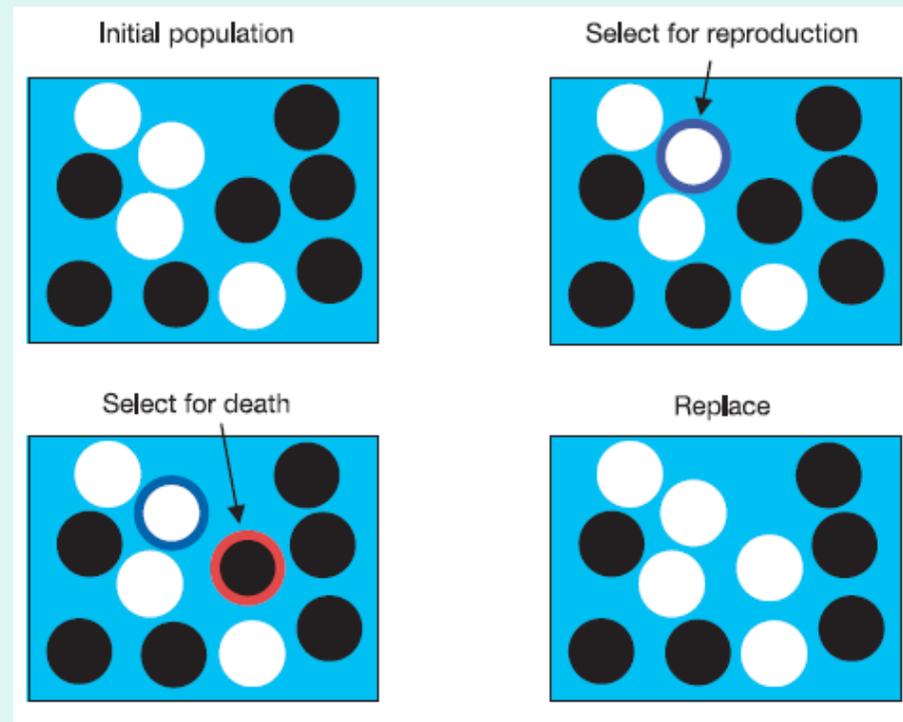


Dinâmica da Evolução em Redes Aleatórias

- Valmir Barbosa (Coppe-UFRJ)
- Sergio Souza (IF-UFRJ e IF-UFRGS)
- Raul Donangelo (IF-UFRJ e IF-UdelaR)

1. Introdução: probabilidade de Fixação ρ
2. Redes que incrementam ρ
3. Redes aleatórias que incrementam ρ
4. Aceleração dos cálculos
5. Conclusões

Modelo de Moran

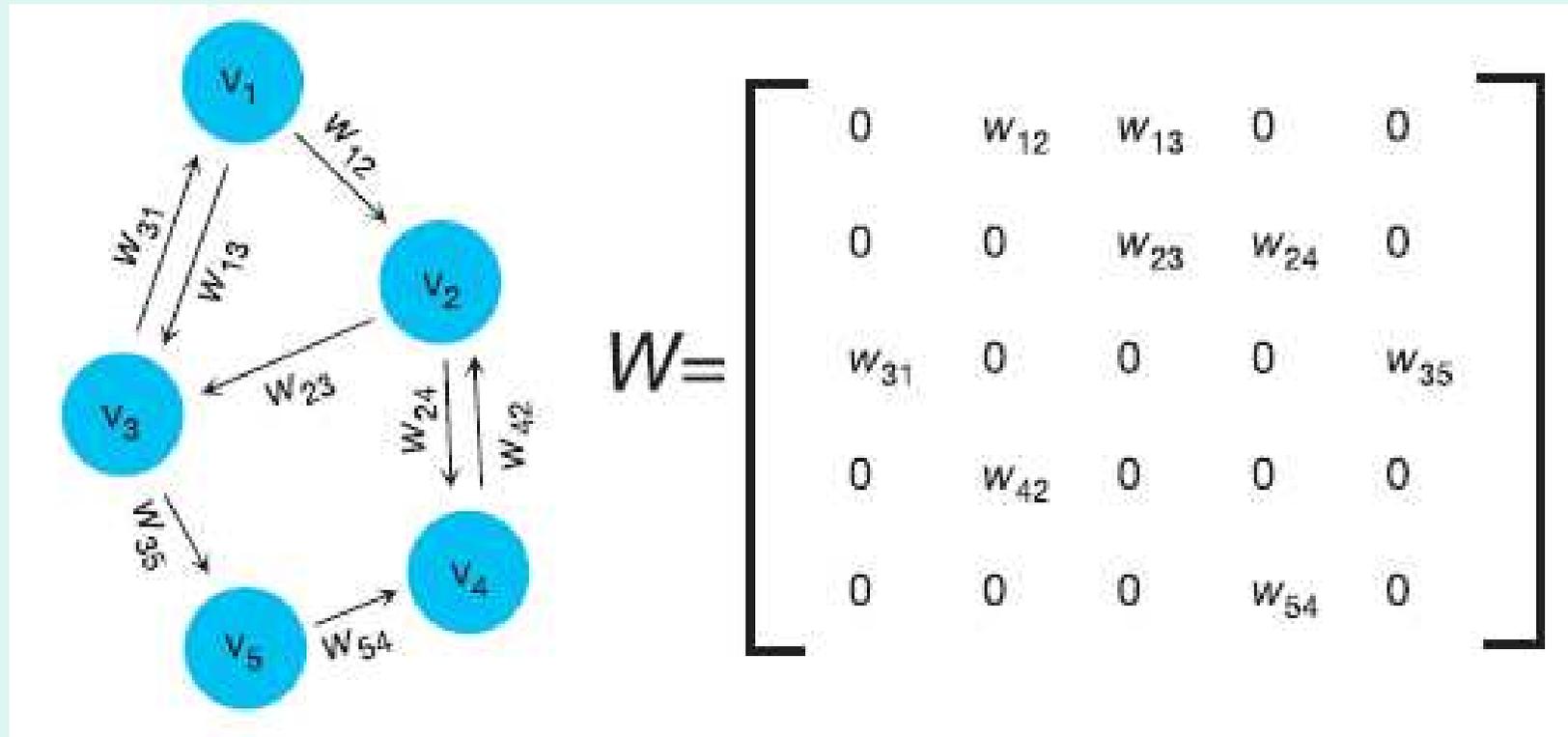


Probabilidade de Fixação

- N indivíduos nativos com um dado fitness
- Introducimos um mutante com outro fitness
- $r = (\text{fitness do mutante}) / (\text{fitness dos nativos})$
- Fixação: o mutante substitue a população toda
- Probabilidade de fixação (Moran):

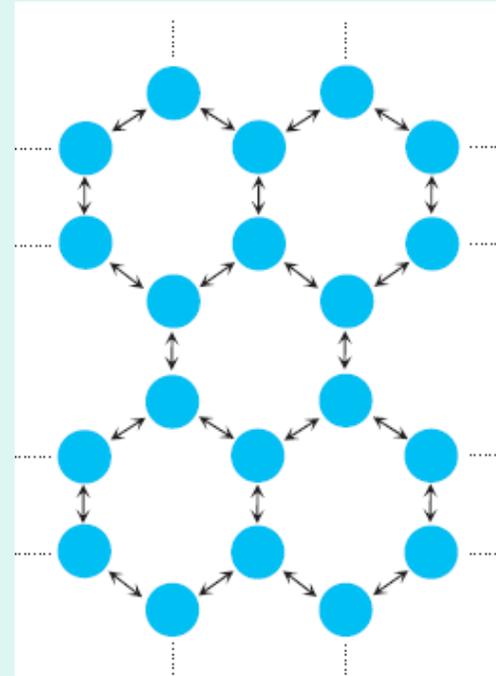
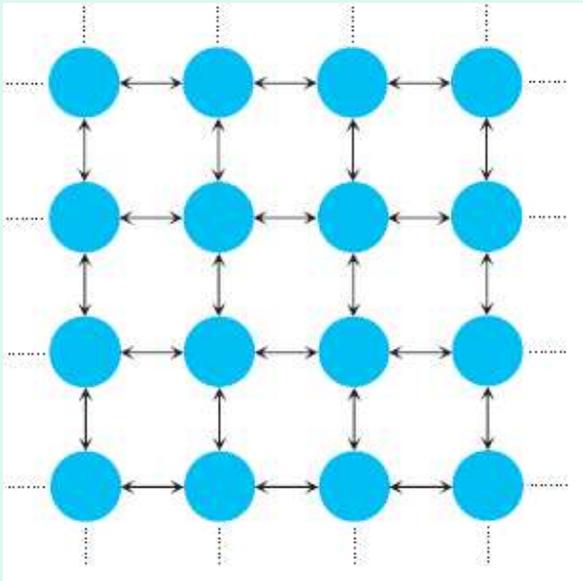
$$\rho_M = \frac{1 - 1/r}{1 - 1/r^N}$$

Evolução em Grafos

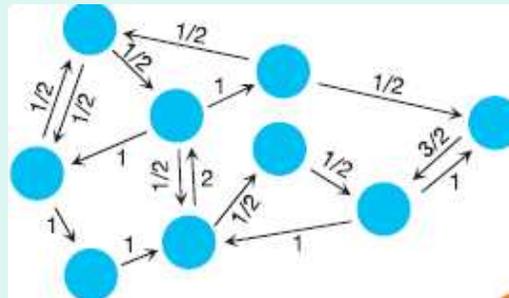
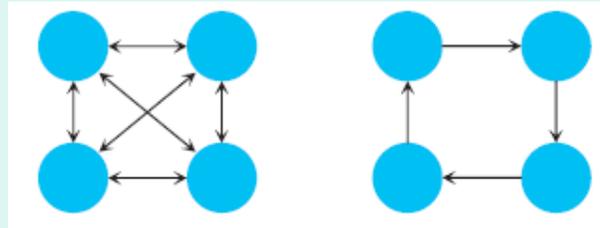


Temperatura do nodo i : $T_i = \sum_j w_{ji}$

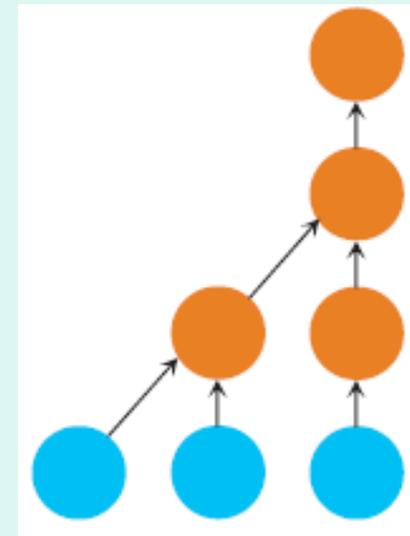
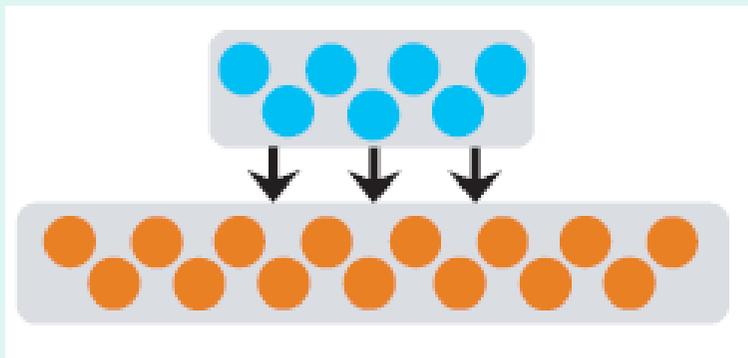
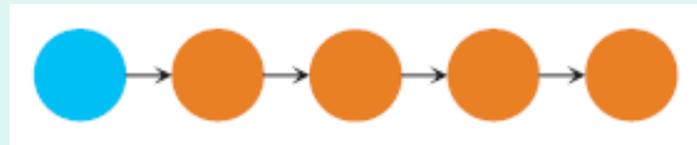
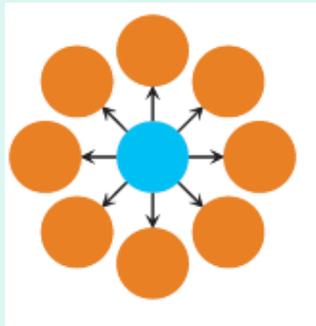
Redes isotermas: $\rho = \rho_M$



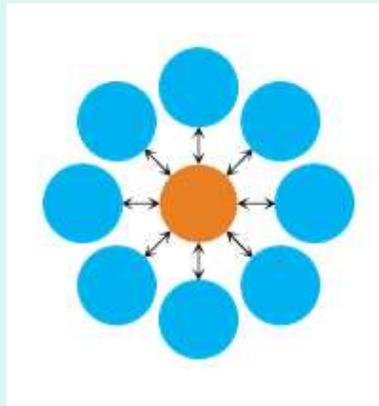
Mais redes isotérmicas



Redes que suprimem a seleção natural



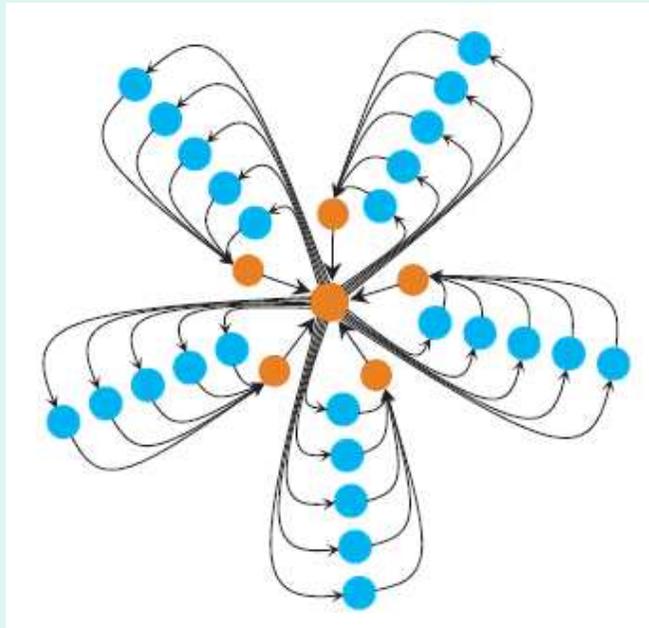
Redes que aumentam a probabilidade de Fixação



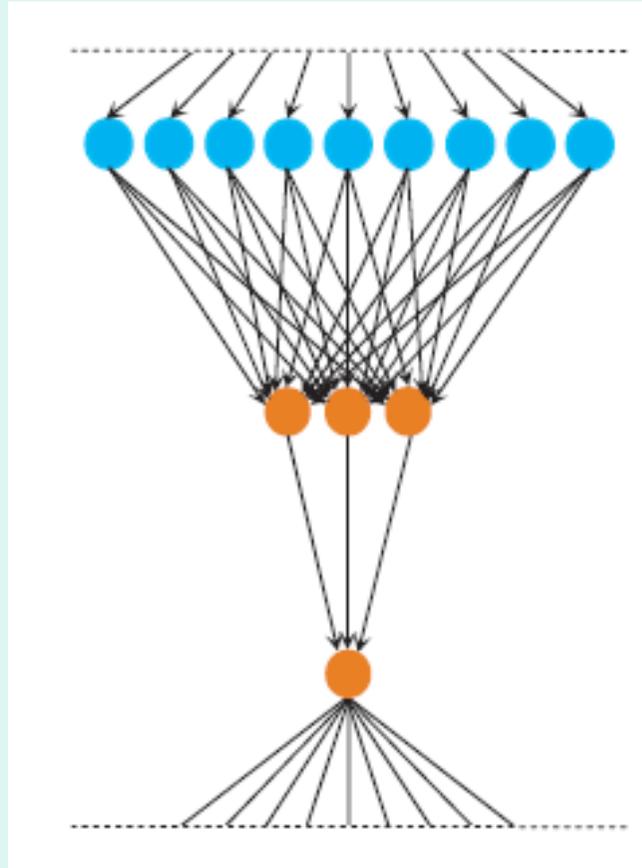
$$\rho_K = \frac{1 - 1/r^K}{1 - 1/r^{KN}}$$

Estrela: $K = 2$

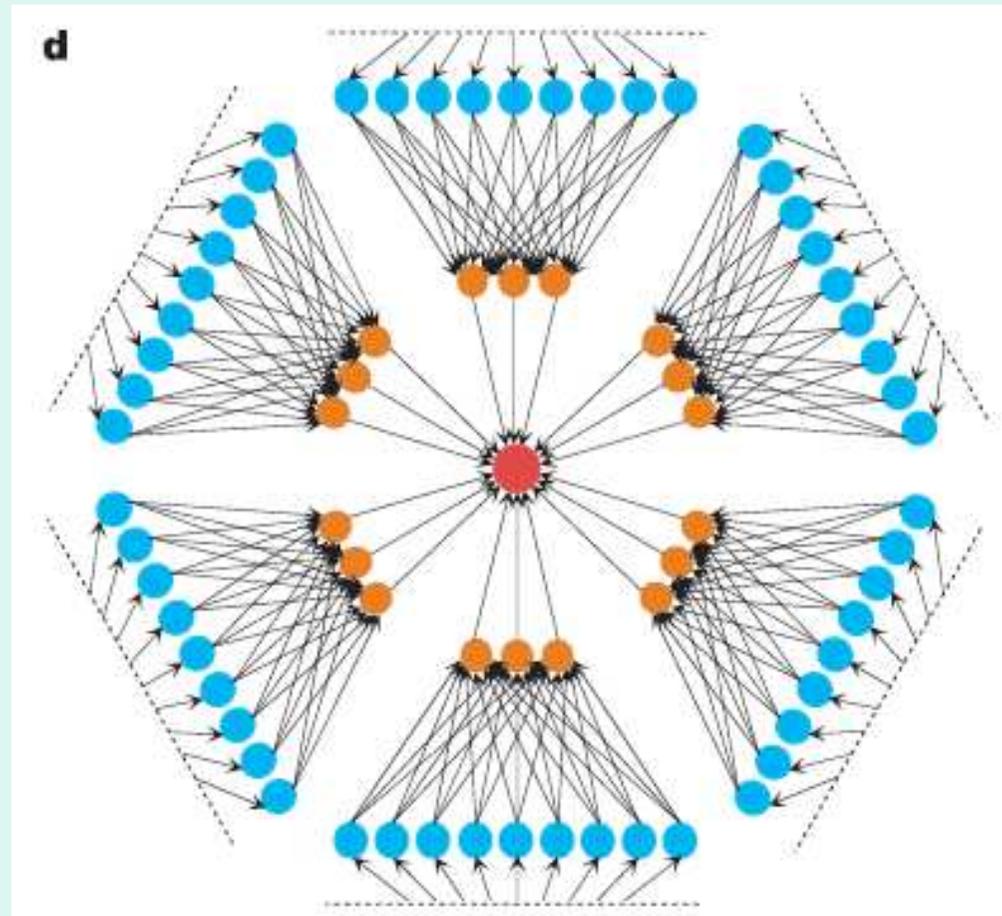
Super estrela $K = 3$



Funil: $K = 3$



Meta-Funil $K = 3$



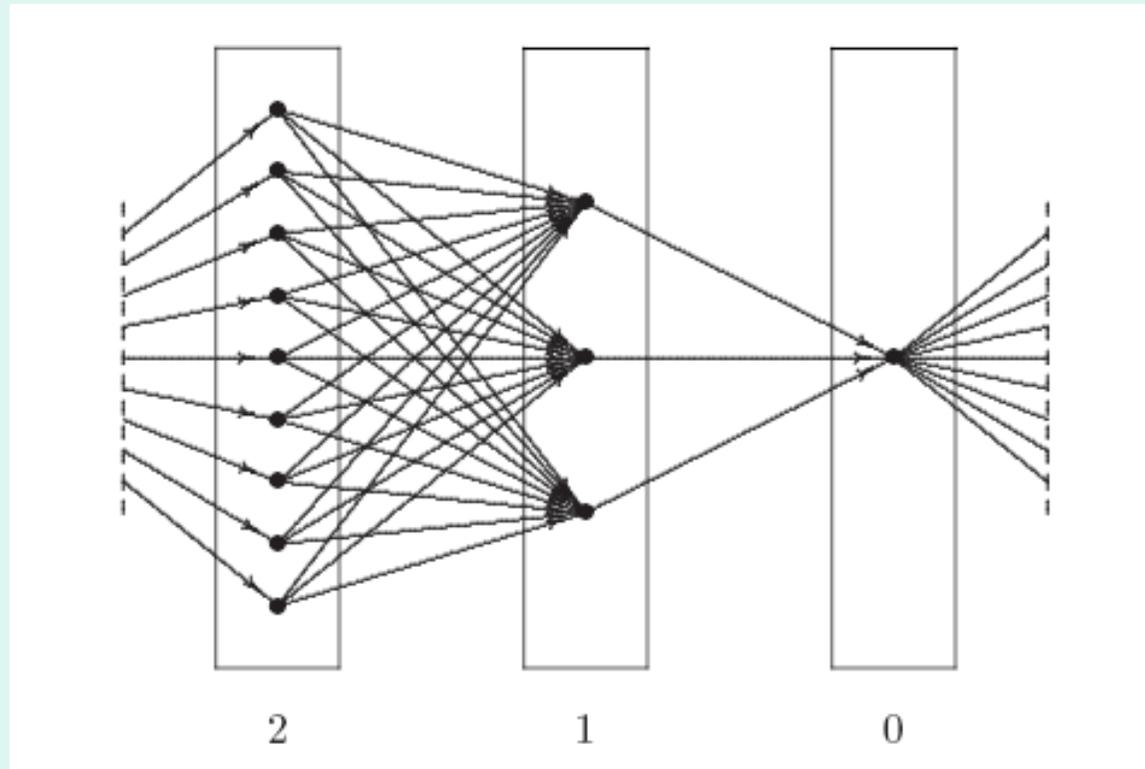
Redes aleatórias

- Todas as redes consideradas têm topologias muito regulares
- Não parece razoável encontrar na natureza redes desse tipo
- Podemos encontrar mecanismos que permitam o desenvolvimento de redes aleatórias que favoreçam a fixação?

Redes aleatórias

- Procuramos um mecanismo para o crescimento de uma rede a partir de uma estrutura inicial que permita chegar numa rede em que $\rho > \rho_M$
- Nos inspiramos no funil para desenhar uma rede direcional estruturada em camadas

Funil de $K=3$ camadas com $b=3$ (3^i nodos na camada i)



Construção da rede aleatória

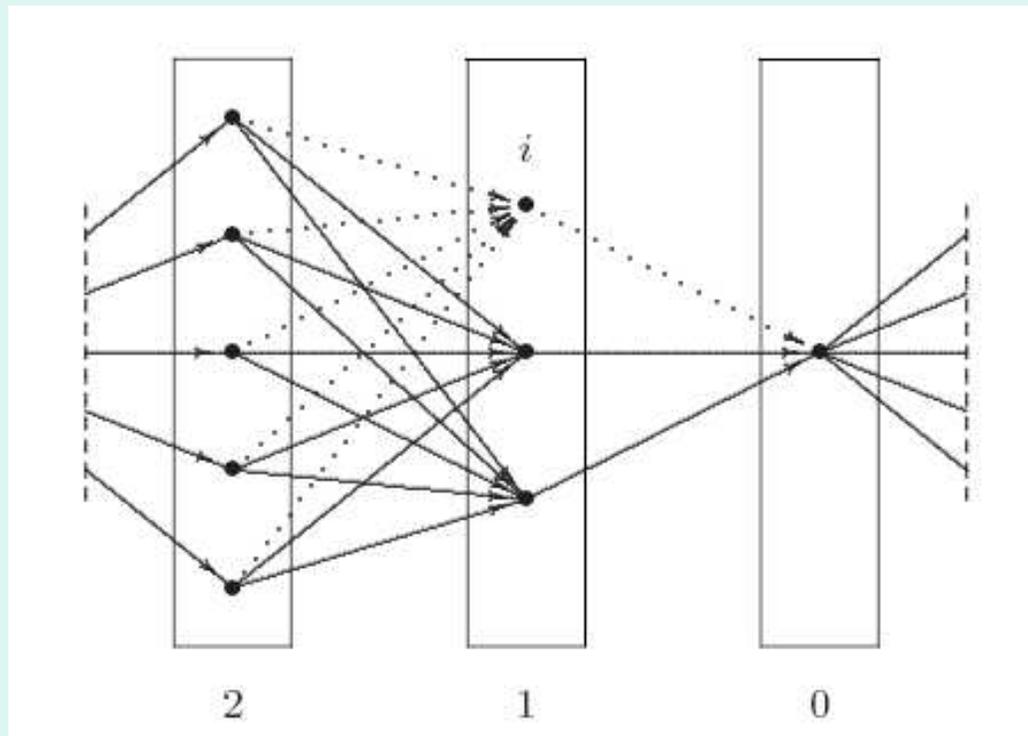
- Inicialmente ($t=0$):
- Consideramos K camadas, $k=0, \dots, K-1$, com um nodo por camada.
- O nodo na camada $K-1$ conecta com o nodo na camada $K-2$, ..., o nodo na camada 0 com o da camada $K-1$.
- Em cada $t=1, 2, 3, \dots$ agregamos um nodo na camada k , com probabilidade p_k

Escolha da probabilidade p_k

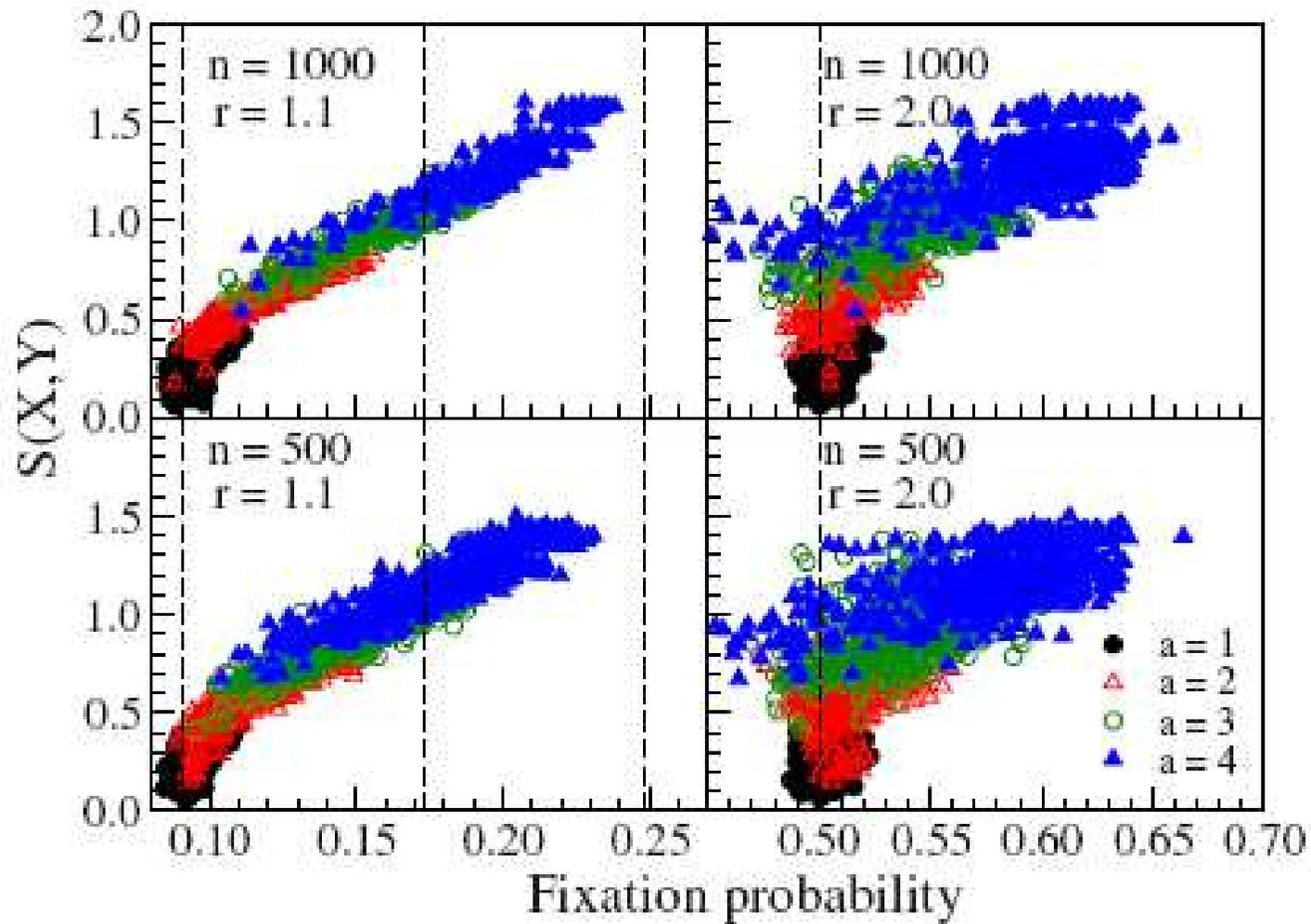
- Para cada camada k ,
- Consideramos as camadas $k+1, k+2, \dots$
- Procuramos a primeira dessas camadas, k^+ , tal que k^+-1 tenha um número de nodos \leq número de nodos de k^+
- Em particular, se o número de nodos da $k-1 \leq$ número de nodos da $k \Rightarrow k^+ = k$
- Se $d(k^+, k)$ é a distância da camada k^+ a camada k , definimos $p_k = [K - d(k^+, k)]^a$, $a \geq 1$

Construção da rede aleatória

- O mecanismo é o sugerido pela topologia do Funil
- Uma vez criado o nodo na camada k , todos os nodos da camada $k+1$ se conectam, e ele se conecta a todos da $k-1$



Resultados para $K=5$



Resultados para $K=3$

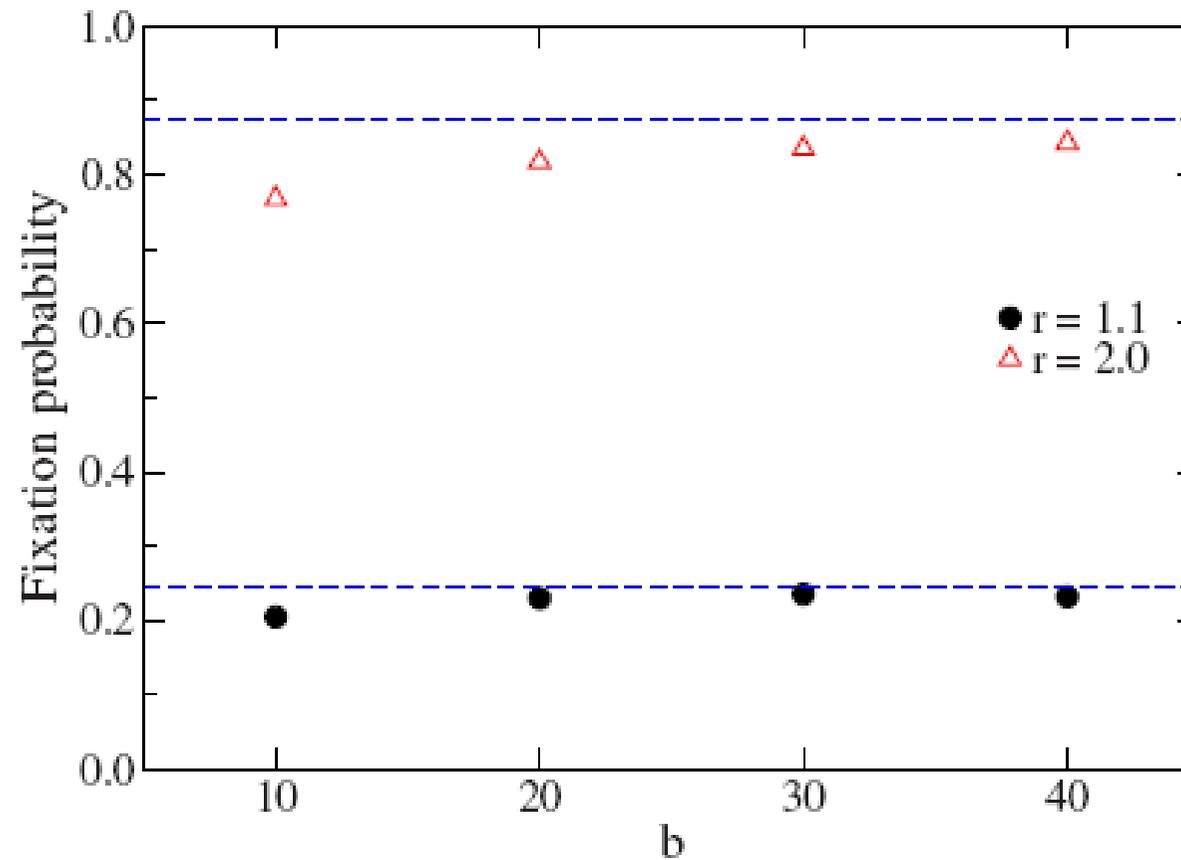
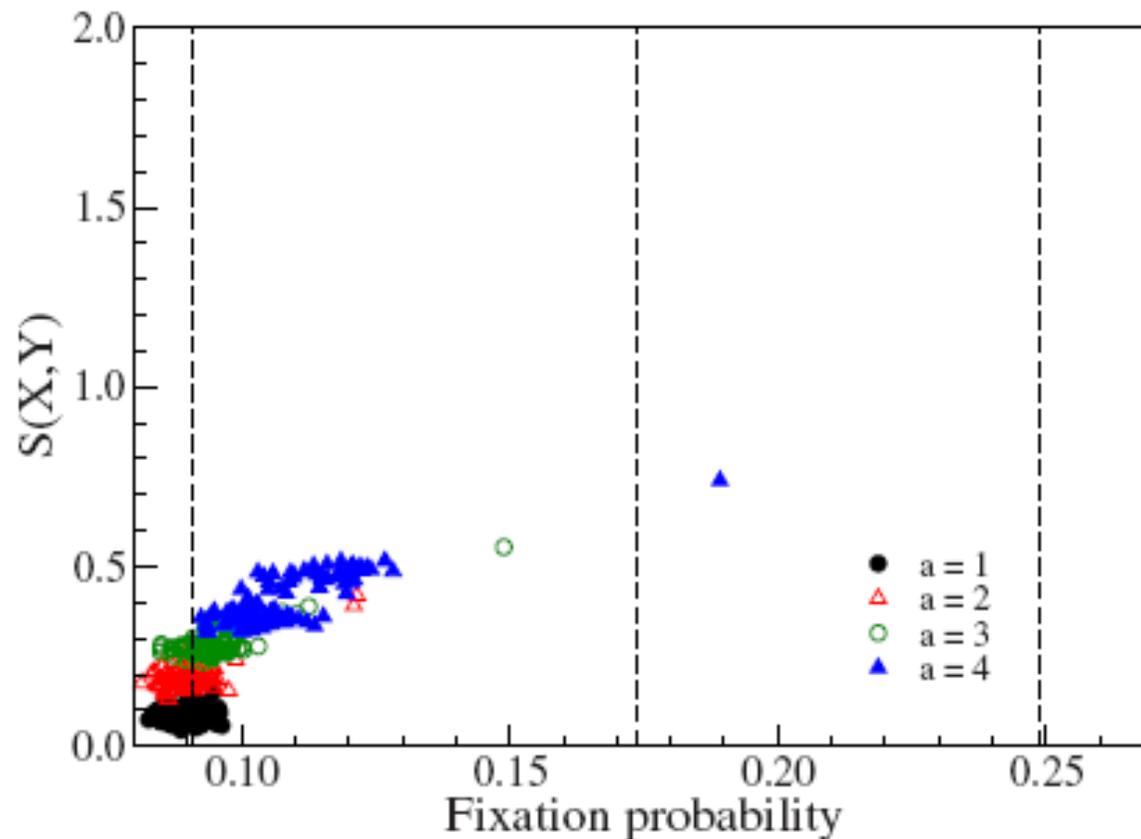


FIG. 4. (Color online) Simulation results for the 3-funnel. Dashed lines mark the values of ρ_3 .

Resultados para $K=10$

Limitações computacionais pelo grande número de redes possíveis (mais de 10^{33})



Tempos diferentes!

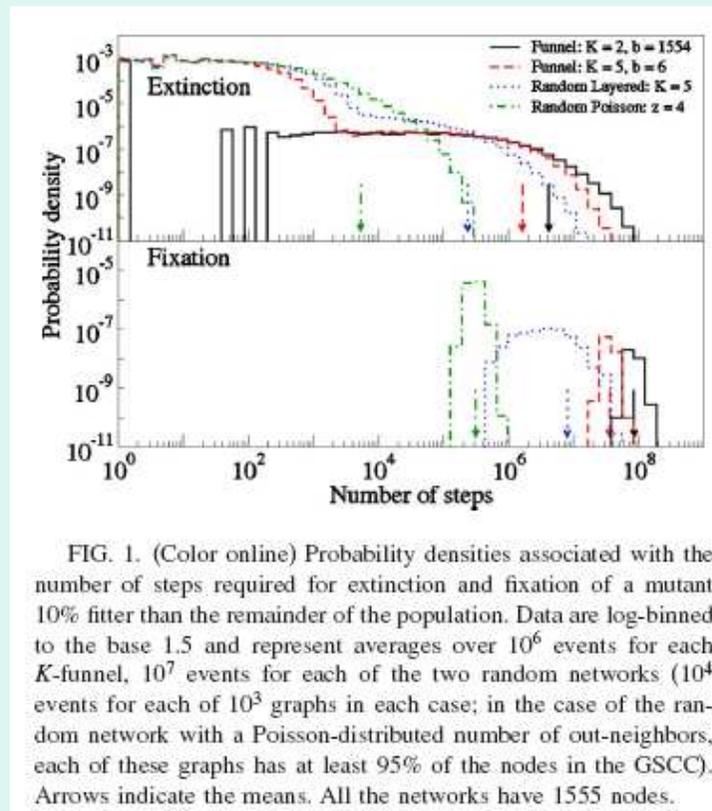


FIG. 1. (Color online) Probability densities associated with the number of steps required for extinction and fixation of a mutant 10% fitter than the remainder of the population. Data are log-binned to the base 1.5 and represent averages over 10^6 events for each K -funnel, 10^7 events for each of the two random networks (10^4 events for each of 10^3 graphs in each case; in the case of the random network with a Poisson-distributed number of out-neighbors, each of these graphs has at least 95% of the nodes in the GSCC). Arrows indicate the means. All the networks have 1555 nodes.

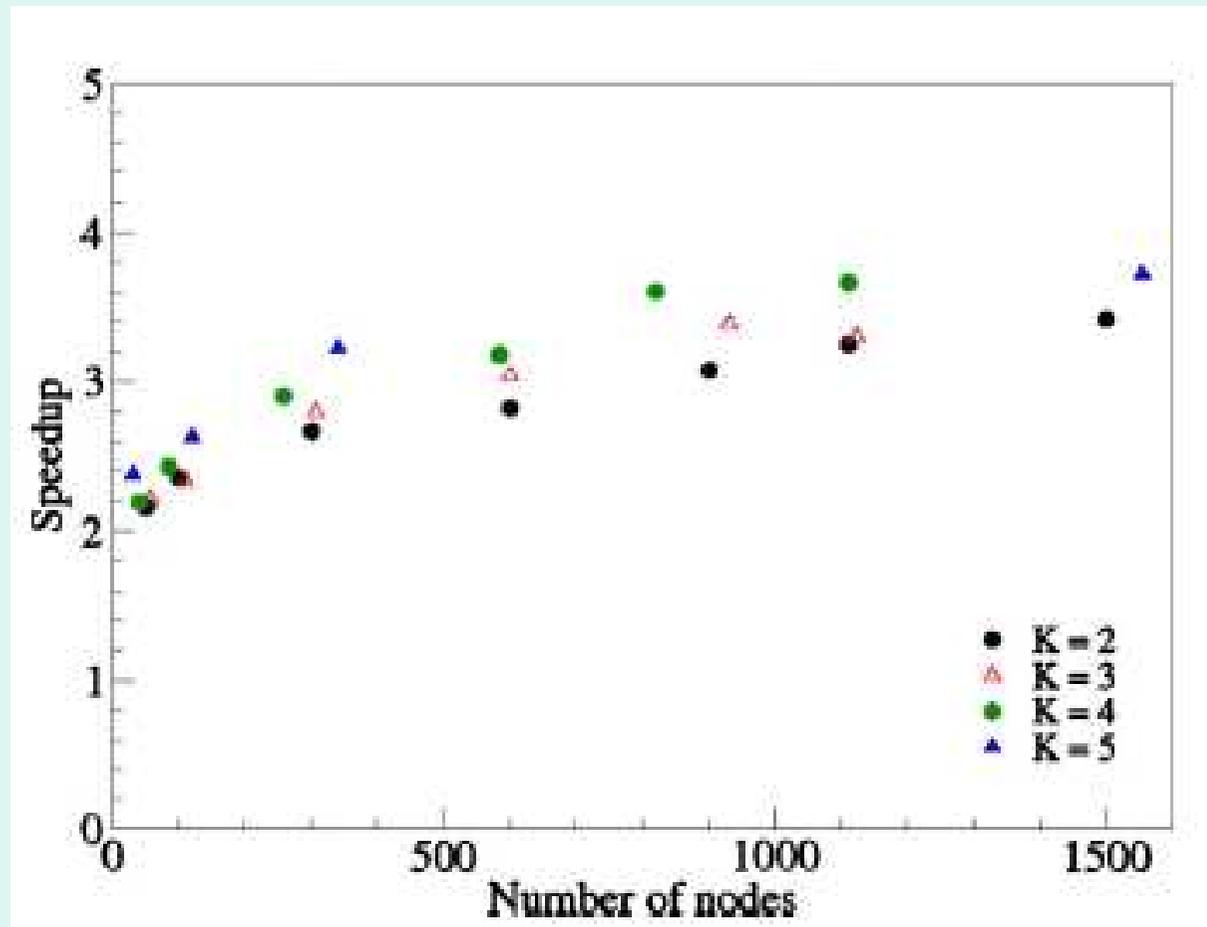
Aceleração das Simulações

- As simulações apresentadas são muito limitadas pelas dificuldades computacionais
- Conseguimos ir até 1000 nodos, mas não realizar simulações com redes muito maiores
- Desejamos poder determinar a probabilidade de fixação com uma precisão razoável
- Consideramos duas estratégias:

1. Eliminar passos desnecessários

- Podemos calcular a probabilidade de que, num dado passo, o número de mutantes aumente, diminua, ou fique igual
- Nos dois primeiros casos, fazemos a evolução, omitindo passos em que o número de mutantes fica igual
- No caso do K-funil, o ganho da eliminação de passos mais do que compensa fazer os cálculos das probabilidades

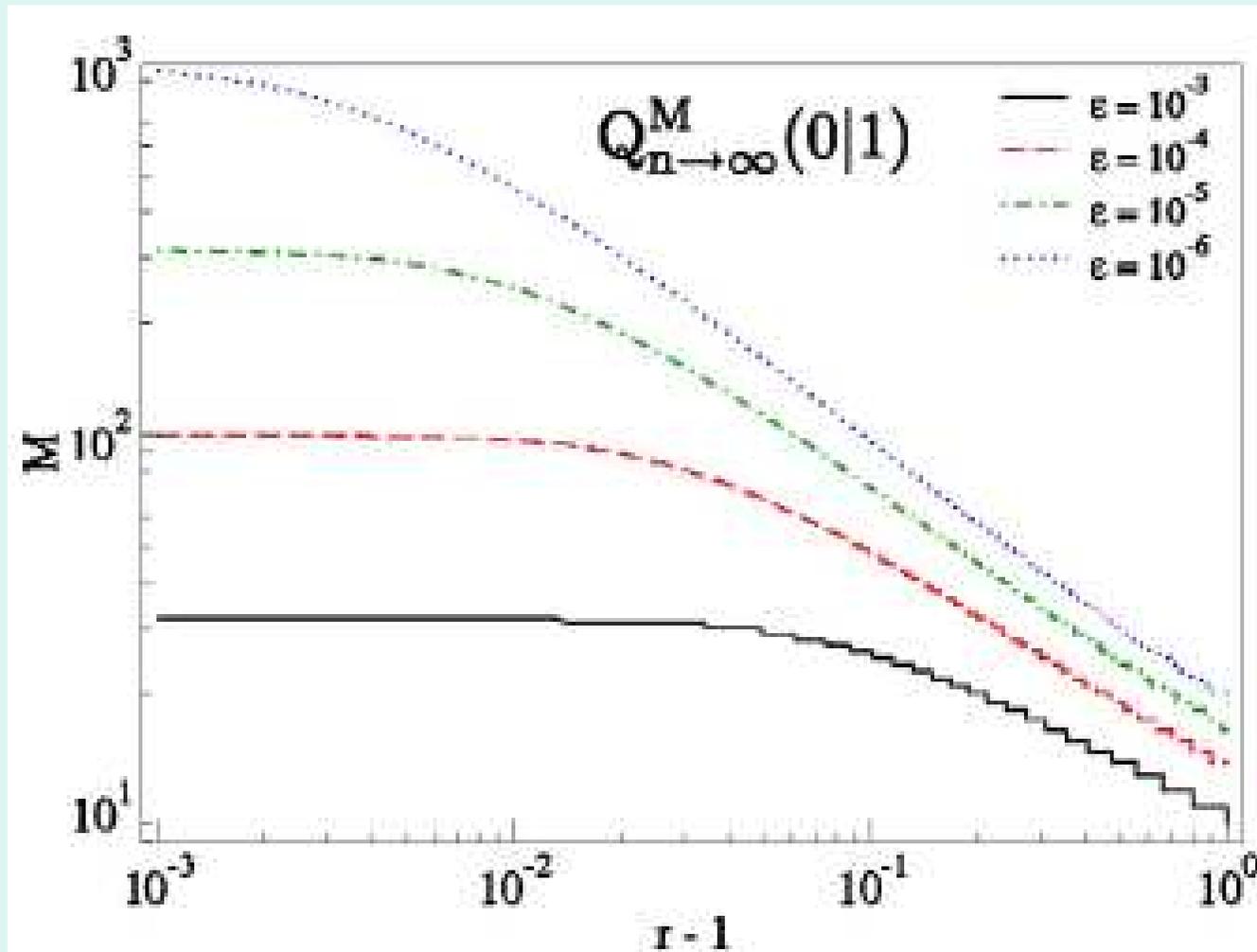
Resultados: K-funis para $r = 1.1$



2. Parar a simulação antes do final

- Se após n passos atingimos um número s grande de mutantes, a simulação leva quase certamente a fixação
- A probabilidade de que isso não ocorra, $Q_{n+1}(0|s)$ é o erro da simulação
- Esta estratégia independe da topologia da rede considerada

Probabilidade de que, partindo de um mutante e atingindo M , não fixe



Resultado para redes aleatórias

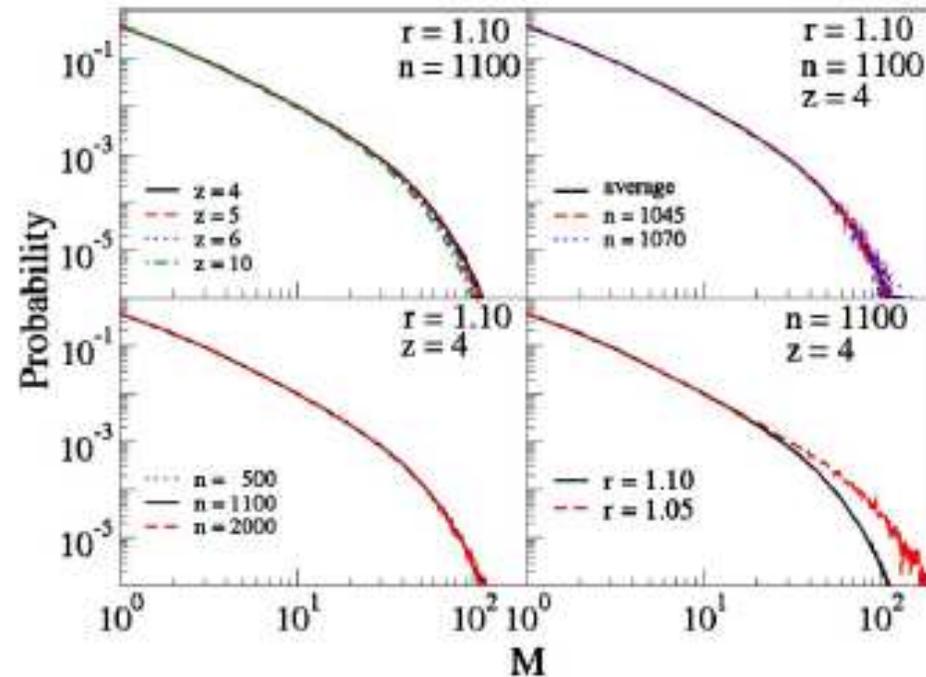
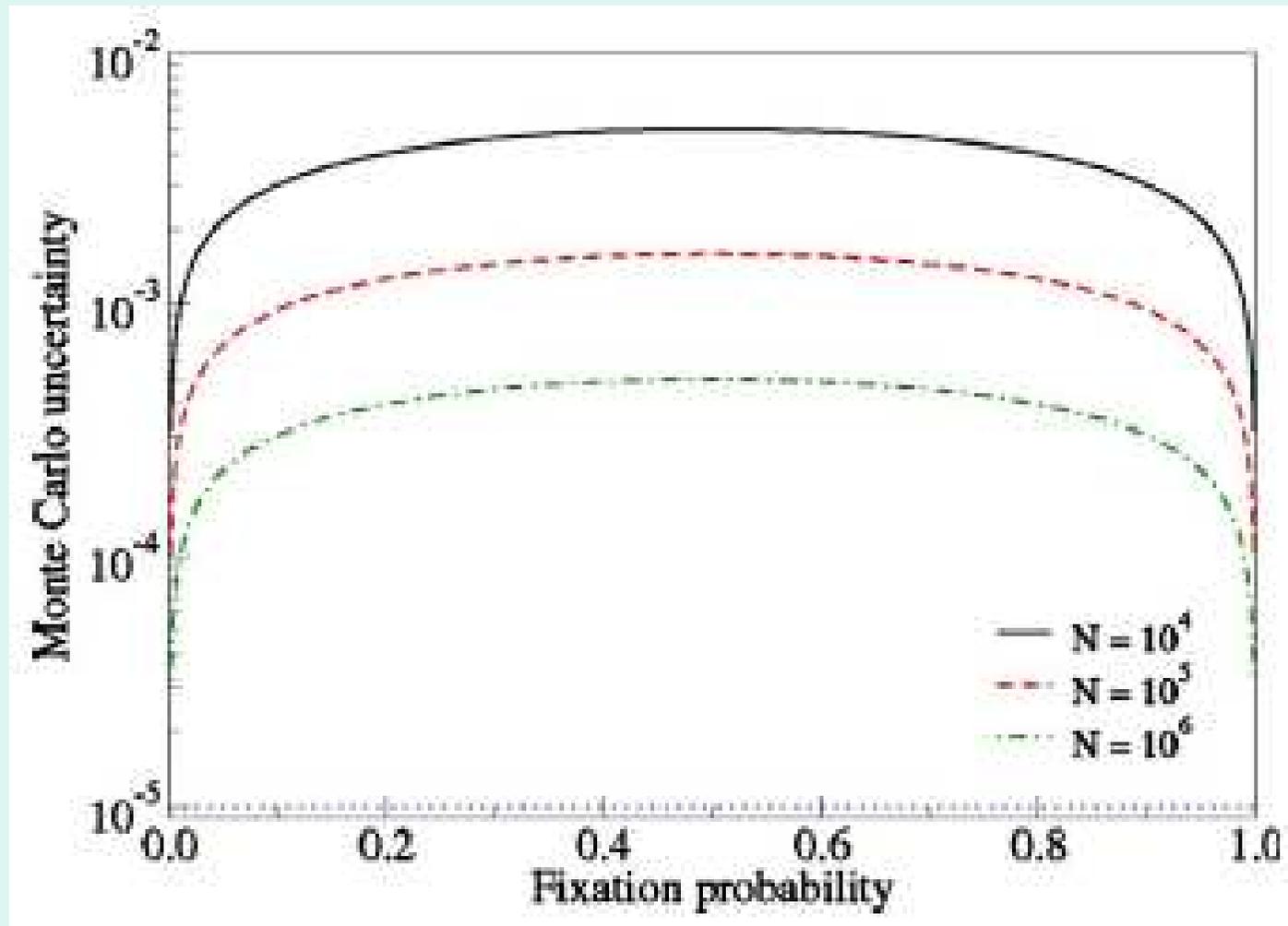


FIG. 6. (Color online) Probability distributions of the maximum number of mutants that occur when the mutation eventually dies out (M) for random networks with a Poisson-distributed number of out-neighbors. Data are averages over 10^7 events (10^4 events for each of 10^3 graphs with at least $0.95n$ nodes in the GSCC). The plot labeled average refers to all data for fitness ratio $r=1.1$, number of nodes $n=1100$, and expected number of out-neighbors $z=4$ in all panels. This is compared in the same panel to the results corresponding to a single graph whose GSCC has 1045 or 1070 nodes, for which 10^6 events have been run.

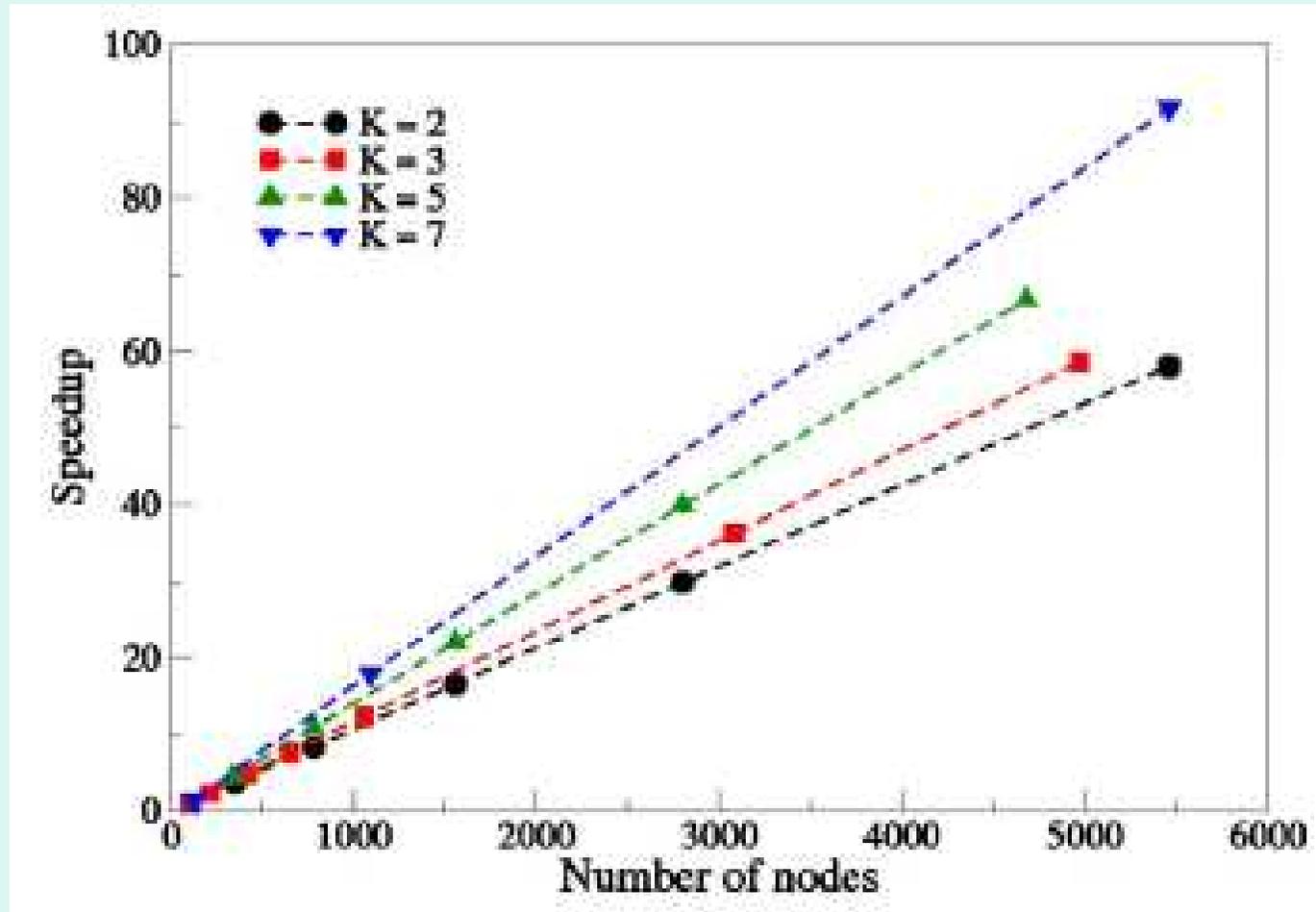
Erro intrínseco: Monte Carlo



Receita empírica

- Podemos considerar que a simulação leva a fixação se atingimos um número M^* de mutantes, com erro $< 1/(M^*)^2$
- Igualamos o erro que resulta desta hipótese ao implícito numa simulação Monte Carlo, $[\rho(1-\rho)/M]^{1/2}$
- $M^* = [Nr^2/(r-1)]^{1/4}$ (redes isotermais)

Aceleração: *K*-funis



Conclusões

- A fixação é um fenômeno que compete com a evolução natural
- A probabilidade de fixação depende da rede
- Podemos encontrar redes aleatórias que aumentam a probabilidade de fixação
- Existem mecanismos que aceleram as simulações

OBRIGADO!

- Referências:
- E. Lieberman, C. Hauert, M.A. Nowak, Nature 433, 312 (2005)
- V.C. Barbosa, R. Donangelo, S.R. Souza, Phys. Rev. E 80, 026115 (2009)
- V.C. Barbosa, R. Donangelo, S.R. Souza, Phys. Rev. E 82, 046114 (2010)

K-Funil

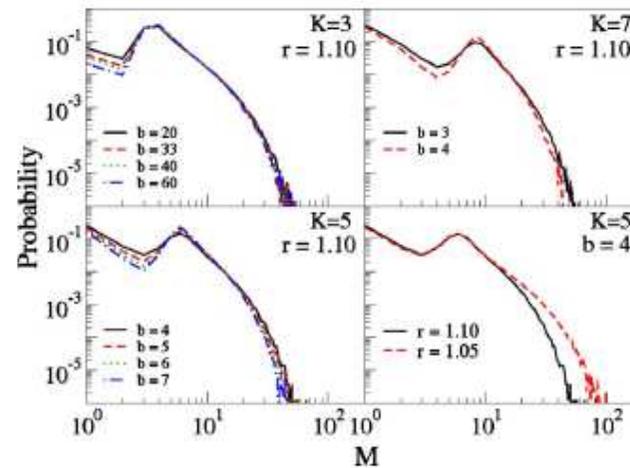


FIG. 5. (Color online) Probability distributions of the maximum number of mutants that occur when the mutation eventually dies out (M) for the K -funnel with assorted values for K , branching parameter b , and fitness ratio r . Data are averages over 10^6 events.

Redes aleatorias em camadas

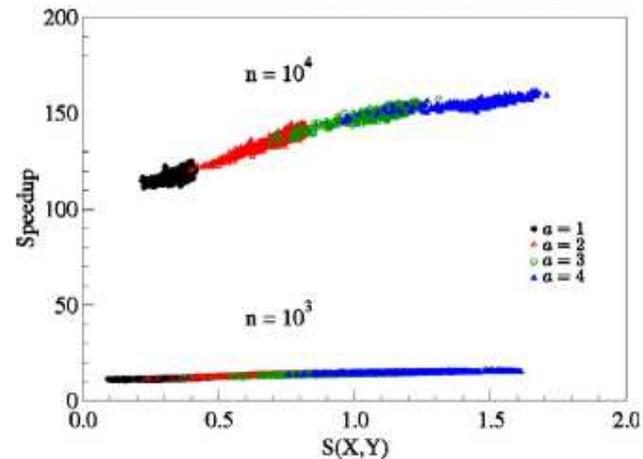


FIG. 10. (Color online) Speedups resulting from the use of the $M^* = 100$ threshold on the random layered networks in [25] with $K=5$ layers and fitness ratio $r=1.1$ for different values of the strength parameter a defined in Sec. I. Each graph whose layer populations are close by more than 0.9 (in the sense of the Pearson correlation coefficient) to being an exponentially growing sequence is shown as a point and represented by its $S(X,Y)$ value and speedup. Data are averages over 10^4 events for each of 10^3 graphs, except for the case of $n=10\,000$ nodes with $a=4$, in which 10^4 events are used for each of 500 graphs.

Outras redes

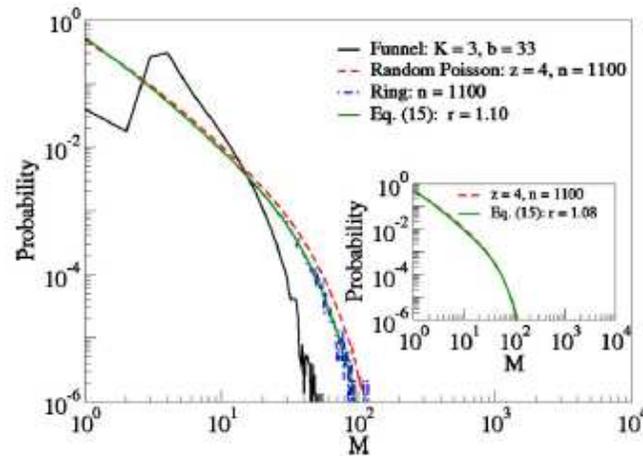


FIG. 7. (Color online) Probability distributions of the maximum number of mutants that occur when the mutation eventually dies out (M) for assorted topologies with fitness ratio $r=1.1$. Data are averages over 10^6 events for the K -funnel and the unidirectional ring, 10^7 events for the random network (10^4 events for each of 10^3 graphs with at least $0.95n$ nodes in the GSCC).

Redes aleatorias em camadas

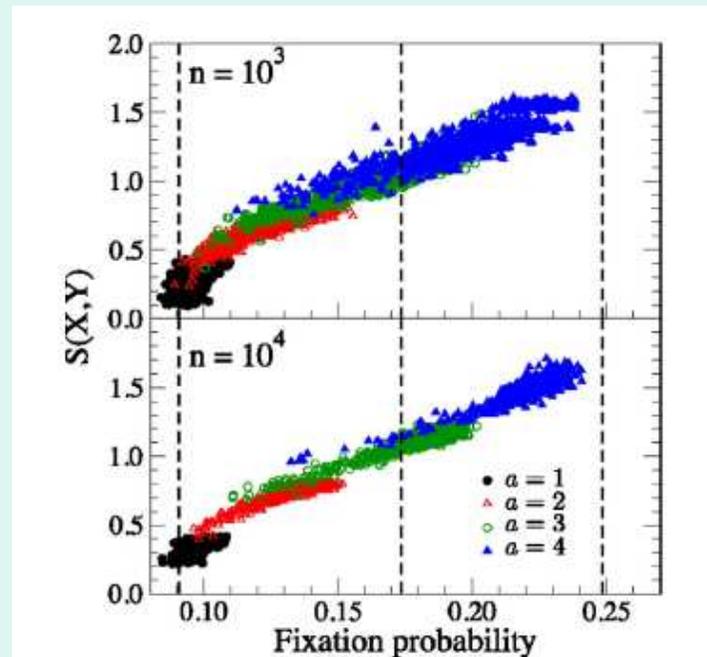


FIG. 11. (Color online) Results for the random layered networks in [25] with $K=5$ layers and fitness ratio $r=1.1$ for different values of the strength parameter a . Each graph whose layer populations are close by more than 0.9 (in the sense of the Pearson correlation coefficient) to being an exponentially growing sequence is shown as a point and represented by its fixation probability and $S(X, Y)$ value. Data are averages over 10^4 events for each of 10^3 graphs, except for the case of $n=10\,000$ nodes with $a=4$, in which 10^4 events are used for each of 500 graphs. Dashed lines indicate the fixation probabilities ρ_1 – ρ_3 .