ASPECTOS CLÁSSICOS DA q-SCHROEDINGER E q-KLEIN-GORDON

F.D. NOBRE, C. TSALLIS E MARM

CBPF INCT /2011

MOTIVAÇÃO:

* HÁ UMA GENERALIZAÇÃO CONSISTENTE DA MEC. EST.

* O CAMINHO ENCONTRADO PELA M.E. GENERALIZADA PODE SER PODE SER SEGUIDO EM OUTRAS ÁREAS DA FÍSICA?

* UM ELEMENTO IMPORTANTE NA M.E. GENERALIZADA É UMA PARTICULAR q-EXPONENCIAL.

* NO MUNDO DAS PARTÍCULAS E CAMPOS A EXPONENCIAL É UM IMPORTANTE INGREDIENTE: AS PARTÍCULAS LIVRES NÃO-RELATIVISTICAS E RELATIVISTICAS SÃO DESCRITAS POR EXPONENCIAIS

* COMO SERIA O PANORAMA NO MUNDO DAS PARTÍCULAS E CAMPOS SE FOSSEM DESCRITOS POR EQUAÇÕES CUJA SOLUÇÃO NO CASO MAIS SIMPLES FOSSE A q-EXPONENCIA?

* INÚMERAS GENERALIZAÇÕES DA EXPONENCIAL: EXEMPLOS:

$$\exp_q(x) = \sum_n \frac{x^n}{[n]_q} \quad \text{ONDE} \quad [n]_q = \frac{q^{2n}-1}{q^2-1}$$ (GRUPOS QUÂNTICOS)

$$e_q(x) = \left[1+(1-q)x\right]^{\frac{1}{1-q}}$$ (ESTATÍSTICA DE TSALLIS)

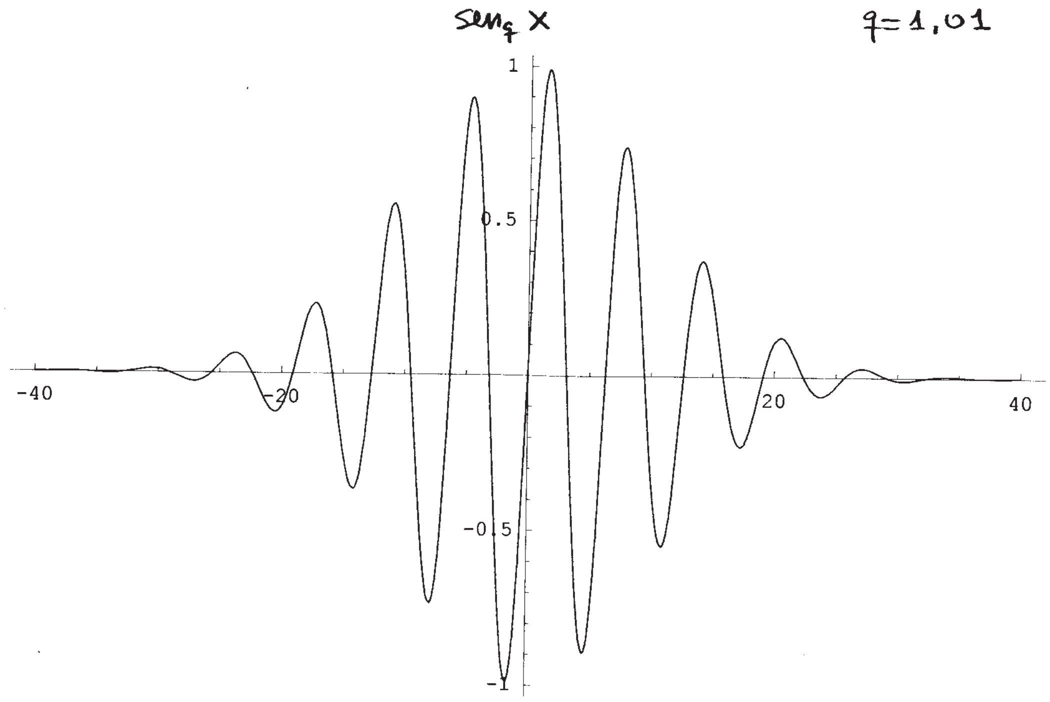
TEMOS $\exp_1(x) = e_1(x) = e^x$

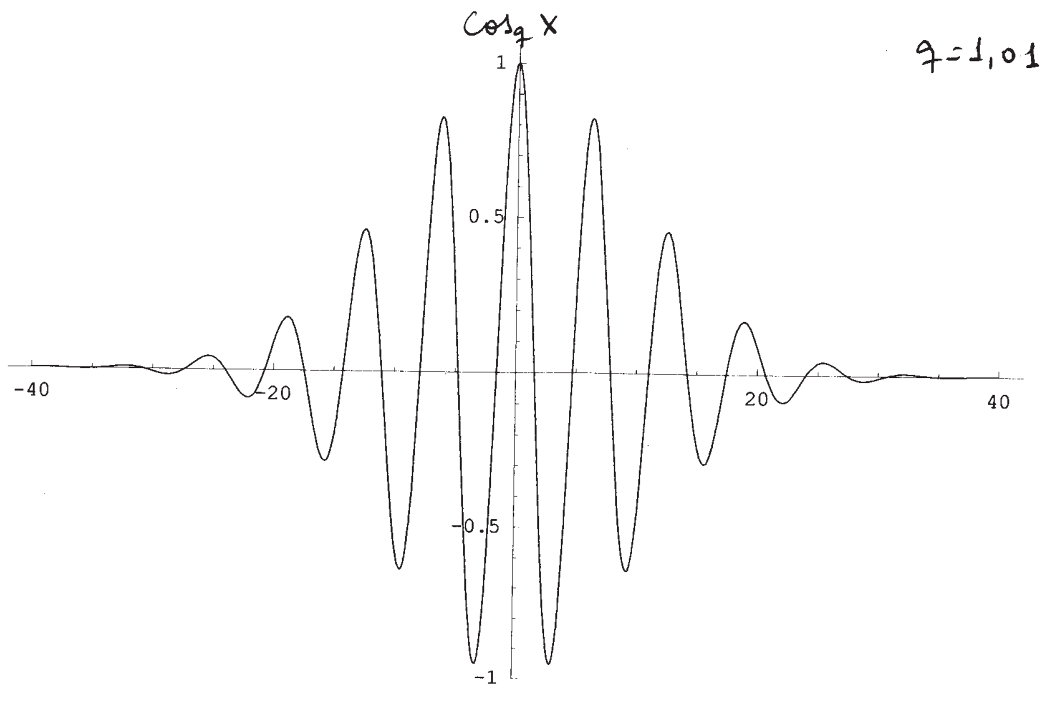
* $e_q(\pm i x) = \cos_q(x) \pm i \, \text{sen}_q(x)$ ONDE

$$\cos_q(x) = \rho_q(x) \cos\left\{\frac{1}{q-1} \arctan\left[(q-1)x\right]\right\}$$

$$\text{sen}_q(x) = \rho_q(x) \sin\left\{\frac{1}{q-1} \arctan\left[(q-1)x\right]\right\}$$

$$\rho_q(x) = \left[1+(1-q)^2 x^2\right]^{\frac{1}{2(1-q)}}$$


sen_q x
q=1,01
1
0.5
-0.5
-1
-40
-20
20
40


cos_q x
q=1,01
1
0.5
-0.5
-1
-40
-20
20
40

* DEFINIMOS D_x :

$$D_x f(x) \equiv f(x)^{1-q} \partial_x f(x) \qquad e_q(x) = [1+(1-q)x]^{\frac{1}{1-q}}$$

ASSIM $\quad D_x e_q(x) = e_q(x)$

* OPERADOR ENERGIA E MOMENTUM

$$\hat{E} = i\hbar D_t \quad e \quad \hat{p} = -i\hbar D_x$$

OBSERVE QUE $\quad \hat{E}\, e_q[i(kx-wt)] = \hbar w\, e_q[i(kx-wt)]$

$$\hat{p}\, e_q[i(kx-wt)] = \hbar k\, e_q[i(kx-wt)]$$

i.e. q-exp. É AUTO-ESTADO DE $(\hat{E}, \hat{P})$ COM AUTO-VALOR $(\hbar w, \hbar k)$

* GENERALIZAÇÃO NÃO-LINEAR DE EQ. SCHROEDINGER

$$i\hbar\,\partial_t\left(\frac{\psi(x,t)}{\psi_0}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x D_x\left(\frac{\psi(x,t)}{\psi_0}\right) \xrightarrow{q\to 1} i\hbar\,\partial_t \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x,t)$$

SIMPLES VER QUE $\psi(x,t) = \psi_0\, e_q\left[i(kx-\omega t)\right]$

É SOLUÇÃO DA EQ Ñ-LINEAR, SUBSTITUINDO:

$$\underbrace{\hbar\omega}_{E}\, e_q\left[i(kx-\omega t)\right] = \frac{\overbrace{\hbar^2 k^2}^{p^2}}{2m}\, e_q\left[i(kx-\omega t)\right] \quad \text{OU} \quad E = p^2/2m \;,\; \forall q$$

* EQ. KLEIN-GORDON NÃO-LINEAR

$x_0 = cT$

$$\partial_\mu\partial^\mu\,\Phi(x,t) + q\,\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\,\Phi(x,t)\left[\frac{\Phi(x,t)}{\Phi_0}\right]^{2(q-1)} = 0$$

DEDUZ-SE FACILMENTE QUE $\Phi(x,t) = \Phi_0\left[1 + \frac{i}{\hbar}(1-q)\overbrace{(px - Et)}^{x.p}\right]^{\frac{1}{1-q}}$

É SOL. USANDO-SE $\partial_\mu\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = \frac{i\,p_\mu}{\hbar}\left(\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^q$ e $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

* DIRAC NÃO-LINEAR

$$i\hbar\,\partial_t \psi(\vec{x},t) + i\hbar c\,(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla})\,\psi(\vec{x},t) = \beta m c^2 A^{(q)}(\vec{x},t)\,\psi(\vec{x},t)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

; σ_i - MATRIZES DE PAULI 2×2

$\mathbb{1}$ - UNIDADE 2×2

$A^q(\vec{x},t)$ - MATRIZ DIAGONAL 4×4

$$A^q(\vec{x},t) = \delta_{ij}\left[\psi_j(\vec{x},t)/a_j\right]^{q-1}$$

, a_j - CONSTS. COMPLEXAS

SOLUÇÃO:

$$\psi(\vec{x},t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x},t) \\ \psi_2(\vec{x},t) \\ \psi_3(\vec{x},t) \\ \psi_4(\vec{x},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} e_q\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)\right]$$

SUBSTITUINDO-SE $\psi(\vec{x},t)$ NA EQ. OBTEMOS O MESMO CONJUNTO DE 4 EQS. PARA $\{a_i\}$ DO QUE NO CASO LINEAR. ESSAS EQs. TEM SOL. NÃO TRIVIAL $\forall q$ SE $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$

* LAGRANGEANO P/ SCHROEDINGER NÃO LINEAR

$$\mathcal{L}_q = i\hbar\,\phi^*\partial_t\psi + \frac{\hbar^2}{2m}(1-q)\,\phi^*\psi^{-q}(\partial_x\psi)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\phi^*\psi^{1-q}\partial_x^2\psi + c.c.$$

$\mathcal{L}_q \xrightarrow{q\to 1} \mathcal{L}_{SCHROED.}$ ONDE $\phi^* = \psi^*$ SERÁ ASSIM P/ $q \neq 1$?

* EULER - LAGRANGE

- PARA ϕ^*: $$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^*} = i\hbar\,\partial_t\psi + \frac{\hbar^2}{2m}(1-q)\,\psi^{-q}(\partial_x\psi)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\psi^{1-q}\partial_x^2\psi = 0$$

EQ. SCHROEDINGER $\bar{N}$-LINEAR

POIS $$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_x\phi^*} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_t\phi^*} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_x^2\phi^*} = 0$$

- PARA ψ:

- $$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} = \frac{-\hbar^2}{2m}q(1-q)\,\phi^*\psi^{-1-q}(\partial_x\psi)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}(1-q)\,\phi^*\psi^{-q}\partial_x^2\psi$$

- $\partial_x \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_x \psi} = \dfrac{\hbar^2}{m}(1-q)\,\psi^{-q}\,\partial_x\phi^*\partial_x\psi - \dfrac{\hbar^2}{m}\,q(1-q)\,\phi^*\,\psi^{-1-q}(\partial_x\psi)^2 + \dfrac{\hbar^2}{m}(1-q)\,\phi^*\,\psi^{-q}\,\partial_x^2\psi$

- $\partial_t \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_t \psi} = i\hbar\,\partial_t\phi^*$

- $\partial_x^2 \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_x^2 \psi} = \dfrac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2\phi^*\,\psi^{1-q} + \dfrac{\hbar^2}{m}(1-q)\,\partial_x\phi^*\partial_x\psi\,\psi^{-q} - \dfrac{\hbar^2}{2m}\,q(1-q)\,\phi^*\,\psi^{-1-q}(\partial_x\psi)^2 +$
$$+ \frac{\hbar^2}{2m}(1-q)\,\phi^*\,\psi^{-q}\,\partial_x^2\psi$$

ASSIM: $\dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} - \partial_x \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_x \psi} - \partial_t \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_t \psi} + \partial_x^2 \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_x^2 \psi} = 0$ NOS FORNECE:

$$-i\hbar\,\partial_t\phi^* + \frac{\hbar^2}{2m}\,\partial_x^2\phi^*\,\psi^{1-q} = 0$$

RESOLVENDO: $y \equiv kx - wt$ e $\phi^* = f(y)$ OBTEMOS:

OBTEMOS $[1+i(1-q)y]\,f''(y) + i f'(y) = 0$ QUANDO $E = \dfrac{p^2}{2m}$

COM SOLUÇÃO $\phi^*(x,t) = c\; e_q[i(kx - wt)]^{-q} + \text{cte}$

EM RESUMO : $\psi(x,t) = \psi_0 e_q[i(kx-\omega t)]$; $\phi^*(x,t) = c\, e_q[i(kx-\omega t)]^{-q}$

* DENSIDADE DE HAMILTONIANO

$$\pi_\psi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot\psi} = i\hbar\phi^* \quad e \quad \pi_{\phi^*} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot\phi^*} = 0 \qquad (+\text{c.c.})$$

$$\mathcal{H}_q = \pi_\psi \dot\psi + \pi_{\phi^*}\dot\phi^* - \mathcal{L} + \text{c.c.} = -\frac{\hbar^2}{2m}(1-q)\phi^*\psi^{-q}(\partial_x\psi)^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\phi^*\psi^{1-q}\partial_x^2\psi + \text{c.c.}$$

$$\mathcal{H}_q \xrightarrow{q\to 1} \mathcal{H}_{\text{schrod.}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*\partial_x^2\psi$$

NOTE QUE P/ SOLUÇÃO $\psi(x,t)$ e $\phi^*(x,t)$: $\mathcal{H}_q = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2M}$

USANDO AINDA O TENSOR DE ENERGIA-MOMENTUM $\Theta_{\mu\nu}$:

$$\underline{P} = \Theta_{01} = -\frac{i\hbar}{2}\phi^*\partial_i\psi + \text{c.c.} = \hbar k$$

COMO NA PARTÍCULA LIVRE ORDINÁRIA

* LAGRANGEANO KLEIN-GORDON NÃO-LINEAR

MANEIRA SIMILAR

$$\mathcal{L}_q = \partial_\mu \eta^* \partial^\mu \phi - q\, m^2 \eta^* \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{2(q-1)} \phi + c.c.$$

$\mathcal{L}_q \xrightarrow{q \to 1} \mathcal{L}_{K\text{-}G}$ ONDE $\eta^* = \phi^*$, NÃO É ASSIM P/ $q \neq 1$

* EULER-LAGRANGE

– PARA η^* : $\quad \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \eta^*} = -q\, m^2 \left(\dfrac{\Phi}{\Phi_0}\right)^{2(q-1)} \Phi \quad$ e $\quad \partial_\mu \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \eta^*} = \partial_\mu \partial^\mu \phi$

ASSIM

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + q\, m^2 \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{2(q-1)} \phi = 0$$

SOLUÇÕES : $\phi = [1 + i(1-q)\, k \cdot x]^{\frac{1}{1-q}}$ OU $\phi = [1 + i(1-q)\, k \cdot x]^{-\frac{q}{1-q}}$

– PARA ϕ : $\dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} = -q(2q-1)\, m^2 \eta^* \left(\dfrac{\phi}{\phi_0}\right)^{2(q-1)}$ e $\partial_\mu \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} = \partial_\mu \partial^\mu \eta^*$

ASSIM :

$$\partial_\mu \partial^\mu \eta^* + q(2q-1)\, m^2 \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{2(q-1)} \eta^* = 0$$

SOLUÇÃO : $y \equiv kx - k_0 t$, $\eta^*(x,t) = f(y)$

TEMOS: $f''(y) + q(2q-1)\left[1 + i(1-q)y\right]^{-2} f(y) = 0$ se $E^2 = p^2 + m^2$

COM SOLUÇÃO $f(y) = c_1 \left[1 + i(1-q)y\right]^{q/1-q} + c_2 \left[1 + i(1-q)y\right]^{-(2q-1)/1-q}$

TOMAMOS $c_1 = 0$ POIS $q \to 1$ QUEREMOS $\eta^* = \psi^*$:

$$\eta^*(x,t) = c_2\, e_q\left[i(kx - wt)\right]^{-(2q-1)}$$

* DENSIDADE DE HAMILTONIANO

MOMENTOS C.C. : $\pi_\phi = \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\eta}^*$ e $\pi_{\eta^*} = \dot{\phi}$

$$\mathcal{H} = \pi_\phi \dot{\phi} + \pi_{\eta^*} \dot{\eta}^* - \mathcal{L} = \pi_\phi \pi_{\eta^*} + \partial_x \eta^* \partial_x \phi + q m^2 \eta^* \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{2(q-1)} \phi \quad + \text{c.c.}$$

* TENTANDO ENCONTRAR SIMETRIAS

SIMETRIAS $\Rightarrow$ CORRENTES CONSERVADAS $\Rightarrow$ CARGAS CONSERVADAS

EX: INVARIANCIA POR FASE GLOBAL (TRANSF. GAUGE GLOBAIS)

PERMITE INTERAGIR COM A LUZ

$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$ É INVARIANTE $\psi \to e^{i\alpha} \psi$

$\psi^* \to e^{-i\alpha} \psi^*$

ASSIM $\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^* (\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - m^2 \phi^* \phi + \mathcal{L}_{EM}$

O QUE TEMOS AQUI?

— SCHROEDINGER NÃO-LINEAR:

$$\mathcal{L}_q = i\hbar\,\phi^*\partial_t\psi + \frac{\hbar^2}{2m}(1-q)\,\phi^*\psi^{-q}(\partial_x\psi)^2 + \frac{\hbar^2}{2m}\,\phi^*\psi^{1-q}\,\partial_x^2\psi \quad + c.c.$$

COM SOLUÇÕES: $\psi(x,t) = e_q\left[i(kx-wt)\right]$ e $\phi^*(x,t) = e_q\left[i(kx-wt)\right]^{-q}$

NÃO É INVARIANTE POR FASE GLOBAL $\Rightarrow$ NÃO INTERAGE C/ LUZ

HÁ SIMETRIAS P/ ESSE LAGRANGEANO?

— KLEIN-GORDON NÃO-LINEAR

$$\mathcal{L}_q = \partial_\mu\eta^*\,\partial^\mu\phi - q\,m^2\,\eta^*\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{2(q-1)}\phi \quad + c.c$$

SOLUÇÕES: $\phi(x,t) = e_q\left[i(kx-wt)\right]$, $\eta^*(x,t) = e_q\left[i(kx-wt)\right]^{-(2q-1)}$

TAMBÉM NÃO É INVARIANTE POR TRANSF. FASE GLOBAL.

NOVAMENTE QUAIS SÃO AS SIMETRIAS DESSE LAGRANGEANO.?

EM ANDAMENTO

RESUMO:

1) FORAM GENERALIZADAS AS EQs. SCHROEDINGER, KLEIN-GORDON E DIRAC DE TAL FORMA QUE TENHAM COMO SOLUÇÃO A q-EXP. NO CASO MAIS SIMPLES

2) PODEMOS CONSTRUIR UM LAGRANGEANO E HAMILTONIANO

3) ESSES SISTEMAS PRESERVAM AS ENERGIAS CLASSICAS E RELATIVISTICAS

4) SE COMPORTAM CLASSICAM/ COMO PARTÍCULAS

5) APARENTEMENTE NÃO PODEMOS INTERAGIR ESSAS EXCITAÇÕES CLÁSSICAS COM A LUZ