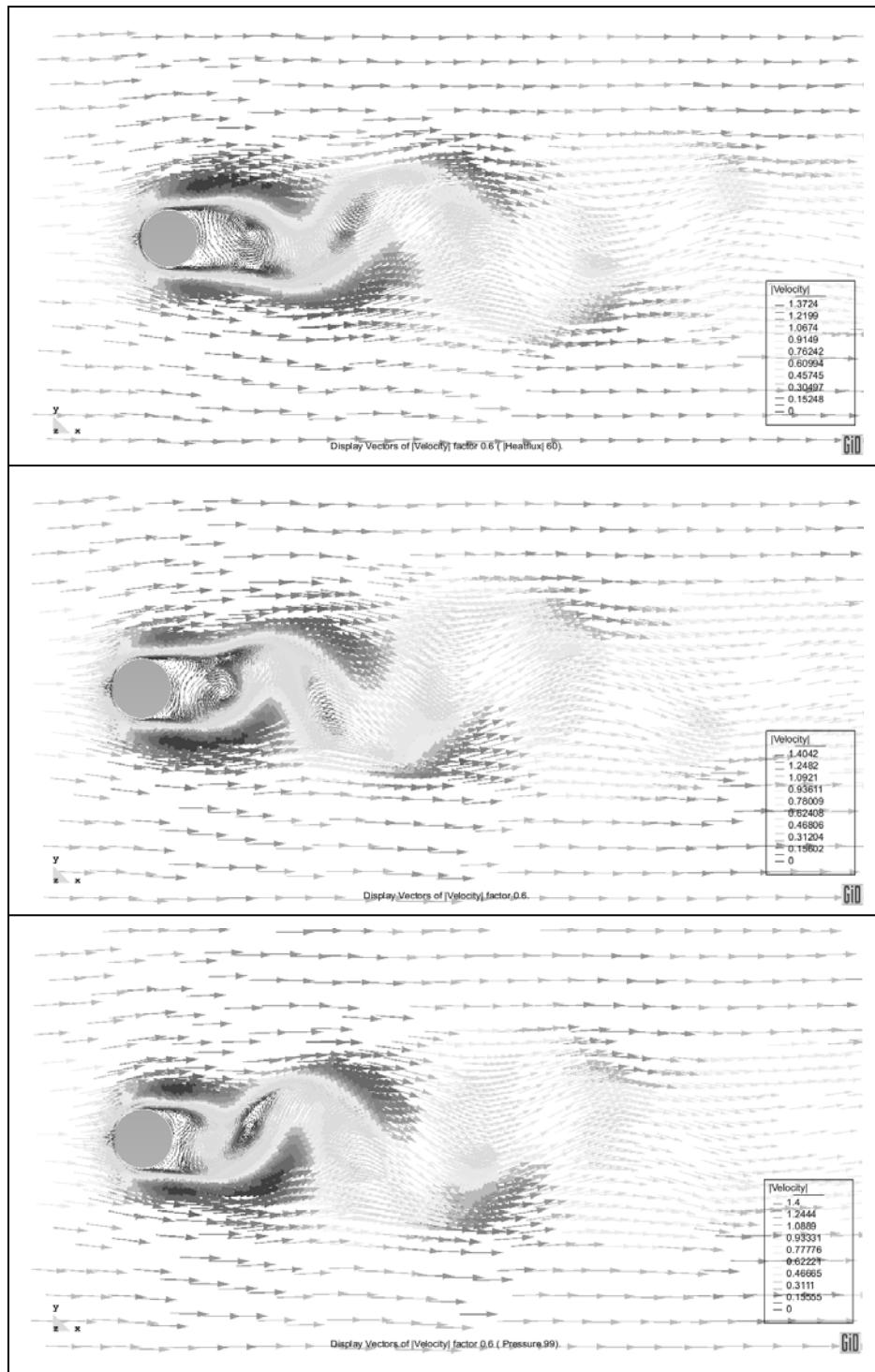


Figura 20: Campo vetorial da velocidade em  $t = 99d/u_0$ . De cima para baixo:  $Re = 100$  e  $Ri = 0$ ,  $Re = 125$  e  $Ri = 0$ ,  $Re = 150$  e  $Ri = 0$ , respectivamente.

Na figura 21 fazemos uma comparação dos resultados obtidos do coeficiente médio de arrasto,  $C_{D,médio}$ , com os resultados obtidos por Baranyi [27]. Na mesma figura comparamos o que obtivemos para o coeficiente rms de força transversal,  $C_{L,rms}$ , com a expressão proposta experimentalmente por Norberg [28]:

$$C_{L,rms} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{30} + \frac{\varepsilon^2}{90}} \quad (5.5)$$

onde:

$$\varepsilon = \frac{Re - 47}{47} \quad (5.6)$$

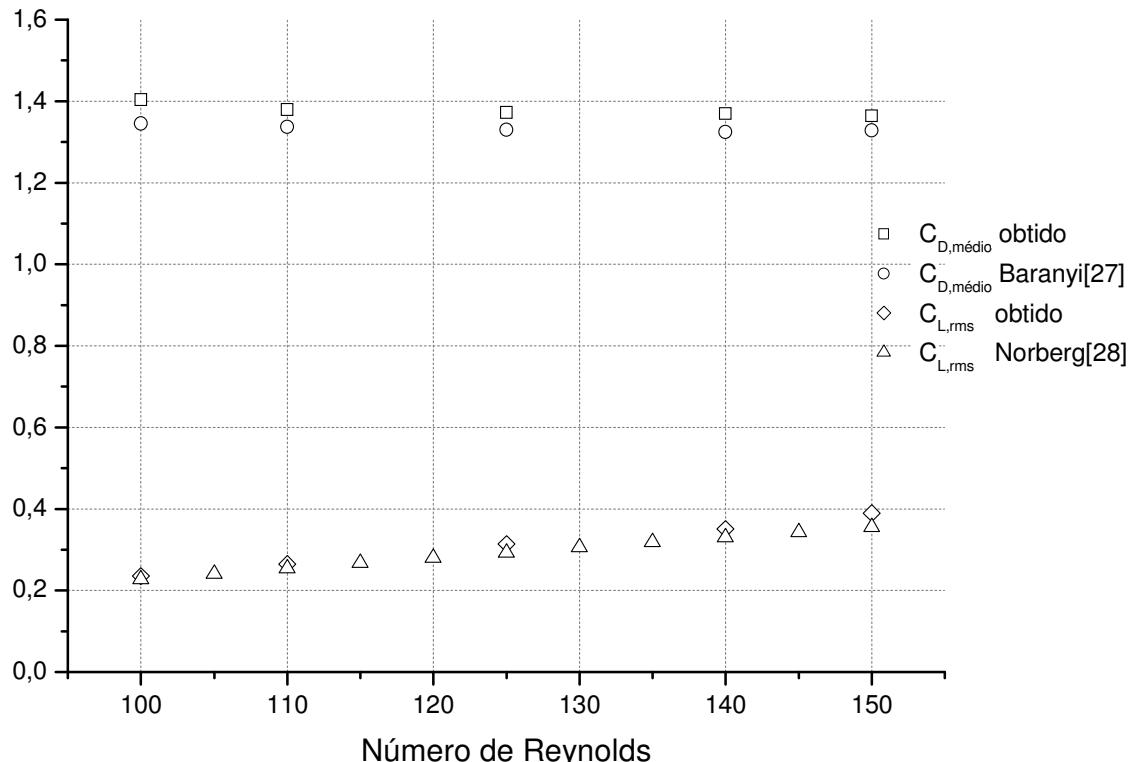


Figura 21: Comparação dos resultados obtidos nesta dissertação com dados obtidos de Baranyi [27] e Norberg [28]

Podemos notar que obtivemos resultados muito parecidos com os encontrados na literatura, com uma discrepância máxima de 0,4%.

Na figura 22 comparamos o número de Strouhal obtido por nosso método com a correlação Strouhal-Reynolds obtida experimentalmente por Williamson [29], assim como comparamos com os resultados obtidos por Baranyi [27] com métodos numéricos:

$$St = -\frac{3.3265}{Re} + 0.1816 + 0.00016Re \quad (5.7)$$

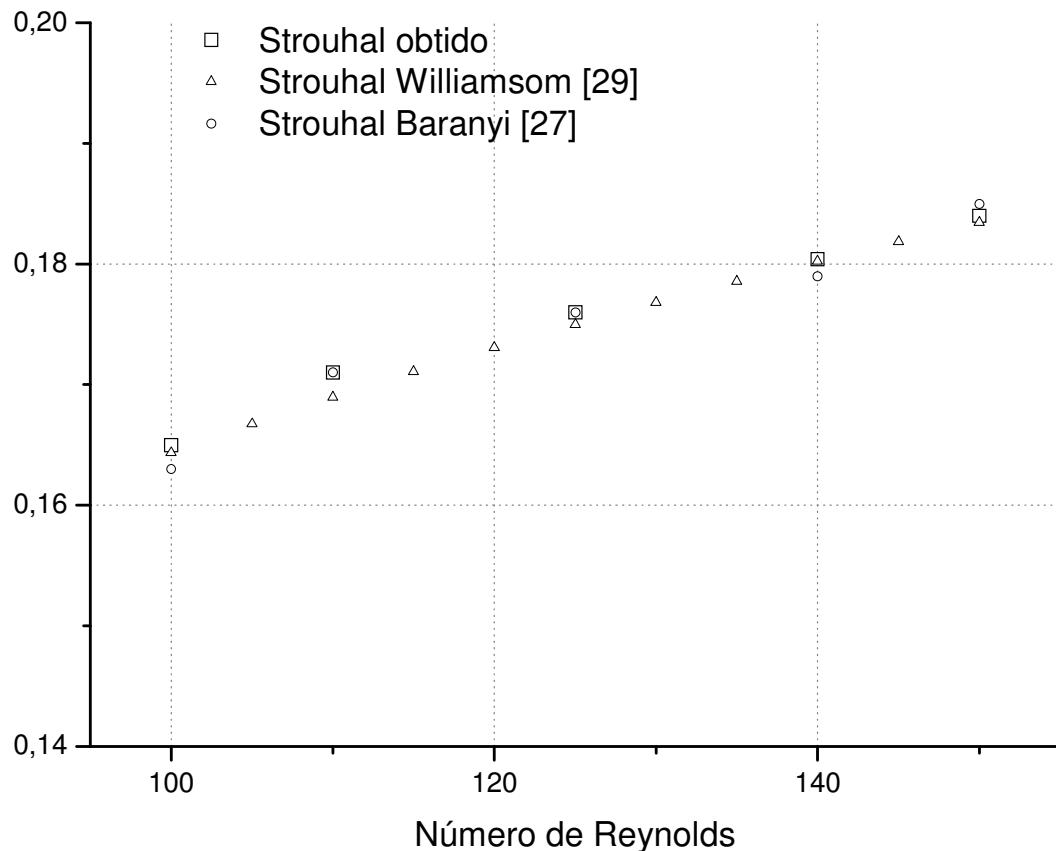


Figura 22: Comparaçāo dos resultados obtidos para o nāmero de Strouhal nesta dissertaçāo com a correlaçāo Strouhal-Reynolds de Williamson [29] e resultados numéricos de Baranyi [27].

Mais uma vez resultados obtidos de bom acordo com a literatura, com discrepância máxima de 1%. Podemos notar também bons resultados quando comparados com outros métodos numéricos.

Na figura 23 comparamos o número de Nusselt obtido por nosso método com a correlação empírica de Bernstein et al. [35] dada por:

$$Nu = 0.3 + \frac{0.62Re^{0.5}Pr^{1/3}}{\left[1 + (0.4/Pr)^{2/3}\right]^{1/4}} \left[1 + \left(\frac{Re}{282000}\right)^{5/8}\right]^{4/5} \quad (5.8)$$

na mesma figura também comparamos com o resultado numérico fornecido por Lange et al. [36] dado por:

$$Nu = 0.082Re^{0.5} + 0.734Re^{\psi} \quad (5.9)$$

onde

$$\psi = 0.05 + 0.226Re^{0.085} \quad (5.10)$$

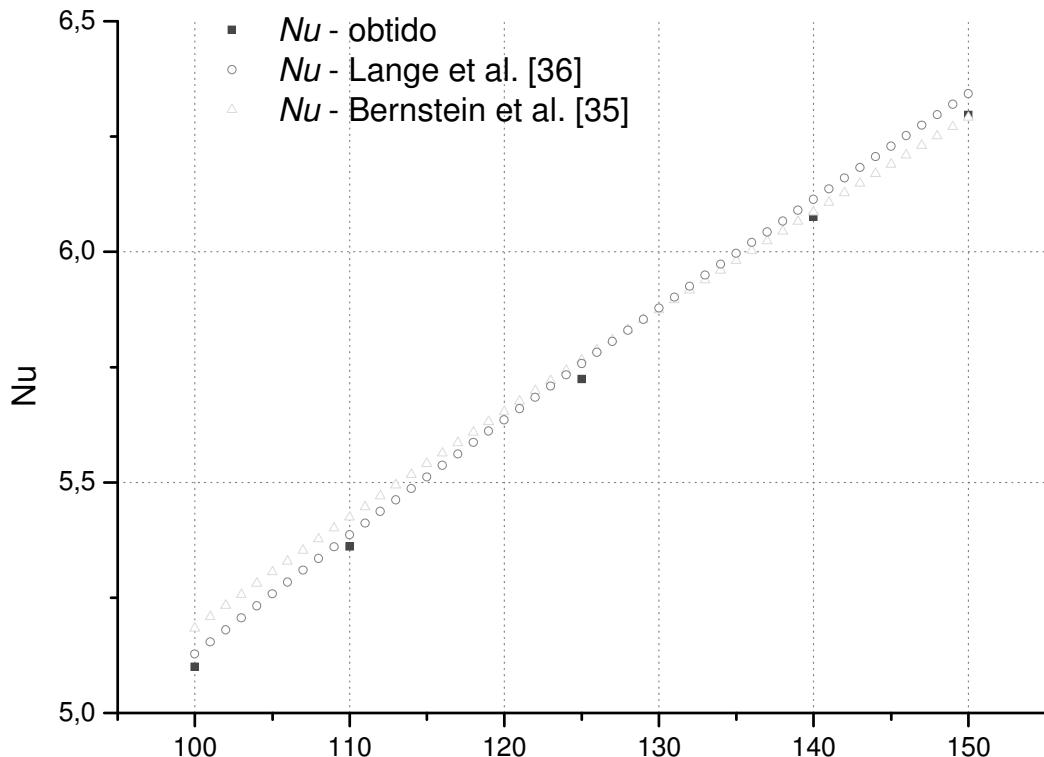


Figura 23: Comparaçāo dos resultados obtidos para o númerā de Nusselt nesta dissertaçāo com os resultados de Bernstein et al. [35] e Lange et al. [36].

A figura 23 mostra um excelente resultado do método proposto nesta dissertação com correlações experimentais e numéricas, com uma discrepância máxima de 1,6% com os resultados de Bernstein et al. [35] e 0,5% com os fornecidos por Lange et al. [36].

Podemos notar que obtivemos resultados de ótimo acordo com a literatura [27 – 29] para os coeficientes das forças de arrasto e transversal, assim como para o número de Strouhal e número de Nusselt.

### 5.3.2 CONVEÇÃO MISTA

Nesta seção analisaremos a convecção mista, com  $Re = 100$ ,  $Ri = 0.25$  e  $Pr = 1$ , sendo uma análise com o escoamento contrário ao sentido da gravidade (forças de empuxo a favor da convecção) e outra a favor do sentido da gravidade (forças de empuxo opostas a convecção). Assim como analisaremos também um caso semelhante ao visto na seção anterior (convecção forçada) para  $Re = 100$  e  $Ri = 0$ , desta vez com  $Pr = 1$ .

Com os resultados obtidos na seção 5.3.1 podemos simular com resultados confiáveis estas duas análises, para conferirmos os valores do número médio de Nusselt,  $\langle Nu \rangle$ , coeficiente médio de arrasto  $C_{D,\text{médio}}$ , coeficiente rms da força transversal  $C_{L,\text{rms}}$  e o número de Strouhal, característicos destes dois exemplos.

Para o caso de convecção forçada obtivemos uma malha final de 12926 elementos. Para o caso de escoamento contrário as forças de empuxo a malha final contém 15884 elementos. Para o caso de escoamento a favor das forças de empuxo a malha final contém 9437 elementos. A figura 24 representa a evolução da malha adaptativa final e o campo de temperatura em  $t = 99d/u_0$  para os três casos.

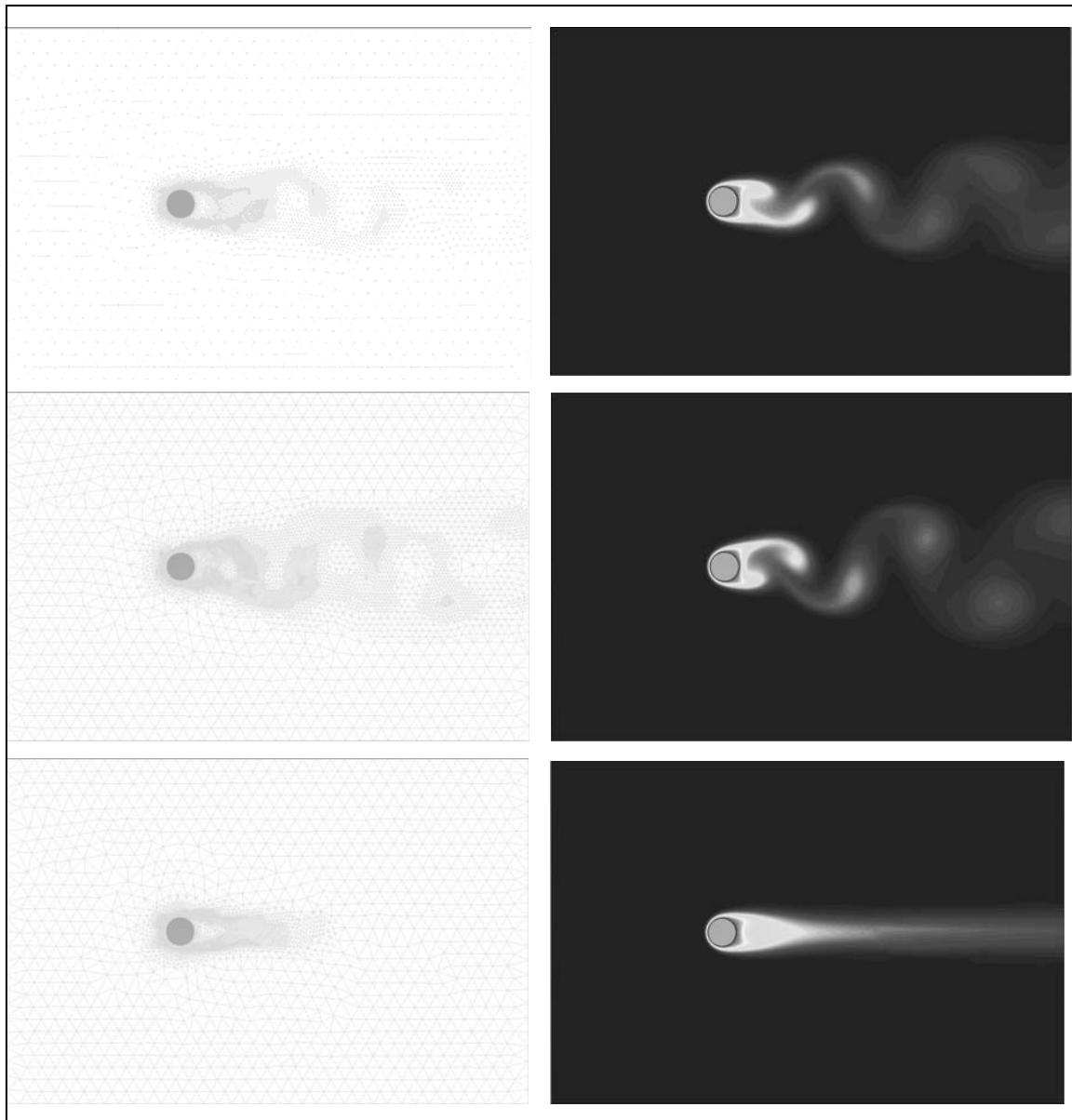


Figura 24: Malhas adaptativas finais e campo de temperatura para o escoamento em torno de um cilindro quente em  $t = 99d/u_0$ . De cima para baixo:  $Re = 100$  e  $Ri = 0$ ;  $Re = 100$ ,  $Ri = 0.25$  (escoamento a favor do sentido da gravidade) e  $Re = 100$ ,  $Ri = 0.25$  (escoamento contrário ao sentido da gravidade)

Podemos notar que o desprendimento de vórtices foi suprimido no caso de escoamento a favor das forças de empuxo (ou seja, contrário ao sentido da gravidade). Esse comportamento está de acordo com resultados obtidos por Patnaik et al [30].

A tabela 3 nos mostra os valores dos coeficiente médio de arrasto  $C_{D,\text{médio}}$ , o coeficiente rms da força transversal  $C_{L,\text{rms}}$ , do número médio de Nusselt  $\langle Nu \rangle$  e o número de Strouhal ( $St$ ) para os 2 casos. Incluímos na tabela o caso de convecção forçada (seção 5.2.2) para  $Re = 100$ , apenas para efeito de análise de comportamento.

|   | $C_{D,\text{médio}}$<br>obtido | $C_{L,\text{rms}}$<br>obtido | $\langle Nu \rangle$<br>obtido | $St$<br>obtido |
|---|--------------------------------|------------------------------|--------------------------------|----------------|
| $Ri = 0$                                    | 1.40                           | 0.24                         | 5.80                           | 0.165          |
| $Ri = 0.25$ gravidade a favor do escoamento | 1.40                           | 0.39                         | 5.70                           | 0.154          |
| $Ri = 0.25$ gravidade contra o escoamento   | 1.50                           | 0                            | 5.86                           | -              |

Tabela 3: Dados obtidos relativos a quantidade de movimento e transferência de calor com resultados para o escoamento cruzado na convecção mista e forçada com  $Pr = 1$

Pela tabela 3, podemos observar que há pouca variação no número médio de Nusselt e no coeficiente médio de arraste para os 3 casos.

Por outro lado, a força transversal associada ao desprendimento de vórtices é considerada mais intensa para o caso de escoamento contra as forças de empuxo (no mesmo sentido da gravidade), enquanto é suprimida no caso de escoamento a favor das forças de empuxo (ou seja, contrário ao sentido da gravidade) como indicado por  $C_{L,\text{rms}}$ . Esse comportamento do desprendimento de vórtices e consequentemente o comportamento do número de Strouhal estão em plena concordância com Patnaik et al [30].

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSÃO

Formulações estabilizadas de elementos finitos provaram ser bem sucedidas para os escoamentos com convecção dominante e para a simulação de escoamentos incompressíveis utilizando uma interpolação de mesma ordem para a velocidade e pressão. Métodos estabilizados podem ser derivados de diversas abordagens, tais como o método clássico de Galerkin [33] e o método de Taylor-Galerkin [34] entre outros. Em [14] uma formulação estabilizada de elementos finitos foi apresentada, onde uma discretização temporal de primeira ordem com diferenças finitas precede o uso de elementos finitos para a discretização espacial.

Nesta dissertação uma formulação de segunda ordem no tempo de elementos finitos foi apresentada. Os balanços de massa e quantidade de movimento foram combinados em uma série de Taylor de segunda ordem para a pressão. Este foi discretizado no espaço com o método de Galerkin e resulta em uma equação adequada para calcular os valores da pressão. Os balanços de quantidade de movimento e energia foram também discretizados no tempo com segunda ordem. Em seguida, minimizaram-se os mínimos quadrados dos resíduos espaciais de quantidade de movimento e energia em relação aos graus de liberdade livres para velocidade e temperatura, para obtenção das equações para atualização destas variáveis.

O método proposto introduz automaticamente os termos de estabilização necessários para controlar as oscilações espaciais (*wiggles*) em problemas com convecção dominante e para contornar as restrições Babuska-Brezzi sobre a escolha dos espaços de interpolação para velocidade e pressão.

Passos de tempo locais para quantidade de movimento e energia desempenham o papel dos parâmetros de estabilização. Um esquema simples de interpolação dos passos de tempo é incorporado no método, sincronizando o tempo de avanço da computação. A abordagem leva a um esquema de cálculo onde a pressão é calculada primeiro e depois velocidade e temperatura são calculados simultaneamente.

Para esta formulação estabilizada foi desenvolvido um programa ‘ns\_new\_solver\_2d\_a\_v2\_MPI’ mantendo as principais características do programa original ‘ns\_solver\_MPI\_2d\_a’.

Os exemplos numéricos apresentados demonstraram a efetividade do método nos cálculos de escoamentos incompressíveis (condição limite para o qual o número de Mach é nulo).

No caso da análise da convecção natural e estratificação térmica em uma cavidade quadrada, pudemos analisar a mudança do perfil de temperatura e pressão com o aumento do número de Rayleigh, e a consequente estratificação térmica. Assim como pudemos analisar o fluxo de calor adimensional (número de Nusselt) das paredes, com ótima concordância com resultados disponíveis na literatura.

No caso da convecção forçada e mista em torno de um cilindro aquecido, foi possível notar o comportamento do desprendimento de vórtices de pleno acordo com resultados experimentais. Em especial, o caso em que o desprendimento de vórtices cessa (número de Strouhal nulo).

Analisamos também o caso de convecção natural em torno de um cilindro aquecido, onde, mais uma vez conseguimos ótimos resultados nos valores de fluxo de calor e sua distribuição em torno do cilindro, quando comparados a resultados encontrados na literatura.

Casos como convecção natural, mista e forçada foram estudadas assim como a transferência de calor associada em cada caso. Comparações dos nossos resultados com soluções numéricas e experimentais disponíveis na literatura mostram o ótimo desempenho da formulação estabilizada proposta nesta dissertação.

Espera-se que o método proposto possa ser utilizado em projetos de reatores nucleares no Brasil e no estudo da segurança de nossas centrais nucleares.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Intergovernmental Panel on Climate Change Plenary XXVII, **Climate Change 2007: Synthesis Report**, 2007.
- [2] U. S. DOE Nuclear Energy Research Advisory Committee and the Generation IV International Forum, 2002. **“A Technology Roadmap for Generation IV Nuclear Energy Systems”**.
- [3] Instituto de Engenharia Nuclear. Disponível em <[http://www.ien.gov.br/oinstiuto/ien\\_flash/ien.html](http://www.ien.gov.br/oinstiuto/ien_flash/ien.html)>. Acessado em: 20 de Março de 2011.
- [4] ODETE MARIA DE OLIVEIRA, **A integração bilateral Brasil-Argentina: Tecnologia nuclear e Mercosul**, 1998
- [5] International Atomic energy (IAEA), 2010. **Nuclear Technology Review**.
- [6] JOÃO ROBERTO LOUREIRO DE MATTOS, MARCIO SOARES DIAS, **A Retomada da opção nucleoelétrica e os seus desdobramentos no cone sul**, 2008
- [7] Energy Information Administration (EIA), 2010. International energy outlook.
- [8] TODREAS, NEIL E.; KAZIMI, MUJID S.. **Nuclear Systems I – Thermal Hydraulic Fundamentals**, Taylor & Francis, 1993.

- [9] PATANKAR, S.V.. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, New York, Taylor & Francis Group, 1980.
- [10] DE SAMPAIO, P.A.B.; GONÇALVES JR, M.A.; LAPA, C.M.F.. **A CFD approach to the atmospheric dispersion of radionuclides in the vicinity of NPPs**, Nuclear Engineering and Design, v. 238, p. 250-273, 2008.
- [11] DE SAMPAIO, P.A.B.; HALLAK, P.H.; COUTINHO, A.L.G.A.; PFEIL, M.S.. **A stabilized finite element procedure for turbulent fluid-structure interaction using adaptative time-space refinement**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Chichester, UK, v.44, p. 673-693, 2004.
- [12] DE SAMPAIO, P.A.B.. **Transient solutions of the incompressible Navier–Stokes equations in primitive variables employing optimal local time stepping**, Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Numerical Methods for Laminar and Turbulent Flow, 1493-1504, 1993.
- [13] DE SAMPAIO, P.A.B.; COUTINHO A.L.G.A.. **Simulation of free and forced convection incompressible flows using an adaptive parallel/vector finite element procedure**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 29, p. 289–309, 1999.
- [14] DE SAMPAIO, P.A.B.. **A stabilized finite element method for incompressible flow and heat transfer: a natural derivation based on the use of local time-steps**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 195, p. 6177–6190, 2006.
- [15] DE SAMPAIO, P.A.B.. **A finite element formulation for transient incompressible viscous flows stabilized by local time-steps**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 194, p. 2095–2108, 2005.

[16] DE SAMPAIO, P.A.B.. **A Petrov–Galerkin formulation for the incompressible Navier–Stokes equations using equal order interpolation for velocity and pressure**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 31, p. 1135–1149, 1991.

[17] BREZZI, F.; FORTIN, M.. **Mixed and Hybrid Finite Element Methods**, New York Springer, 1991.

[18] BROOKS, A.; HUGHES, T.J.R.. **Streamline–upwind Petrov–Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes equations**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v.32, p. 199–259, 1982.

[19] ZIENKIEWICZ O.C.; MORGAN, K.. **Finite Elements & Approximation**, Mineola, New York , Dover Publication, 2006.

[20] PIRONNEAU O.. **Finite Element Methods for Fluids**, John Wiley & Sons, 1989.

[21] TU, J.; YEOH, G.H.; LIU C.. **Computational Fluid Dynamics: A Pratical Approach**, Elsevier, 2008.

[22] ZIENKIEWICZ O.C.; ZHU J.C.. **A simple error estimator and adaptive procedure for pratical engineering analysis**, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 24, p. 337-357, 1987.

[23] BOWYER, A.. **Computing Dirichlet tessellations**, Computer Journal, v. 24, p. 162-166, 1981.

- [24] KARIPYS, G.; KUMAR, V.. **Software package for portioning unstructured graphs, portioning meshes, and computing fill-reducing ordering of sparse matrices version 4.0**, Department of Computer Science, University of Minnesota, Minnesota, Minneapolis, USA.
- [25] INCROPERA, FRANK P.; DEWITT, DAVID P.; BERGMAN, THEODORE L.; LAVINE, ADRIENNE S.. **Introduction to Heat Transfer**, Fifth Edition, John Wiley & Sons, 2007.
- [26] HORTMANN, M.; PERIÉ, M.; SCHEUERER, G.. **Multigrid benchmark solutions for laminar natural convection flows in square cavities**, in: celik, i., Freitas, c.j.(eds.), Benchmark test cases for computational fluid dynamics, ASME, new york, 1-6, 1990.
- [27] BARANYI, L.. **Computation of unsteady momentum and heat transfer from a fixed circular cylinder in laminar flow**, Journal of Computational and Applied Mechanics, v. 4, p. 13-25, 2003.
- [28] NORBERG C.. **Flow around a circular cylinder**: Aspects of fluctuating lift, Journal of Fluids and Structures, v. 15, p. 459–469, 2001.
- [29] WILLIAMSON, C.H.K.. **Defining a universal and continuous Strouhal–Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder**, Physics of Fluids, v. 31, p. 2742–2744, 1988.
- [30] PATNAIK, B.S.V.; NARAYANA, P.A.A.; SEETHARAMU, K.N.. **Numerical simulation of vortex shedding past a circular cylinder under the influence of buoyancy**, International Journal of Heat and Mass Transfer, v. 42, p. 3495-3507, 1999.

- [31] CHURCHILL, S.W.; CHU, H.H.S.. **Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a hot horizontal cylinder**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 18, p. 1049-1053, 1975.
- [32] HYMAN, S.C.; BONILLA, C.F.; EHRLICH, S.W.. Natural Convection transfer processes. 1. **Heat Transfer to liquid metals and non-metals at horizontal cylinders**, Program of the Chemical Engineering Symposium, ser. 49, p. 21-31, 1953.
- [33] ZIENKIEWICZ, O.C.; CODINA, R.. **A general algorithm for compressible and incompressible flow**. Part I: The split, characteristic-based scheme, International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 20, p. 869–885, 1995.
- [34] DONEA, J.. **A Taylor–Galerkin method for convective transport problems**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 20, p. 101–119, 1984.
- [35] BERNSTEIN, M.; CHURCHILL, S.W.. J. Heat Transfer, **99**, 300, 1977.
- [36] C. F. LANGE, F. DURST AND M. BREUER, **Momentum and heat transfer from cylinders in laminar crossflow at  $0,4 \leq Re \leq 200$** , Int. J. Heat Mass Transf., v. 41, p. 3409-3430, 1998
- [37] H. S. YOON, J. B. LEE AND H. H. CHUN, **A numerical study on the fluid flow and heat transfer around a circular cylinder near a moving wall**, Int. J. Heat Mass Transf., v. 50, p. 3507-3520, 2007
- [38] OriginLab - Origin and OriginPro - Data Analysis and Graphing Software. Disponível em <<http://www.originlab.com>>. Acessado em: 27 de Abril de 2011.

[39] FERZIGER, J.H.; PERIC, M.. **Computational Methods for Fluids Dynamics**, Springer, 3<sup>a</sup> ed..

[40] DE SAMPAIO, P. A. B. ; GONÇALVES Jr, M. A.. **A second-order time accurate finite element method for quasi-incompressible viscous flows**, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2010.

## APÊNDICE A

Como mencionado no capítulo 3, mostraremos aqui a obtenção da equação de atualização de pressão, eq. (3.9).

Empregando o método clássico de Galerkin na eq. (3.8), temos:

$$\int_{\Omega} N_i (\hat{S}_a) d\Omega = 0 \quad (\text{A.1})$$

Substituindo na equação A.1 a expressão de  $\hat{S}_a$ , teremos:

$$\int_{\Omega} N_i \left( M^2 \frac{\Delta \hat{p}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} \right) - \hat{F}_a \right) d\Omega = 0 \quad (\text{A.2})$$

ou então:

$$\int_{\Omega} N_i \left( M^2 \frac{\Delta \hat{p}}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} \right) \right) d\Omega = \int_{\Omega} N_i \hat{F}_a d\Omega \quad (\text{A.3})$$

Substituindo na equação A.3 a expressão de  $\hat{F}_a$ , teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{M^2}{\Delta t} N_i \Delta \hat{p} - \int_{\Omega} N_i \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} \right) d\Omega &= - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_a} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} N_i \left( \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \left( \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + R_{ig_a} \hat{T}^n \right) \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

usando a identidade de Green no 2º termo do lado esquerdo e no 2º termo do lado direito da equação A.4 obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{M^2}{\Delta t} N_i \Delta \hat{p} + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \frac{\Delta t}{2} N_i \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} n_a d\Gamma = \\
& - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_a} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + \text{Rig}_a \hat{T}^n \right) d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_p \cup \Gamma_G} \frac{\Delta t}{2} N_i \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \left( \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + \text{Rig}_a \hat{T}^n \right) n_a d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.5}$$

No último termo do lado direito da equação acima, a expressão  $\left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \left( \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + \text{Rig}_a \hat{T}^n \right)$  pode ser reconhecida como o balanço da quantidade de movimento dada pela Eq. (2.10). Considerando que o termo de gradiente de pressão na Eq. (2.10) é tomado num nível de tempo de  $n+1$  e todos os outros termos são tomados num nível de tempo  $n$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{M^2}{\Delta t} N_i \Delta \hat{p} + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} d\Omega - \int_{\Gamma_p} \frac{\Delta t}{2} N_i \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} n_a d\Gamma = \\
& - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_a} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + \text{Rig}_a \hat{T}^n \right) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_p \cup \Gamma_G} \frac{\Delta t}{2} N_i \left( \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial t} + \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} \right) n_a d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.6}$$

onde  $p^{n+1} = \Delta p + p^n$ .

Sabemos pelo capítulo 2 (eq. (2.8)) que na fronteira  $\Gamma_p$  a pressão é prescrita, ou seja, a integral de fronteira apenas tem como domínio de integração a fronteira  $\Gamma_G$ , pois  $\Delta \hat{p} = 0$  sobre  $\Gamma_p$ , assim a equação A.7 fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{M^2}{\Delta t} N_i \Delta \hat{p} + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_a} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + Rig_a \hat{T}^n \right) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_G} \frac{\Delta t}{2} N_i \left( \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial t} \right) n_a d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Para podermos continuar com uma equação em segunda ordem no tempo, o termo  $\partial \hat{u}_a^n / \partial t$  pode ser aberto em série de Taylor, de forma que:

$$\frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial t} = \frac{\hat{u}_a^{n+1} - \hat{u}_a^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \tag{A.8}$$

Logo teremos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{M^2}{\Delta t} N_i \Delta \hat{p} + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_a} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + Rig_a \hat{T}^n \right) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_G} \frac{\Delta t}{2} N_i \left( \frac{\hat{u}_a^{n+1} - \hat{u}_a^n}{\Delta t} \right) n_a d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Pela condição de contorno dada pela equação (2.9)  $u_b n_b = \bar{G}(\mathbf{x}, t)$ , na qual pode ser entendida para cada nível de tempo,  $n$  e  $n+1$ ,  $(u_b n_b)^n = \bar{G}^n(\mathbf{x}, t)$  e  $(u_b n_b)^{n+1} = \bar{G}^{n+1}(\mathbf{x}, t)$ , obtemos então a equação 3.9:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{M^2}{\Delta t} N_i \Delta \hat{p} + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x_a} d\Omega = \\
& - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_a} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x_a} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x_a} + Rig_a \hat{T}^n \right) d\Omega \\
& - \int_{\Gamma_G} \frac{N_i}{2} \left( \bar{G}^{n+1} - \bar{G}^n \right) h_a d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Como estamos empregando o método clássico de Galerkin, substituiremos  $\Delta \hat{p} = N_j \Delta p_j$ , podemos reconhecer a equação (3.9 e 3.10) em sua forma bidimensional como:

$$[\mathbf{A}_{pp}]_{ij} = \int_{\Omega} \frac{M^2}{\Delta t} N_i N_j d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \tag{A.11}$$

$$\{\Delta \mathbf{p}\}_j = \Delta p_j \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{F}_p\}_i = & - \int_{\Omega} N_i \left( \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} \right) \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Omega} Ri \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} g_x + \frac{\partial N_i}{\partial y} g_y \right) \hat{T}^n d\Omega - \int_{\Gamma_G} \frac{N_i}{2} \left( \bar{G}^{n+1} - \bar{G}^n \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Como definimos as funções de forma  $N_j$  como funções lineares, o termo que envolve  $\hat{\tau}_{ab}^n$  na integral da Eq. 3.9 é nulo, pois  $\hat{\tau}_{ab}^n = \mu (\partial \hat{u}_a / \partial x_b + \partial \hat{u}_b / \partial x_a)^n$  envolve derivação de segunda ordem.

## APÊNDICE B

Mostraremos passo a passo que as Eqs. (3.11 e 3.12) são equações com discretizações exatas de segunda ordem no tempo.

Primeiramente vamos demonstrar a eq. (3.11). Usando série de Taylor para a variável  $u_a$ , teremos:

$$u_a^{n+1} = u_a^n + \Delta t_M \frac{\partial u_a^n}{\partial t} + \left( \frac{\Delta t_M^2}{2} \right) \frac{\partial^2 u_a^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \quad (\text{B.1})$$

Sabemos que  $u_a^{n+1/2} = u_a^n + \frac{1}{2} \Delta u_a$ , onde  $\Delta u_a = u_a^{n+1} - u_a^n$ , assim:

$$u_a^{n+1/2} = u_a^n + \frac{1}{2} \Delta u_a = u_a^n + \frac{1}{2} (u_a^{n+1} - u_a^n) = \frac{1}{2} u_a^n + \frac{1}{2} u_a^{n+1} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo B.1 em B.2 teremos:

$$u_a^{n+1/2} = \frac{1}{2} u_a^n + \frac{1}{2} \left( u_a^n + \Delta t_M \frac{\partial u_a^n}{\partial t} \right) + O(\Delta t^2) \quad (\text{B.3})$$

Derivando em relação ao tempo ambos os lados, surge que:

$$\frac{\partial u_a^{n+1/2}}{\partial t} = \frac{\partial u_a^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \Delta t_M \frac{\partial^2 u_a^n}{\partial t^2} \right) + O(\Delta t^2) \quad (\text{B.4})$$

Multiplicando por  $\Delta t_M$  ambos os lados:

$$\Delta t_M \frac{\partial u_a^{n+1/2}}{\partial t} = \Delta t_M \frac{\partial u_a^n}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \Delta t_M^2 \frac{\partial^2 u_a^n}{\partial t^2} \right) + O(\Delta t^3) \quad (\text{B.5})$$

Substituindo B.1 em B.5 teremos:

$$\Delta t_M \frac{\partial u_a^{n+1/2}}{\partial t} = (u_a^{n+1} - u_a^n) + O(\Delta t^3) \quad (B.6)$$

Depois de algumas manipulações algébricas triviais temos finalmente que:

$$\frac{\Delta u_a}{\Delta t_M} = \frac{\partial u_a^{n+1/2}}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (B.7)$$

Assim ao substituirmos a eq. (2.10) tomada num tempo  $n+1/2$ , na eq. (B.7) teremos:

$$\frac{\Delta u_a}{\Delta t_M} = - \left[ u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b} - \frac{I}{Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial u_a}{\partial x_b} + \frac{\partial u_b}{\partial x_a} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_a} + Rig_a T \right]^{n+1/2} + O(\Delta t^2) \quad (B.8)$$

Reconhecendo na equação acima que  $\tau_{ab}^{n+1/2} = \frac{I}{Re} \left( \frac{\partial u_a}{\partial x_b} + \frac{\partial u_b}{\partial x_a} \right)^{n+1/2}$ , teremos:

$$\frac{\Delta u_a}{\Delta t_M} = - \left[ \left( u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \right)^{n+1/2} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^{n+1/2}}{\partial x_b} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_a} + Rig_a T^{n+1/2} \right] + O(\Delta t^2) \quad (B.9)$$

Sabemos que  $T^{n+1/2} = T^n + \frac{1}{2} \Delta T$  e  $\tau_{ab}^{n+1/2} = \tau_{ab}^n + \frac{1}{2} \Delta \tau_{ab}$ , logo a equação acima fica:

$$\frac{\Delta u_a}{\Delta t_M} = - \left[ \left( u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \right)^{n+1/2} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \hat{\tau}_{ab}}{\partial x_b} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_a} + Rig_a T^n + Rig_a \frac{1}{2} \Delta T \right] + O(\Delta t^2) \quad (B.10)$$

No apêndice E podemos mostrar que o termo  $\left( u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \right)^{n+1/2}$  pode ser reescrito como

$$\left( u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \right)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ u_b^n \frac{\partial u_a^{n+1}}{\partial x_b} + u_b^{n+1} \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} + O(\Delta t^2) \right], \text{ assim a equação acima fica como:}$$

$$\frac{\Delta u_a}{\Delta t_M} = - \left[ \frac{1}{2} \left( u_b^n \frac{\partial u_a^{n+1}}{\partial x_b} + u_b^{n+1} \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} \right) - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \hat{\tau}_{ab}}{\partial x_b} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_a} + Rig_a T^n + Rig_a \frac{1}{2} \Delta T \right] + O(\Delta t^2) \quad (B.11)$$

Como  $\Delta u_a = u_a^{n+1} - u_a^n$ , podemos reescrever a equação acima:

$$\frac{\Delta u_a}{\Delta t_M} = - \left[ \frac{1}{2} \left( u_b^n \frac{\partial (\Delta u_a + u_a^n)}{\partial x_b} + (\Delta u_b + u_b^n) \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} \right) - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \hat{\tau}_{ab}}{\partial x_b} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_a} + Rig_a T^n + Rig_a \frac{1}{2} \Delta T \right] + O(\Delta t^2) \quad (B.12)$$

Após algumas manipulações simples a equação acima fica como:

$$\frac{\Delta u_a}{\Delta t_M} = - \left[ \frac{1}{2} \left( u_b^n \frac{\partial (\Delta u_a)}{\partial x_b} + (\Delta u_b) \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} \right) + (u_b^n) \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta \hat{\tau}_{ab}}{\partial x_b} + \frac{\partial p^{n+1/2}}{\partial x_a} + Rig_a T^n + Rig_a \frac{1}{2} \Delta T \right] + O(\Delta t^2)$$

Como  $\Delta \tau_{ab} = \frac{I}{Re} \left( \frac{\partial \Delta u_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta u_b}{\partial x_a} \right)$ , podemos ver que a expressão acima é exatamente a

eq. (3.11) que gostaríamos de provar.

Por último vamos demonstrar a eq. (3.12). Usando série de Taylor para a variável  $T$ , teremos exatamente os mesmos passos feitos para a variável de velocidade  $u_a$ , descrita acima, até a eq. (B.7). Como estamos falando agora de temperatura devemos apenas trocar  $u_a$  por  $T$  e  $\Delta t_M$  por  $\Delta t_E$ , pois estamos lidando com a escala de tempo da equação de energia. Logo teremos:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_E} = \frac{\partial T^{n+1/2}}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (B.13)$$

Assim ao substituirmos a eq. (2.12) tomada num tempo  $n+1/2$ , na eq. acima teremos:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_E} = - \left[ u_b \frac{\partial T}{\partial x_b} - \frac{I}{RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial T}{\partial x'_b} \right) \right]^{n+1/2} + O(\Delta t^2) \quad (B.14)$$

Reconhecendo na equação acima que  $q_b^{n+1/2} = -\frac{I}{RePr} \left( \frac{\partial T}{\partial x_b} \right)^{n+1/2}$ , teremos:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_E} = - \left[ \left( u_b \frac{\partial T}{\partial x_b} \right)^{n+1/2} + \frac{\partial q_b^{n+1/2}}{\partial x_b} \right] + O(\Delta t^2) \quad (B.15)$$

Sabemos que  $q_b^{n+1/2} = q_b^n + \frac{1}{2} \Delta q_b$ , logo a equação acima fica:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_E} = - \left[ \left( u_b \frac{\partial T}{\partial x_b} \right)^{n+1/2} + \frac{\partial (q_b^n + \Delta q_b / 2)}{\partial x_b} \right] + O(\Delta t^2) \quad (B.16)$$

No apêndice E podemos mostrar que o termo  $\left( u_b \frac{\partial T}{\partial x_b} \right)^{n+1/2}$  pode ser reescrito como

$$\left( u_b \frac{\partial T}{\partial x_b} \right)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ u_b^n \frac{\partial T^{n+1}}{\partial x_b} + u_b^{n+1} \frac{\partial T^n}{\partial x_b} + O(\Delta t^2) \right], \text{ assim a equação acima fica como:}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_E} = - \left[ \frac{1}{2} \left( u_b^n \frac{\partial T^{n+1}}{\partial x_b} + u_b^{n+1} \frac{\partial T^n}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial (q_b^n + \Delta q_b / 2)}{\partial x_b} \right] + O(\Delta t^2) \quad (B.17)$$

Como  $\Delta u_b = u_b^{n+1} - u_b^n$  e  $\Delta T = T^{n+1} - T^n$ , podemos reescrever a equação acima:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_E} = - \left[ \frac{1}{2} \left( u_b^n \frac{\partial (\Delta T + T^n)}{\partial x_b} + (u_b^n + \Delta u_b) \frac{\partial T^n}{\partial x_b} \right) + \frac{\partial (q_b^n + \Delta q_b / 2)}{\partial x_b} \right] + O(\Delta t^2) \quad (B.18)$$

Após algumas manipulações simples podemos ver que a equação acima fica como:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t_E} = - \left[ \frac{1}{2} \left( u_b^n \frac{\partial \Delta T}{\partial x_b} + \Delta u_b \frac{\partial T^n}{\partial x_b} \right) + u_b^n \frac{\partial T^n}{\partial x_b} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta q_b}{\partial x_b} + \frac{\partial q_b^n}{\partial x_b} \right] + O(\Delta t^2) \quad (B.19)$$

Como  $\Delta q_b = -\frac{I}{RePr} \left( \frac{\partial \Delta T}{\partial x_b} \right)$ , podemos ver que a expressão acima é exatamente a eq. (3.12) que gostaríamos de provar.

## APÊNDICE C

Como mencionado no capítulo 3, mostraremos aqui a obtenção das equações governantes da variação da velocidade e temperatura, eq. (3.24 e 3.25).

Primeiramente, mostraremos o procedimento para  $\forall \Delta u_{ci}$  livre:

Ao introduzirmos as Eqs. (3.16 – 3.19) na Eq. (3.22) obtemos :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_c + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_c^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_a} \right) \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left( \frac{Rig_a \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{Rig_c \Delta \hat{T}}{2} \right] d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_c^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_c} - \frac{\partial \hat{\tau}_{cb}^n}{\partial x_b} + Rig_c \hat{T}^n \right] d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + Rig_a \hat{T}^n \right] d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega + \\
 & + \int_{\Gamma_c} N_i \left[ (-p \delta_{cb} + \tau_{cb}) n_b - \bar{t}_c(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

usando a identidade de Green nos seguintes termos:  $\int_{\Omega} [N_i] \left[ \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega;$

$\int_{\Omega} [N_i] \left[ \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_c} \right] d\Omega$  e  $\int_{\Omega} [N_i] \left[ \frac{\partial \hat{\tau}_{cb}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega$  obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_c + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_c^n}{\partial x_b} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2Re} \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_{tc} \cup \Gamma_{uc}} \left[ \frac{1}{2Re} N_i \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] n_b d\Gamma \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_a} \right) \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left( \frac{Rig_a \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{Rig_c \Delta \hat{T}}{2} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_c^n}{\partial x_b} + Rig_c \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \hat{p}^{n+1/2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_c} \right] \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{tc} \cup \Gamma_{uc}} \left[ \hat{p}^{n+1/2} \right] N_i n_c d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_c} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \hat{\tau}_{cb}^n \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \right] d\Omega - \int_{\Gamma_{tc} \cup \Gamma_{uc}} \left[ N_i \hat{\tau}_{cb}^n n_b \right] d\Gamma - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial \hat{\tau}_{cb}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + Rig_a \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{tc}} N_i \left[ (-p \delta_{cb} + \tau_{cb}) n_b - \bar{t}_c(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Sabemos pelo capítulo 2 (eq. (2.4 e 2.5)) que na fronteira  $\Gamma_{uc}$  a velocidade é prescrita ou seja  $\Delta\hat{u}_c = 0$ , e a fronteira  $\Gamma_{tc}$  é relativa apenas as variáveis de pressão e tensão cisalhante, logo as integrais de fronteira apenas têm como domínio de integração a fronteira  $\Gamma_{tc}$ . E após algumas manipulações simples na equação acima e reconhecendo que

$$\Delta\hat{\tau}_{cb} = \frac{I}{2Re} \left( \frac{\partial\Delta\hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial\Delta\hat{u}_b}{\partial x_c} \right), \text{ teremos:}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta\hat{u}_c + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial\Delta\hat{u}_c}{\partial x_b} + \Delta\hat{u}_b \frac{\partial\hat{u}_c^n}{\partial x_b} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{I}{2Re} \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \left( \frac{\partial\Delta\hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial\Delta\hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{I}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial\Delta\hat{u}_c}{\partial x_b} + \frac{\partial\Delta\hat{u}_b}{\partial x_c} \right) \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial\hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta\hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial\Delta\hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta\hat{u}_b \frac{\partial\hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{I}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial\Delta\hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial\Delta\hat{u}_b}{\partial x_a} \right) \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial\hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left( \frac{1}{2} \Delta\hat{u}_b \frac{\partial\hat{T}^n}{\partial x_b} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial\hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left( \frac{Rig_a \Delta\hat{T}}{2} \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{Rig_c \Delta\hat{T}}{2} \right] d\Omega \tag{C.3} \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial\hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta\hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial\Delta\hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{I}{2RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial\Delta\hat{T}}{\partial x_b} \right) \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial\hat{u}_c^n}{\partial x_b} + Rig_c \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \hat{p}^{n+1/2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_c} \right] \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{tc}} N_i \left[ \hat{p}^{n+1/2} \delta_{cb} - \left( \hat{\tau}_{cb}^n + \frac{1}{2} \Delta\hat{\tau}_{cb}^n \right) \right] n_b d\Gamma + \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial\hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_c} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \hat{\tau}_{cb}^n \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial\hat{\tau}_{cb}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial\hat{u}_a^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial\hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial\hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial\hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + Rig_a \hat{T}^n \right] d\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_c} N_i \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_{t_c}} N_i \left[ (-p \delta_{cb} + \tau_{cb}) n_b - \bar{t}_c(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma = 0
\end{aligned}$$

Como  $\hat{\tau}_{cb}^{n+1/2} = \hat{\tau}_{cb}^n + \frac{1}{2} \Delta \hat{\tau}_{cb}^n$ , o termo  $\int_{\Gamma_{t_c}} N_i \left[ \hat{p}^{n+1/2} \delta_{cb} - \left( \hat{\tau}_{cb}^n + \frac{1}{2} \Delta \hat{\tau}_{cb}^n \right) \right] n_b d\Gamma$  fica como

$$\int_{\Gamma_{t_c}} N_i \left[ \hat{p}^{n+1/2} \delta_{cb} - \left( \hat{\tau}_{cb}^{n+1/2} \right) \right] n_b d\Gamma, \text{ sendo este cancelado com o termo } \int_{\Gamma_{t_c}} N_i \left[ (-p \delta_{cb} + \tau_{cb}) n_b \right]^{n+1/2} d\Gamma \text{ já}$$

existente das condições de contorno impostas ao problema, dessa forma, finalmente, chegamos a equação (3.24).

Por último, mostraremos o procedimento para  $\forall \Delta T_i$  livre:

Ao introduzirmos as Eqs. (3.16 – 3.19) na Eq. (3.23) obtemos :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{2 Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{R_i g_a \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2 Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_a} \right) \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + R_i g_a \hat{T}^n \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} N_i \left[ \bar{q}(\mathbf{x}, t) - q_b n_b \right]^{n+1/2} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{C.4}$$

usando a identidade de Green nos seguintes termos:  $\int_{\Omega} [N_i] \left[ \frac{1}{2RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] d\Omega$  e

$\int_{\Omega} [N_i] \left[ \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega$  obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right) \right] \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2RePr} \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] d\Omega - \int_{\Gamma_T \cup \Gamma_q} N_i \left[ \frac{1}{2RePr} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] n_b d\Gamma \\
 & - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{2RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{Rig_a \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega + \quad (C.5) \\
 & \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_a} \right) \right) d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_T \cup \Gamma_q} [N_i] \hat{q}_b^n n_b d\Gamma - \int_{\Omega} [\hat{q}_b^n] \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{t}_{ab}^n}{\partial x_b} + Rig_a \hat{T}^n \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} N_i \left[ \hat{q}(\mathbf{x}, t) - q_b n_b \right]^{n+1/2} d\Gamma = 0
 \end{aligned}$$

Sabemos pelo capítulo 2 (eq. (2.6 e 2.7)) que na fronteira  $\Gamma_T$  a temperatura é prescrita ou seja  $\Delta \hat{T} = 0$ , e a fronteira  $\Gamma_q$  é relativa apenas as variáveis de fluxo de calor, logo as integrais de fronteira apenas têm como domínio de integração a fronteira  $\Gamma_q$ . E após algumas

manipulações simples na equação acima e reconhecendo que  $\Delta \hat{q}_b = -\frac{1}{RePr} \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b}$ , teremos:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right) \right] \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2RePr} \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{1}{2RePr} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x_b} \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{Rig_a \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega + \quad (C.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left( \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u}_a + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}_b^n \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \Delta \hat{u}_b \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} \right) \right] - \frac{1}{2 Re} \frac{\partial}{\partial x_b} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}_a}{\partial x_b} + \frac{\partial \Delta \hat{u}_b}{\partial x_a} \right) \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x_b} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \hat{q}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \hat{u}_b^n \frac{\partial N_i}{\partial x_b} \right] \left[ \frac{\partial \hat{q}_b^n}{\partial x_b} \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma_q} N_i \left[ \frac{1}{2} \Delta \hat{q}_b + \hat{q}_b^n \right] n_b d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_a N_i \right) \left[ \hat{u}_b^n \frac{\partial \hat{u}_a^n}{\partial x_b} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x_a} - \frac{\partial \hat{\tau}_{ab}^n}{\partial x_b} + R_i g_a \hat{T}^n \right] d\Omega + \int_{\Gamma_q} N_i \left[ \bar{q}(\mathbf{x}, t) - q_b n_b \right]^{n+1/2} d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Como  $\hat{q}_b^{n+1/2} = \frac{1}{2} \Delta \hat{q}_b + \hat{q}_b^n$ , o termo  $\int_{\Gamma_q} N_i \left[ \frac{1}{2} \Delta \hat{q}_b + \hat{q}_b^n \right] n_b d\Gamma$  fica como  $\int_{\Gamma_q} N_i \left[ \hat{q}_b^{n+1/2} n_b \right] d\Gamma$ ,

sendo este cancelado com o termo  $\int_{\Gamma_q} N_i \left[ \bar{q}(\mathbf{x}, t) - q_b n_b \right]^{n+1/2} d\Gamma$  já existente das condições de

contorno impostas ao problema, dessa forma, finalmente, chegamos a equação (3.25).

Podemos reconhecer as eqs. (3.24 e 3.25) em sua forma bidimensional como:

Para a componente  $x$  do problema, ou seja,  $\forall \Delta u_i$  livre, temos a eq. (3.24) como:



$$+ \int_{\Omega} \left[ \hat{P}^{n+1/2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \hat{\tau}_{xx}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{\tau}_{xy}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{tx}} N_i \left[ \hat{t}_x(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma$$

Para a componente  $y$  do problema, ou seja,  $\forall \Delta v_i$  livre, temos a eq. (3.24) como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{v} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} + \Delta \hat{u} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} \right) \right] \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial y} \right) \right] \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial y} \right) \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{v} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \Delta \hat{u} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} + \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial y} + \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} + \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} + \Delta \hat{u} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} N_i \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{u} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \frac{1}{2} \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left[ \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} N_i \left( \frac{Rig_x \Delta \hat{T}}{2} \right) + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} N_i \left( \frac{Rig_y \Delta \hat{T}}{2} \right) \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{Rig_y \Delta \hat{T}}{2} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{2RePr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& = - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} + Rig_y \hat{T}^n \right] d\Omega
\end{aligned} \tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} N_i \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial y} + Rig_x \hat{T}^n \right] \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left( \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} N_i \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} + Rig_y \hat{T}^n \right] \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} N_i \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{q}_x^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^n}{\partial y} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left[ \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \hat{p}^{n+1/2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \hat{\tau}_{yy}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} + \hat{\tau}_{yx}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{t_y}} N_i \left[ \hat{t}_y(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Para ambas as componentes, ou seja,  $\forall \Delta T_i$  livre temos a eq. (3.25) como:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2RePr} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left\{ \frac{1}{2RePr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_x N_i \right) \left( \frac{Rig_x \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_y N_i \right) \left( \frac{Rig_y \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{1}{2} \left( \Delta \hat{u} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} \right) \right] d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_x N_i \right) \left( \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial y} + \Delta \hat{u} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} \right) \right] \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_x N_i \right) \left( \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} \right) \right] \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_y N_i \right) \left( \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{v} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} + \Delta \hat{u} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} \right) \right] \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_y N_i \right) \left( - \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial y} \right) \right] \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} \right] d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial \hat{q}_x^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^n}{\partial y} \right] d\Omega \tag{C.9} \\
&\quad - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_x N_i \right) \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial y} + R_i g_x \hat{T}^n \right] d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_y N_i \right) \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} + R_i g_y \hat{T}^n \right] d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^n + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_y^n \right) d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i \left[ \bar{q}(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma
\end{aligned}$$

## APÊNDICE D

Substituindo as variáveis do problema por:  $\Delta\hat{u}_a = N_j \Delta u_{aj}$  (idênticamente  $\Delta\hat{u}_b = N_j \Delta u_{bj}$ ) e  $\Delta\hat{T} = N_j \Delta T_j$  nas Eqs. (3.24 e 3.25) obtemos um sistema de equações simétricas para calcular os valores nodais da atualização da velocidade e temperatura. Mostraremos aqui a forma das eqs (3.26), com ajuda do apêndice C, podemos definir então:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}_{uu}]_{ij} = & \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta\hat{u} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial y} + \Delta\hat{u} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} \right) \right] \right] d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial y} \right) \right] \right] d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta\hat{u} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial y} + \Delta\hat{u} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta\hat{u}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \Delta\hat{v} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta\hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} N_i \left( \frac{1}{2} \Delta\hat{u} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}_{uv}]_{ij} = & \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \Delta\hat{v} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} \right) \right] \right] d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta\hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta\hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \Delta\hat{v} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta\hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta\hat{v} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta\hat{v}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta\hat{v}}{\partial y} + \Delta\hat{v} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta\hat{v}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta\hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta\hat{v}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} N_i \left( \frac{1}{2} \Delta\hat{v} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_{\mathbf{uT}}]_{ij} = & \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left[ \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} N_i \left( \frac{Rig_x \Delta \hat{T}}{2} \right) + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} N_i \left( \frac{Rig_y \Delta \hat{T}}{2} \right) \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{Rig_x \Delta \hat{T}}{2} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} N_i \left\{ \frac{1}{2RePr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
\end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_{\mathbf{vv}}]_{ij} = & \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{v} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} \right) \right] \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right] d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{v} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_M} \left[ \Delta \hat{u} + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{2Re} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} N_i \left( \frac{1}{2} \Delta \hat{v} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_{\mathbf{vT}}]_{ij} = & \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left[ \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} N_i \left( \frac{Rig_x \Delta \hat{T}}{2} \right) + \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} N_i \left( \frac{Rig_y \Delta \hat{T}}{2} \right) \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{Rig_y \Delta \hat{T}}{2} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} N_i \left\{ \frac{1}{2RePr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega
\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A}_{\text{TT}}]_{ij} = & \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left\{ \frac{1}{\Delta t_E} \left[ \Delta \hat{T} + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2RePr} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right] \right\} d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left\{ \frac{1}{2RePr} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Delta \hat{T}}{\partial y} \right) \right] \right\} d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_x N_i \right) \left( \frac{Rig_x \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_y N_i \right) \left( \frac{Rig_y \Delta \hat{T}}{2} \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\{\Delta \mathbf{u}\}_j = \Delta u_j \tag{D.6}$$

$$\{\Delta \mathbf{v}\}_j = \Delta v_j \tag{D.7}$$

$$\{\Delta \mathbf{T}\}_j = \Delta T_j \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{F}_u\}_i = & - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} + Rig_x \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} N_i \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial y} + Rig_x \hat{T}^n \right] \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left( \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} N_i \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} + Rig_y \hat{T}^n \right] \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} N_i \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{q}_x^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^n}{\partial y} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left[ \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \hat{p}^{n+1/2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \hat{\tau}_{xx}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{\tau}_{xy}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] d\Omega \right]
\end{aligned} \tag{D.9}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{F}_v\}_i = & - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} + Rig_y \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} N_i \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial y} + Rig_x \hat{T}^n \right] \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left( \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} N_i \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} + Rig_y \hat{T}^n \right] \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_E}{2} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} N_i \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{q}_x^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^n}{\partial y} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{2} \left[ \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left[ \hat{p}^{n+1/2} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \right] d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \hat{\tau}_{yy}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} + \hat{\tau}_{yx}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_y} N_i \left[ \bar{t}_y(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma
\end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{F}_T\}_i = & - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial y} \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left[ \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] \left[ \frac{\partial \hat{q}_x^n}{\partial x} + \frac{\partial \hat{q}_y^n}{\partial y} \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_x N_i \right) \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{xy}^n}{\partial y} + Rig_x \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta t_M}{2} R_i g_y N_i \right) \left[ \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial y} + \frac{\partial \hat{p}^{n+1/2}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yx}^n}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_{yy}^n}{\partial y} + Rig_y \hat{T}^n \right] d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x^n + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_y^n \right) d\Omega - \int_{\Gamma_q} N_i \left[ \bar{q}(\mathbf{x}, t) \right]^{n+1/2} d\Gamma
\end{aligned} \tag{D.11}$$

## APÊNDICE E

Neste apêndice mostraremos que os termos  $\left(u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b}\right)^{n+1/2}$  e  $\left(u_b \frac{\partial T}{\partial x_b}\right)^{n+1/2}$ , vistos no apêndice B, podem ser reescritos como  $\left(u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b}\right)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ u_b^n \frac{\partial u_a^{n+1}}{\partial x_b} + u_b^{n+1} \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} + O(\Delta t^2) \right]$  e  $\left(u_b \frac{\partial T}{\partial x_b}\right)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ u_b^n \frac{\partial T^{n+1}}{\partial x_b} + u_b^{n+1} \frac{\partial T^n}{\partial x_b} + O(\Delta t^2) \right]$ , respectivamente.

Como estes dois termos terão demonstrações idênticas, pois são semelhantes na estrutura, demonstraremos em uma forma generalizada para quaisquer duas variáveis envolvidas. Chamemos-as de  $A$  e  $B$ , como as variáveis de um problema. Então queremos demonstrar que:

$$(AB)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ A^n B^{n+1} + A^{n+1} B^n + O(\Delta t^2) \right] \quad (E.1)$$

Pelo apêndice B vimos a série de Taylor para a variável  $u_a$  e  $T$ , então para uma variável  $A$  e  $B$ , as suas respectivas séries de Taylor ficam como:

$$A^{n+1} = A^n + \Delta t \frac{\partial A^n}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (E.2)$$

$$B^{n+1} = B^n + \Delta t \frac{\partial B^n}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (E.3)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, vistas no apêndice B, podemos escrever as seguintes expressões:

$$A^{n+1/2} = A^n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial A^n}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (E.4)$$

$$B^{n+1/2} = B^n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial B^n}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (E.5)$$

Podemos também inserir a eq. (E.4) na eq.(E.2) e inserir a eq. (E.5) na eq.(E.3), dessa forma teremos:

$$A^{n+1} = A^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial A^n}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (E.6)$$

$$B^{n+1} = B^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial B^n}{\partial t} + O(\Delta t^2) \quad (E.7)$$

Ao introduzirmos as eqs (E.4 – E.7) na expressão (E.1), temos finalmente:

$$\begin{aligned} (AB)^{n+1/2} = & \frac{1}{2} \left[ \left( A^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial A^n}{\partial t} \right) \left( B^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial B^n}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \left( A^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial A^n}{\partial t} \right) \left( B^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial B^n}{\partial t} \right) + O(\Delta t^2) \right] \end{aligned} \quad (E.8)$$

Multiplicando internamente teremos:

$$\begin{aligned} (AB)^{n+1/2} = & \frac{1}{2} \left[ A^{n+1/2} B^{n+1/2} - B^{n+1/2} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial A^n}{\partial t} - \frac{\Delta t^2}{4} \frac{\partial A^n}{\partial t} \frac{\partial B^n}{\partial t} + A^{n+1/2} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial B^n}{\partial t} + \right. \\ & \left. + A^{n+1/2} B^{n+1/2} - \frac{\Delta t^2}{4} \frac{\partial A^n}{\partial t} \frac{\partial B^n}{\partial t} + B^{n+1/2} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial A^n}{\partial t} - A^{n+1/2} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial B^n}{\partial t} + O(\Delta t^2) \right] \end{aligned} \quad (E.9)$$

Ao somarmos os termos do lado direito da equação acima podemos ver que:

$$(AB)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ 2A^{n+1/2} B^{n+1/2} - \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial A^n}{\partial t} \frac{\partial B^n}{\partial t} + O(\Delta t^2) \right] \quad (E.10)$$

O termo  $\frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial A^n}{\partial t} \frac{\partial B^n}{\partial t}$  na equação acima é de segunda ordem no tempo, assim finalmente podemos chegar ao resultado que procurávamos:

$$(AB)^{n+1/2} = A^{n+1/2} B^{n+1/2} + O(\Delta t^2) \quad (\text{E.11})$$

Logo provamos que  $(AB)^{n+1/2} = \frac{1}{2} [A^n B^{n+1} + A^{n+1} B^n + O(\Delta t^2)]$ . Ao mudarmos as variáveis A e B, para as quais usamos nos nossos problemas dessa dissertação teremos:

$$\left( u_b \frac{\partial u_a}{\partial x_b} \right)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ u_b^n \frac{\partial u_a^{n+1}}{\partial x_b} + u_b^{n+1} \frac{\partial u_a^n}{\partial x_b} + O(\Delta t^2) \right] \quad (\text{E.12})$$

$$\left( u_b \frac{\partial T}{\partial x_b} \right)^{n+1/2} = \frac{1}{2} \left[ u_b^n \frac{\partial T^{n+1}}{\partial x_b} + u_b^{n+1} \frac{\partial T^n}{\partial x_b} + O(\Delta t^2) \right] \quad (\text{E.13})$$