

UMA FORMULAÇÃO ESTABILIZADA DE ELEMENTOS FINITOS PARA  
SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM GEOMETRIA  
AXISSIMÉTRICA

Altivo Monteiro de Souza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA NUCLEARES DO INSTITUTO DE ENGENHARIA  
NUCLEAR DA COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR – ÊNFASE PROFISSIONAL EM  
ENGENHARIA DE REATORES.

Orientador: Prof. Paulo Augusto Berquó de Sampaio (PPGIEN/CNEN)

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2008

SOUZ Souza, Altivo Monteiro de

Uma Formulação Estabilizada de Elementos Finitos para Solução das Equações de Navier-Stokes em Geometria Axissimétrica / Altivo Monteiro de Souza – Rio de Janeiro: CNEN/IEN, 2008.

69f.

Orientador: Paulo Augusto Berquó de Sampaio

Dissertação (Mestrado em Engenharia de Reatores) – Instituto de Engenharia Nuclear, PPGIEN, 2008.

1. Engenharia de Reatores. 2. Elementos Finitos.  
3. Fluidodinâmica Computacional. 4. Equações de Navier-Stokes.

CDD

CDU

UMA FORMULAÇÃO ESTABILIZADA DE ELEMENTOS FINITOS PARA  
SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM GEOMETRIA  
AXISSIMÉTRICA

Altivo Monteiro de Souza

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA NUCLEARES DO INSTITUTO DE ENGENHARIA  
NUCLEAR DA COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR COMO PARTE  
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA NUCLEAR – ÊNFASE PROFISSIONAL EM  
ENGENHARIA DE REATORES.

Aprovada por:

---

Prof. Paulo Augusto Berquó de Sampaio (PPGIEN/CNEN)

---

Profa. Maria de Lourdes Moreira (PPGIEN/CNEN)

---

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo (PEN/COPPE/UFRJ)

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2008

*Aos meus Pais e a presença de Deus na minha família, pois isso contribuiu para a  
pessoa que sou hoje.*

*A todos que contribuíram para a minha criação, me tornando uma pessoa feliz.*

*“porque em verdade vos digo que, se tiverdes fé como um grão de mostarda, direis a  
este monte: Passa daqui para acolá, e há de passar; e nada vos será impossível.”*

*Mateus 17:20*

## AGRADECIMENTOS

A Deus que faz parte da minha vida.

Ao orientador e amigo Professor Paulo Augusto Berquó de Sampaio, que sempre me incentivou e sempre esteve presente como orientador, amigo e um grande exemplo a se seguir e sem o qual este trabalho não seria realizado.

Aos professores do PPGIEN que contribuíram muito para o meu desenvolvimento profissional.

A direção do PPGIEN, pois sem a esta infra-estrutura o trabalho seria bem mais difícil.

A minha família, meu Pai (José), minha mãe (Vera Lúcia) e meus irmãos. Em particular o Edmilson e a Alcení que sempre estiveram me apoiando juntamente com meus pais ao longo do trabalho.

Aos meus sobrinhos.

A minha noiva Ana Paula que sempre se mostrava otimista e teve que ouvir sobre meu trabalho em todos os finais de semana.

Aos amigos e companheiros do mestrado, Rafael, Douglas, Stefan, Carlos, Marco Aurélio e André, que com o companheirismo deram mais alegria a os dias de estudo e trabalho. O Rafael sempre foi o mais engraçado.

Aos amigos do IEN que estiveram presentes ao longo do curso, Sem esquecer o Milton, Carla, Antônio e o André.

Ao Pr. Renato e os irmãos e amigos da Primeira Igreja Batista Renovada em Pachecos.

Resumo da dissertação apresentada ao PPGIEN/CNEN como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

UMA FORMULAÇÃO ESTABILIZADA DE ELEMENTOS FINITOS PARA  
SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES EM GEOMETRIA  
AXISSIMÉTRICA

Altivo Monteiro de Souza

Dezembro/2008

Orientador: Paulo Augusto Berquó de Sampaio

Programa: Programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia Nucleares do IEN

O consumo energético mundial tem aumentado muito ao longo dos anos e incentivado pesquisas em novas tecnologias. Paralelamente a este crescimento, a energia nuclear tem se tornado uma alternativa para suprir a demanda energética em escala industrial. Visando o melhor entendimento e facilidade da análise das usinas nucleares, técnicas modernas de simulação computacional de problemas de mecânica de fluidos e de transferência de calor vem ganhando cada vez maior importância. Um grande número de problemas encontrados na engenharia de reatores nucleares pode ser tratado com a hipótese de simetria axial. Por esta razão, neste trabalho foi desenvolvida e testada uma formulação de elementos finitos para solução das equações de Navier-Stokes e de energia em simetria axial. A formulação foi implementada no programa NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A, originalmente desenvolvido no Laboratório de Computação Paralela do Instituto de Engenharia Nuclear (LCP/IEN), encontrando-se disponível para estudos de análise de segurança e de projeto de sistemas nucleares.

Abstract of the thesis presented to PPGIEN/CNEN as a partial fulfillment of the requirements of the degree of Master of Science (M. Sc.)

A Stabilized Finite Element Formulation for the Solution of the Navier-Stokes Equations in  
Axyssimetric Geometry

Altivo Monteiro de Souza

December/2008

Advisor: Paulo Augusto Berquó de Sampaio

School: Programa de Pós-Graduação em Ciências e Tecnologia Nucleares do IEN

The world energy consumption has been increasing strongly in recent years. Nuclear energy has been regarded as a suitable option to supply this growing energy demand in industrial scale. In view of the need of improving the understanding and capacity of analysis of nuclear power plants, modern simulation techniques for flow and heat transfer problems are gaining greater importance. A large number of problems found in nuclear reactor engineering can be dealt assuming axial symmetry. Thus, in this work a stabilized finite element formulation for the solution of the Navier-Stokes and energy equations for axysymmetric problems have been developed and tested. The formulation has been implemented in the NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A program developed at the Parallel Computation Laboratory of the Instituto de Engenharia Nuclear (LCP/IEN) and is now available either for safety analysis or design of nuclear systems.

**SUMÁRIO**

	Pág.
1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Objetivo .....	3
1.2. Organização do trabalho .....	4
2. MODELO FÍSICO .....	6
2.1. Modelo físico para escoamento incompressível e transferência de calor .....	6
2.2. Equações governantes na forma adimensional .....	8
3. FORMULAÇÃO .....	10
3.1. Formulações estabilizadas do método dos elementos finitos .....	10
3.2. Passos de tempo locais e sincronização .....	14
4. O CÓDIGO COMPUTACIONAL .....	19
4.1. Remalhagem adaptativa .....	20
4.2. Implementação em sistemas de computação paralela .....	21
5. TESTES DE VALIDAÇÃO .....	24
5.1. Obtenção de resultados .....	24
5.2. Análise dos pontos de desenvolvimento .....	25
5.3. Análise a cerca do fator de atrito .....	27
6. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO .....	31
6.1. Tubo longo com aquecimento em uma das regiões .....	31



6.2. Downcomer .....	35
7. CONCLUSÕES .....	42
8. APÊNDICE .....	44
9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	54

**LISTA DE SÍMBOLOS E VARIÁVEIS**

$\Omega$	Domínio limitado aberto
$\Gamma$	Contorno de limitação do domínio
$u_\theta$	Componente tangencial de velocidade
$u$	Componente axial de velocidade
$v$	Componente radial de velocidade
$P$	Pressão
$T$	Temperatura
$\mu$	Viscosidade do fluido
$k$	Condutividade térmica
$c$	Capacidade térmica
$\rho$	Densidade do fluido (à temperatura de referência $T_0$ )
$\beta$	Coefficiente de expansão volumétrica
$x$	Componente axial de posição
$r$	Componente radial de posição
$g_x$	Componente axial de aceleração da gravidade
$\mathbf{g}$	Vetor aceleração da gravidade

$n_x$	Componente axial do vetor normal ao contorno
$n_r$	Componente radial do vetor normal ao contorno
$D$	Diâmetro característico
Re	Número de Reynolds
Ri	Número de Richardson
Pr	Número de Prandtl
$\Delta t$	Passo de tempo
$\Delta P$	Variação temporal do campo de pressão
$\Delta u$	Componente axial da variação temporal do campo de velocidade
$\Delta v$	Componente radial da variação temporal do campo de velocidade
$\Delta T$	Variação temporal do campo de temperatura
$w^{n+\theta}$	Valor de uma variável $w$ no tempo $n + \theta$
$\hat{w}$	Variável $w$ espacialmente discretizada
$w_j$	Valor de $w$ no nó $j$
$\bar{w}$	Valor prescrito de $w$
$N_j$	Função de norma no nó $j$
$\lambda$	Parâmetro de normalização
$\gamma$	Parâmetro de normalização

$\widehat{R}_x$  Componente axial do resíduo da discretização da equação de quantidade de movimento

$\widehat{R}_r$  Componente radial do resíduo da discretização da equação de quantidade de movimento

$\widehat{E}$  Resíduo da discretização da equação de energia

$W_i$  Função de peso do nó  $i$

$w'$   $w$  adimensional

$h_e$  Tamanho linear do elemento finito

$\alpha$  Parâmetro ótimo de upwind

$Re_h$  Número de Reynolds do elemento finito

$Pe_h$  Número de Peclet do elemento finito

$\Delta t^*$  Passo de tempo sincronizado

$\Delta \widehat{w}$  Variações de  $w$  obtidas para passos de tempo específicos

$\Delta w_j^*$  Valores nodais das variações de  $w$  de  $t^n$  a  $t^*$

$w_j^*$  Solução sincronizada em  $t^*$

$\overline{G}$  Fluxo de massa

## LISTA DE ILUSTRAÇÃO

Figura 1 : Representação esquemática de avanço de tempo de solução que usa passos de tempo locais e sincronização no tempo $t^n + \Delta t^*$ .....	16
Figura 2 : Exemplo de decomposição de um domínio usando 4 processadores .....	23
Figura 3 : Gráfico das velocidades em relação aos comprimentos do tubo para os diferentes valores Reynolds .....	26
Figura 4 : Gráfico dos pontos de desenvolvimento do fluido referente aos valores de Reynolds .....	27
Figura 5 : Gráficos das pressões contra as posições no tubo para diferentes números de Reynolds .....	29
Figura 6 : Gráfico dos valores do atrito numéricos e teóricos .....	30
Figura 7 : Detalhe do aquecimento na parede do tubo .....	32
Figura 8 : Tubo longo com 80 diâmetros e cortados em partes de 11 em 11 diâmetros.....	33
Figura 9 : Vetor velocidade nos setores (d) e (e), e a distribuição de temperatura nos mesmos e as legendas correspondentes a velocidade e temperatura .....	34
Figura 10 : Maquete de um reator nuclear PWR .....	35
Figura 11 : Modelo do vaso de um reator nuclear PWR .....	36
Figura 12 : Visão do tambor perfurado usado no projeto ROCOM.....	37
Figura 13 : Malha inicial usada para simulação do downcomer .....	38
Figura 14 : Detalhamento da remalhagem adaptativa em dois instantes diferentes.....	39
Figura 15 : Campo de velocidade vetorial do fluido em dois instantes diferentes.....	40
Figura 16 : Distribuição de pressão ao longo do dowcomer.....	41

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

Estima-se que a população mundial se expanda dos atuais 6 bilhões de pessoas para 10 bilhões de pessoas em 2050 [1], com todos almejando uma melhor qualidade de vida. À medida que cresce a população da Terra, cresce também a demanda por energia e pelos benefícios que esta proporciona. Para dar suporte ao desenvolvimento sustentável da humanidade, será preciso aumentar o uso de fontes de energia limpas, seguras e economicamente competitivas. Destaca-se entre estas fontes de energia a geração nuclear.

Para obter o máximo de potencialidade da energia nuclear, muitos esforços vem sendo empregados em novos projetos de usinas nucleares, assim como em melhorias das usinas já existentes. Porém, desenvolver novas concepções de sistemas nucleares, ou promover mudanças em usinas já existentes, demanda muito investimento em pesquisa e desenvolvimento.

Assim, modelos apropriados e ferramentas computacionais são necessários para prever e avaliar como um determinado componente de uma usina se comportará mesmo antes de sua construção. No campo da simulação do escoamento de fluidos e da transferência de calor, destaca-se o papel emergente da Fluidodinâmica Computacional (do inglês Computational Fluid Dynamics – CFD) por sua aplicabilidade no desenvolvimento de projetos e na análise de segurança dos sistemas nucleares.

A Fluidodinâmica Computacional (CFD) faz parte da área de Mecânica Computacional que, por sua vez, está incluída na grande área de simulação. A simulação é usada por pesquisadores e engenheiros para prever o comportamento em serviço de produtos, processos ou materiais. De fato, a importância prática da Fluidodinâmica Computacional pode ser apreciada por sua contribuição nos aspectos enumerados abaixo:

- ◆ Necessidade de predição. Diz respeito à impossibilidade de prever com exatidão o desempenho de um novo produto. Assim, considere um novo protótipo de avião, carro ou mesmo uma nova concepção de central nuclear. Os projetos iniciais podem conter falhas escondidas que podem levar a quebra, inoperabilidade ou, até mesmo, a perda do apelo de venda do equipamento. Os custos do desenvolvimento de novos produtos são tão grandes que falhas não previamente identificadas podem até mesmo levar uma empresa à falência. Um modo de minimizar o risco de se encontrar casos de desempenho insatisfatório é coletar um grande volume de informações do comportamento do produto sob as mais diversas condições. A Fluidodinâmica Computacional (CFD) pode fornecer este tipo de informação.
- ◆ Custos de experimentos: Os experimentos, que são a única alternativa à simulação, são custosos. Já em 1980 Patankar [2] registrava que em um único dia de trabalho em um grande túnel de vento transônico dispendia-se US\$ 100.000, não incluídos os custos de planejamento, preparação do modelo, análise dos resultados, etc. Outros experimentos podem ter custos mais altos ainda.
- ◆ Impossibilidade dos experimentos: Alguns experimentos são impossíveis de serem realizados, pois podem causar danos ou por serem simplesmente inviáveis. Neste caso tem-se como exemplos as explosões nucleares na atmosfera, ventos solares e galácticos e situações biomédicas que poderiam colocar em risco a vida do paciente.
- ◆ Detalhamento de experimentos: Simulações computacionais e “experimentos virtuais” podem, muitas vezes, oferecer mais detalhes do que os experimentos reais. O número de pontos discretizados na simulação é maior que o número de pontos de medida direta em um experimento. Além disso, os resultados das simulações permitem calcular dados derivados, como por exemplo, vorticidade, tempo de residência, tensão, etc., enquanto que os mesmos são muito difíceis ou mesmo impossíveis de serem obtidos experimentalmente.

Além dos aspectos citados acima, é importante ressaltar que a capacidade computacional (processamento e memória) continua a desenvolver-se. Ao mesmo tempo, os algoritmos de solução continuam a ser desenvolvidos, com exatidão e desempenho cada vez melhores. Deste modo, as simulações computacionais tem

tornado-se cada vez mais realistas, com a inclusão de modelos mais abrangentes e empregando uma melhor resolução temporal e espacial nas análises.

A utilização de técnicas de fluidodinâmica computacional em projeto e análise de segurança de reatores nucleares vem crescendo rapidamente nos últimos anos. A importância deste novo tipo de ferramenta motivou a realização em 2002 do “Technical Meeting on use of Computational Fluid Dynamics (CFD) Codes for Safety Analysis of Reactor Systems, Including Containment” [3], em Pisa, Itália, patrocinado pela IAEA e pela NEA-OECD. Destaca-se a aplicação da CFD em problemas tais como a mistura e distribuição de Boro no interior do vaso do reator, em estudo de choques térmicos pressurizados, em problemas de vibração envolvendo interação fluido-estrutura e na análise de acidentes severos.

A maior parte dos programas de CFD utilizados hoje em estudos de engenharia e segurança de reatores são programas comerciais multi-propósito ou desenvolvidos para outros setores industriais, especialmente os setores aeronáutico e automobilístico. Entre os programas comerciais mais usados destacam-se o CFX, o STAR-CD e o FLUENT. A exceção a esse padrão é encontrada na França, onde vêm sendo realizados esforços para o desenvolvimento de códigos de CFD como NEPTUNE (EDF, CEA) e Trio\_U (CEA). Estes códigos tem sido desenvolvidos buscando alto desempenho computacional em sistemas de computação paralela, única forma hoje disponível para resolver problemas realistas da engenharia de reatores envolvendo milhões de graus de liberdade.

### 1.1. OBJETIVO

Neste trabalho propõe-se a solução de problemas de Fluidodinâmica Computacional (CFD) que possuem simetria axial. O modelo físico/matemático emprega as equações de Navier-Stokes incompressíveis, contemplando efeitos de empuxo, bem como transporte e difusão de calor. Com isso pode-se simular o comportamento fluidodinâmico em tubulações e setores do núcleo do reator onde a hipótese de axissimetria pode ser aplicada.



Partindo do método de elementos finitos estabilizado proposto por Sampaio e implementado originalmente em geometria Cartesiana [4-5], neste trabalho estende-se a metodologia e a implementação computacional originais para problemas descritos em geometria axissimétrica. Assim, o método proposto neste trabalho também é uma formulação estabilizada do tipo Petrov-Galerkin, que evita a necessidade de satisfazer a condição de Babuška-Brezzi [6], permitindo utilizar interpolação de mesma ordem para velocidade e pressão.

Vale ressaltar que as características avançadas do programa original NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A implementado por Sampaio [4-5] foram preservadas. Entre estas características avançadas citam-se a remalhagem adaptativa e a implementação voltada para alto desempenho em sistemas de computação paralela e distribuída empregando a biblioteca de comunicação MPI.

A implementação computacional realizada neste trabalho foi testada através de comparação com resultados teóricos e experimentais disponíveis na literatura. Após o trabalho de validação, a implementação do método para geometria axissimétrica foi empregada para resolver aplicações na engenharia de reatores onde a simetria axial pode ser aplicada, como no caso de escoamento em tubos verticais e no escoamento no trecho final de um “downcomer” de um reator PWR.

## 1.2. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O capítulo 1 começa com uma breve abordagem do uso da energia nuclear para atender as demandas energéticas da população e também sobre a importância da simulação em projetos de engenharia nuclear. Ainda neste capítulo é justificado o desenvolvimento do método de elementos finitos estabilizado axissimétrico, tema da presente dissertação. No capítulo 2 descreve-se o modelo físico empregado ao longo do trabalho, bem como as equações escritas na forma adimensional, onde podem ser observados os números adimensionais usualmente utilizados na fluidodinâmica. No capítulo 3 apresenta-se a formulação estabilizada de elementos finitos. No capítulo 4 apresenta-se a implementação computacional, incluindo a remalhagem adaptativa e as técnicas de computação paralela implementadas na versão original do programa NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A. Os testes de validação do método, comparando os resultados obtidos com exemplos clássicos da literatura, são mostrados no capítulo 5. O

capítulo 6 apresenta os exemplos de aplicação em problemas axissimétricos encontrados na engenharia de reatores. Conclusões e comentários finais são apresentados no capítulo 7.

## CAPÍTULO 2

### 2.1. MODELO FÍSICO PARA ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL E TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM GEOMETRIA AXISSIMÉTRICA

Considera-se um modelo contínuo para escoamentos viscosos incompressíveis, incluindo forças de empuxo e transferência de calor. O problema é definido sobre um domínio limitado aberto  $\Omega$ , com contorno  $\Gamma$ , contido no espaço Euclidiano  $n$ -dimensional.

O escoamento é modelado pelas equações de Navier-Stokes incompressíveis e por uma equação de convecção-difusão de energia, escritas em coordenadas cilíndricas. Desta maneira pode-se tirar proveito da simetria axial. Neste trabalho assume-se que o escoamento é axissimétrico, onde não há componente de velocidade azimutal ( $u_\theta = 0$ ) e as demais grandezas são independentes de  $\theta$ . Assim as equações são escritas em coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\theta$  e  $x$ , onde assume-se que o eixo  $x$  é paralelo à direção do campo gravitacional.

Equação de conservação de quantidade de movimento axial:

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \rho \beta g_x (T - T_0) = 0 \quad (2.1)$$

Equação de conservação de quantidade de movimento radial:

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{\partial p}{\partial r} - \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} \right] = 0 \quad (2.2)$$

Equação de conservação de massa (equação da continuidade):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = 0 \quad (2.3)$$

Equação de conservação de energia:

$$\rho.c \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right] - k \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (2.4)$$

As variáveis dependentes são as componentes de velocidade, a pressão e a temperatura, representadas por  $u$ ,  $v$ ,  $p$  e  $T$  respectivamente. O calor específico do fluido é representado por  $c$ . A densidade do fluido (referente à temperatura  $T_0$ ) é denotada por  $\rho$ . O coeficiente de expansão volumétrica do fluido é  $\beta = -\rho^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial T}$ . A condutividade térmica do fluido é  $k$  e  $\mu$  é a sua viscosidade.

O modelo é completado introduzindo condições de contorno e condições iniciais para velocidade e temperatura.

Condições de contorno de velocidade e tensão são prescritas sobre partições de fronteira complementares e não sobrepostas. Assim, para  $\Gamma_u \cup \Gamma_{nx} = \Gamma$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_{nx} = \emptyset$ , tem-se:

$$u = \bar{u} \quad \text{Sobre } \Gamma_u \quad (2.5)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{f}_x \quad \text{Sobre } \Gamma_{nx} \quad (2.6)$$

E para  $\Gamma_v$  e  $\Gamma_{nr}$  de tal forma que  $\Gamma_v \cup \Gamma_{nr} = \Gamma$  e  $\Gamma_v \cap \Gamma_{nr} = \emptyset$ , tem-se:

$$v = \bar{v} \quad \text{Sobre } \Gamma_v \quad (2.7)$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial n} = \bar{f}_r \quad \text{Sobre } \Gamma_{nr} \quad (2.8)$$

As condições de contorno de temperatura e fluxo de calor são prescritas por valores fornecidos sobre partições de fronteira complementares e não sobrepostas  $\Gamma_T$  e  $\Gamma_q$ , de tal forma que  $\Gamma_T \cup \Gamma_q = \Gamma$  e  $\Gamma_T \cap \Gamma_q = \emptyset$ :

$$T = \bar{T} \quad \text{Sobre } \Gamma_T \quad (2.9)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q} \quad \text{Sobre } \Gamma_q \quad (2.10)$$

As condições de contorno de pressão e velocidade normal à fronteira são associadas ao balanço de massa. Elas são prescritas por valores fornecidos sobre partições de fronteira complementares e não sobrepostas  $\Gamma_p$  e  $\Gamma_G$ , de tal forma que  $\Gamma_p \cup \Gamma_G = \Gamma$  e  $\Gamma_p \cap \Gamma_G = \emptyset$ :

$$p = \bar{p} \quad \text{Sobre } \Gamma_p \quad (2.11)$$

$$u n_x + v n_r = \bar{G} \quad \text{Sobre } \Gamma_G \quad (2.12)$$

## 2.2. EQUAÇÕES GOVERNANTES NA FORMA ADIMENSIONAL

É conveniente representar as equações governantes na forma adimensional. Isto permite identificar os números adimensionais relevantes que caracterizam os regimes de convecção livre, mista e forçada.

Aqui as variáveis são adimensionalizadas com respeito a escalas de referência convenientemente escolhidas. Os campos de velocidades, pressão e temperatura adimensionais são representados por:  $u' = u/u_0$ ,  $v' = v/u_0$ ,  $p' = p/(\rho u_0^2)$  e  $T' = (T - T_0)/(T_{\max} - T_{\min})$ , respectivamente. Note que  $u_0$  é a velocidade de referência e  $T_{\max}$  e  $T_{\min}$  são o máximo e o mínimo de temperatura no problema. As coordenadas espaciais são adimensionalizadas com referência ao diâmetro do cilindro  $D$ , isto é,  $x' = x/D$  e  $r' = r/D$ . O tempo adimensional é representado por  $t' = tu_0/D$ . O campo gravitacional é adimensionalizado com respeito ao seu módulo, ou seja,  $g' = g/\|\mathbf{g}\|$ .

Em termos das variáveis adimensionais, as equações tornam-se:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} + \left( u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial u'}{\partial r'} \right) \right] + \frac{\partial p'}{\partial x'} + \text{Ri} g'_x T' = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} + \left( u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial r'} \right) - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial v'}{\partial r'} \right) - \frac{v'}{r'^2} \right] + \frac{\partial p'}{\partial r'} = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{1}{r'} \frac{\partial (r' v')}{\partial r'} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t'} + \left( u' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) - \frac{1}{\text{Re Pr}} \left[ \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left( r' \frac{\partial T'}{\partial r'} \right) \right] = 0 \quad (2.16)$$

Onde  $\text{Re} = \rho u_0 D / \mu$  è o número de Reynolds,  $\text{Ri} = \beta (T_{\max} - T_{\min}) \|g\| D / u_0^2$  é o número de Richardson e  $\text{Pr} = c\mu / k$  é o número de Prandtl.

## CAPÍTULO 3

### 3.1 UMA FORMULAÇÃO ESTABILIZADA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Neste capítulo é realizada a derivação da formulação estabilizada do método dos elementos finitos utilizado em nosso código computacional.

Vamos considerar a discretização temporal das equações (2.1) - (2.4) aplicando diferenças finitas:

$$\rho \left( \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial u^{n+\theta}}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^{n+\theta}}{\partial r} \right) + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} - \mu \left[ \frac{\partial^2 u^{n+\theta}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u^{n+\theta}}{\partial r} \right) \right] + \rho \cdot \beta \cdot g_x (T^n - T_0) = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \left( \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial v^{n+\theta}}{\partial x} + v^n \frac{\partial v^{n+\theta}}{\partial r} \right) + \frac{\partial p^{n+1}}{\partial r} - \mu \left[ \frac{\partial^2 v^{n+\theta}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v^{n+\theta}}{\partial r} \right) - \frac{v^{n+\theta}}{r^2} \right] = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv^{n+1})}{\partial r} = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \cdot c \cdot \left( \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + u^n \frac{\partial T^{n+\theta}}{\partial x} + v^n \frac{\partial T^{n+\theta}}{\partial r} \right) - k \left[ \frac{\partial^2 T^{n+\theta}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T^{n+\theta}}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (3.4)$$

Note que os subscritos  $n$  e  $n+1$  indicam o nível de tempo e  $\Delta t$  é o passo de tempo. A velocidade e campo de temperatura no nível de tempo  $n+\theta$  são  $u^{n+\theta} = \theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n$ ,  $v^{n+\theta} = \theta v^{n+1} + (1-\theta)v^n$  e  $T^{n+\theta} = \theta T^{n+1} + (1-\theta)T^n$ , respectivamente, onde  $0 \leq \theta \leq 1$ . Note que a pressão e a equação de continuidade são empregadas de forma completamente implícitas no interior da discretização temporal.

Observe que o último termo do lado esquerdo da equação (3.1) representa a contribuição do empuxo causado pela variação da densidade do fluido com a temperatura.

Este termo foi discretizado no tempo no nível de tempo  $n$  de modo a permitir a solução segregada das equações.

As equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) podem ser rescritas em termos das mudanças das variáveis de interesse durante o passo de tempo. Estas mudanças são dadas por:  $\Delta p = p^{n+1} - p^n$ ,  $\Delta u = u^{n+1} - u^n$ ,  $\Delta v = v^{n+1} - v^n$  e  $\Delta T = T^{n+1} - T^n$ . Assim obtemos

$$\rho \left( \frac{\Delta u}{\Delta t} + \theta u^n \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \theta v^n \frac{\partial \Delta u}{\partial r} \right) - \mu \left[ \theta \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} + \frac{\theta}{r} \frac{\partial \Delta u}{\partial r} \right] + \frac{\partial \Delta p}{\partial x} = F_1 \quad (3.5)$$

$$\rho \left( \frac{\Delta v}{\Delta t} + \theta u^n \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \theta v^n \frac{\partial \Delta v}{\partial r} \right) - \mu \left[ \theta \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} + \frac{\theta}{r} \frac{\partial \Delta v}{\partial r} \right] + \frac{\partial \Delta p}{\partial r} + \frac{\mu \theta \Delta v}{r^2} = F_2 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \Delta v)}{\partial r} = - \left[ \frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r v^n)}{\partial r} \right] \quad (3.7)$$

$$\rho c \left( \frac{\Delta T}{\Delta t} + \theta u^n \frac{\partial \Delta T}{\partial x} + \theta v^n \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right) - k \left[ \theta \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + \frac{\theta}{r} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right] = Q \quad (3.8)$$

Onde

$$F_1 = - \left\{ \rho \left( u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial r} \right) - \mu \left[ \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u^n}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial p^n}{\partial x} + \rho \beta g_x (T^n - T_0) \right\} \quad (3.9)$$



$$F_2 = - \left\{ \rho \left( u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial x} \right) - \mu \left[ \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v^n}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial p^n}{\partial r} + \frac{\mu v^n}{r^2} \right\} \quad (3.10)$$

e

$$Q = - \left\{ \rho c \left( u^n \frac{\partial T^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial T^n}{\partial x} \right) - k \left[ \frac{\partial^2 T^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T^n}{\partial r} \right) \right] \right\} \quad (3.11)$$

As equações acima são discretizadas no espaço usando elementos finitos convencionais da classe  $C_0$ . A mesma ordem de interpolação é usada para aproximar velocidade, temperatura e pressão. Tal escolha de espaços de interpolação não é viável na formulação mista convencional, uma vez que viola a condição de Babuška-Brezzi [7]. Entretanto, a formulação estabilizada que será apresentada nesta seção evita essas dificuldades através da introdução de termos adicionais que garantem a estabilização [8-9]. A formulação também conduz a aproximações adequadas para problemas onde a convecção é dominante, gerando o efeito de “upwind” na direção da linha corrente (*Streamline Upwinding – SUPG*) [10].

Consideramos a seguinte discretização espacial das variáveis do problema:  $\hat{u}^n = N_j u_j^n$ ,  $\hat{v}^n = N_j v_j^n$ ,  $\hat{p}^n = N_j p_j^n$ ,  $\hat{T}^n = N_j T_j^n$ ,  $\Delta \hat{u} = N_j \Delta u_j$ ,  $\Delta \hat{v} = N_j \Delta v_j$ ,  $\Delta \hat{p} = N_j \Delta p_j$  e  $\Delta \hat{T} = N_j \Delta T_j$ . Note que  $N_j$  representa as funções de forma do elemento finito e as variáveis com subscrito  $j$  são valores nodais. Usando os campos das variáveis discretizadas, podemos escrever as seguintes expressões para os resíduos quadrados de quantidade de movimento e energia:

$$S = 2\pi \int_{\Omega} \lambda (\hat{R}_x^2 + \hat{R}_r^2) r dr dx \quad (3.12)$$

$$R = 2\pi \int_{\Omega} \gamma \hat{E}^2 r dr dx \quad (3.13)$$

Onde  $\lambda$  e  $\gamma$  são parâmetros de escala a serem definidos posteriormente e  $\widehat{R}_x$ ,  $\widehat{R}_r$  e  $\widehat{E}$  são dados por:

$$\widehat{R}_x = \rho \left[ \frac{\Delta \widehat{u}}{\Delta t} + \theta \left( \widehat{u}^n \frac{\partial \Delta \widehat{u}}{\partial r} + \widehat{v}^n \frac{\partial \Delta \widehat{u}}{\partial r} \right) \right] - \mu \theta \left[ \frac{\partial^2 \Delta \widehat{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \widehat{u}}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial \Delta \widehat{p}}{\partial x} - \widehat{F}_1 \quad (3.14)$$

$$\widehat{R}_r = \rho \left[ \frac{\Delta \widehat{v}}{\Delta t} + \theta \left( \widehat{u}^n \frac{\partial \Delta \widehat{v}}{\partial r} + \widehat{v}^n \frac{\partial \Delta \widehat{v}}{\partial r} \right) \right] - \mu \theta \left[ \frac{\partial^2 \Delta \widehat{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \widehat{v}}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial \Delta \widehat{p}}{\partial r} + \frac{\mu \theta \Delta \widehat{v}}{r^2} - \widehat{F}_2 \quad (3.15)$$

$$\widehat{E} = \rho c \left[ \frac{\Delta \widehat{T}}{\Delta t} + \theta \left( \widehat{u}^n \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial r} + \widehat{v}^n \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial r} \right) \right] - k \theta \left[ \frac{\partial^2 \Delta \widehat{T}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial r} \right) \right] - \widehat{Q} \quad (3.16)$$

O próximo passo é minimizar o resíduo quadrático de quantidade de movimento em relação a:

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta u_i} \quad \forall \Delta u_i \quad \text{livre} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta v_i} \quad \forall \Delta v_i \quad \text{livre} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta p_i} \quad \forall \Delta p_i \quad \text{livre} \quad (3.19)$$

Assim, minimizando o momento residual quadrático  $S$ , dado pela equação (3.12), com relação aos valores nodais livres  $\Delta p_i$ ,  $\Delta u_i$  e  $\Delta v_i$  obtemos:

$$4\pi \int_{\Omega} \lambda \left\{ \frac{\rho}{\Delta t} \left[ N_i + \theta \Delta t \widehat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \theta \Delta t \widehat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right] - \mu \theta \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \right\} \widehat{R}_x r dr dx = 0 \quad \forall \Delta u_i \text{ livre} \quad (3.21)$$

$$4\pi \int_{\Omega} \lambda \left\{ \frac{\rho}{\Delta t} \left[ N_i + \theta \Delta t \widehat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \theta \Delta t \widehat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right] - \mu \theta \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] + \frac{\mu \theta N_i}{r^2} \right\} \widehat{R}_r r dr dx = 0 \quad \forall \Delta v_i \text{ livre} \quad (3.22)$$

$$4\pi \int_{\Omega} \lambda \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \widehat{R}_x + \frac{\partial N_i}{\partial r} \widehat{R}_r \right) r dr dx = 0 \quad \forall \Delta P_i \text{ livre} \quad (3.23)$$

Da mesma forma minimizando os resíduos quadráticos de energia:

$$\frac{\partial R}{\partial \Delta T_i} \quad \forall \Delta T_i \text{ livre} \quad (3.24)$$

Com isso, minimizando a energia residual quadrática  $R$ , dado pela equação (3.13), com relação aos valores nodais  $\Delta T_i$  obtemos:

$$4\pi \int_{\Omega} \gamma \left\{ \frac{\rho c}{\Delta t} \left[ N_i + \theta \Delta t \widehat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \theta \Delta t \widehat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right] - k \theta \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \right\} \widehat{E} r dr dx = 0 \quad \forall \Delta T_i \text{ livre} \quad (3.25)$$

Os parâmetros  $\lambda$  e  $\gamma$  são escolhidos como  $\lambda = \Delta t / \rho$  e  $\gamma = \Delta t / \rho c$ , com o objetivo de normalizar (e adimensionalizar) as funções-peso nas equações (3.21), (3.22), (3.23) e (3.25). Note que as funções-peso nessas equações têm a mesma estrutura da função-peso do método SUPG de Hughes e Brooks [10].

Como pode ser visto no apêndice A, da combinação da equação (3.23) com o balanço de massa discretizado e as condições de contorno obtém-se uma equação para a atualização da pressão, que chamamos de equação da pressão-continuidade.

A mudança do campo de velocidade durante o passo de tempo é obtida da equação (3.6), que representa uma aproximação de resíduos ponderados do tipo Petrov-Galerkin do balanço de quantidade de movimento. As condições de contorno dadas pelas equações (2.6) e (2.8) são introduzidas posteriormente usando a identidade de Green no termo viscoso de Galerkin, no nível de tempo  $n$ , nas equações (3.5) e (3.6), respectivamente. Este resultado também é mostrado no apêndice A, que apresenta as equações para a atualização das componentes axial e radial da velocidade.

A equação para a atualização do campo de temperatura também é detalhada no apêndice A. Note que os termos multiplicados por  $\Delta t$  nas equações (A1)-(A4) são responsáveis pelo controle das oscilações espaciais (*wiggles*) em escoamentos com convecção dominante, e por estabilizar o cálculo, independente das restrições de Babuška-Brezzi na escolha dos espaços de interpolação para velocidade e pressão. Em particular, a mesma ordem de interpolação para todas as variáveis adotadas aqui se torna possível através de uma escolha adequada de  $\Delta t$ .

### 3.2. PASSOS DE TEMPO LOCAL E SINCRONIZAÇÃO

Note que, para  $\theta = 1/2$ , a função peso obtida para os balanços de quantidade de movimento e energia, é dado por:

$$W_i = N_i + \frac{\Delta t}{2} \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} + \text{termos difusivos} \quad (3.26)$$

Isto nos sugere um critério para selecionar o passo de tempo: comparando a Eq. (3.26) com a função peso do SUPG [10], verificamos que, para elementos lineares, uma quantidade apropriada de “upwind” é introduzida no balanço de quantidade de movimento, Eq. (3.26), se escolhermos o passo de tempo como:

$$\Delta t = \alpha \frac{h_e}{\|\mathbf{u}^n\|} \quad (3.27)$$

Onde

$$\alpha = \left[ \coth\left(\frac{\text{Re}_h}{2}\right) - \frac{2}{\text{Re}_h} \right] \quad (3.28)$$

Nas equações acima  $\|\mathbf{u}^n\| = \sqrt{u^n u^n + v^n v^n}$  é o módulo da velocidade local e  $h_e$  é o tamanho característico do elemento (tomamos a raiz quadrada da área do elemento). O número de Reynolds do elemento é  $\text{Re}_h = \rho \|\mathbf{u}^n\| h_e / \mu$ . Note que  $\alpha$ , definido pela Eq. (3.28), é o chamado parâmetro ótimo de “upwind”, cuja escolha conduz a soluções nodalmente exatas para problemas unidimensionais estacionários de convecção-difusão.

Além disso, como mostrado por Sampaio [6], [11-12], a escolha do passo de tempo de acordo com as Eqs. (3.27) e (3.28) também conduz a estabilização da solução da pressão, independente das restrições de Babuška-Brezzi nas escolhas dos espaços de interpolação da velocidade e da pressão.

É interessante notar que o passo de tempo definido acima é apropriado para seguir a evolução temporal dos processos de convecção-difusão resolvíveis numa malha com tamanho local  $h_e$  [11]. Para convecção forte ( $Re_h \gg 1$ ) obtemos  $\Delta t \rightarrow \frac{h_e}{\|\mathbf{u}^n\|}$ , enquanto que para difusão pura ( $Re_h = 0$ ), temos  $\Delta t = \frac{\rho h_e^2}{6\mu}$ .

Por outro lado, com o objetivo de introduzir “upwind” ótimo na equação de energia, o número de Reynolds do elemento na Eq. (3.27) deve ser substituído pelo número de Peclet do elemento  $Pe_h = Pr Re_h$ . A menos que o número de Prandtl seja  $Pr = 1$  o passo de tempo para as equações de quantidade de movimento e energia serão diferentes (a diferença é maior dentro da camada limite, onde os efeitos de difusão são dominantes). Além disso, note que o passo de tempo dado pelas Eqs. (3.27) e (3.28) varia espacialmente de acordo com a velocidade local, as propriedades físicas e o tamanho local da malha. Portanto, para aplicar “upwind” ótimo tanto para quantidade de movimento quanto para energia, precisamos usar duas variações espaciais distintas para o passo de tempo. Para a quantidade de movimento usamos  $\Delta t_M = \left[ \coth\left(\frac{Re_h}{2}\right) - \frac{2}{Re_h} \right] \frac{h_e}{\|\mathbf{u}^n\|}$ , enquanto  $\Delta t_E = \left[ \coth\left(\frac{Pe_h}{2}\right) - \frac{2}{Pe_h} \right] \frac{h_e}{\|\mathbf{u}^n\|}$  é empregada para energia.

Por utilizarmos passos de tempo ótimos, que variam com a posição e de acordo com a quantidade transportada (movimento ou energia), devemos recorrer a um esquema especial para sincronizar o avanço do tempo durante o cálculo. Neste trabalho adotamos um procedimento, que embute o uso de passos de tempo locais e mantém o cálculo sincronizado, que será explicado a seguir.

A figura 1 ilustra distribuições espaciais típicas de passo de tempo para quantidade de movimento e energia, além de um passo de tempo uniforme  $\Delta t^*$ . Este último é escolhido de forma a ficar muito próximo do passo de tempo mínimo do

problema, sendo calculado como  $\Delta t^* = 0.999 \min\{\Delta t_M(\mathbf{x}), \Delta t_E(\mathbf{x})\}$  onde  $\mathbf{x} \in \Omega$ . O passo de tempo  $\Delta t^*$  é o passo de tempo usado para sincronizar o avanço da simulação numérica.

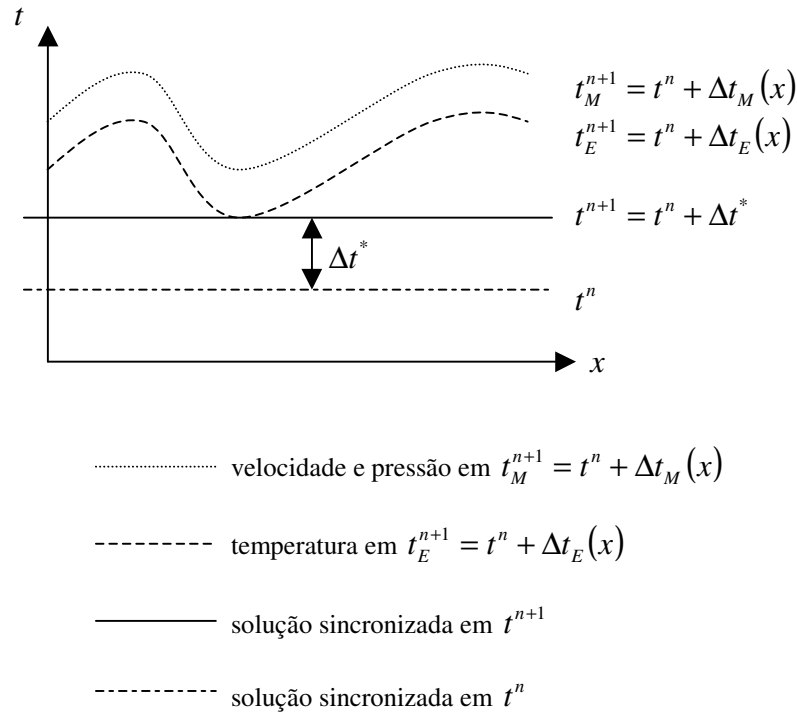


Figura 1\_ Representação esquemática de avanço de tempo de solução que usa passos de tempo locais e sincronização no tempo  $t^n + \Delta t^*$ .

Observando a figura 1, considere que comecemos com todas as variáveis sincronizadas no nível de tempo  $n$ . Suponha que atualizemos a velocidade e o campo de pressão, que usam passo de tempo  $\Delta t_M$  nas eq. (3.21) e (3.22), obtendo velocidade e pressão no nível de tempo  $t^n + \Delta t_M$ . De forma análoga, obtemos o campo de temperatura no nível de tempo  $t^n + \Delta t_E$ . Por outro lado, vamos representar as variações das variáveis do tempo  $t^n$  ao tempo  $t^n + \Delta t^*$  (o tempo de sincronização) como  $\Delta \hat{u}^*$ ,  $\Delta \hat{v}^*$ ,  $\Delta \hat{p}^*$  e  $\Delta \hat{T}^*$ . Desta forma, mantendo a mesma taxa de variação obtida usando passos de tempo locais, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\Delta u^*}{\Delta t^*} = \frac{\Delta u}{\Delta t_M} \quad (3.29)$$

$$\frac{\Delta v^*}{\Delta t^*} = \frac{\Delta v}{\Delta t_M} \quad (3.30)$$

$$\frac{\Delta p^*}{\Delta t^*} = \frac{\Delta p}{\Delta t_M} \quad (3.31)$$

$$\frac{\Delta T^*}{\Delta t^*} = \frac{\Delta T}{\Delta t_E} \quad (3.32)$$

Na prática, o cálculo baseado no passo de tempo local e a etapa de sincronização não precisam ser executadas separadamente. As eq. (3.27)-(3.30), que representam a etapa de sincronização, podem ser inseridas diretamente nas eq.(A1)-(A4). Assim, a solução sincronizada em  $t^n + \Delta t^*$  pode ser obtida diretamente resolvendo as equações que se encontram no apêndice B onde  $\Delta \hat{u}^* = N_j \Delta u_j^*$ ,  $\Delta \hat{v}^* = N_j \Delta v_j^*$ ,  $\Delta \hat{p}^* = N_j \Delta p_j^*$  e  $\Delta \hat{T}^* = N_j \Delta T_j^*$ . Aqui  $\Delta u_j^*$ ,  $\Delta v_j^*$ ,  $\Delta p_j^*$  e  $\Delta T_j^*$  são os valores nodais das variações das variáveis do problema do tempo  $t^n$  ao tempo  $t^* = t^n + \Delta t^*$ . A nova solução sincronizada em  $t^* = t^n + \Delta t^*$  é dada por  $\hat{u}^* = \hat{u}^n + \Delta \hat{u}^*$ ,  $\hat{v}^* = \hat{v}^n + \Delta \hat{v}^*$ ,  $\hat{p}^* = \hat{p}^n + \Delta \hat{p}^*$  e  $\hat{T}^* = \hat{T}^n + \Delta \hat{T}^*$ .

O processo de solução do problema é segregado. A cada passo de tempo o campo de pressão é calculado primeiro, depois o campo de velocidade é atualizado, seguido pelo cálculo da nova temperatura. Todos os sistemas de equação resultam de matrizes simétricas positivas definidas. Os sistemas de equações são resolvidos usando o método de gradientes conjugados com pré-condicionador de Jacobi, em uma implementação Elemento-por-elemento (Element-by-element).

## CAPÍTULO 4

### O CÓDIGO COMPUTACIONAL

O código computacional utilizado e desenvolvido neste trabalho foi feito a partir do programa NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A escrito em FORTRAN90 por Sampaio [4-5], programa este que tratava problemas em domínios bidimensionais em geometria Cartesiana.

No presente trabalho as modificações feitas no programa NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A preservou a capacidade original de resolver problemas Cartesianos. Com isso todas as alterações feitas no programa NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A puderam fazer uso de todas as características avançadas do programa original, tais como o emprego de técnicas de remalhagem adaptativa baseadas em estimativas de erros de discretização dos gradientes de velocidades e implementação em sistemas de computação paralela com o uso de rotinas de comunicação MPI.

No novo programa temos então uma primeira modificação sutil que seleciona o tipo de problema a ser abordado, se Cartesiano (no caso temos o programa atuando com todas as equações originais usadas por Sampaio em seu trabalho [4]) ou o axissimétrico (desenvolvido neste trabalho). As principais modificações ficaram na montagem das equações axissimétricas já mostradas nos capítulos anteriores. Estas modificações foram realizadas preservando a estrutura e organização do programa original que emprega elementos finitos triangulares e funções de interpolação lineares nas aproximações das variáveis.



#### 4.1. REMALHAGEM ADAPTATIVA

Neste trabalho, o estimador de erro a posteriori de Zienkiewicz e Zhu [13] é usado para estimar o erro do gradiente de velocidade e para orientar um procedimento de remalhagem baseado na distribuição igualitária do erro entre os elementos finitos. A estratégia, apresentada em detalhes em [9], requer que o usuário especifique o número de elementos desejados e tamanho mínimo de elementos ( $h_{\min}$ ) para ser empregado na simulação. Note que as discretizações do espaço e do tempo são relacionadas, como discutidas na seção 3.2. Assim, além de limitar o número de elementos necessários para cobrir uma dada região do domínio, a escolha do tamanho mínimo do elemento indiretamente limita também o passo de tempo.

A remalhagem é baseada na utilização de uma malha de base mais grosseira que é refinada localmente com a criação de novos nós e elementos à medida que estes são requeridos. Os novos nós são conectados à malha de base original usando o algoritmo de Bowyer [14].

Estamos lidando com problemas onde o escoamento é transiente. Em geral, à medida que a simulação procede, uma malha que está bem ajustada a uma configuração particular do escoamento em um dado tempo, poderá não ser mais adequada posteriormente. Em trabalhos anteriores [15], [9] foi adotado um algoritmo de remalhagem automático que implicava em estimar o erro a cada passo de tempo. Aqui empregamos uma estratégia diferente, a qual é descrita abaixo.

Primeiro, estimamos a escala de tempo adequada para seguir a evolução dos maiores vórtices. Se  $u_0$  é a velocidade característica do problema e  $D$  é o comprimento espacial característico, definimos a escala de tempo para acompanhar o grande vórtice como  $t_{\text{large}} = D/2u_0$ . Iniciando com a primeira malha, e então para cada nova malha gerada, definimos o número de passos para o qual a malha será usada de acordo com  $nsteps = t_{\text{large}} / \Delta t^*$ , onde  $\Delta t^*$  é o passo de tempo de sincronização usado para avançar a solução ( $nsteps$  é arredondado para o número inteiro mais próximo). Quando o número de passos  $nsteps$  estabelecido para uma malha particular é alcançado, o erro de gradiente de velocidade é estimado e uma nova malha é gerada utilizando a estimativa de erro.

Considere, por exemplo, a aplicação desse algoritmo de remalhagem automática ao problema de desprendimento periódico de vórtices a partir de um cilindro circular em escoamento cruzado. Se tomarmos  $u_0$  como a velocidade de corrente livre e  $D$  como o diâmetro do cilindro, teremos aproximadamente de 10-12 malhas adaptativas para cada período de desprendimento de vórtices. Este número de malhas é adequado para seguir detalhadamente a evolução do escoamento através de malhas de elementos finitos bem ajustados ao problema.

#### 4.2. IMPLEMENTAÇÃO EM SISTEMAS DE COMPUTAÇÃO PARALELA

A implementação computacional em sistemas de computação paralela da classe Beowulf é baseada no conceito de decomposição do domínio. A biblioteca METIS [16] é usada para distribuir os elementos finitos (e os nós) entre os processadores disponíveis, balanceando a carga computacional e minimizando a comunicação. A biblioteca *message passing interface* (MPI) é usada para transferir os dados entre os processadores. A figura 2 ilustra a decomposição de um domínio para o caso de quatro processadores.

A rotina “METIS\_PartMeshDual” divide os elementos finitos e os nós entre os processadores. A saída da “METIS\_PartMeshDual” é processada para criar listas de elementos pertencentes a cada partição, listas de nós que estão estritamente dentro de cada partição (nós interiores), e uma lista de nós nas interfaces (i. e. nós que são compartilhados por elementos alocados em diferentes partições). A organização dessa estrutura de dados é realizada em modo seqüencial, porém uma vez preparada, podemos explorar o paralelismo na computação dos “loops” sobre os elementos e nós da seguinte forma:

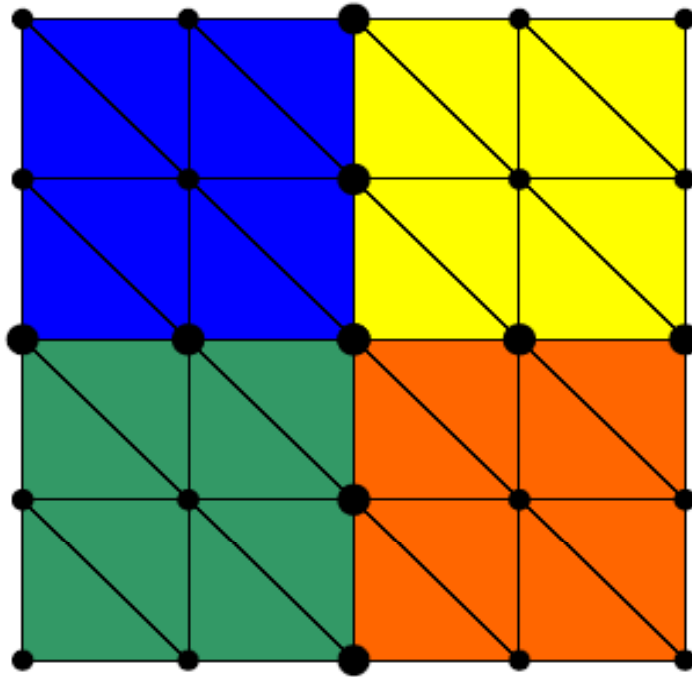
- i) Todo “loop” sobre elementos pode ser transformada em “loops” paralelos sobre as partições do domínio e “loops” sobre os elementos pertencentes a cada partição correspondente;
- ii) Todo “loop” sobre nós é desmembrado em “loops” sobre os nós interiores e “loops” sobre os nós compartilhados. Os “loops” sobre os nós interiores

podem ser processados em “loops” paralelos sobre as partições do domínio e “loops” sobre os nós dentro de cada partição correspondente. Por outro lado, os “loops” sobre os nós compartilhados têm de ser processados em modo seqüencial. Além disso, rotinas MPI “reduce type” são usadas para combinar, nos nós compartilhados, as contribuições provenientes das diferentes partições do domínio.

Note que a razão “número de nós compartilhados/número de nós interiores” tende a diminuir quando a discretização é refinada, significando que podemos esperar um melhor desempenho do cálculo paralelo à medida que o número de graus de liberdade é aumentado.

Em vista do processo automático de remalhagem, precisamos realizar uma partição de domínio toda vez que uma nova malha é criada. Como mencionado na seção 4.1, cada malha adaptativa tem duração de  $nsteps = t_{large} / \Delta t^*$  passos de tempo, que é também o número de passos para o qual uma específica partição do domínio será mantida em uso. Deste modo, o desempenho do paralelismo aumenta à medida que  $nsteps$  cresce, significando que a mesma malha e o mesmo particionamento serão usados por um número maior de passos de tempo, resultando em mais operações realizadas em modo paralelo. Note que  $t_{large} = D / 2u_0$  é fixado para um dado problema, dependendo somente das escalas de velocidade e comprimento escolhidas,  $u_0$  e  $D$ , respectivamente. Desta forma,  $nsteps$  aumenta quando  $\Delta t^*$  diminui i.e. Se elementos menores são introduzidos pela redução do tamanho mínimo do elemento  $h_{min}$ .

Portanto, a presente implementação paralela adaptativa tem a propriedade desejada de melhorar o desempenho em paralelo à medida que aumenta o refinamento da discretização no tempo e no espaço.



*Figura 2. Exemplo de decomposição de um domínio usando quatro processadores: Os elementos pertencentes à mesma partição são pintados da mesma cor. Os pontos pequenos representam os nós interiores e pontos maiores ilustram os nós compartilhados.*

## CAPÍTULO 5

### TESTES DE VALIDAÇÃO

Como já mencionado, um programa computacional com as equações de Navier-Stokes e uma equação de energia axissimétricas que se encontram no capítulo 3 foi devidamente desenvolvido para este trabalho.

Uma parte importante do trabalho foi submeter o novo programa a testes para a sua validação. Assim, para validação do programa, estudamos o desenvolvimento do escoamento laminar em um tubo longo, comparando o comprimento necessário para o desenvolvimento obtido com correlações experimentais [17], bem como verificando o perfil de velocidade desenvolvido com a correspondente solução analítica.

#### 5.1. OBTENÇÃO DE RESULTADOS

Depois de concluído a construção do programa computacional a partir do programa original cartesiano, o agora modificado NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A, ele foi compilado em f90 no cluster que se encontra no laboratório computacional do IEN-CENS; o referido cluster é composto por 16 computadores com sistema operacional Linux e munidos dos compiladores fortran90 e bibliotecas MPI.

Foram realizadas simulações de escoamentos laminares em tubos considerando os seguintes números de Reynolds: 97.6, 195.2, 488 e 976.

## 5.2. ESTUDO DO COMPRIMENTO DE DESENVOLVIMENTO

Em escoamentos tubulares a velocidade do fluido diminui à medida que se aproxima da parede do tubo, onde vai a zero, e em escoamentos desenvolvidos observa-se um caráter parabólico no escoamento. Nos estudos de Durst e outros [17] foi analisado o ponto a partir da entrada do tubo em que a velocidade passou a ter o comportamento parabólico, correspondente ao fluxo desenvolvido. O comprimento de desenvolvimento é dado em termos adimensionais pela razão  $L/D$ .

Em seus estudos, Durst e colaboradores [17] chegaram a uma relação que expressava o comprimento de desenvolvimento como função do número de Reynolds. Esta expressão desenvolvida em [17] foi obtida a partir de dados experimentais e é expressa pela seguinte equação:

$$\frac{L}{D} = \left[ (0.619)^{1.6} + (0.0567 \text{ Re})^{1.6} \right]^{1/1.6} \quad (5.1)$$

Dos dados gerados pelo programa NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A obtivemos os gráficos de velocidades mostrados na figura 3, referentes aos valores supracitados.

Nos gráficos podemos observar o desenvolvimento do escoamento através do aumento da velocidade máxima (no centro do tubo) até o valor teórico do escoamento desenvolvido.

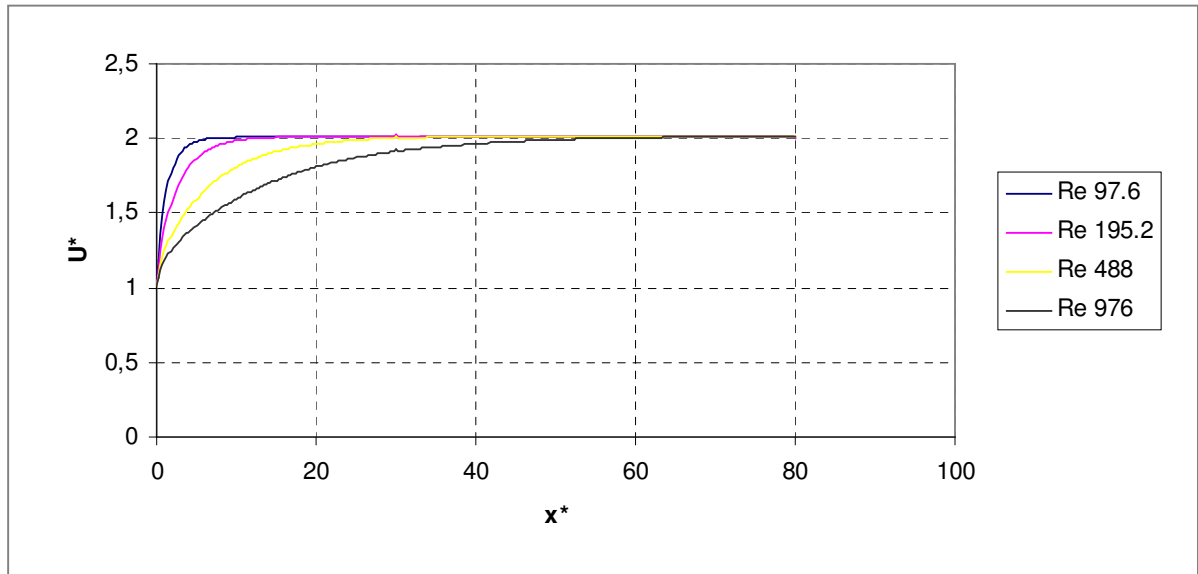
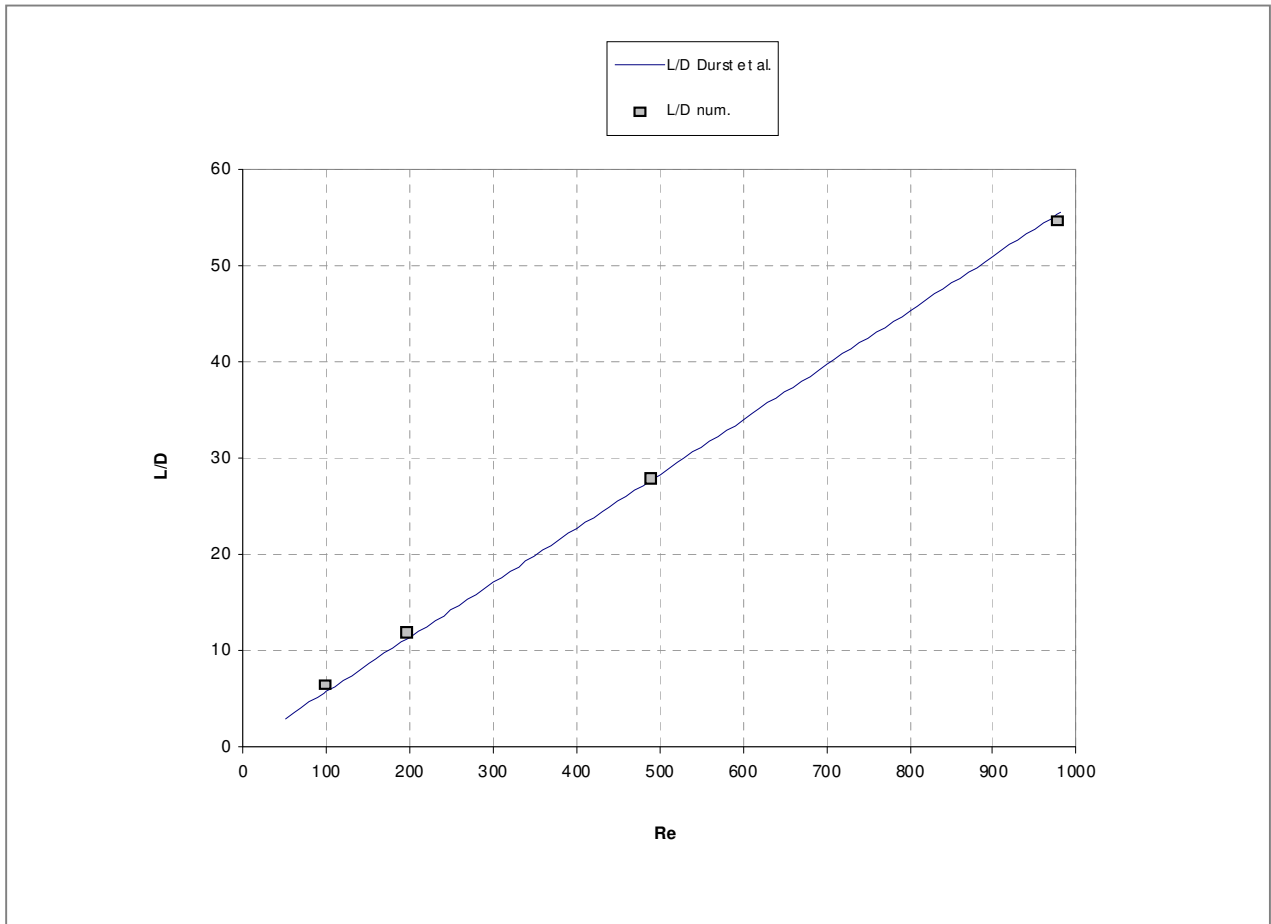


Figura 3. Gráfico das velocidades em relação aos comprimentos do tubo longo para os diferentes valores de Reynolds.

Na figura 3 podemos observar claramente as regiões de fluxo desenvolvido, e como observado os campos de velocidade evoluem até atingirem o valor teórico de 2.

A figura 4 compila os resultados obtidos para comprimento de desenvolvimento nas simulações computacionais realizadas para os vários números de Reynolds, comparando-os com os comprimentos de desenvolvimento dados pela equação (5.1).



*Figura 4. Gráfico dos pontos de desenvolvimento do fluido referente aos valores adimensionais de Reynolds.*

Podemos notar a ótima concordância entre os resultados apresentados na figura 4, de modo que o método consegue reproduzir os comprimentos de desenvolvimento da mesma forma que aqueles encontrados na literatura.

### 5.3. ESTUDO DO FATOR DE ATRITO

O caráter parabólico dos campos de velocidade está ligado ao atrito do fluido, e após o comprimento de desenvolvimento podemos confrontar os resultados relativos aos fatores de atrito numérico e teórico. O fator de atrito para escoamentos desenvolvidos é dado por:



$$f = -\frac{\partial P}{\partial x} \frac{2D}{\rho \bar{u}^2} \quad (5.2)$$

E temos também que a velocidade média do fluido desenvolvido é dada por:

$$\bar{u} = -\frac{1}{8\mu} \frac{\partial P}{\partial x} R^2 \quad (5.3)$$

Combinando as duas equações acima e levando em conta a definição do número de Reynolds dado no capítulo 2 temos o seguinte valor para o fator de atrito teórico:

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad (5.4)$$

Da mesma equação de atrito e do valor adimensional dos campos de pressão dados no capítulo 2 temos:

$$f = -\frac{\Delta P}{L} D \frac{2}{\rho \bar{u}^2} \quad (5.5)$$

Desta forma temos uma maneira de calcular o fator de atrito com os valores da pressão em função das distancias após o comprimento de desenvolvimento. A figura 5 nos dá os campos de pressão numéricos no centro do tubo como função da distância da entrada.

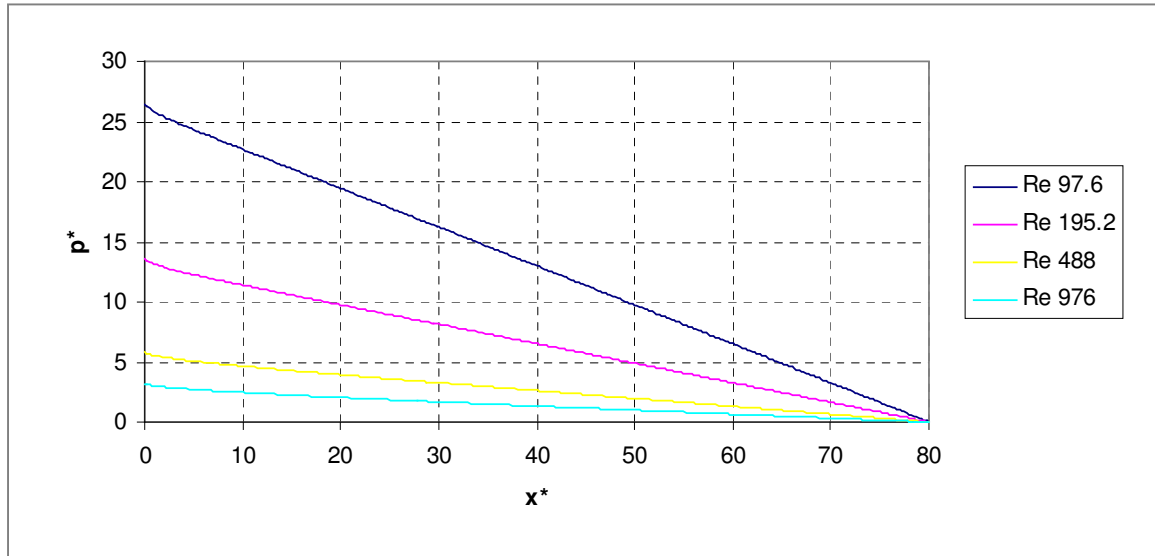


Figura 5. Gráficos das pressões contra as posições no tubo para diferentes números de Reynolds.

Na figura 5 podemos notar que as regiões onde o escoamento está desenvolvido apresentam um comportamento linear, e como precisamos dos valores das pressões e das posições para o fator de atrito numérico nós usamos um ajuste linear [18] entre as posições 70 e 75. Desta forma podemos calcular os valores do fator de atrito numérico para os números de Reynolds 97.6, 195.2, 488 e 976.

Então usando a eq 5.5 e os valores da regressão linear retirados dos gráficos anteriores e também com os valores teóricos do fator de atrito podemos construir a figura a seguir:

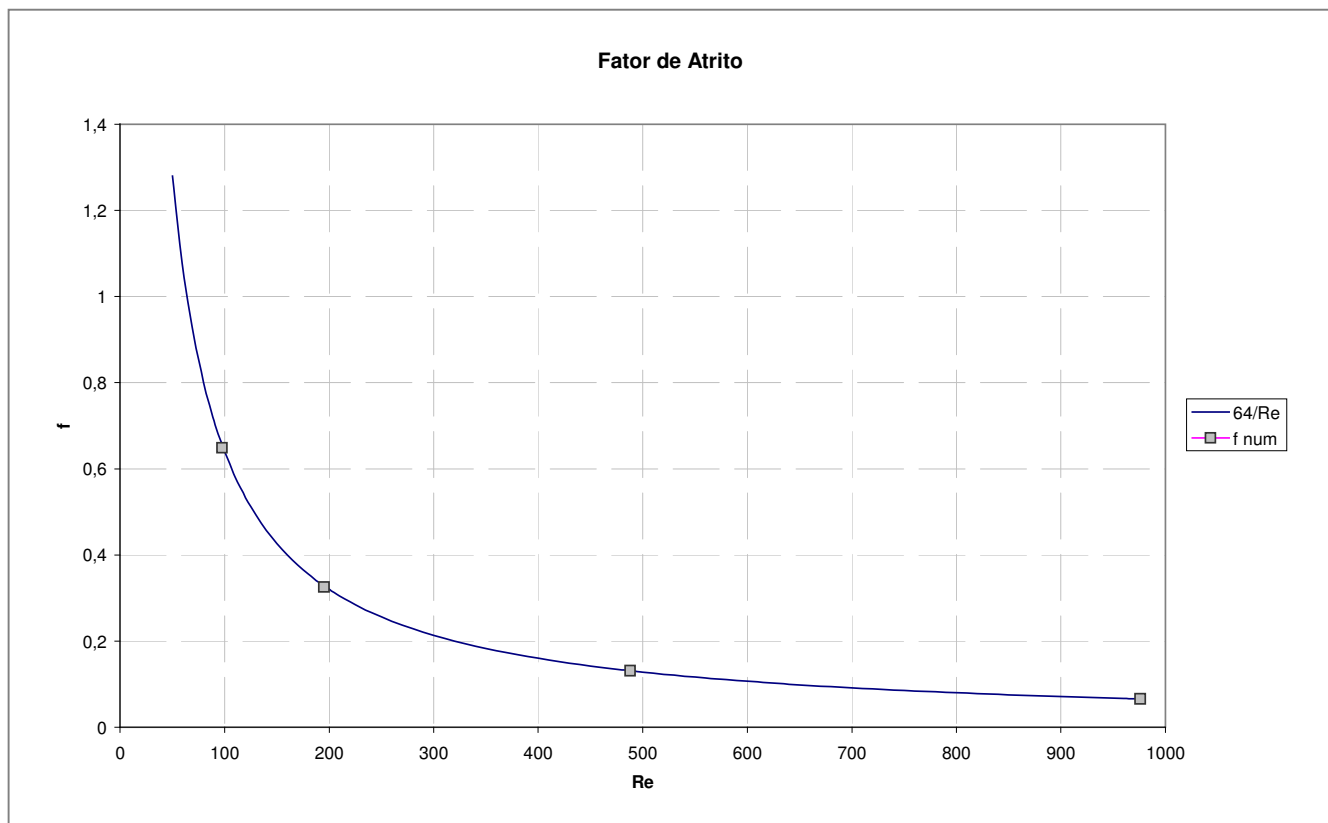


Figura 6. Gráfico dos valores do atrito numéricos e teóricos ( $64/Re$ ).

Note a boa concordância entre os resultados para diferentes valores adimensionais de Reynolds, que expressa a confiabilidade do método tais como mostrados no ponto de desenvolvimento no tubo.

## CAPÍTULO 6

### EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Apresentaremos nesta seção exemplos que utilizam as equações desenvolvidas neste trabalho para resolver alguns problemas de escoamento e transferência de calor. Em todos os casos nós utilizamos problemas 2D axissimétricos empregando elementos triangulares para a discretização espacial.

Primeiramente temos o exemplo de escoamento em um tubo longo na vertical, onde uma determinada parte da parede deste tubo tem um aquecimento e todas as outras partes da parede do tubo são termicamente isoladas e o escoamento se dá em sentido oposto ao da gravidade.

No segundo caso estudamos o núcleo de um reator PWR que é o tipo de reator de potência usado no Brasil. Para nosso estudo nos baseamos no reator do mesmo tipo dos encontrados nas usinas brasileiras. Assim com informações de um experimento utilizado para investigação do comportamento de um reator PWR, com o uso das técnicas desenvolvidas neste trabalho podemos, com a utilização da axissimetria, simular um dos setores de um modelo de reator nuclear.

#### 6.1. TUBO LONGO COM AQUECIMENTO EM UMA DAS REGIÕES

Nesta primeira aplicação simulamos o escoamento em um tubo de 80 diâmetros de comprimento na posição vertical, figura 7, sendo que na região situada entre as posições 30 e 50 diâmetros, é especificada uma temperatura adimensional  $T' = 1$  enquanto a temperatura do fluido que entra no tubo é  $T' = 0$ . O restante da parede é adiabática. Os números adimensionais do problema são: número de Reynolds com o

valor de 100, número de Richardson com o valor de 5, e número de Prandtl com o valor de 1. O escoamento se dá em sentido oposto ao da gravidade e a malha utilizada possui 3531 nós e 6400 elementos finitos triangulares.

Como pode ser observado no resultado numérico do campo de velocidades, figura 8, à medida que o fluido encontra a parede quente, a velocidade aumenta nas proximidades das paredes aquecidas, fazendo com que o comportamento parabólico típico do desenvolvimento em um tubo seja deformado. Porém, após a região aquecida podemos observar que o comportamento do escoamento volta ao perfil parabólico desenvolvido.

Olhando a figura 8, da esquerda para a direita, se pode observar que na medida em que o escoamento se afasta da entrada do tubo, o campo de velocidade começa a apresentar o já citado comportamento parabólico, onde a velocidade é maior no centro do tubo e diminui até chegar às paredes do mesmo. No entanto nas figuras 8 (d) e 8 (e) nota-se uma região onde este comportamento começa a ser modificado, esta região é a região entre 30 e 50 diâmetros, onde a temperatura da parede é mais quente. Isto gera um refluxo devido ao grande aumento da velocidade de escoamento nas proximidades da parede, em razão da forte força de empuxo.

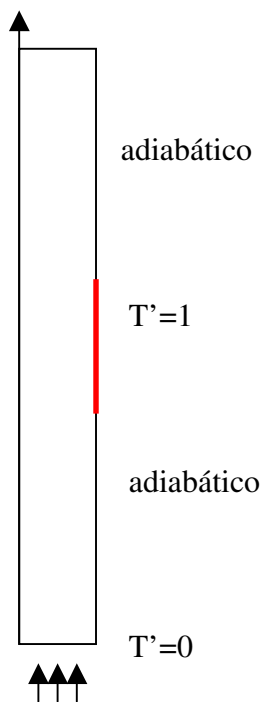


Figura 7. Detalhe do aquecimento na parede do tubo.



Figura 8. Tubo longo com 80 diâmetros e cortado em partes de 11 em 11 diâmetros.

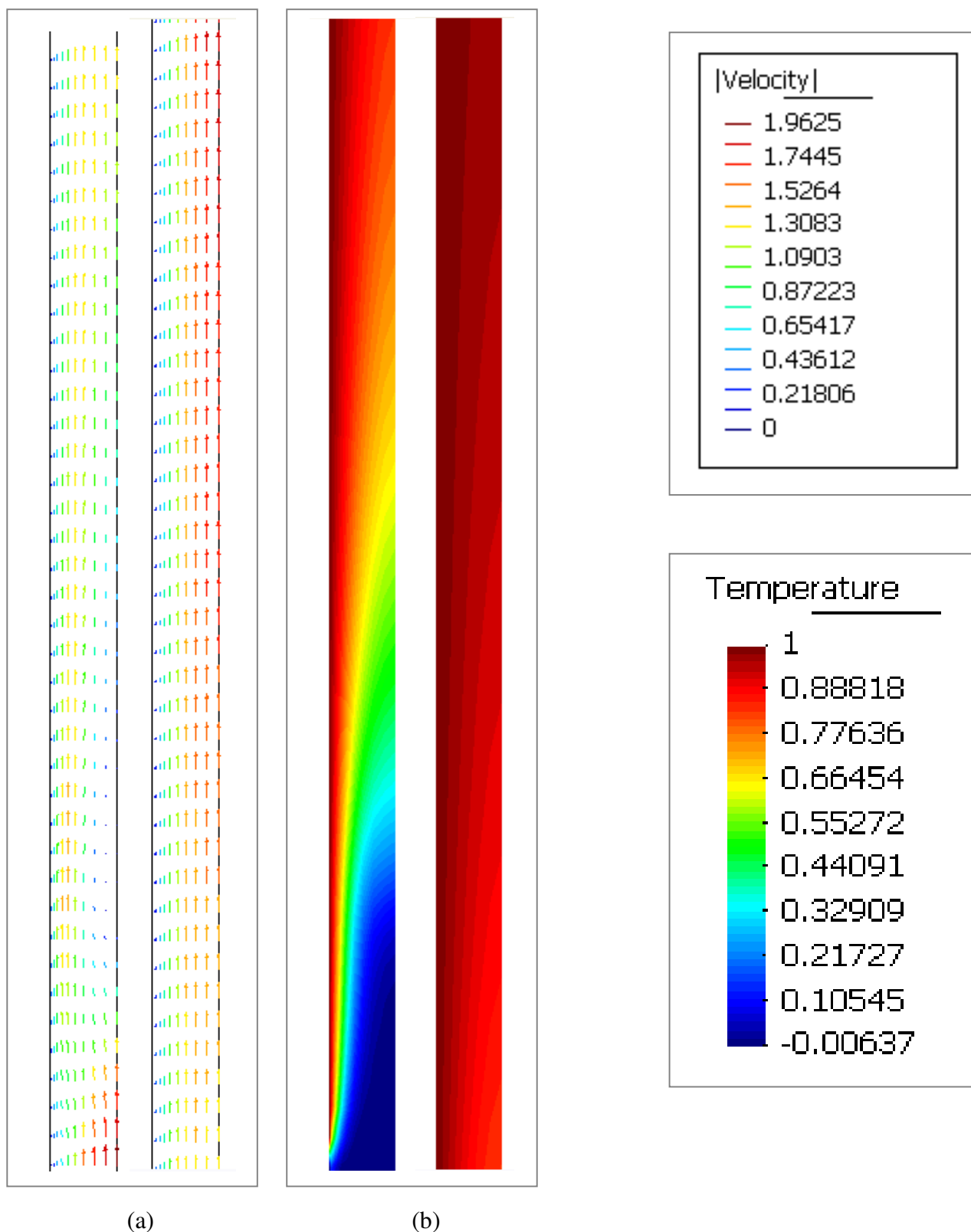


Figura 9. Vetor velocidade nas regiões (d) e (e), e a distribuição de temperatura nas mesmas.

## 6.2 DOWNCOMER

Nesta seção propomos a simulação de uma das partes do núcleo de um reator PWR que possui simetria axial. Na figura 10 temos uma imagem do núcleo do reator PWR de Angra 2. Nela podemos notar a proporção em relação a uma pessoa e podemos ver a parte de descida do fluido no reator, que por apresentar simetria axial, iremos utilizar como aplicação.



*Figura 10. Maquete de um reator nuclear PWR*



Para analisar o problema em questão alguns valores dimensionais são necessários. Estes foram obtidos de uma montagem experimental em escala reduzida que simula o primário de um reator do tipo de Angra 2 [19-22].

Com os valores do citado experimento, o ROCOM, *Ressendorf Mixing Model* [19-22], podemos aplicar o método desenvolvido neste trabalho na câmara de descida do fluido em um vaso de reator, o chamado *downcomer*. Observando a figura 11 temos em destaque a região simulada pelo método desenvolvido neste trabalho.

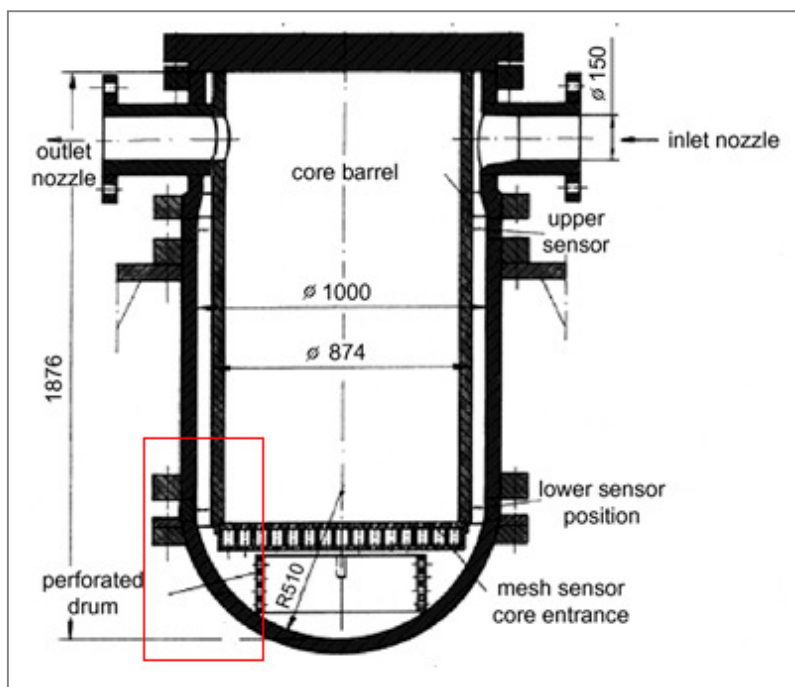
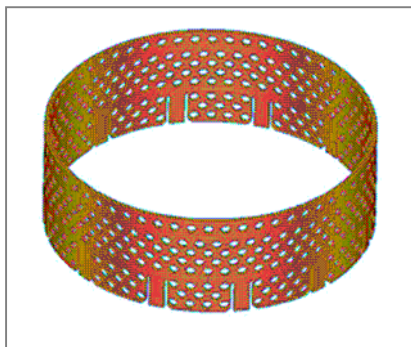


Figura 11. Modelo do vaso de um reator nuclear PWR, o quadrado vermelho destaca a região simulada.

Tivemos que levar em conta alguns fatores para a simulação e além de usarmos os mesmos números adimensionais do ROCOM, tivemos que aproximar a geometria do tambor perfurado, de forma a termos um resultado o mais próximo possível do experimento real.

Na figura 12 temos uma visão do tambor e de seus furos. Porém para nossa análise é preciso aproximar o tambor por uma estrutura axissimétrica. Para isso

mantivemos a área correspondente a área de passagem dos furos do tambor perfurado original.

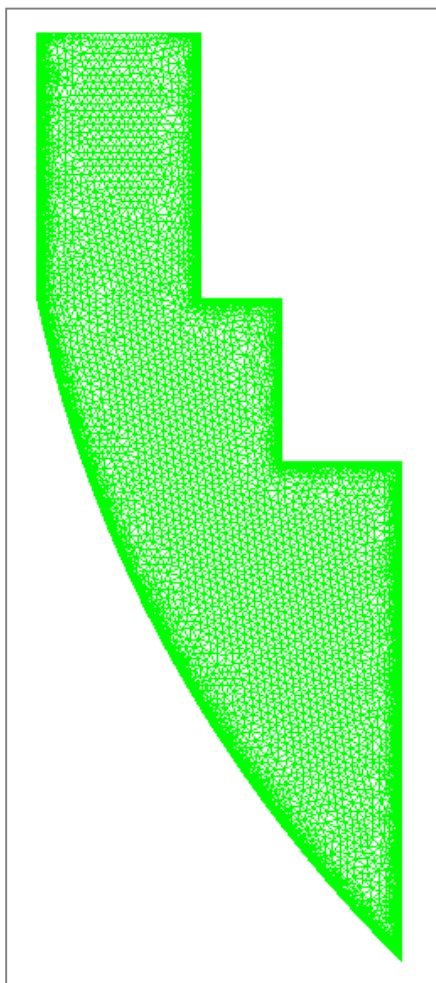


*Figura 12. Visão do tambor perfurado usado no projeto ROCOM*

Desta forma, o tambor passou a ter rasgos ao invés de furos, lembrando que como pode ser observado no setor analisado, o nosso interesse está na região de descida do fluido.

Como estamos com um experimento em escala reduzida todos os nossos valores foram adimensionalizados em termos de diâmetro como já estava sendo usado ao longo do trabalho e o número de Reynolds adotado foi o mesmo usado no experimento ROCOM,  $Re = 8,73 \times 10^4$ .

A partir dos dados da região do downcomer e com o uso do programa desenvolvido neste trabalho, simulamos o escoamento do fluido neste setor com uma malha inicial contendo 21919 elementos triangulares e 12312. Neste estudo a opção de remalhagem adaptativa foi ativada. Na figura 13 podemos ver mais detalhadamente a malha inicial usada na simulação.

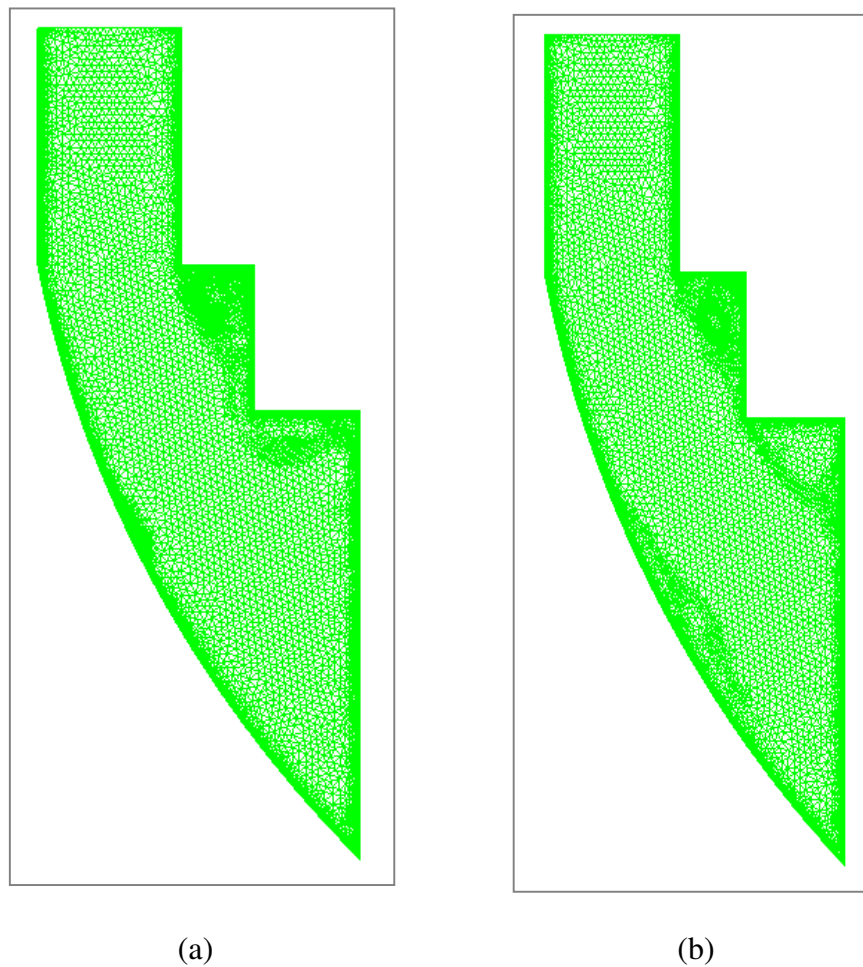


*Figura 13. Malha inicial usada para simulação do downcomer, com refinamento nas paredes, na entrada e na região do tambor.*

Para a obtenção dos resultados numéricos foram empregados cinco computadores em processamento paralelo. Dos resultados obtidos podemos analisar o comportamento do escoamento nesta região.

Como o programa computacional possui a característica de remalhagem adaptativa, o refinamento acompanha as características do escoamento como mostra a

figura 14. A figura 15 apresenta campos de velocidade típicos. A figura 16 mostra um campo de pressão durante a análise.



*Figura 14. Detalhamento da remalhagem adaptativa em dois instantes diferentes.*

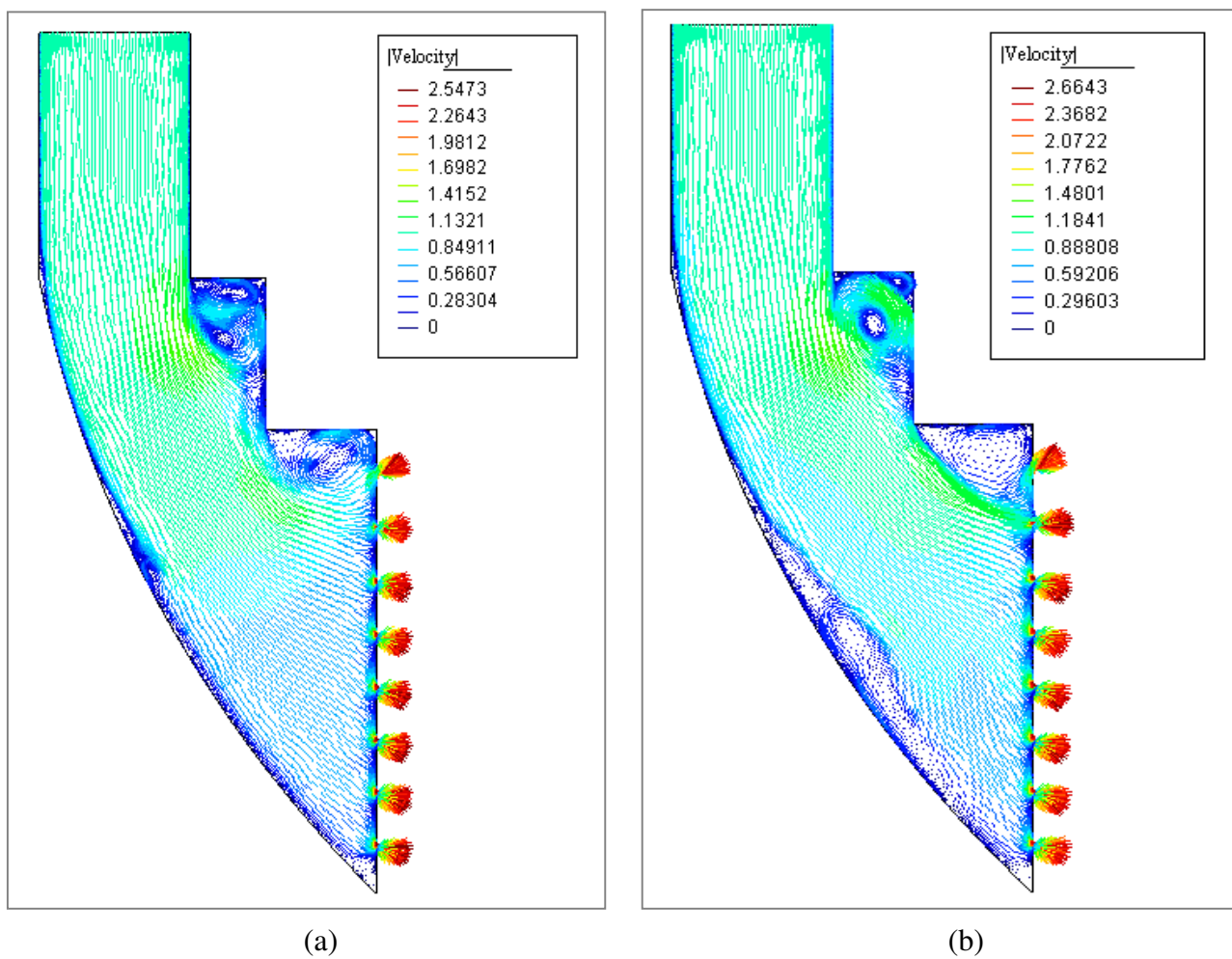
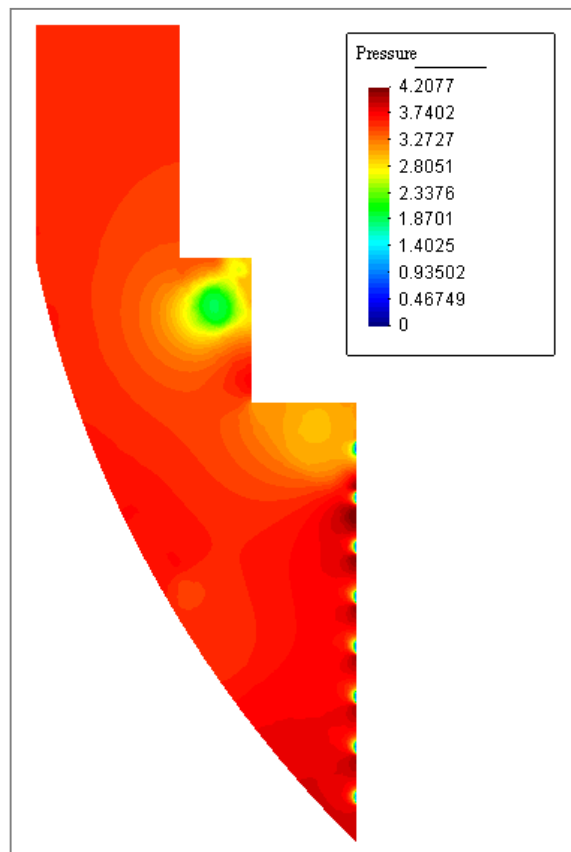


Figura 15. Campo de velocidade vetorial do fluido em dois instantes diferentes.



*Figura 16. Distribuição de pressão ao longo do downcomer*

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSÕES

Na engenharia de reatores há um grande número de problemas que pode ser tratado fazendo uso da hipótese de simetria axial. Por esta razão, neste trabalho a metodologia desenvolvida por Sampaio [4-5] para obtenção de formulações de elementos finitos estabilizadas para solução das equações de Navier-Stokes e de energia em geometria Cartesiana foi estendida para a solução das mesmas equações em problemas axissimétricos.

A formulação estabilizada obtida foi incorporada no programa NS\_SOLVER\_MPI\_2D\_A, que passou a contar com as opções para análises em geometria Cartesiana e Axissimétrica. As modificações realizadas no programa original preservaram a estrutura original do mesmo, de forma que foram mantidas suas características avançadas de processamento paralelo e de remalhagem adaptativa baseada em estimativa de erros na representação dos gradientes de velocidade.

O programa implementado foi testado, com excelentes resultados, na predição do comprimento de desenvolvimento do escoamento laminar em um tubo longo, bem como na predição do fator de atrito para o caso do escoamento desenvolvido. Embora simples, este exemplo permite testar a modelagem das forças convectivas que afetam o desenvolvimento, bem como o equilíbrio entre forças viscosas e gradiente de pressão que se estabelece no escoamento desenvolvido.

A capacidade do programa para simular escoamentos que incluem efeitos de empuxo foi mostrada em uma aplicação onde um tubo vertical apresentava uma seção de parede aquecida.

Finalmente, foi apresentada uma aplicação de engenharia de reatores, onde foi tratado o escoamento pelo downcomer de um reator PWR típico.

Espera-se que o programa desenvolvido neste trabalho e já incorporado aos recursos do Laboratório de Computação Paralela do IEN, venha a ser utilizado em estudos de análise de segurança e de projetos de reatores nucleares, contribuindo para o processo de retomada da geração núcleo-elétrica no Brasil.



## APÊNDICE

### Apêndice A

Como mencionado no capítulo 3 uma equação para atualização da pressão é obtida combinando as equações (3.14) e (3.15) originadas das equações de velocidade, a equação (3.19) que é uma minimização da equação (3.12) com relação aos valores nodais livres de  $\Delta p_i$ , e o balanço discretizado de massa, equação (3.7). E introduzindo as condições de contorno dadas pela equação (2.12) e usando a identidade de Green, temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial x} r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial r} r dr dx = \\
& - \int_{\Omega} N_i \left[ \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\hat{v}^n r)}{\partial r} \right] r dr dx - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \Delta t \frac{\partial N_i}{\partial r} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\Delta t \mu}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \hat{u}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\Delta t \mu}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 \hat{v}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{p}^n}{\partial x} r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \bar{p}^n}{\partial r} r dr dx - \int_{\Omega} \frac{\Delta t \mu}{\rho r^2} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{v}^n r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \Delta t \beta g_x \frac{\partial N_i}{\partial x} (\hat{T}^n - T_0) r dr dx - \int_{\Gamma_G} N_i r (\bar{G}^{n+1} - \bar{G}^n) d\Gamma
\end{aligned} \tag{A1}$$

Note que a equação (A1) combina a minimização dos resíduos quadrados de quantidade de movimento em relação à pressão, equação (3.19), com o balanço

discretizado de massa, equação (3.7). Por essa razão a chamamos de equação da pressão-continuidade.

As equações para a mudança dos campos de pressão axiais e radiais são mostradas a seguir com  $\theta = 1/2$ .

Para a componente axial temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} N_i \left[ \Delta \hat{u} + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial r} \right) \right] r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\rho}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \Delta \hat{u} + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{4} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \Delta \hat{u} + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t}{4 \rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{u}}{\partial r} \right) \right] r dr dx = \\
& - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x} r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{2 \rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \Delta \hat{p}}{\partial x} r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \rho \left[ N_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \hat{u}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) r dr dx - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) r dr dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t}{2\rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \hat{u}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& \quad + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} r dr dx \\
& \quad + \int_{\Omega} \frac{\rho \beta g_x \Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] (\hat{T}^n - T_0) r dr dx \\
& \quad - \int_{\Omega} \rho \beta g_x \left[ N_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] (\hat{T}^n - T_0) r dr dx \\
& \quad + \int_{\Gamma_{ax}} N_i \bar{f}_x^{n+1/2} r d\Gamma
\end{aligned} \tag{A2}$$

Para a componente radial temos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t} \left[ N_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \Delta \hat{v} + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& \quad - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{4} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& \quad + \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial r} \right) r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \left[ N_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\Delta \hat{v}}{r} dr dx \\
& \quad - \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \Delta \hat{v} + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& \quad + \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t}{4\rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& \quad - \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t}{4\rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\Delta \hat{v}}{r} dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{2\Delta t} N_i \left[ \Delta \hat{v} + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial r} \right) \right] \frac{1}{r} dr dx \\
& \quad + \int_{\Omega} \frac{\mu^2}{4} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{v}}{\partial r} \right) \frac{1}{r} dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu^2}{4} N_i \Delta \hat{v} \frac{1}{r^3} dr dx =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial r} r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial r} r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} N_i \frac{\partial \Delta \bar{p}}{\partial r} \frac{1}{r} dr dx - \int_{\Omega} \frac{\rho \Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \hat{v}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \frac{\partial \bar{p}^n}{\partial r} r dr dx - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \frac{\hat{v}^n}{r} dr dx \\
& - \int_{\Omega} \rho N_i \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) r dr dx - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial \bar{p}^n}{\partial r} r dr dx - \int_{\Omega} \mu N_i \hat{v}^n \frac{1}{r} dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t}{2\rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \hat{v}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t}{2\rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \bar{p}^n}{\partial r} r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t}{2\rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\hat{v}^n}{r} dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{2} N_i \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \frac{1}{r} dr dx - \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} N_i \frac{\partial \bar{p}^n}{\partial r} \frac{1}{r} dr dx - \int_{\Omega} \frac{\mu^2}{2} N_i \hat{v}^n \frac{1}{r^3} dr dx \\
& - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \right) r dr dx - \int_{\Omega} \frac{\mu^2}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}}{\partial r} \right) \frac{1}{r} dr dx \\
& + \int_{\Gamma_{nr}} N_i \bar{f}_r^{n+1/2} r d\Gamma
\end{aligned} \tag{A3}$$

O peso Petrov-Galerkin de aproximação residual de balanço de energia, equação (3.20), é usada para obter uma equação de atualização para o campo de temperatura. Seguindo o mesmo raciocínio aplicado para obter a equação (A2), a condição de contorno do fluxo de calor, equação (2.10), é introduzida depois de usar a identidade de Green no termo Galerkin do fluxo de calor em nível de tempo  $n$ . O resultado é:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\rho \cdot c}{\Delta t} N_i \left[ \Delta \widehat{T} + \frac{\Delta t}{2} \left( \widehat{u}^n \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial x} + \widehat{v}^n \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial r} \right) \right] r dr dx + \int_{\Omega} \frac{k}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\rho \cdot c}{2} \left( \widehat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \widehat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \Delta \widehat{T} + \frac{\Delta t}{2} \left( \widehat{u}^n \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial x} + \widehat{v}^n \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{k \Delta t}{4} \left( \widehat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \widehat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \Delta \widehat{T}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{k}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \Delta \widehat{T} + \frac{\Delta t}{2} \left( \widehat{u}^n \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial x} + \widehat{v}^n \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t}{4 \rho \cdot c} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \Delta \widehat{T}}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \widehat{T}}{\partial r} \right) \right] r dr dx = \\
& - \int_{\Omega} \rho \cdot c \left[ N_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \widehat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \widehat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \widehat{u}^n \frac{\partial \widehat{T}^n}{\partial x} + \widehat{v}^n \frac{\partial \widehat{T}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{k \Delta t}{2} \left( \widehat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \widehat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \widehat{T}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \widehat{T}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} k \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \widehat{T}^n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \widehat{T}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{k \Delta t}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \widehat{u}^n \frac{\partial \widehat{T}^n}{\partial x} + \widehat{v}^n \frac{\partial \widehat{T}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{k^2 \Delta t}{2 \rho \cdot c} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \widehat{T}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \widehat{T}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q}^{n+1/2} r d\Gamma
\end{aligned} \tag{A4}$$

## Apêndice B

Soluções sincronizadas em  $t^n + \Delta t^*$ .

Campo de pressão.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M^2}{\Delta t^*} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{p}^*}{\partial x} r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M^2}{\Delta t^*} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \Delta \hat{p}^*}{\partial r} r dr dx = \\
& - \int_{\Omega} N_i \left[ \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\hat{v}^n r)}{\partial r} \right] r dr dx + \int_{\Omega} \Delta t_M \frac{\partial N_i}{\partial x} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \Delta t_M \frac{\partial N_i}{\partial r} \left( \hat{u}^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 \hat{u}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 \hat{v}^n}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x} r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial r} r dr dx - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{\rho r^2} \frac{\partial N_i}{\partial r} \hat{v}^n r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \Delta t_M \beta g_x \frac{\partial N_i}{\partial x} (\hat{T}^n - T_0) r dr dx - \int_{\Gamma_G} N_i (\bar{G}^{n+1} + \bar{G}^n) r d\Gamma
\end{aligned} \tag{B1}$$

Campos de velocidades:

Axial.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t^*} N_i \left[ \Delta \hat{u}^* + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2 \Delta t^*} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial r} \right) r dr \\
& + \int_{\Omega} \frac{\rho \Delta t_M}{2 \Delta t^*} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \left[ \Delta \hat{u}^* + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M^2}{4 \Delta t^*} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{u}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2 \Delta t^*} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \Delta \hat{u}^* + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t_M^2}{4 \rho \Delta t^*} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{u}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{u}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx = \\
& - \int_{\Omega} \rho \beta g_x \frac{\Delta t_M}{\Delta t^*} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] (\hat{T}^n - T_0) r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \rho \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{\Delta t^*} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \Delta \hat{p}^*}{\partial x} r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M^2}{2 \rho \Delta t^*} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \Delta \hat{p}^*}{\partial x} r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2 \rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x} r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) r dr dx - \int_{\Omega} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial x} r dr dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t_M}{4\rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \hat{u}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{u}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \beta g_x \Delta t_M}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] (\hat{T}^n - T_0) r dr dx \\
& + \int_{\Gamma_{ns}} N_i \bar{f}_x^{n+1/2} r d\Gamma
\end{aligned} \tag{B2}$$

Radial.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\rho}{\Delta t^*} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \Delta \hat{v}^* + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M^2}{4\Delta t^*} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{v}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2\Delta t^*} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial r} \right) r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2\Delta t^*} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\Delta \hat{v}^*}{2} r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2\Delta t^*} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \Delta \hat{v}^* + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t_M^2}{4\rho \Delta t^*} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{v}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t_M^2}{4\rho \Delta t^*} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\Delta \hat{v}^*}{r} dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{2\Delta t^*} N_i \left[ \Delta \hat{v}^* + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial r} \right) \right] \frac{1}{r} dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t_M}{4\Delta t^*} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \Delta \hat{v}^*}{\partial r} \right) \frac{1}{r} dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t_M}{4\Delta t^*} N_i \Delta \hat{v}^* \frac{1}{r^3} dr dx =
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \frac{\Delta t_M}{\Delta t^*} \left[ N_i + \frac{\Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \Delta \hat{p}^*}{\partial r} r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M^2}{2 \rho \Delta t^*} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \Delta \hat{p}^*}{\partial r} r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2 \Delta t^*} \frac{\partial \Delta \hat{p}^*}{\partial r} \frac{1}{r} dr dx - \int_{\Omega} \frac{\rho \Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \hat{v}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \frac{\partial \hat{P}^n}{\partial r} r dr dx - \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \frac{\hat{v}^n}{r} dr dx \\
& - \int_{\Omega} \rho N_i \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) r dr dx - \int_{\Omega} N_i \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial r} r dr dx - \int_{\Omega} \mu N_i \hat{v}^n \frac{1}{r} dr dx \\
& + \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t_M}{2 \rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \hat{v}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mu \Delta t_M}{2 \rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial r} r dr dx + \int_{\Omega} \frac{\mu^2 \Delta t_M}{2 \rho} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \frac{\hat{v}^n}{r} dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\mu \rho}{2} N_i \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \frac{1}{r} dr dx - \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} N_i \frac{\partial \hat{p}^n}{\partial r} \frac{1}{r} dr dx - \int_{\Omega} \frac{\mu^2}{2} N_i \hat{v}^n \frac{1}{r^3} dr dx \\
& - \int_{\Omega} \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) r dr dx - \int_{\Omega} \frac{\mu^2}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \hat{v}^n}{\partial r} \right) \frac{1}{r} dr dx \\
& + \int_{\Gamma_{nr}} N_i \bar{f}_r^{n+1/2} r d\Gamma
\end{aligned} \tag{B3}$$

Campo de temperatura.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\rho c \Delta t_E}{\Delta t^{*2}} N_i \left[ \Delta \hat{T}^* + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx + \int_{\Omega} \frac{k \Delta t_E}{2 \Delta t^*} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\rho c \Delta t_E}{2 \Delta t^*} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \Delta \hat{T}^* + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{\rho c \Delta t_E^2}{4 \Delta t^*} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{T}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{k \Delta t_E}{2 \Delta t^*} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \Delta \hat{T}^* + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{k^2 \Delta t_E^2}{4 \rho c \Delta t^*} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \Delta \hat{T}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Delta \hat{T}^*}{\partial r} \right) \right] r dr dx = \\
& - \int_{\Omega} \rho c \left[ N_i + \frac{\Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{k \Delta t_E}{2} \left( \hat{u}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \left[ \frac{\partial^2 \hat{T}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Omega} k \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{k \Delta t_E}{2} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left( \hat{u}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial x} + \hat{v}^n \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial r} \right) r dr dx \\
& - \int_{\Omega} \frac{k^2 \Delta t_E}{2 \rho c} \left[ \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N_i}{\partial r} \right) \right] \left[ \frac{\partial^2 \hat{T}^n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \hat{T}^n}{\partial r} \right) \right] r dr dx \\
& - \int_{\Gamma_q} N_i \bar{q}^{n+1/2} r d\Gamma
\end{aligned} \tag{B4}$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] U. S. DOE Nuclear Energy Research Advisory Committee and the Generation IV International Forum. “*A Technology Roadmap for Generation IV Nuclear Energy Systems*” (2002).
- [2] PATANKAR, S.V. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Taylor & Francis Group, New York (1980).
- [3] International Atomic Energy (IAEA), 2003. *Use of Computational Fluid Dynamics Codes for Safety Analysis of Nuclear Reactor Systems*, IAEA-TECDOC-1379.
- [4] DE SAMPAIO, P.A.B. “*A Stabilized Finite Element Method for Incompressible Flow and Heat Transfer: A Natural Derivation Based on the use of Local Time-Steps*”. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 195, pp. 6177-6190, 2006.
- [5] DE SAMPAIO, P.A.B. “*A Finite Element Formulation for Transient Incompressible Viscous Flows Stabilized by Local Time-Steps*”. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 194, pp. 2095-2108, 2005.
- [6] JOHNSON, C., *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, 1987.
- [7] BREZZI, F.; FORTIN, M., 1991. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, NY, Springer
- [8] DE SAMPAIO, P. A. B., “*A Petrov-Galerkin Formulation for the Incompressible Navier-Stokes Equations using Equal Order Interpolation for Velocity and Pressure*”. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 31, pp. 1135-1149, 1991.
- [9] DE SAMPAIO, P. A. B.; COUTINHO, A. L. G. A., 1999. “*Simulation of free and forced convection incompressible flows using an adaptive parallel/vector finite element procedure*”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29,p. 289-309.

- [10] BROOKS, A.; HUGHES, T.J.R., 1982. “*Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, p. 199-259.
- [11] DE SAMPAIO, P.A.B. “*Petrov-Galerkin Finite Element Formulations for Incompressible Viscous Flows*”. Doctor thesis. Departamento of Civil Engineering, University of Wales, Swansea, 1991.
- [12] DE SAMPAIO, P.A.B., 1993. “*Transient solutions of the incompressible Navier-Stokes equations in primitive variables employing optimal local time stepping*”. *Proc. 8<sup>th</sup> Int. Conf. on Numerical Methods for Laminar and Turbulent Flow*, p. 1493-1504.
- [13] ZIENKIEWICZ, O .C.; ZHU, J. C. 1987. “*A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, P. 337-357.
- [14] BOWYER, A, 1981. “*Computing Dirichlet Tessellations*”, *Computer Journal*, 24, 162-166.
- [15] DE SAMPAIO, P. A. B.; HALLAK, P. H.; COUTINHO, A. L. G. A.; PFEIL, M. S.. 2004.”*A Stabilized Finite Element Procedure for Turbulent Fluid-Structure Interaction Using Adaptive Time-Space Refinement*”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Chichester, UK, V. 44, n. 6, P. 673-693.
- [16] KARIPYS, G.; KUMAR, V., 1998 “*Software Packaje for Partitioning Unstrutred Graphs, Partitioning Meshes, and Computing Fill-Reducing Ordering of Sparse Matrices Version 4.0*”, *Department of Computer Science, University of Minnesota, Minnesota, Minneapolis, USA.*
- [17] DURST, F.; RAY, S.; UNSAL, B.; BAYOUMI, O. A ., 2005 “*The Development Lengths of Laminar Pipe and Channel Flows*”, *Institute of Fluid Mechanics, Friedrich Alexander Universitat Erlangen-Nurnberg, Cauerstrasse 4, D-91058 Erlangen, Germany.*
- [18] CLAUDIO, S. 2005. “*Métodos Computacionais da Física*”, São Paulo BR., Livraria da Física.

- [19] SCHAFFRATH, A, FISCHER, K, HAHM, T, WUSSOW, S. “*Validation of the CFD Code Fluent by Post-Test Calculation of a Density-Driven ROCAM Experiment*”, *Nuclear Engineering Design.*, vol. 237, pp. 1899-1908, 2007.
- [20] G.M. CARTLAND GLOVER, TH. HOHNE, S. KLIEM, U. ROHDE, F.-P. WEISS, H.-M. PRASSER. “*Hidrodynamic Phenomena in the Downcomer During Flow Rate Transients in the Primary Circuit of a PWR*”. *Nuclear Engineering Design.*, vol. 237, pp. 732-748, 2007.
- [21] TH. HOHNE, K. KLIEM, U. ROHDE, F. WEISS. “*Boron Dilution Transients During Natural Circulation Flow in PWR – Experiments and CFD Simulations*”. *Nuclear Engineering Design.*, vol. 238, pp. 1987-1995, 2008.
- [22] S. KLIEM, T. SUHNEL, U. ROHDE, T. HOHNE, H.-M. PRASSER, F.-P. WEISS. “*Experiments at the Mixing Test Facility ROCAM for Benchmarking of CFD Codes*”. *Nuclear Engineering Design.*, vol. 238, pp. 566-576, 2008.