

# Eficiência dos Gastos dos Municípios Brasileiros no Ensino Fundamental: uma Análise Orientada pela Qualidade da Educação

Luiz Alberto D'Ávila de Araújo  
Ministério da Economia

Tarcio Lopes da Silva  
Faculdade Senac

## Resumo

Este estudo avaliou os gastos da rede pública municipal brasileira no ensino fundamental, em 2017, considerando 5.295 municípios, para verificar se a alocação de recursos públicos na educação ocorre de forma eficiente, orientado pela qualidade da educação. Para isso, foram estimadas fronteiras de produção por meio dos métodos *Data Envelopment Analysis* (DEA), *Free Disposal Hull* (FDH), DEA corrigido e Estimador de ordem m. Os escores de proficiência em língua portuguesa e matemática do SAEB foram considerados como medida de produto, representando a qualidade da educação, o gasto por aluno foi utilizado como insumo e o indicador de nível socioeconômico como variável ambiental. Os resultados indicam eficiência média estimada de 82% pelo DEA e 83% pelo FDH, sinalizando que, em média, os municípios brasileiros poderiam aumentar seu escore de proficiência em, aproximadamente, 20% mantido o nível de gastos atuais. Adicionalmente, identificou-se folga de recursos que sinaliza um potencial de redução de gastos após atingir o nível eficiente de produto. Em particular três municípios poderiam servir de referência para melhoria da eficiência dos gastos públicos orientada pela melhoria da qualidade da educação.

## 1. Introdução

No passado, o estado brasileiro não tinha como objetivo primordial a universalização da educação básica, em particular do ensino fundamental, mas esse cenário mudou a partir da criação de uma rede pública educacional.

Com a Constituição Federal de 1988, o financiamento da educação básica e a universalização da educação foram considerados relevantes para a melhoria educacional brasileira, estabelecendo o regime de colaboração dos sistemas de ensino, onde a União exerce uma função redistributiva mediante assistência técnica e financeira, os municípios atuam prioritariamente no ensino fundamental e na educação infantil, enquanto os estados e o Distrito Federal atuam prioritariamente no ensino fundamental e médio;

O estado brasileiro deve garantir educação básica obrigatória e gratuita de quatro anos de idade até dezessete anos, enquanto na educação infantil (creche e pré-escola), a creche ocorre de forma não obrigatória para as famílias.

O financiamento, inicialmente com o extinto Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e de Valorização do Magistério (FUNDEF), é assegurado pelo Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica (FUNDEB) e foi dada atenção para políticas e programas para melhoria da educação, com o Plano Nacional de Educação 2001-2010, o Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) e o Plano Nacional de Educação 2014-2024.

No Plano Nacional de Educação (PNE) 2014-2024, para fins deste artigo, é importante destacar a Meta 2 que estabeleceu a universalização do ensino fundamental e a Meta 7 que pretendia aumentar a qualidade da educação básica em todas as etapas e modalidades, melhorando o fluxo escolar e a aprendizagem.

Enquanto na Meta 2, o Brasil praticamente universalizou o atendimento escolar para crianças de seis a quatorze anos, atingindo 98,1% da população, na Meta 7, o Ideb não foi atingido para os anos finais (4,7 em 2017).

Ainda no aspecto de qualidade da educação brasileira, o *Programme for International Student Assessment* – PISA da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico – OCDE, que permite um comparativo internacional, mostra a qualidade da educação no Brasil praticamente inalterada nos últimos anos, período em que os recursos destinados para desenvolvimento da educação básica aumentaram de forma significativa.

Os recursos estão sendo direcionados para a educação pública brasileira, com crescimento em termos reais, mas a qualidade educacional, mensurada por intermédio de testes de desempenho dos alunos, não tem melhorado, indicativo de que é necessário entender os principais aspectos que devem ser superados e os exemplos a serem seguidos.

Este artigo tem por objetivo avaliar a eficiência dos gastos da rede pública municipal com educação até o final do ensino fundamental, orientada pelo produto. Para tanto, utiliza-se a metodologia DEA, FDH, DEA-C, DEA-C com variável ambiental e estimadores de ordem  $m$ , para analisar se os municípios brasileiros, mantidos os gastos atuais, poderiam melhorar a proficiência, aqui utilizado como conceito de qualidade da educação.

Os resultados indicam a eficiência média estimada de 82% pelo DEA e 83% pelo FDH, sinalizando que, em média, os municípios brasileiros poderiam aumentar seu escore de proficiência em, aproximadamente, 20% mantido o nível de gastos. Adicionalmente, identificou-se folga de recursos, sinalizando um potencial de redução de gastos após atingir o nível eficiente de produto, logo, os municípios brasileiros podem aumentar o nível de qualidade da educação ao mesmo tempo que reduzir o custo. Finalmente, identificou-se um município pode servir de referência para 3.770 municípios, no que tange ao atingimento do nível eficiente de qualidade da educação.

## **2. Definindo a Qualidade da Educação**

A UNESCO (2004) caracterizou qualidade da educação com base em dois princípios: (a) o desenvolvimento cognitivo dos alunos e (b) a promoção de valores e atitudes de cidadania e de desenvolvimento criativo e emocional. O primeiro é o objetivo de qualquer sistema educacional e sua mensuração ocorre por intermédio de testes de desempenho. O segundo dificulta a comparação internacional por ser de difícil mensuração. A UNESCO destaca que todo investimento na educação básica deve ser medido em relação ao quanto bem serve para expandir o acesso à educação e para melhorar o aprendizado de crianças, jovens e adultos.

A qualidade da educação é um aspecto crítico para o crescimento econômico de qualquer país do mundo e os artigos seminais de Barro (1991) e Mankiw, Romer e Weil (1992) destacaram os efeitos positivos da quantidade de educação para o sucesso econômico, mensurados pela taxa de matrícula escolar e anos de escolaridade.

Gradstein (2000) mostrou que a educação pública contribui para o crescimento do capital humano e aumenta a coesão social, enquanto Bruns et al. (2012) indicou que os sistemas educacionais devem ser julgados pela sua eficiência em exercer três funções: capacitar a força de trabalho para gerar crescimento econômico sustentado, contribuir para redução da pobreza e desigualdade, e transformar os gastos públicos em resultados educacionais, principalmente, com a melhoria da aprendizagem dos estudantes.

Posteriormente, as evidências têm mostrado que não se trata da quantidade de escolaridade, mas a qualidade obtida com o sistema educacional de cada país que leva ao crescimento econômico, métrica essa muitas vezes centrada em testes de desempenho dos alunos. Em outras palavras, não é somente estar na escola e sim o que a escola oferece ao aprendizado, que realmente importa, como visto em Hanushek e Kimko (2000), Pritchett (2001) e Hanushek e Woessmann (2012), conforme explicado em Altinok et al (2018) e World Bank (2018).

A partir de evidências da qualidade obtida com o sistema educacional, foram desenvolvidos diversos testes de desempenho que permitem um comparativo entre países, elaborados pela *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD), *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) e *United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization* (UNESCO), conforme Altinok et al (2018). Dentre os testes, constantes na Tabela 1, destacam-se:

(a) *Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS)* apurado pela IEA que cobre disciplinas de matemática e ciências na 4ª e 8ª séries. Foi iniciado em 1995 e aplicou cinco avaliações;

(b) *Progress in International Reading Literacy Study (PIRLS)*, também da IEA, avalia alunos de escolas primárias na 4ª série quanto à proficiência de leitura. Iniciou 2001 e apresentou outros resultados em 2006 e 2011; e

(c) *Programme for International Student Assessment (PISA)*, de responsabilidade da OCDE, avalia até que ponto alunos de 15 anos adquiriram os conhecimentos e habilidades para participarem da sociedade de forma plena. Desde 2000, apresenta resultados a cada três anos para desempenho em matemática, leitura e ciências.

Tabela 1 – Testes de Desempenho dos Alunos

Ano	Organização	Abreviatura	Países/Áreas	Grau/Idade
1959-1960	IEA	Pilot Study	12	7, 8
1964	IEA	FIMS	12	7, FS
1970-1971	IEA	SRC	15	4, 8, FS
1970-1972	IEA	FISS	19	4, 8, FS
1980-1982	IEA	SIMS	19	8, FS
1983-1984	IEA	SISS	23	4, 8, FS
1988, 1990-1991	NCES	IAEP	6, 19	4, 7-8
1990-1991	IEA	RLS	32	3-4, 7-8
A cada 4 anos desde 1995 (último em 2015)	IEA	TIMSS	45, 38, 26, 48, 66, 65, 65	3-4, 7-8, FS
1992-1997	UNESCO	MLA	72	6, 8
1997, 2006, 2013	UNESCO	LLECE	13, 16 (só 6 para ciência)	3, 6
1999, 2002, 2007	UNESCO	SACMEQ	7, 15, 16	6
1993-2001, 2002-2012, 2014	CONFEMEN	PASEC	22 (antes 2010), 10	até 2014: 2, 5 Depois 2014: 3, 6
A cada 5 anos desde 2001 (último em 2011)	IEA	PIRLS	35, 41, 55	4
A cada 3 anos desde 2000	OECD	PISA	43, 41, 57, 74, 65, 71	15

Fonte: World bank group – Altinok et al (2018).

Na experiência brasileira de teste de desempenho, pode-se citar os resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), criado em 1990, que contempla avaliações em larga escala para diagnosticar a educação básica brasileira, por intermédio da aplicação de testes e questionários a cada dois anos na rede pública e, também, numa amostra da rede privada.

Assim, percebe-se que o conceito de qualidade da educação aqui adotado está restrito à avaliação do desenvolvimento cognitivo dos alunos por intermédio de testes de desempenho, particularmente, os resultados de proficiência do SAEB.

### 3. Educação no Brasil

Para atingir o nível adequado de educação, o Brasil definiu as ações de manutenção e desenvolvimento da educação como sua fonte de financiamento, que são despesas para atingir os objetivos de instituições da educação em todas as etapas educacionais.

A manutenção e desenvolvimento da educação recebe recursos oriundos da arrecadação de impostos em transferências constitucionais anualmente do orçamento público. O papel

da União (art. 212, da CF/1988) é complementar e para equalizar os recursos, aplicando no mínimo 18% dos impostos arrecadados, enquanto os estados devem aplicar no mínimo 25% dos impostos e transferências da União nas etapas de ensino fundamental e ensino médio, ao passo que os municípios têm que direcionar ao menos 25% de seus tributos e das transferências da União às etapas da educação infantil e ensino fundamental.

O Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação (Fundeb) é a principal fonte de financiamento da educação. A estrutura do fundo envolve arrecadação de impostos e transferências dos Estados e municípios, além da complementação da União, em regime de colaboração entre todos os entes federados financiando em conjunto todas as etapas da educação básica. Assim, cada estado e o Distrito Federal devem constituir um Fundeb com recursos oriundos dos impostos sobre transmissão causa mortis e doação, sobre circulação de mercadorias e prestações de serviços, sobre a propriedade de veículos automotores e sobre propriedade territorial rural, assim como do imposto de renda, do imposto sobre produtos industrializados, Fundo de Participação dos Estados e Distrito Federal (FPE) e Fundo de Participação dos Municípios (FPM).

A União complementa os diversos Fundeb com, no mínimo, 23%<sup>1</sup>, sendo 10% para estados e distrito federal que não atingirem o mínimo nacional do valor anual por aluno (VAAF), 10,5% para redes públicas municipal, estadual e distrital sempre que o valor anual total por aluno (VAAT) não atingir o mínimo nacional e 2,5% para redes públicas que alcançarem evolução nos indicadores de melhoria da aprendizagem.

Petri (2018) destacou que o Brasil reverteu a discrepância de acesso à educação básica, com a taxa de atendimento escolar sendo a principal conquista, mas persiste uma dificuldade relevante que é a evasão escolar.

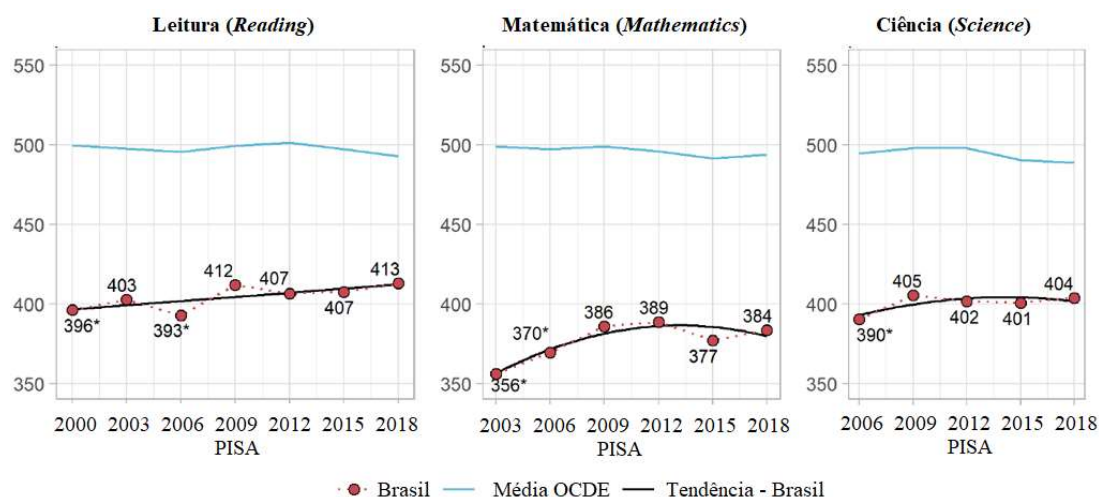


Figura 1 – Tendências no desempenho em leitura, matemática e ciências

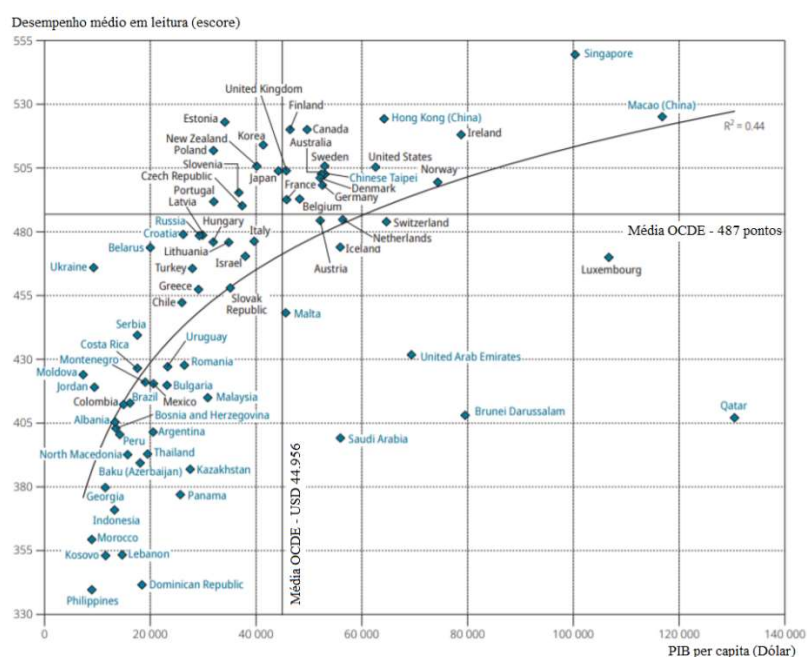
<sup>1</sup> A complementação de 23% decorrente da emenda constitucional de 2020 e passa a vigorar no ano seguinte, dado que o mínimo de 2020 foi de 10%, percebe-se que os recursos do Fundeb serão mais do que o dobro dos recursos complementados até 2020.

A qualidade educacional brasileira pode ser analisada pelo PISA. A Figura 1 mostra que apesar do aumento no acesso à educação, a qualidade da educação não apresenta tendência de melhoria, mantendo-se estagnada em níveis muito baixos, em qualquer dos três níveis de proficiência avaliados pela OCDE.

Em 2018, a proficiência em leitura apresentou 6 níveis e o Brasil atingiu o Nível 2, muito abaixo da média dos países da OCDE, mostrando que os leitores brasileiros conseguem identificar a ideia principal num texto de tamanho moderado, mas não conseguem representar o significado literal de textos únicos ou múltiplos na ausência de conteúdo explícito ou de dicas organizacionais, características do Nível 3.

Por sua vez, a proficiência em matemática apresentou 6 níveis e o Brasil apresentou um resultado pior do que em leitura, atingindo o Nível 1, onde os estudantes são capazes de responder a questões que envolvem contextos familiares, nas quais todas as informações relevantes estão presentes e as questões estão claramente definidas, mas não conseguem atingir as características de estudantes que atingiram o Nível 2: (a) interpretar e reconhecer situações que não exigem mais do que inferências diretas, (b) extrair informações relevantes de uma única fonte e utilizar um único modo de representação, (c) empregar algoritmos, fórmulas, procedimentos ou convenções básicos para resolver problemas com números inteiros, e (d) fazer interpretações literais de resultados.

O PISA 2018 mostrou, ainda, que apenas 2% dos alunos atingiram níveis altos de proficiência (Nível 5 ou 6) em pelo menos uma disciplina, enquanto a média da OCDE é de 16%. Outra informação é que 43% dos alunos obtiveram pontuação abaixo do nível mínimo de proficiência (Nível 2), enquanto na média OCDE é de 13% dos estudantes, este resultado é significativo e preocupante, **tanto no aspecto social de inclusão dos estudantes na sociedade de forma plena, quanto no aspecto econômico de possuir o capital humano necessário para o crescimento econômico sustentável do país.**



Fonte: OECD (2019)

Figura 2 - Desempenho médio de leitura e PIB per capita

Avaliando a relação entre o desempenho médio em leitura e o PIB per capita (Figura 2), percebemos que a situação brasileira não é animadora, com o país figurando nas últimas posições, longe de países como Singapura, Hong Kong (China), Macau (China) e Irlanda.

Para não ficar somente na avaliação de qualidade por um padrão internacional, como é o caso do PISA da OCDE, pode-se observar a evolução do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb) constante da Meta 7 do PNE 2014-2024.

A Tabela 2 mostra a evolução do Ideb dos Anos Finais, onde é possível observar que em nível nacional, as metas do Ideb constantes do PNE não são atingidas desde 2013, e esse distanciamento vem aumentando com o passar dos anos. Apesar de ter aumentado o acesso à educação, com a universalização do ensino fundamental, o sistema educacional apresenta indícios do não atingimento do nível mínimo de qualidade que permite aos jovens brasileiros estarem inseridos de forma plena na sociedade mundial, podendo indicar que o foco das políticas públicas está na quantidade e não na qualidade.

Tabela 2 – Ideb – Anos Finais do Ensino Fundamental

Brasil		
Ano	Observado	Meta
2005	3,5	
2007	3,8	3,5
2009	4,0	3,7
2011	4,1	3,9
2013	4,2	4,4
2015	4,5	4,7
2017	4,7	5,0
2019	4,9	5,2
2021		5,5

Fonte: Inep, dados consolidados pelos autores.

Isso é reforçado pela evidência empírica que mostrou uma fraca relação entre alocação de recursos para educação e o desempenho escolar, como pode ser observado em Amaral e Menezes-Filho (2007).

Assim, percebe-se que a **expansão das matrículas e dos gastos não leva, necessariamente, à aquisição do conhecimento** que, por sua vez, implica em desenvolvimento individual e coletivo, sendo importante que formuladores de política educacional e econômica identifiquem as correções que se fizerem necessárias para que matrículas se traduzam em frequência escolar e, esta última, em aprendizado.

Em função da importância desse tema, a literatura passou a investigar a eficiência educacional utilizando metodologias alternativas àquelas utilizadas pelas instituições governamentais. Em especial, muitos artigos empíricos usam métodos não paramétricos de avaliação de eficiência. Silva e Almeida (2012), por exemplo, mensuraram a eficiência dos municípios do Rio Grande do Norte por intermédio dos métodos não paramétricos *Data Envelopment Analysis* (DEA) e *Free Disposal Hull* (FDH), indicando que a redução do nível de reprovação poderia ser alcançada com maior eficiência do gasto educacional. Os autores encontraram que, aproximadamente, 70% dos municípios apresentaram escore entre 0,7 e 0,9.

Oliveira et al (2017) verificaram a eficiência das escolas públicas do estado de Goiás, por intermédio do DEA-VRS (*variable return of scale*) com múltiplos estágios e orientado pelo insumo, utilizando como variáveis ambientais no segundo estágio, o Indicador de Nível Socioeconômico (INSE), escolas urbanas e rurais, escolas em tempo integral, escolas militares e percentual de docente com nível superior. Os resultados encontrados indicaram eficiência média em torno de 0,36.

Assim, o objetivo desse trabalho é contribuir com a literatura que avalia a eficiência dos gastos em educação, mas **com foco na qualidade mensurada por testes de desempenho** dos alunos. Em especial, serão utilizados vários estimadores não paramétricos de avaliação de eficiência, a fim de garantir que os resultados encontrados sejam robustos.

#### 4. Metodologia

As principais metodologias usadas para medir a eficiência relativa de unidades (firmas, hospitais, escolas etc.) podem ser classificadas em métodos paramétricos e métodos não paramétricos. Nesse artigo, serão utilizados métodos não paramétricos visto que os primeiros apresentam resultados inconsistentes se a tecnologia de produção – que é desconhecida – for especificada incorretamente. Além disso, os métodos não paramétricos permitem que se analise a eficiência técnica de unidades que trabalham com múltiplos insumos e produtos como é o caso da área educacional.

Os dois estimadores não paramétricos de fronteira de eficiência mais utilizados são o DEA (Análise Envoltória dos Dados), operacionalizado por Charnes, Cooper e Rhodes (1978), e o FDH (Superfície de Livre Disponibilidade), desenvolvido por Deprins, Simar e Tulkens (1984). A abordagem DEA foi construída com base nas ideias de Farrell (1957). Banker, Charnes e Cooper (1984) estenderam o modelo DEA original para permitir rendimentos variáveis de escala, ficando conhecido como modelo BCC (Banker, Charnes e Cooper) ou VRS (*variable return of scale*). A diferença fundamental entre esses métodos não paramétricos diz respeito à suposição de convexidade. Enquanto o DEA impõe convexidade ao conjunto de produção, o estimador FDH não faz qualquer restrição nesse aspecto.

Os métodos não paramétricos baseiam-se na ideia de envolver os dados observados para construção da fronteira de eficiência através de técnicas de programação linear. Para utilizá-los não é preciso especificar qualquer forma funcional para a tecnologia subjacente e /ou função custo. Por isso, tornaram-se bastante populares na literatura. Silva et al (2016) apresenta uma visão mais detalhada desses métodos e Cordeiro (2020) faz uma revisão da literatura aplicada à área de educação.

A maioria dos trabalhos empíricos que avaliam eficiência na área de educação por meio de fronteira não paramétrica utilizam o DEA, sem se preocupar como a convexidade imposta pelo método ao conjunto de produção afeta os resultados obtidos. Verificar a robustez dos resultados, utilizando diversos modelos de análise, é parte integral da metodologia científica porque técnicas diferentes podem gerar conclusões diferentes e, conseqüentemente, mecanismos diferentes de políticas públicas.



Um aspecto relevante em relação aos estimadores não paramétricos diz respeito ao problema da existência de poucos graus de liberdade, definidos como a diferença entre o número de observações e de variáveis utilizadas. Dada a natureza municipal desta pesquisa, o número de observações não será um problema.

A eficiência relativa das unidades de determinado setor pode ser avaliada orientada ao insumo ou orientada ao produto. A escolha da orientação dependerá da finalidade do estudo, ou seja, se o objetivo é avaliar o potencial de redução de insumos mantendo o nível de produtos ou avaliar a possibilidade de aumentar a produção mantendo o nível de insumos. Com o objetivo de avaliar o potencial de melhoria nos níveis de proficiência educacional existente, essa pesquisa considera orientação pelo produto.

Com relação aos retornos de escala, temos que a construção de salas de aulas ou bibliotecas (custos fixos) podem gerar retornos crescentes de escala, enquanto um elevado número de estudantes pode implicar em retornos decrescentes de escala pela dificuldade de os professores transmitirem o conhecimento esperado. A literatura mostra que é usual estudos sobre eficiência do sistema educacional com retornos variáveis de escala (VRS).

Com relação à tecnologia de produção, esses métodos supõem que a indústria avaliada deve compreender unidades tomadoras de decisão (DMU) que possuem a mesma utilização de insumos e produtos, variando somente em intensidade, onde o produto é homogêneo. Em outras palavras, as unidades exercem as mesmas tarefas, com os mesmos objetivos, operando nas mesmas condições e com autonomia para tomar decisões. A autonomia da tomada de decisão foi o motivo pelo qual este artigo foca somente nas redes municipais de ensino fundamental, ou seja, mesmo que os estados forneçam ensino fundamental, não foram considerados na amostra.

#### 4.1 Método DEA – VRS

A abordagem DEA supõe que o conjunto de produção é convexo e propõe construir uma fronteira não paramétrica linearmente convexa sobre os dados. O estimador para o conjunto de produção proposto por BCR é:

$$\hat{\psi}_{DEA}(\chi) = \left\{ (x, y) \in R_+^{p+q} : y \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i, x \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\} \quad (1)$$

$\forall i = 1, \dots, n$

Onde  $\hat{\psi}_{DEA}$  representa a estimativa para o conjunto de produção,  $y$  representa o vetor de produtos e  $x$  o vetor de insumos.

O estimador DEA orientado pelo produto corresponde à:

$$\hat{\theta}_{DEA}(x, y) = \inf \{ \theta : (x, \theta^{-1}y) \in \hat{\psi}_{DEA}(\chi) \} \quad (2)$$

Enquanto o nível eficiente de produto é:

$$y^{\hat{\theta}}(x) = \hat{\theta}_{DEA}^{-1}(x, y)y \quad (3)$$

Para estimar a eficiência de uma determinada unidade que opera no nível  $(x, y)$  temos que resolver o seguinte problema de programação linear:

$$\theta(x, y) = \left[ \max_{\phi, \lambda} \{ \phi : Y\lambda \geq \phi y, x \geq X\lambda, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda \geq 0 \} \right]^{-1}, i = 1, \dots, n \quad (4)$$

Onde o  $\phi(x, y) \geq 1$  é um escalar que representa o índice de ineficiência,  $0 < \theta(x, y) \leq 1$  representa o índice de eficiência,  $Y_{(q \times n)}$  é a matriz produtos,  $X_{(p \times n)}$  é a matriz insumos,  $y_{(p \times 1)}$  e  $x_{(q \times 1)}$  vetores de produtos e insumos da firma avaliada e  $\lambda_{(n \times 1)}$  é o vetor de constantes. Esse problema deve ser resolvido  $n$  vezes, ou seja, para cada unidade analisada.

Intuitivamente, o problema DEA indica que a unidade que utiliza o vetor de insumos  $x$  pode expandir radialmente o vetor de produtos  $y$ , o quanto for possível, mantendo-se dentro do conjunto de produção. O limite superior da expansão é a curva de isoproduto  $P(x)$  que representa a fronteira  $y^\theta = y\theta^{-1}$ . A expansão radial do vetor de produtos  $y$  produz uma projeção sobre a fronteira, o ponto projetado é uma combinação linear convexa dos dados observados.

Como ilustração desse estimador, considere uma tecnologia de produção com um insumo e um produto, conforme apresentado na Figura 3. Observe que as firmas 1 e 3, consideradas eficientes, servem de referência para as firmas 2 e 5 e as firmas 3 e 4, que também definem a fronteira, servem de referência para a firma 6. Nesse sentido, o índice de eficiência para a firma 2 será  $\theta_2 = y_2 / (0,5 \times y_1 + 0,5 \times y_3) = 100 / (0,5 \times 75 + 0,5 \times 300) = 0,5333$ .

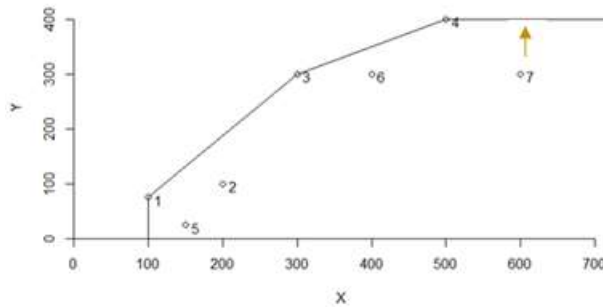


Figura 3: Fronteira DEA

No caso da firma 7, seu índice de eficiência será  $\theta_7 = y_7 / y_4 = 300 / 400 = 0,75$  visto que sua referência é a firma 4. Vale destacar que o deslocamento da firma 7 para a fronteira, conforme Figura 3, ainda a deixará com folga de utilização de insumos. Ela ainda poderia reduzir o nível de insumos de 600 para 500. Isso acontece porque a fronteira é linear por partes. Esse aspecto, conhecido como folga, não aparece diretamente na estimativa de eficiência, devendo ser calculada separadamente.

## 4.2 Método FDH

O modelo conhecido como FDH, diferente do modelo DEA, não impõe restrição de convexidade ao conjunto de produção. A partir de uma amostra  $\chi(n)$ , Deprins, Simar e Tulkens (1984) propuseram o seguinte estimador para o conjunto de produção  $\psi$ :

$$\hat{\psi}_{FDH}(\chi) = \{(x, y) \in R_+^{p+q} : y \leq y_i, x \leq x_i, (x_i, y_i) \in \chi(n)\} \quad (5)$$

Com base nesse estimador é possível obter fronteiras com retornos crescentes e decrescentes de escala em qualquer região do conjunto de produção. A estimativa de eficiência é obtida em relação à fronteira do conjunto  $\hat{\psi}_{FDH}(\chi)$ , permitindo encontrar o máximo produto entre todas as DMU que utilizam insumos menores ou iguais aos da

DMU em avaliação. Assim, o estimador FDH de eficiência orientado pelo produto corresponde à:

$$\hat{\theta}_{FDH}(\chi) = \inf\{\theta: (x, \theta^{-1}y) \in \hat{\psi}_{FDH}(\chi)\} \quad (6)$$

Com base no estimador  $\hat{\theta}_{FDH}(\chi)$ , é possível obter-se o nível eficiente de produto:

$$\hat{y}(x) = \hat{\theta}_{FDH}^{-1}(x, y)y \quad (7)$$

Para estimar a eficiência de uma determinada DMU que opera no nível  $(x_0, y_0)$ , temos que resolver o seguinte algoritmo:

$$\hat{\theta}_{FDH}(\chi) = \left[ \max_{i|x_0} \min_{j=1, \dots, p} \left( \frac{y_i^j}{y_0^j} \right) \right]^{-1} \quad (8)$$

onde  $y_0^j$  é o  $j$ -ésimo componente do vetor  $y_0$  e  $0 < \hat{\theta}_{FDH}(\chi) \leq 1$ .

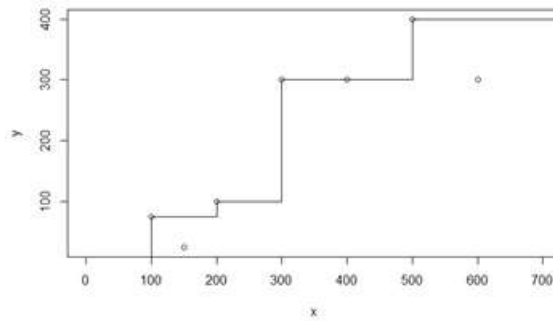


Figura 4: Fronteira FDH

Para os mesmos dados da Figura 3, a fronteira obtida por meio do estimador FDH aparece na Figura 4. Conforme observado, os índices de eficiência obtidos pelo FDH são maiores ou iguais aos conseguidos por meio do DEA. Algumas unidades são classificadas como ineficientes pelo DEA em função da imposição de convexidade. Vale destacar, contudo, que se conjunto de produção não é convexo, o estimador DEA é inconsistente.

### 4.3 Estimador de Ordem $m$

Uma das características dos estimadores DEA e FDH é sua sensibilidade a valores extremos e *outliers*, dado que envolvem os dados amostrais. Cazals, Florens e Simar (2002) propuseram um método que não envolve todos os dados amostrais, caracterizando-o como robusto a *outliers* e valores extremos. Este estimador, baseado na fronteira do produto máximo esperado de ordem  $m$ , não impõe restrição de convexidade ao conjunto de produção e permite a presença de ruído (com valor esperado igual a zero) na medida do produto.

A nova fronteira define o produto máximo esperado entre  $m$  municípios escolhidos aleatoriamente da amostra de municípios utilizada, com insumos menores ou iguais a um determinado nível. Formalmente, o produto da fronteira de ordem  $m$  é obtido por

$$y_m^g = E(\max(y_1, \dots, y_m | X \leq x)) = \int_0^\infty 1 - [F(y|x)]^m dy \quad (9)$$

onde  $F(y/x) = F(y, x)/F_X(x) = \text{Prob}(Y > y | X < x)$  é a distribuição condicional de  $Y$  dado  $X \leq x$ .

A estimação de  $y_m^\vartheta$  é obtida substituindo-se  $F(y|x)$  por sua versão empírica.

$$y_m^\vartheta(x) = \int_0^\infty 1 - [\hat{F}(y/x)]^m dy \quad (10)$$

Como a fronteira de ordem  $m$  não envolve todos os dados, o produto da fronteira de ordem  $m$  é menor ou igual ao produto da fronteira original,  $y^\vartheta \geq y_m^\vartheta(x)$ . Consequentemente, o índice de eficiência, baseado na fronteira  $m$ , é maior do que o índice de eficiência com base na fronteira original ( $\theta_m \geq \theta$ ). Além disso,  $\theta_m$  não está limitado ao intervalo  $(0,1]$ . Por fim, quando  $m$  tende ao infinito ou o número de unidades utilizadas para avaliar a eficiência cresce, a fronteira de ordem  $m$  aproxima-se da verdadeira fronteira.

Um aspecto importante é como estimar  $\theta_m$ . Os autores utilizaram simulações de Monte-Carlos para obterem os estimadores de ordem  $m$ , em quatro passos:

1. para o nível  $x$ , retirar uma amostra aleatória de tamanho  $m$  com reposição das observações onde  $x_i \leq x$ ;
2. calcular  $\tilde{\theta}_m^b(x, y) = \left\{ \max_{i=1, \dots, m_0} \min_{j=1, \dots, p} \left( \frac{y_{i,b}^j}{y^j} \right) \right\}^{-1}$
3. repetir os passos 1 e 2 para  $b = 1, 2, \dots, B$ .
4. o estimador de ordem  $m$  é dado por  $\hat{\theta}(x, y) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B \tilde{\theta}_m^b(x, y)$ .

Cazlas, Florens e Simar (2002) demonstraram que o estimador de ordem  $m$ , mesmo viesado como qualquer outro estimador não paramétrico, converge para a fronteira  $m$  à taxa de  $n^{-1/2}$ ,  $\hat{\theta}_m - \theta_m = O_P(n^{-1/2})$ . Além disso, o estimador de ordem  $m$  converge para o estimador FDH quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $\hat{\theta}_m \rightarrow \hat{\theta}_{FDH}$ , conclusão intuitiva considerando que o FDH envolve todos os dados da amostra.

#### 4.4 DEA Corrigido

Os índices de eficiência obtidos por meio do DEA e do FDH são apenas estimativas de seus reais valores não observados, dado que a fronteira de produção não é observada. Por construção, o conjunto de produção estimado por meio do DEA e do FDH estão contidos no verdadeiro conjunto de produção, isto é,  $\hat{\psi}_{FDH} \subset \hat{\psi}_{DEA} \subset \psi$ , consequentemente,  $0 < \theta \leq \hat{\theta}_{DEA} \leq \hat{\theta}_{FDH} \leq 1$ . Logo, o índice de eficiência estimado é viesado para cima.

Park, Simar e Weiner (2000) demonstraram que a diferença,  $\Delta$ , entre o estimador FDH e o verdadeiro índice de eficiência possui distribuição assintótica Weibull. Os autores propuseram procedimento para obter o estimador FDH com correção do viés e para construção de intervalos de confiança. Silva et al (2016), ao analisar as propriedades desse estimador numa amostra de bancos brasileiros, verificou resultados pouco intuitivos.

A distribuição assintótica do estimador DEA foi derivada para o caso univariado,  $q = p = 1$ . Em ambientes onde as firmas operam com múltiplos produtos e insumos, Simar e Wilson (1998, 2000) propuseram o método *bootstrap*, introduzido por Efron (1979), para analisar a variação amostral dos estimadores e calcular intervalos de confiança.

Esse método é baseado na ideia de repetidamente simular o processo gerador dos dados por meio de amostragem e aplicar o estimador original a cada amostra simulada para que as estimativas resultantes reproduzam a distribuição amostral do estimador original.

No caso de análise de eficiência básica inicial que é condicional ao vetor de insumos, podemos considerar que determinada observação  $(x_i, y_i)$  foi gerada por variáveis aleatórias  $\theta_i \in (0,1]$ , tal que  $y_i = y^\theta \theta_i$ . O processo gerador dos dados é tal que a amostra  $\chi_n = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$  pode ser representada por:

$$(x_i, y_i) = (x_i, y^\theta, \theta_i) \quad (11)$$

A operacionalização do *bootstrap*, no caso do estimador DEA, pode ser feita através dos seguintes passos:

- i. aplicar o método da equação (4) aos dados originais para se obter as estimativas de eficiência  $\hat{\theta}_i, 1, \dots, N$ ;
- ii. selecionar, com reposição, uma amostra de tamanho  $n$  das estimativas  $\hat{\theta}_i, 1, \dots, N$  utilizando-se o método da reflexão descrito em Simar e Wilson (1998). Chamamos este novo conjunto de estimativas de  $\theta_i^*, 1, \dots, N$ ;
- iii. usar os novos indicadores e a amostra inicial, geramos novo conjunto de dados  $\chi_n^*(x_i, y_i^*)$ , onde  $y_i^* = \theta_i^* \hat{y}_i^\theta = \theta_i^* \frac{y_i}{\hat{\theta}_i}$  é o vetor de produtos no mundo simulado;
- iv. estimar os índices de eficiência no mundo simulado,  $\hat{\theta}_{i,b}^*$ , usando a amostra  $\chi_n^*(x_i, y_i^*)$  e o problema de programação linear da equação (4), onde  $i = b = 1, \dots, B$  é a b-ésima iteração do *bootstrap*;
- v. repetir  $B$  vezes os passos 2 a 4 para gerar um conjunto de  $B$  estimativas de eficiência  $\hat{\theta}_{i,b}^*$  para cada DMU.

A intuição é que no mundo *bootstrap*,  $\hat{\psi}$  é o verdadeiro conjunto de produção e o estimador de  $\hat{\psi}$  é  $\hat{\psi}^*$ , obtido aplicando o problema de programação linear à amostra  $\chi_n^*$ . De forma idêntica,  $\hat{\theta}^*$  é o estimador de  $\hat{\theta}$ , da mesma forma que no mundo real  $\hat{\theta}$  é de  $\theta$ .

Se o procedimento *bootstrap* é consistente, a distribuição amostral de  $\hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}_i$  aproxima a distribuição de  $\hat{\theta}_i - \theta_i$  e pode ser utilizada para corrigir o viés e obter intervalos de confiança do estimador DEA, conforme Simar e Wilson (2000). Como o *bootstrap* é um procedimento assintótico, a qualidade da aproximação melhora com  $B \rightarrow \infty$  e  $n \rightarrow \infty^2$ .

#### 4.5 DEA Corrigido com Variável Ambiental

Simar e Wilson (2007) construíram um modelo com três tipos de variáveis,  $x_i, y_i$  e  $z_i$  para uma amostra de DMU,  $i = 1, 2, \dots, N$ , onde  $x_i$  é o vetor de insumos,  $y_i$  o vetor de produtos e  $z_i$  o vetor de variáveis ambientais.

As variáveis ambientais afetam a capacidade da DMU combinar eficientemente os insumos para gerar produtos. Assim, a ideia dos autores é que o processo gerador de dados indica que a eficiência  $\theta_i$  é linearmente dependente de  $z_i$ :

$$\theta_i = z_i \beta + \varepsilon_i \quad (12)$$

<sup>2</sup> O procedimento geralmente utilizado de impor uma probabilidade de  $1/n$  para replicação dos índices de eficiência gera estimativas inconsistentes. Pelo menos uma firma será avaliada como eficiente tanto pelo DEA quanto pelo FDH. Dessa forma,  $\hat{f}(\theta)$  atribui probabilidade positiva em  $\hat{\theta} = 1$ , enquanto  $f(\theta)$  é contínua por definição no intervalo  $(0,1]$ .

Onde  $\beta$  é o vetor de coeficientes que captura a influência de  $z_i$  sobre  $\theta_i$ , enquanto  $\varepsilon_i$  representa os distúrbios condicionais a  $z_i$ , independente e distribuído numa normal truncada, com parâmetros  $\mu = 0$  e  $\sigma$ , a distribuição é truncada à esquerda em  $1 - z_i\beta$ . O processo gerador de dados pode ser descrito como a amostragem de uma distribuição conjunta  $f(x, y, z)$ , definida como  $f(x, y|\theta, z) \cdot f(\theta|z) \cdot f(z)$ , com análise empírica voltada para  $f(\theta|z)$ . A eficiência total,  $\theta_i = 1$ , é admitida, mas a probabilidade de sua ocorrência é igual a zero. Assim, a DMU escolhe, condicional a  $\theta_i$ , um conjunto de insumos e produtos  $(x_i, y_i)$  como  $(\frac{1}{\theta_i}y_i^*, x_i^*)$ , onde  $(y_i^*, x_i^*)$  representa algum ponto na fronteira de possibilidades de produção.

A operacionalização do método DEA corrigido por variável ambiental (DEAC Env) pode ser feita através dos seguintes passos:

- i. aplicar o método da equação (4) aos dados originais para se obter as estimativas de eficiência  $\hat{\theta}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ;
- ii. selecionar  $M$  DMU (com  $M < N$ ), onde  $\hat{\theta}_i > 1$  é válida, usar o método de máxima verossimilhança para obter os coeficientes estimados  $\hat{\beta}$  e a estimativa do parâmetro variância  $\hat{\sigma}$ , numa regressão truncada de  $\hat{\theta}_i$  sobre  $z_i$  (com truncamento à esquerda em 1);
- iii. repetir os passos iii.1 até iii.3 por  $B$  vezes, para obter um conjunto de  $B$  estimativas *bootstrap*  $(\hat{\beta}_b, \hat{\sigma}_b)$ , com  $b = 1, \dots, B$ .
  - iii.1 Para cada DMU,  $i = 1, \dots, M$ , temos um erro artificial  $\tilde{\varepsilon}_i$  de uma distribuição normal truncada  $N(0, \sigma)$ , à esquerda em  $1 - z_i\hat{\beta}$ .
  - iii.2 Calcule os escores de eficiência artificial  $\tilde{\theta}_i$  com  $z_i\hat{\beta} + \tilde{\varepsilon}_i$  para cada DMU,  $i = 1, \dots, M$ .
  - iii.3 Rodar a regressão truncada de  $\tilde{\theta}_i$  sobre  $z_i$  (com truncamento à esquerda em 1) para obter a máxima verossimilhança, estimativas *bootstrap*  $\hat{\beta}_b$  e  $\hat{\sigma}_b$ .
- iv. calcular os intervalos de confiança e os erros padrão para  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\sigma}$  da distribuição *bootstrap* de  $\hat{\beta}_b$  e  $\hat{\sigma}_b$ .

Como não existem erros aleatórios no método DEA, os índices de eficiência estão de alguma maneira correlacionados entre si, o que impede de estimar uma equação semelhante à (15). Logo, a superação desse problema ocorre com a aplicação do método *bootstrap*, ao observar o comportamento da fronteira com base nos dados iniciais e por meio de sua provável distribuição, é possível obter estimadores consistentes, intervalos de confiança e, ainda, aplicar os testes de hipóteses. Ao estimar a fronteira várias vezes pretende-se eliminar a correlação nos  $\theta_i$ , excluindo a parte aleatória do erro que tem o potencial de gerar ineficiência.

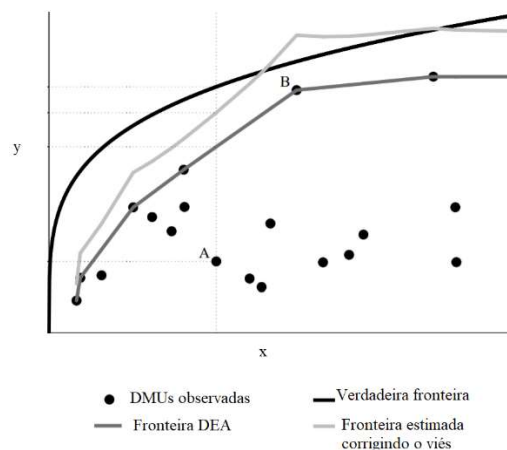


Figura 5: Fronteira DEAC Env.

É possível perceber que a fronteira estimada pelo DEA é envolvida pela fronteira estimada pelo DEA corrigido por variáveis ambientais (DEAC Env), o que possibilita uma maior aproximação entre a fronteira estimada e a verdadeira fronteira da população, conforme exemplificado na Figura 5.

## 5. Análise dos Dados e Características da Amostra

A amostra inicial considera todos os 5.570 municípios brasileiros, mas em função da ausência de informações e da presença de *outliers* foram excluídos 276 dos 5.570 municípios brasileiros, levando à amostra final de 5.295 municípios. Nesse caso, foram considerados *outliers* e excluídos da amostra os municípios com gasto por aluno inferior a R\$ 2.926,56 por ano (valor mínimo do Fundeb no ano 2017).

Apesar da dificuldade em se definir um produto na área de educação, os testes de desempenho capturam o objetivo principal de qualquer sistema educacional, que é o desenvolvimento cognitivo dos alunos, como destacado pela UNESCO. Além disso, a evidência empírica mundial tem utilizado diversos tipos de testes para avaliar a qualidade da educação, dada a importância de avaliar a qualidade obtida e não a quantidade oferecida, esta última poderia ser obtida por exemplo pelo número de matrículas.

Dessa forma, serão utilizados como produtos os escores de proficiência em língua portuguesa e em matemática. Esses escores foram obtidos a partir da extração dos microdados do SAEB de 2017<sup>3</sup>. O produto é a média dos escores de cada município.

Os gastos, utilizados como insumo, foram obtidos a partir dos valores de despesas liquidadas extraídas dos Demonstrativos de Contas Anuais do Finbra (Finanças do Brasil) do Sistema de Informações Contábeis e Fiscais do Setor Público Brasileiro (Siconfi), para as subfunções Educação Básica, Educação Infantil e Ensino Fundamental de todos os municípios brasileiros, no ano de 2017. A evolução dos gastos está descrita na Figura 6.

<sup>3</sup> Tabela "TS\_ALUNO\_9EF.csv" e filtrando "ID\_MUNICIPIO", "PROFICIENCIA\_LP" e "PROFICIENCIA\_MT".

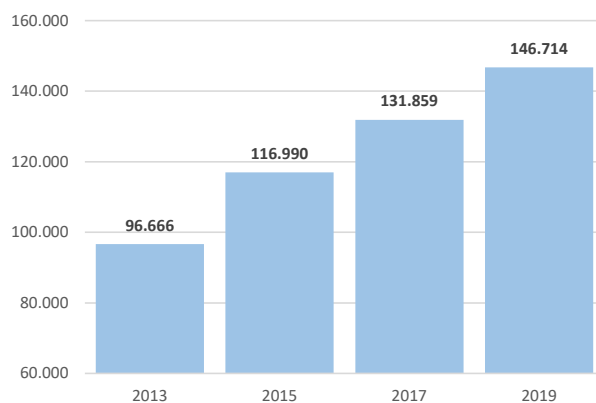


Figura 6 – Gastos com Educação (R\$ milhões)

Para o gasto por aluno, os valores do Finbra foram divididos pelo número de alunos matriculados no ensino fundamental. Para tanto, foram utilizados os microdados do Censo Escolar da Educação Básica de 2017 constantes na tabela MATRICULA. A evolução da quantidade de alunos no ensino fundamental da rede municipal pode ser observada na Figura 7<sup>4</sup>.

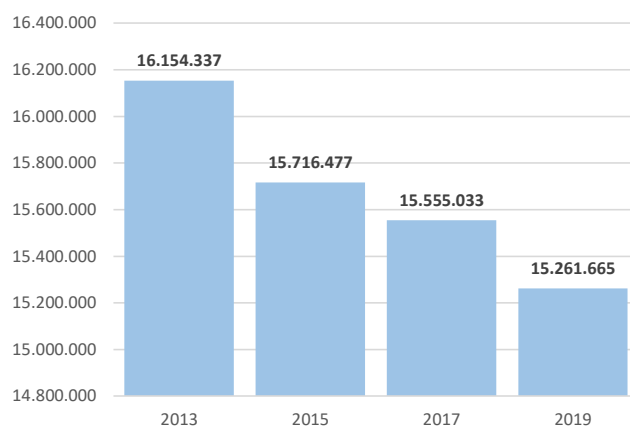


Figura 7 – Quantidade de alunos do ensino fundamental na rede municipal

A variável ambiental escolhida é o Indicador de Nível Socioeconômico das Escolas de Educação Básica (Inse). Sua inclusão considera as condições sociais e ambientais que possam afetar o desempenho dos alunos. O indicador foi obtido nos “Dados Abertos”, “Indicadores Educacionais”, no sítio do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), última informação disponível que é o ano de 2015.

O PIB per capita, alternativa ao Inse, foi extraído do sítio do IBGE, nas estatísticas econômicas, contas nacionais, onde o Produto Interno Bruto - PIB dos Municípios – referência 2010, ano de 2017, integrados às séries do Sistema de Contas Nacionais – SCN e do Sistema de Contas Regionais - SCR do Brasil, mas sua utilização como variável ambiental apresentou resultados semelhantes ao Inse, motivo pelo qual optou-se pelo Inse.

<sup>4</sup> Tabela MATRÍCULA, filtrando TP\_SITUACAO\_FUNCIONAMENTO=1 e IN\_REGULAR = 1, TP\_DEPENDENCIA = 3 (Municipal), “TP\_ETAPA\_ENSINO” = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21 e 41 (ensino fundamental) somatório de ID\_MATRICULA por CO\_MUNICIPIO (alunos em cada município).



A Tabela 3 apresenta as estatísticas descritivas das variáveis utilizadas nesse trabalho. É possível observar maior dispersão em relação à variável utilizada como insumo (gasto por aluno) do que em relação aos produtos. No caso dos produtos, a combinação da amplitude total com os valores dos limites inferiores pode ter impactos na estimativa de eficiência.

Tabela 3 – Estatística Descritiva da Amostra

	Mínimo	Média	Mediana	Máximo
<b>População de cada município</b>	1.034	38.495	12.073	12.252.023
<b>Gastos Municipais (R\$)</b>	649.047	24.756.450	9.051.872	9.077.356.991
<b>Gasto por aluno (R\$)</b>	2.928	10.339	8.768	125.749
<b>PIB per Capita (R\$)</b>	3.285	22.035	16.613	344.847
<b>Qtde alunos por município</b>	14	2.869	1.074	479.898
<b>Proficiência em Língua Portuguesa</b>	175,71	251,10	252,90	304,82
<b>Proficiência em Matemática</b>	183,68	251,62	252,26	329,05
<b>INSE</b>	28,43	47,69	48,11	59,77

Fonte: Elaborada pelos autores.

Apenas para exemplificar e considerando apenas um único produto (proficiência em matemática), a razão entre o menor valor e o maior da amostra é 0,5582. Nesse caso, o menor índice de eficiência estimado com orientação pelo produto seria 0,5582.

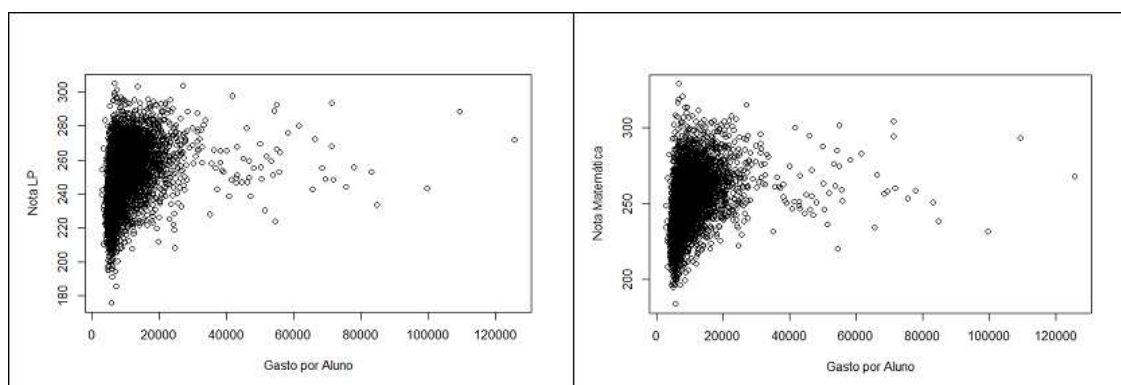


Figura 8 – Relação gasto por aluno e proficiência.

A Figura 8 apresenta a relação entre os gastos por aluno e os escores de proficiência em língua portuguesa e matemática do SAEB, para os 5.295 municípios. Os dados indicam potencial para melhoria de eficiência educacional e existência de folga de insumos.

## 6. Resultados da Avaliação de Eficiência Municipal dos Gastos em Educação

A maior parte dos trabalhos que avaliam eficiência educacional utilizam o método DEA. Conforme visto na seção 4, este estimador impõe restrição de convexidade ao conjunto de produção e é sensível a valores extremos. Assim, com o objetivo de avaliar a sensibilidade dos valores estimados em relação aos métodos propostos neste artigo, é importante analisar como as premissas de cada método podem afetar os resultados encontrados. Para fins de política, esse aspecto é fundamental porque gera maior segurança em relação aos resultados encontrados.

Tabela 4 – Quantidade de municípios eficientes e ineficientes

Faixas de eficiência	DEA-VRS	%	FDH	%
Eficiente - $F = 1$	3	0,06	10	0,19
$0,9 < F = 1,0$	473	8,93	546	10,31
$0,8 < F = 0,9$	3284	62,02	3424	64,66
$0,7 < F = 0,8$	1478	27,91	1277	24,12
$0,6 < F = 0,7$	56	1,06	38	0,72
$0,5 < F = 0,6$	1	0,02	0	0,00
nr. Observações	5.295		5.295	

Fonte: Elaborada pelos autores a partir das estimativas FDH e DEA.

A Tabela 4 apresenta o número de municípios por intervalo de escores de eficiência. Conforme esperado, a quantidade de municípios considerados eficientes pelo método FDH (10) é maior do que o número obtido pelo método DEA-VRS (3). Em termos percentuais, esses números representam apenas 0,19% e 0,06% dos municípios, respectivamente. Também é possível observar que a maior parte dos municípios, 62,02% no DEA e 64,66% no FDH, estão no intervalo de escore de eficiência entre 0,8 e 0,9.

Tabela 5 – Estatísticas de Eficiência

Estimador	Min.	P25	P50	Média	P75	Max.
DEA	0,5895	0,7923	0,8337	0,8298	0,8689	1
FDH	0,6078	0,8003	0,8390	0,8358	0,8727	1

Fonte: Elaborada pelos autores a partir das estimativas FDH e DEA.

Os dados da Tabela 4 indicam escores de eficiência relativamente elevados. Com efeito, os números da Tabela 5 mostram eficiência média e mediana em torno de 0,83. Assim, 50% dos municípios apresentaram índice de eficiência maior ou igual a 0,83. Esses valores considerados relativamente elevados são esperados visto que a eficiência foi mensurada com orientação pelo produto e a combinação da amplitude total com os valores dos limites inferiores dos produtos impactou os resultados, conforme descrito na seção 5.

Os estimadores DEA e FDH são utilizados para estimar a mesma fronteira. Assim, é fundamental avaliar como as premissas de cada método podem afetar os resultados obtidos. A Tabela 6 apresenta a relação dos 10 municípios classificados com eficiência igual a 1 pelo FDH. Observa-se que, entre esses 10, estão os 3 municípios classificados como eficientes pelo DEA. Além disso, outros 3 municípios (*rankdea*: 6, 8 e 10) estão entre os 10 mais eficientes pelo DEA e pelo FDH.

Tabela 6 – Escores de Eficiência e rank do DEA e FDH.

Mun.	DEA	Rank-DEA	FDH	Rank-FDH	Referência FDH
677	0,9851	8	1	1	68
934	0,9762	13	1	1	175
948	0,9726	18	1	1	27
991	0,9792	10	1	1	45
1003	1	1	1	1	3770
1434	0,9761	14	1	1	4
1524	0,9906	6	1	1	845
1598	0,9766	12	1	1	8
2768	1,0000	1	1	1	4
3783	1,0000	1	1	1	349

Fonte: Elaborada pelos autores a partir das estimativas FDH e DEA.

Outro aspecto de análise diz respeito ao número de vezes que um município eficiente serviu de referência para estimativa da eficiência de outros municípios. De acordo com a Tabela 6 é possível observar que o município 1.003 foi referência para outros 3.770 municípios. Dos três municípios classificados como eficientes pelo DEA, dois estão entre aqueles que mais serviram de referência pelo FDH.

Conforme explicitado anteriormente, o estimador DEA impõe restrição de convexidade ao conjunto de produção. Silva et al (2016) sugeriu a comparação entre pares das estimativas dos dois métodos, a Figura 9 mostra uma forma alternativa de avaliar o impacto da restrição de convexidade sobre os resultados e sobre a robustez dos resultados. Nesse caso, a existência de muitas observações no quadrante inferior direito implicaria que a restrição de convexidade afeta de forma considerável os resultados encontrados. No quadrante inferior esquerdo estão os municípios com baixos índices de eficiência pelos dois estimadores.

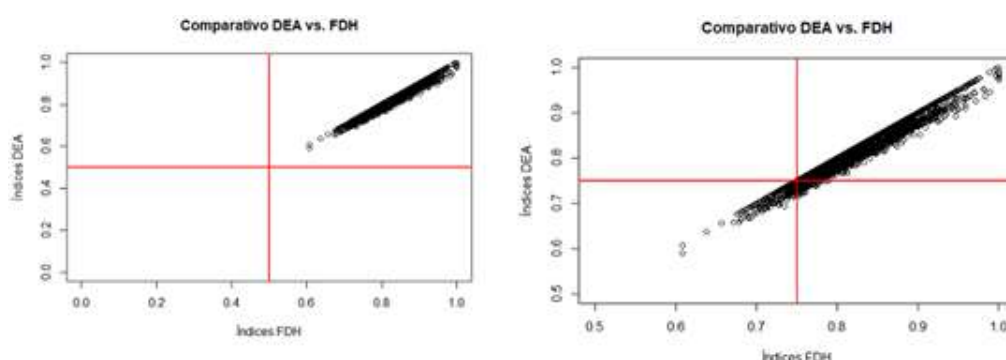


Figura 9 – Comparativo DEA vs. FDH

Dessa forma, com base nos resultados das Tabelas 4, 5 e 6 e na análise da Figura 8, os resultados encontrados parecem robustos independente do estimador utilizado. Os números de eficiência mostram score médio em torno de 0,83 que é indicativo de potencial para melhoria na qualidade de ensino dados os insumos existentes.

A análise via DEA permite calcular, além da estimativa de eficiência com orientação pelo produto, a existência de folga na utilização dos insumos, conforme explicado na seção 4.1 (Figura 3 – Fronteira DEA). Dos 5.295 municípios avaliados, 3.769 apresentaram folga de insumos, isto é, mesmo após atingir o produto da fronteira ainda será possível reduzir o nível de gastos por aluno, mantendo o produto eficiente.

Conforme explicado na seção 4.3, os estimadores DEA e FDH são sensíveis a valores extremos, por isso é importante avaliar a robustez dos resultados encontrados, o que será feito por meio do estimador de ordem  $m$  proposto por Cazals, Florens e Simar (2002).

A fronteira de ordem  $m$  define um novo conjunto de referência para comparar o produto de cada município com o produto máximo esperado de  $m$  municípios escolhidos aleatoriamente e que utilizem insumos menores ou iguais ao seu próprio insumo. Essa nova fronteira é considerada mais robusta a valores extremos e *outliers* e sem sofrer restrição de convexidade.

Um aspecto prático a ser considerado diz respeito à escolha do parâmetro  $m$ . Quando  $m$  cresce, o estimador de ordem  $m$  se aproxima do estimador FDH fazendo com que ele

perca as propriedades de robustez a valores extremos. Um baixo valor de  $m$  significa muitos municípios além da fronteira, implicando poucas observações consideradas para estimar a verdadeira eficiência.

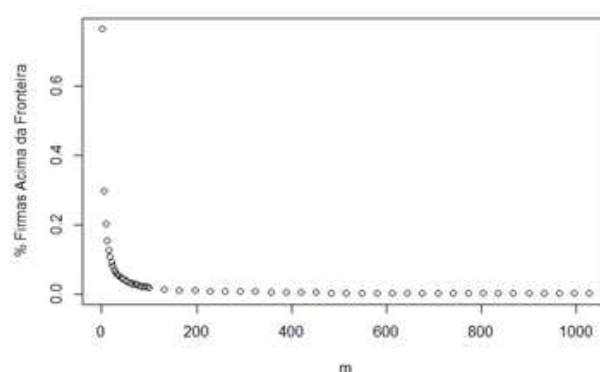


Figura 10 – Evolução dos municípios acima da fronteira de ordem  $m$

A Figura 10 indica que a porcentagem de municípios acima da fronteira cai ligeiramente para pequenos valores de  $m$  e começa a se estabilizar a partir de  $m = 200$ . Para  $m > 200$ , essa porcentagem varia pouco com  $m$ , significando que as fronteiras de ordem  $m > 200$  estão próximas umas das outras. Dessa forma, esse valor será utilizado como referência para estimativa da fronteira.

Tabela 7: Estimativas de Ordem  $m$ , DEA e FDH

Est.	$m=200$	%	FDH	%	DEA	%
Min.	0,63		0,61		0,59	
P25	0,83		0,80		0,79	
P50	0,88		0,84		0,83	
Média	0,87		0,84		0,83	
P75	0,91		0,87		0,87	
Max.	1,08		1		1	
$\theta = 1$	4	0,08%	10	0,19%	3	0,06%
$\theta > 1$	53	1,00%	-	-	-	-

Fonte: Elaborada pelos autores a partir das estimativas FDH e DEA.

A Tabela 7 mostra que apenas 1% total de observações são declaradas super eficientes ( $\theta > 1$ ) e 0,08% são consideradas eficientes quando  $m = 200$ . Adicionalmente, o valor máximo encontrado para eficiência de ordem  $m$  (1,08) foi apenas ligeiramente maior do que 1, os valores das estatísticas são bem próximos. Nesse sentido, os dados sinalizam que não há valores extremos na amostra com impactos consideráveis sobre as estimativas DEA e FDH.

Os índices de eficiência encontrados através dos estimadores DEA e FDH são apenas estimativas de seus reais valores. Além disso, esses estimadores, embora consistentes, são viesados. Informação adicional sobre a performance das unidades pode ser obtida ao considerar os intervalos de confiança para os verdadeiros indicadores de eficiência.

Para tanto, usando os modelos propostos por Simar e Wilson (1998, 2000), o viés do estimador DEA foi corrigido e possibilitou o cálculo dos intervalos de 95% de confiança para os índices de eficiência. A Tabela 8 apresenta as estatísticas para os estimadores do DEA corrigido (DEAC).

Tabela 8: Estimativas DEAC

Estimador	Min.	P25	P50	Média	P75	Max.
DEAL	0,5506	0,7720	0,8167	0,8111	0,8536	0,9864
DEAC	0,5668	0,7804	0,8239	0,8188	0,8597	0,9893
DEAH	0,5804	0,7914	0,8334	0,8292	0,8693	0,9994

\* DEAL e DEAH se referem aos limites inferior e superior do intervalo de 95% confiança.

Fonte: Elaborada pelos autores a partir das estimativas DEAC.

Em termos gerais, os resultados apresentados pelo DEAC são próximos aos encontrados por meio do DEA. A eficiência média ficou em torno de 0,82, próxima àquela observada para o DEA (0,83). As demais estatísticas descritivas também estão próximas. O coeficiente de correlação entre as duas estimativas é igual a 0,98.

Nas estimativas do DEA corrigido por variável ambiental, os resultados apresentados também ficaram próximos às estimativas do DEA e DEAC, com a eficiência média mantendo-se em torno de 0,82 que está próxima ao DEA (0,83) e ao DEAC (0,82). As demais estatísticas descritivas também não se distanciaram muito dos outros dois estimadores citados.

Tabela 9: Estimativas DEAC

Est.	Min.	P25	P50	Média	P75	Max.
DEAC	0,5668	0,7804	0,8239	0,8188	0,8597	0,9893
DEAC Env	0,5647	0,7806	0,8157	0,8251	0,8621	0,9930

Fonte: Elaborada pelos autores a partir das estimativas DEAC e DEAC Env.

Nesse sentido, com base nos números apresentados acima, os resultados dos estimadores DEA, FDH, Ordem m, DEAC e DEAC Env, apresentam indícios de que os índices de eficiência encontrados pelo DEA e FDH são robustos.

A Tabela 10 apresenta as estatísticas descritivas do DEA-VRC e do FDH para o Brasil e para as regiões brasileiras. Em termos gerais, as regiões Norte e Nordeste apresentaram os menores índices de eficiência média e a região Sul tem o maior índice de eficiência média. Vale destacar, entretanto, que em todas as regiões é possível encontrar municípios com elevados escores de eficiência. Os municípios que definem a fronteira, inclusive, pertencem a três regiões distintas.

Tabela 10: Estimativas DEA por Região

Estatística	Brasil	NO	NE	SE	SUL	CO
Min.	0,5895	0,6691	0,5895	0,7108	0,6825	0,6781
P25	0,7923	0,7655	0,7596	0,8196	0,8318	0,8210
P50	0,8337	0,8029	0,7937	0,8488	0,8595	0,8506
Média	0,8298	0,8013	0,7968	0,8478	0,8581	0,8477
P75	0,8689	0,8352	0,8319	0,8770	0,8888	0,8784
Max.	1	0,9541	1	1	1	1

Fonte: Elaborada pelos autores a partir das estimativas DEA.

Nas estimativas FDH da Tabela 11, os resultados são semelhantes. As regiões Norte e Nordeste apresentaram os menores índices médios e a região Sul apresentou a maior eficiência média. Novamente, é possível encontrar municípios com elevada eficiência em todas as regiões do país. Os 10 municípios declarados eficientes pelo FDH estão no Nordeste, Sudeste e Sul, em particular, os municípios 1003 e 845 que servem de

referência para outros 3.770 e 845 municípios, respectivamente, estão na região Nordeste, enquanto o município referência para outros 349 está na região sul, ver Tabela 6.

Tabela 11: Estimativas FDH por Região

Estatística	Brasil	NO	NE	SE	SUL	CO
Min.	0,6078	0,6930	0,6078	0,7108	0,6825	0,6781
P25	0,8003	0,7771	0,7721	0,8217	0,8322	0,8219
P50	0,8390	0,8131	0,8072	0,8502	0,8596	0,8511
Média	0,8358	0,8120	0,8105	0,8497	0,8583	0,8487
P75	0,8727	0,8460	0,8477	0,8786	0,8890	0,8795
Max.	1	0,9590	1	1	1	0,9619

Fonte: Elaborada pelos autores a partir das estimativas FDH.

Além das estimativas de eficiência, também é possível avaliar a folga de recursos, conforme definido na seção 4.1, cujos resultados indicam potencial para redução de gastos após atingir o nível eficiente de produto. Nesse caso, a região Nordeste apresentou menor folga média enquanto as regiões Centro-Oeste e Sul apresentaram maior folga média.

## 7. Conclusões

O presente artigo analisou a eficiência dos gastos da rede pública municipal com educação até o final do ensino fundamental, considerando uma amostra de 5.295 municípios em 2017. Para tanto, os modelos não paramétricos de programação linear adotados foram orientados pelo produto, para verificar se os municípios brasileiros, mantidos os gastos atuais, poderiam obter um nível melhor de proficiência, este considerado como conceito de qualidade da educação.

Os resultados indicam que, em termos percentuais, apenas 0,19% e 0,06% dos municípios, respectivamente mensurados pelo DEA e FDH, são considerados eficientes, mas também é possível observar que 62,02% dos municípios, pelo DEA, e 64,66% pelo FDH, estão no intervalo de escore de eficiência entre 0,8 e 0,9 que indicam escores relativamente elevados.

Outro resultado importante é que 50% dos municípios apresentaram índice de eficiência maior ou igual a 0,82 pelo DEA e 0,83 pelo FDH, indicativo de que, em média, os municípios poderiam aumentar o nível de qualidade da educação mensurado pelo SAEB em, aproximadamente, 20%.

Adicionalmente, percebe-se que dentre os 10 municípios classificados com eficiência igual a 1 pelo FDH, tem-se os 3 municípios classificados como eficientes pelo DEA. Destaca-se que o município 1.003 foi referência para outros 3.770 municípios e dos três municípios classificados como eficientes pelo DEA, dois estão entre aqueles que mais serviram de referência pelo FDH.

A adoção complementar do estimador  $m$  apresenta indícios de que os resultados são robustos, com os dados sinalizando que não há valores extremos na amostra com impactos consideráveis sobre as estimativas DEA e FDH.

Considerando que a correção do viés pelo método DEAC e DEAC Env, com a aplicação do segundo estágio, não apresentou resultados significativamente diferentes dos outros estimadores utilizados e, ainda, que a adoção do Inse e do PIB per capita como variáveis ambientais apresentaram resultados semelhantes, fica como sugestão de pesquisa futura a adoção de outras variáveis ambientais que possam trazer maior contribuição dos aspectos sociais e econômicos sobre o ensino fundamental no Brasil.

Em outro aspecto relevante, a análise regional indica que as regiões Norte e Nordeste apresentaram os menores índices médios e a região Sul apresentou a maior eficiência média. Entretanto, é possível encontrar municípios com elevada eficiência em todas as regiões do país, em particular, ressalta-se que o município 1003, que serve de referência para outros 3.770, e o município 1524, que serve de referência para outros 845 municípios, estão na região Nordeste, assim como oito dos dez municípios considerados eficientes pelo FDH estão na região Nordeste.

Finalizando, é importante ressaltar que os resultados indicam que, em média, os municípios brasileiros poderiam aumentar seu escore de proficiência em, aproximadamente, 20% mantido o nível de gastos, ao mesmo tempo que a folga de recursos indica um potencial de redução de gastos após atingir o nível eficiente de produto. Logo, os municípios brasileiros podem aumentar o nível de qualidade da educação ao mesmo tempo que podem reduzir o custo da educação. Em particular três municípios poderiam servir de referência para melhoria da eficiência dos gastos públicos orientada pela melhoria da qualidade da educação.

## 8. Referências Bibliográficas

1. ALTINOK, N.; Angrist, N. and Patrinos, H. A. (2018); Global data set on education quality (1965-2015), Policy Research working paper no. WPS 8314, Washington, D.C. : World Bank Group, <http://documents.worldbank.org/curated/en/706141516721172989/Global-data-set-on-education-quality-1965-2015>
2. BANKER, R. D., A. Charnes e Cooper, W. W. (1984). "Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis". *Management Science*, 30, pp. 1078-92.
3. Barro, Robert J. (1991). Economic Growth in a Cross Section of Countries, *The Quarterly Journal of Economics*, Volume 106, Issue 2, May 1991, Pages 407–443, <https://doi.org/10.2307/2937943>
4. BRUNS, B., Evans D. and Luque J. (2012) *Achieving World-class Education in Brazil: The Next Agenda*, Washington: World Bank.
5. CAZALS, C.; Florens J. P.; Simar, L. (2002). Nonparametric Frontier Estimation: a Robust Approach, *Journal of Econometrics*, v. 106, n. 1, p. 1-25.
6. CHARNES, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E. (1978), "Measuring the efficiency of decision-making units", *European Journal of Operations Research*, 2: 429-444.
7. CORDEIRO, P. A. B. (2020). *Análises de eficiência como subsídio para políticas educacionais: três ensaios empregando dados de escolas de Ensino Básico do Distrito Federal*. 2020. 198 f., il. Tese (Doutorado em Economia), Universidade de Brasília, Brasília.

8. **DEPRINS, D.; Simar, L.; Tulkens, H. (1984). Measuring Labor Inefficiency in Post Offices, in The Performance of Public Enterprises: Concepts and Measurements, ed. By M. Machand, P. Pestieau and H. Tulkens, Amsterdam, North-Holland, p. 243-267.**
9. FARREL, M. J., (1957). The Measurement of Productive Efficiency, Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General) Vol. 120, No. 3 (1957), pp. 253-290.
10. GRADSTEIN, M.; Justman, M. (2000). Human capital, social capital, and public schooling. European Economic Review, v.44, p. 879-890.
11. HANUSHEK, E. and Kimko, D. (2000) "Schooling, Labor Force Quality, and Economic Growth". American Economic Review, v. 90, n. 5, 1184-1208.
12. HANUSHEK, E.A., Woessmann, L. (2012). "Do Better School Lead to More Growth? Cognitive Skills, Economic Outcomes, and Causation". Journal of Economic Growth, 17(4), pp. 267-321.
13. INEP (2017a). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Microdados da Aneb e da Anresc 2017. [online]. Brasília: Inep, 2018. [citado 2018-10-31]. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/basica-levantamentos-acessar>>.
14. INEP (2017b). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Censo Escolar. Brasília, 2017b. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/web/guest/microdados>>. Acesso em: 02 ago. 2017.
15. INEP (2017c). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Nível Socioeconômico. Brasília, 2017e. Arquivo digital por correio eletrônico.
16. MANKIW, N. Gregory; Romer, D.; and Weil, D. N. (1992). A contribution to the Empirics of Economic Growth, The Quarterly Journal of Economics, May 1992.
17. MENEZES-FILHO, N. (2007). Os determinantes do desempenho escolar no brasil. Instituto Futuro Brasil, p.33.
18. OECD (2019), PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do, PISA, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>.
19. OLIVEIRA, G. R.; Lima, A. F. R.; Júnior S. B. F. e Rosa, T. M. (2017). Avaliação de eficiência das escolas públicas de ensino médio em Goiás: uma análise de dois estágios. Economia Aplicada 21.2, p. 163 (ver pp. 18, 26, 29-33, 51, 66, 67, 71, 84).
20. **PARK, B. U.; Simar, L.; Weiner, C. (2000). The FDH Estimator for Productivity Efficiency Scores, Econometric Theory, v. 16, n. 6, p. 855-877.**
21. PRITCHETT, L. (2001). "Where has all the education gone?". World Bank Economic Review, 15(3), pp. 367-391.
22. SILVA, T. L.; Martins-Filho, C.; Ribeiro, E. P. (2016). A comparison of nonparametric efficiency estimators: DEA, FDH, DEAC, FDHC, order-m and quantile. Economics Bulletin, v. 36, p. 118-131.
23. SILVA, J. M. e Almeida, J. C. L. (2012). Eficiência no Gasto Público com Educação: Uma Análise dos Municípios do Rio Grande do Norte. Planejamento e Políticas Públicas (PPP), n. 39, pp. 219-242.
24. SIMAR, L.; Wilson, P. W. (1998). Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to bootstrap in Nonparametric Frontier Models, Management Science, v. 44, n. 1, p. 49-61.
25. **SIMAR, L.; Wilson, P. W. (2000). Statistical Inference in Nonparametric Frontier Models: The State of the Art. Journal of Productivity Analysis, v. 13, n. 1, p. 49-78.**
26. SIMAR, L. and P. W. Wilson (2007). Estimation and inference in two-stage, semi-parametric models of production processes. Journal of Econometrics, vol. 136, issue 1, pp. 31-64.
27. UNESCO (2004): "Education for All, The Quality Imperative: EFA Global Monitoring Report", Paris, France.
28. World Bank (2018). World Development Report 2018: Learning to Realize Education's Promise, Washington.