

# Pode uma bola em queda frear?

*Colóquio IFUSP*  
*26 de março 2009*

Paulo Murilo Castro de Oliveira

pmco@if.uff.br

# O experimento

# O experimento

Uma bola de isopor de raio  $\approx 2\text{cm}$  é largada sem velocidade inicial de uma altura a  $3,10\text{m}$  do chão.

# O experimento

Uma bola de isopor de raio  $\approx 2\text{cm}$  é largada sem velocidade inicial de uma altura a 3,10m do chão.

O tempo de queda até o chão é medido com um cronômetro.

# O experimento

Uma bola de isopor de raio  $\approx 2\text{cm}$  é largada sem velocidade inicial de uma altura a  $3,10\text{m}$  do chão.

O tempo de queda até o chão é medido com um cronômetro.

Repete-se o procedimento dez vezes, para determinar as barras de erro na medida do tempo.

# O experimento

Uma bola de isopor de raio  $\approx 2\text{cm}$  é largada sem velocidade inicial de uma altura a  $3,10\text{m}$  do chão.

O tempo de queda até o chão é medido com um cronômetro.

Repete-se o procedimento dez vezes, para determinar as barras de erro na medida do tempo.

Dez alturas são testadas da mesma forma, desde  $3,10\text{m}$  até  $1,30\text{m}$ , a cada  $20\text{cm}$ .

# O experimento

Uma bola de isopor de raio  $\approx 2\text{cm}$  é largada sem velocidade inicial de uma altura a  $3,10\text{m}$  do chão.

O tempo de queda até o chão é medido com um cronômetro.

Repete-se o procedimento dez vezes, para determinar as barras de erro na medida do tempo.

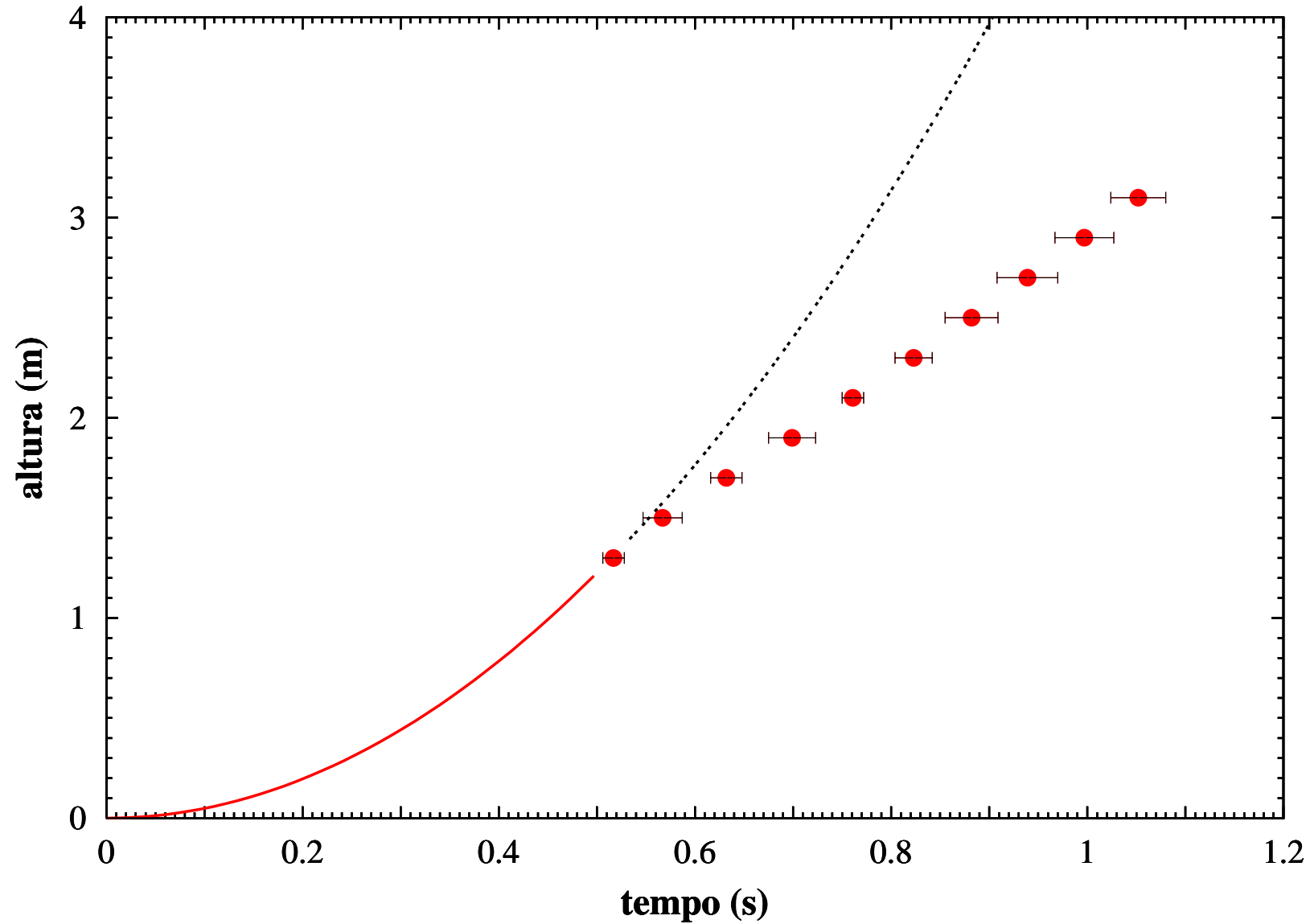
Dez alturas são testadas da mesma forma, desde  $3,10\text{m}$  até  $1,30\text{m}$ , a cada  $20\text{cm}$ .

Constrói-se o gráfico da altura contra o tempo de queda, que pode ser interpretado como a distância percorrida em função do tempo numa única queda.

# Resultado experimental



# Resultado experimental



# Lei de Newton

# Lei de Newton

Há duas forças que atuam na bola:

# Lei de Newton

Há duas forças que atuam na bola:

1) seu peso, sempre o mesmo, que aponta para baixo;

# Lei de Newton

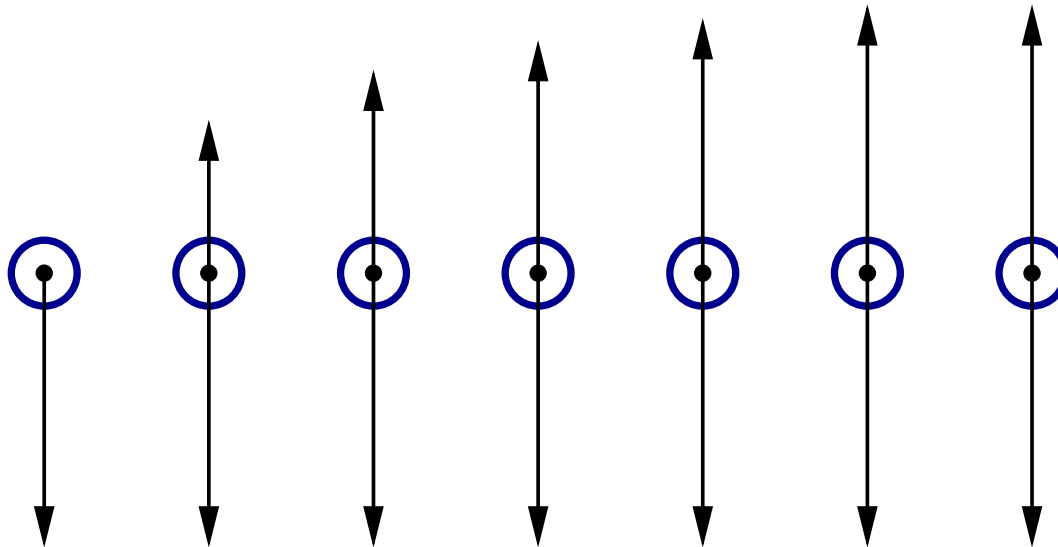
Há duas forças que atuam na bola:

- 1) seu peso, sempre o mesmo, que aponta para baixo;
- 2) a força de resistência do ar, para cima.

# Lei de Newton

Há duas forças que atuam na bola:

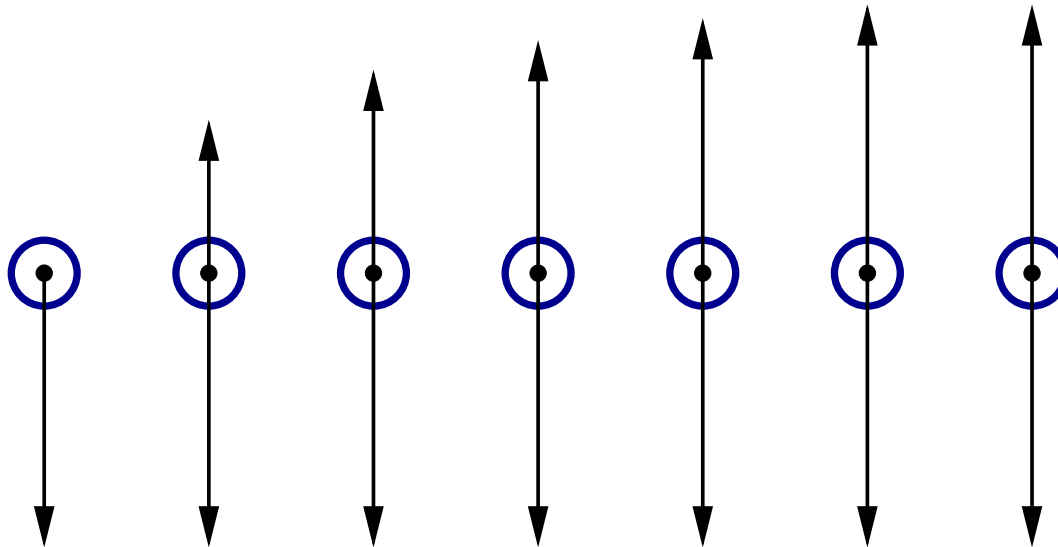
- 1) seu peso, sempre o mesmo, que aponta para baixo;
- 2) a força de resistência do ar, para cima.



# Lei de Newton

Há duas forças que atuam na bola:

- 1) seu peso, sempre o mesmo, que aponta para baixo;
- 2) a força de resistência do ar, para cima.



Depois que a resistência do ar atinge valor igual ao peso, a velocidade se estabiliza no valor limite  $v_{\ell} = 3.3\text{m/s}$ .

# Modelos teóricos



# Modelos teóricos

1) a resistência do ar é proporcional à velocidade  $v$ :

$$F(v) = -\gamma v = -mg \frac{v}{v_\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{v}{v_\ell} \right)$$

# Modelos teóricos

1) a resistência do ar é proporcional à velocidade  $v$ :

$$F(v) = -\gamma v = -mg \frac{v}{v_\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{v}{v_\ell}\right)$$

2) a resistência do ar é proporcional a  $v^2$ :

$$F(v) = -\gamma v^2 = -mg \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g \left[1 - \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^2\right]$$

# Modelos teóricos

1) a resistência do ar é proporcional à velocidade  $v$ :

$$F(v) = -\gamma v = -mg \frac{v}{v_\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{v}{v_\ell}\right)$$

2) a resistência do ar é proporcional a  $v^2$ :

$$F(v) = -\gamma v^2 = -mg \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g \left[1 - \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^2\right]$$

3) a resistência do ar é proporcional a  $v^\alpha$ :

$$F(v) = -\gamma v^\alpha = -mg \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g \left[1 - \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^\alpha\right]$$

# Solução numérica

# Solução numérica

Variáveis adimensionais  $u = v/v_\ell$  e  $\tau = t/(v_\ell/g)$ :

# Solução numérica

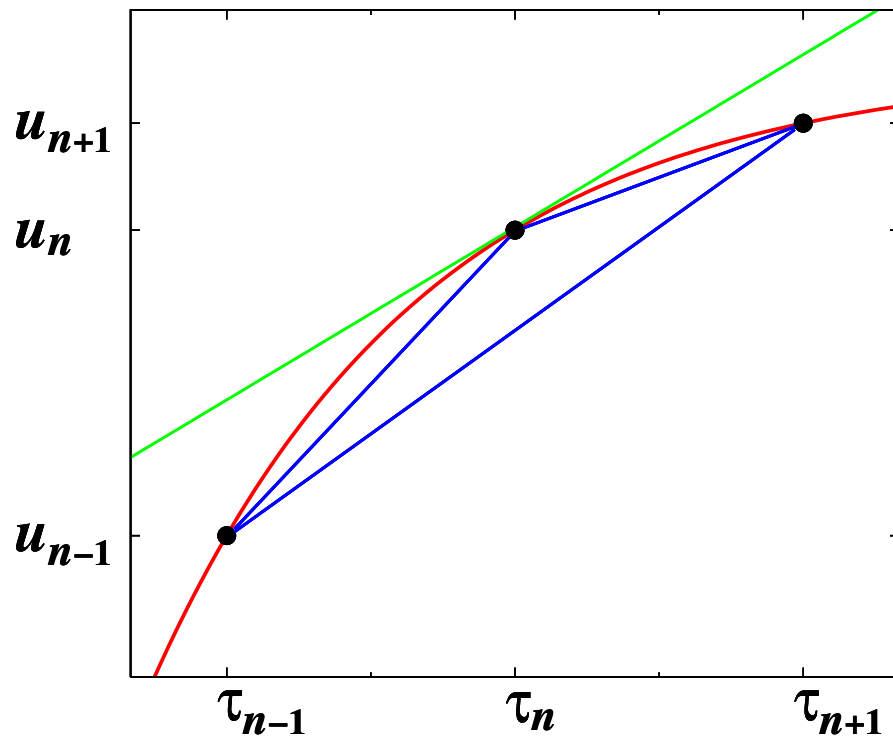
Variáveis adimensionais  $u = v/v_\ell$  e  $\tau = t/(v_\ell/g)$ :

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - u^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta\tau} = 1 - u_n^\alpha$$

# Solução numérica

Variáveis adimensionais  $u = v/v_\ell$  e  $\tau = t/(v_\ell/g)$ :

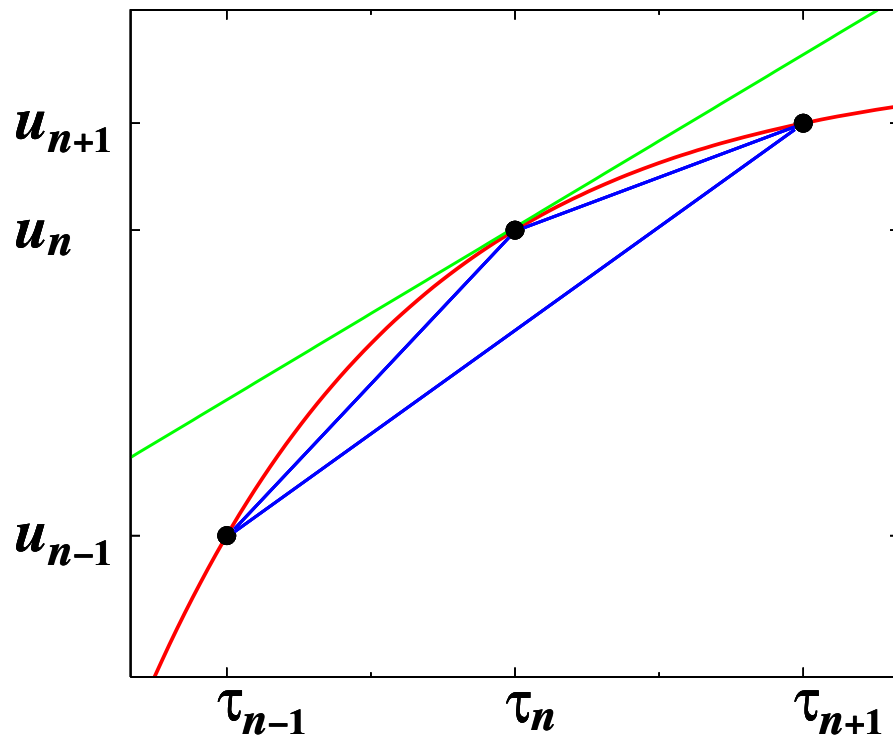
$$\frac{du}{d\tau} = 1 - u^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta\tau} = 1 - u_n^\alpha$$



# Solução numérica

Variáveis adimensionais  $u = v/v_\ell$  e  $\tau = t/(v_\ell/g)$ :

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - u^\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta\tau} = 1 - u_n^\alpha$$

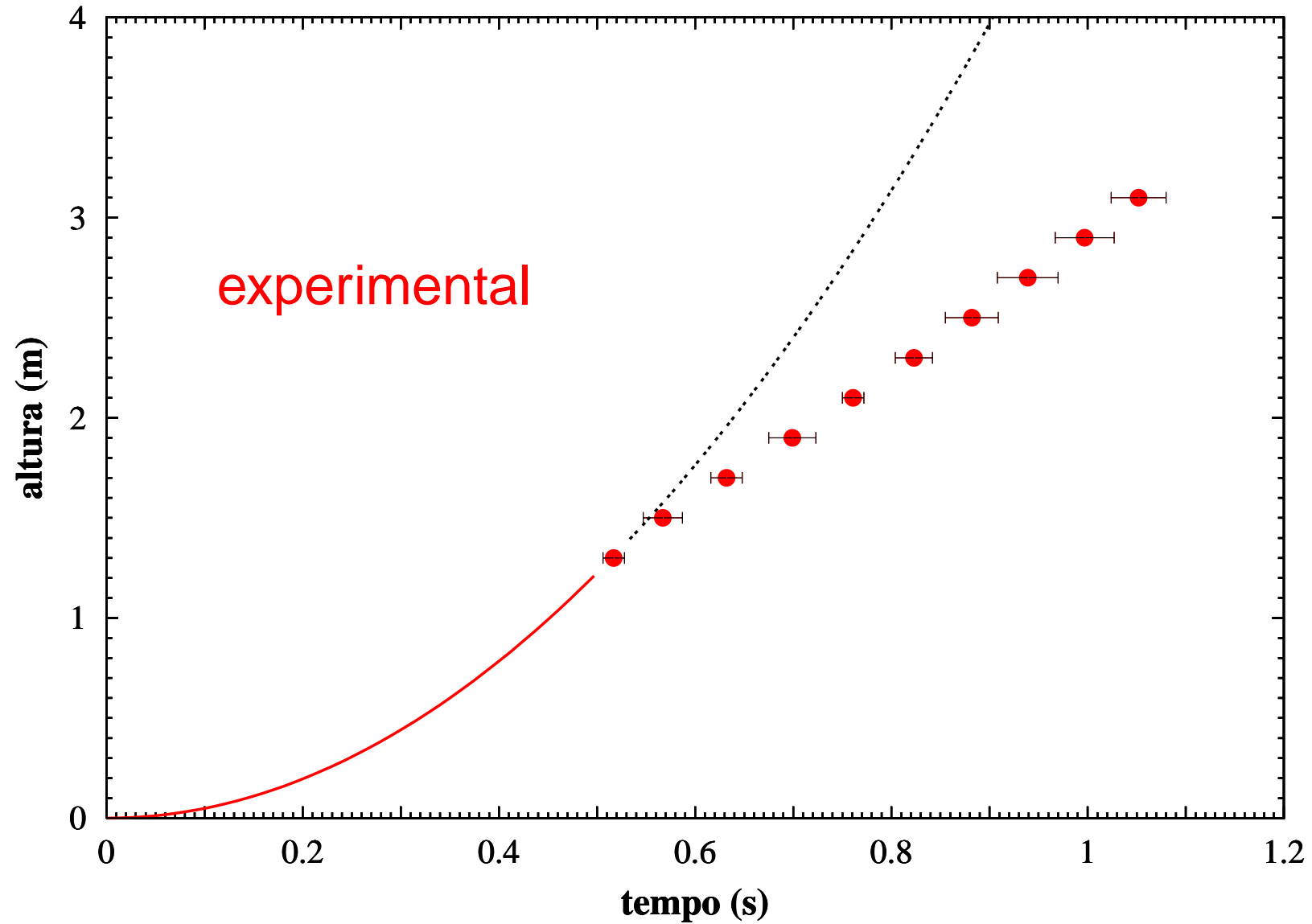


$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2\Delta\tau(1 - u_n^\alpha)$$

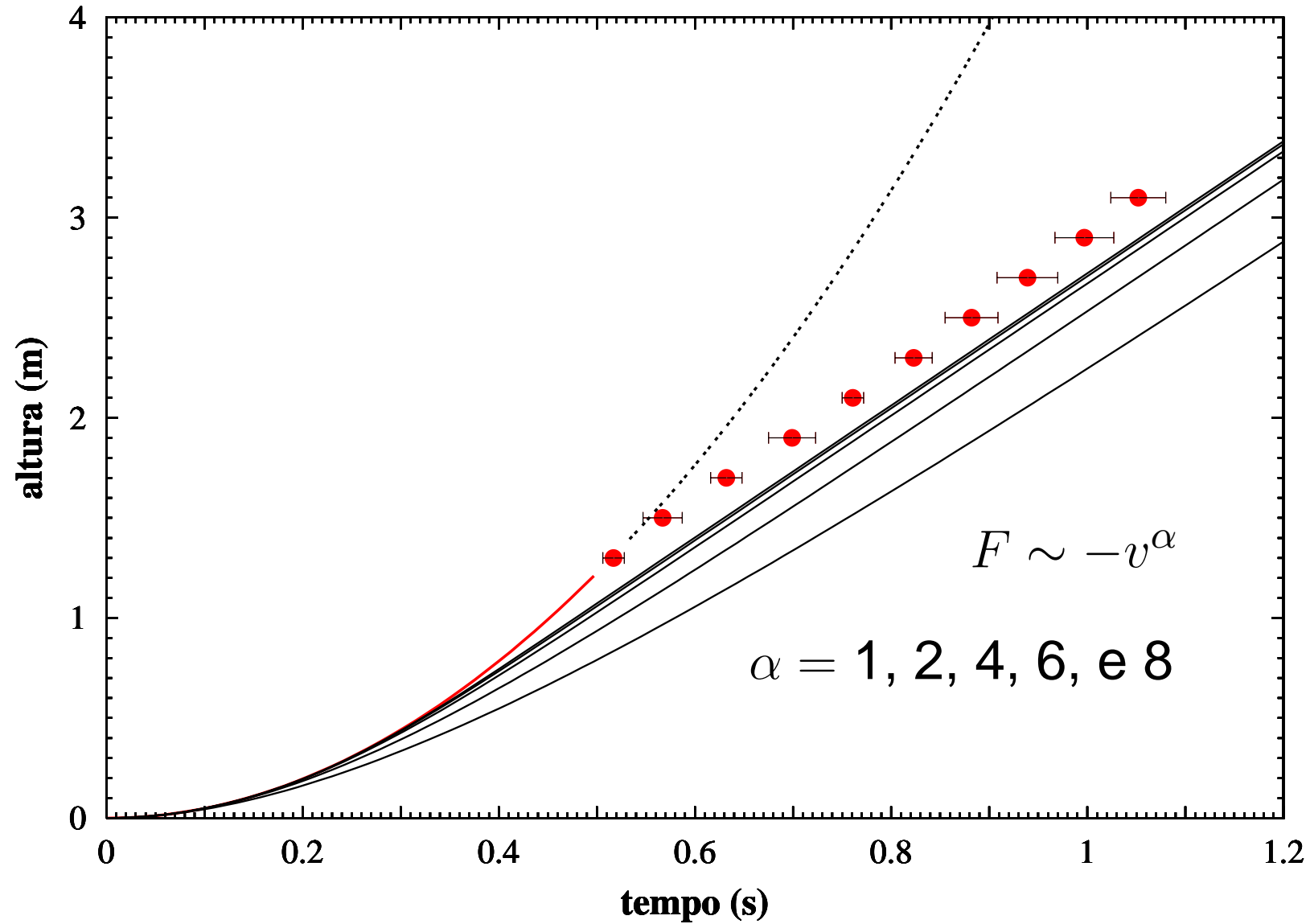


# Resultado

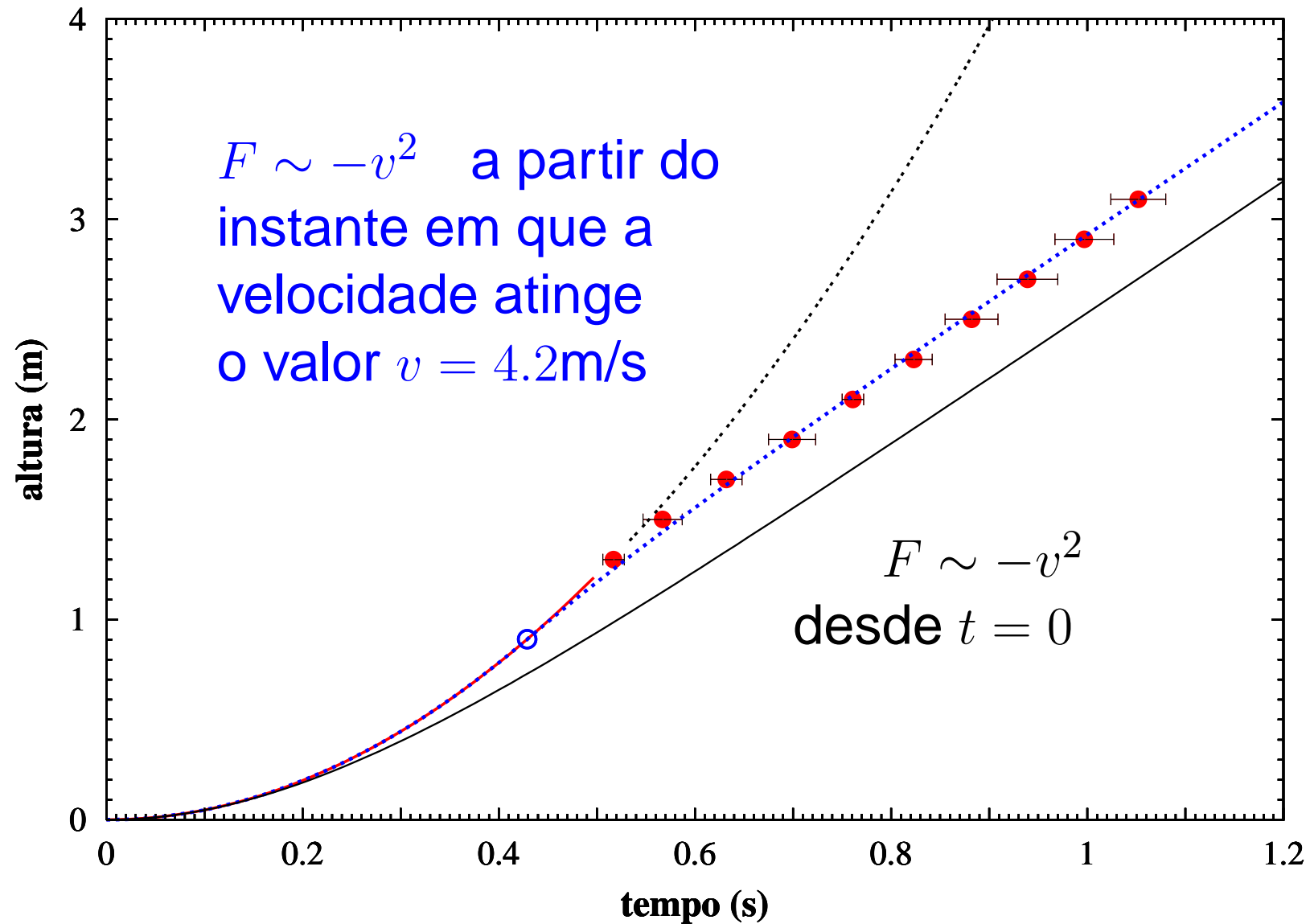
# Resultado



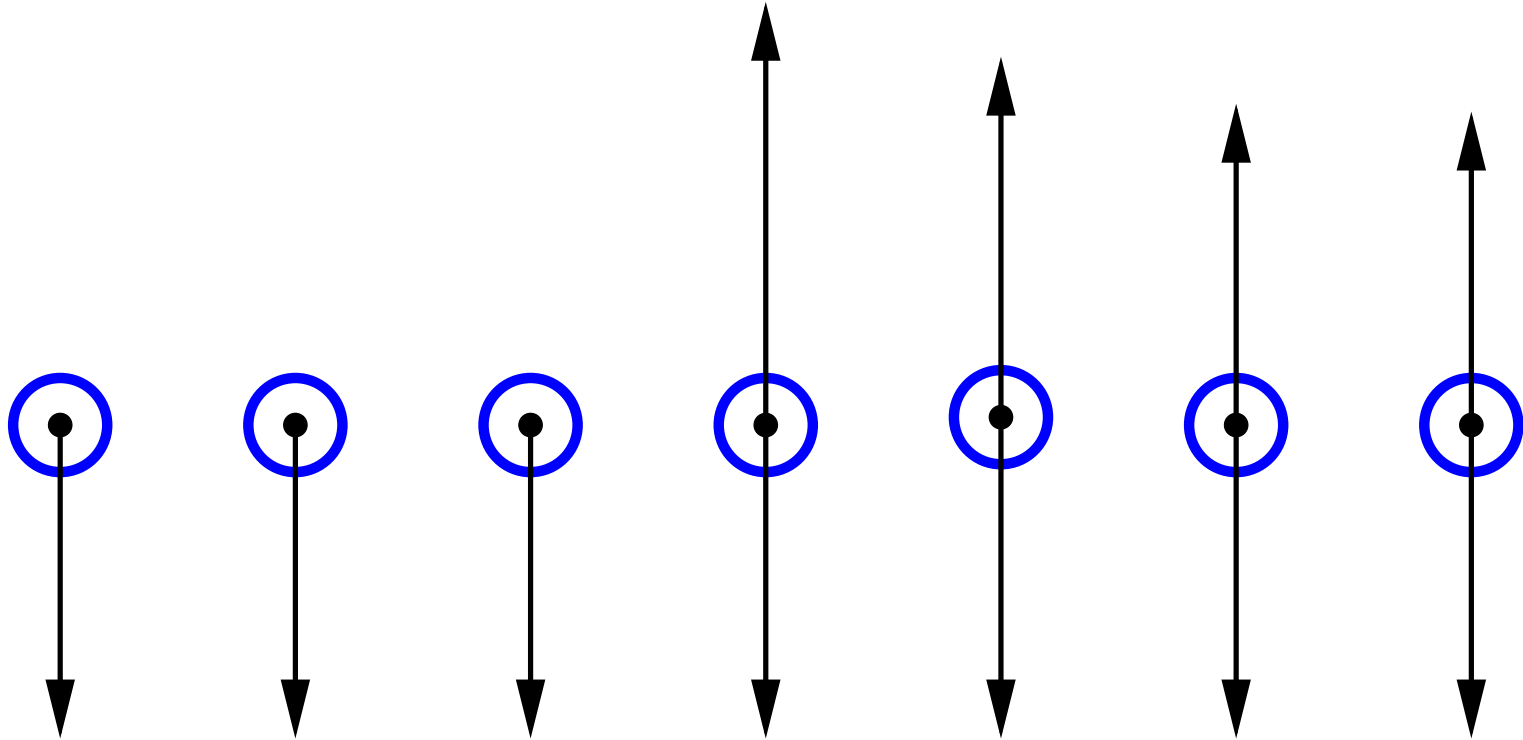
# Resultado



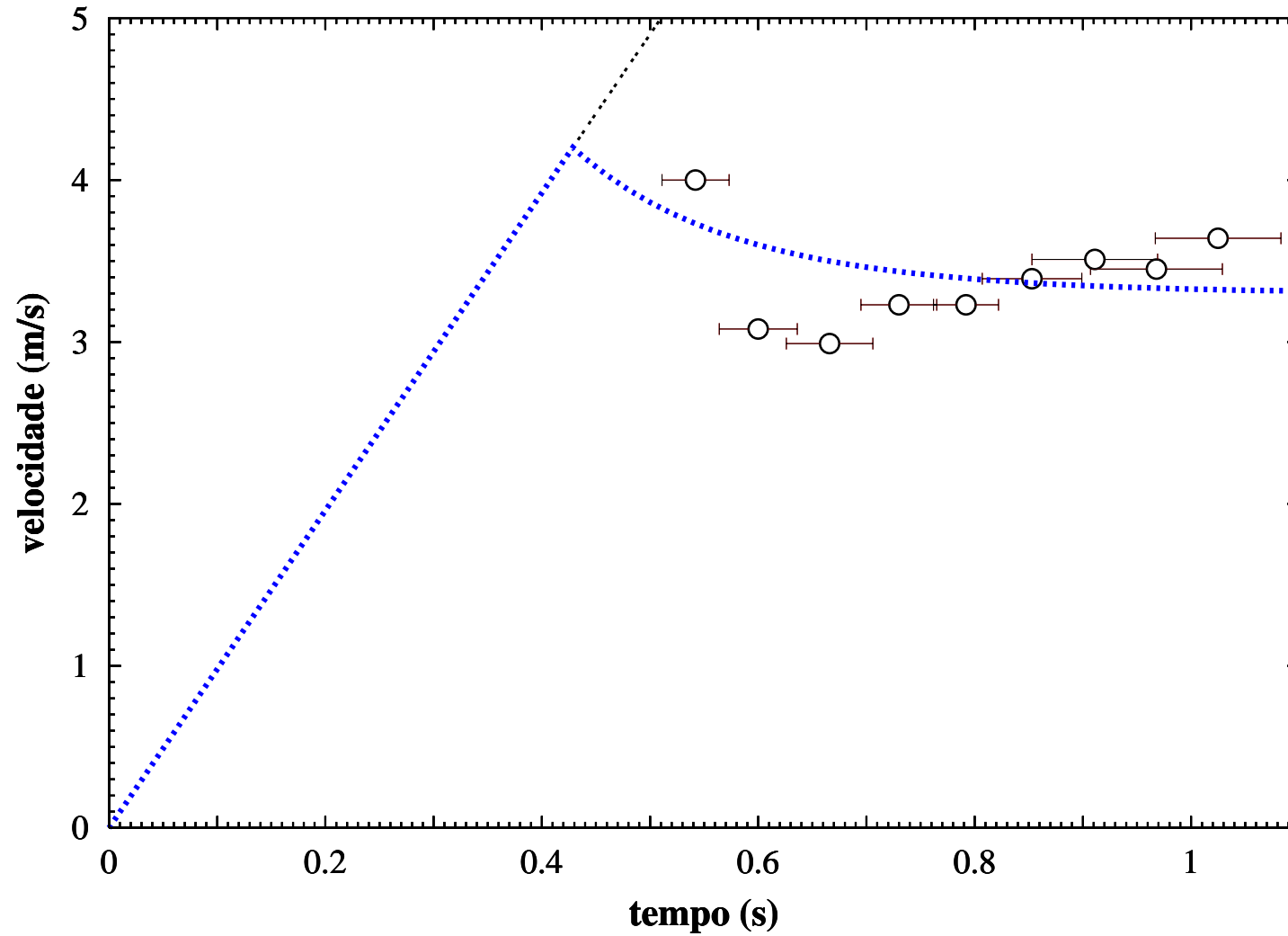
# Resultado



# Resultado

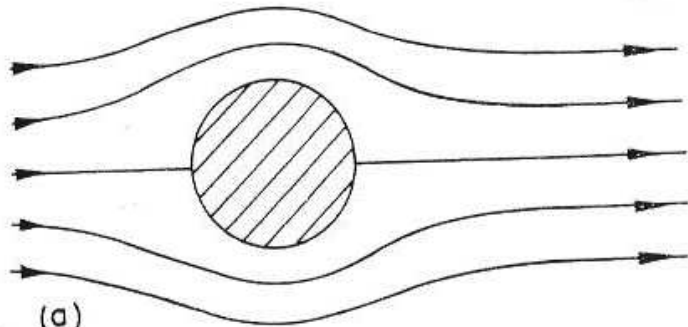


# Resultado

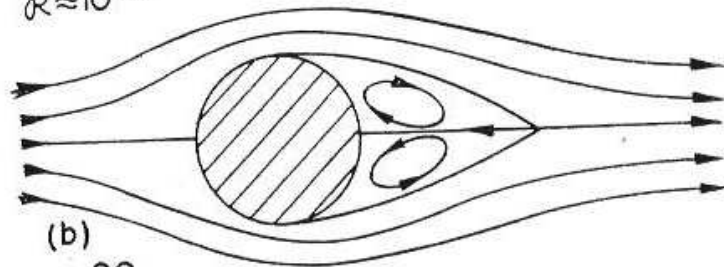


# A mecânica do fluido

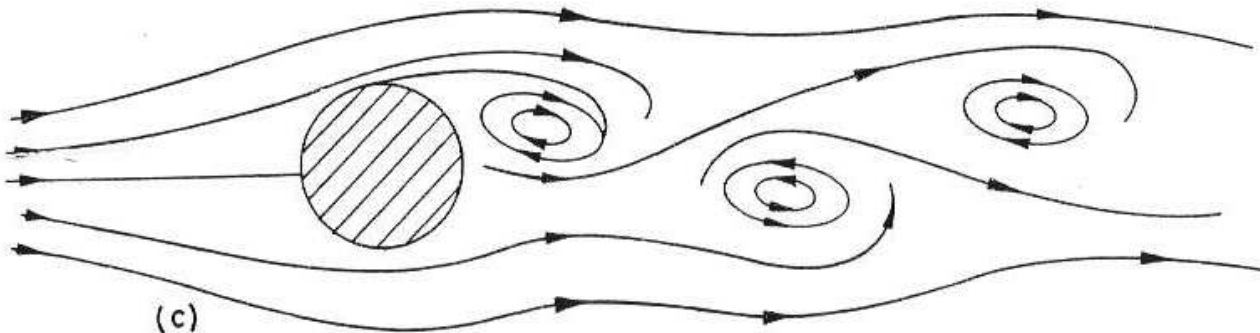
# A mecânica do fluido



(a)  
 $R \approx 10^{-2}$



(b)  
 $R \approx 20$

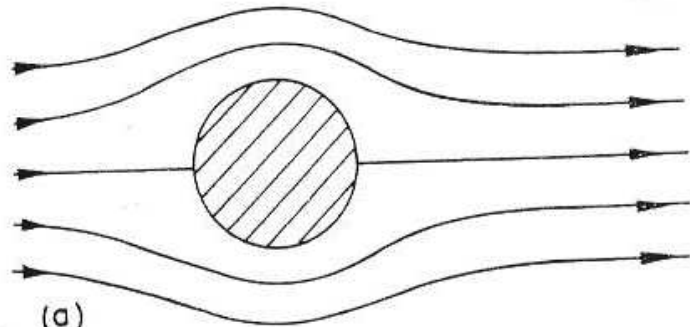


(c)  
 $R \approx 100$

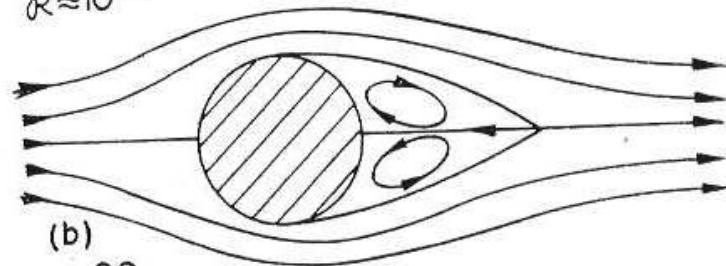
Desenhos de Richard Feynman  
(observações experimentais  
para um cilindro, Lectures II-41)



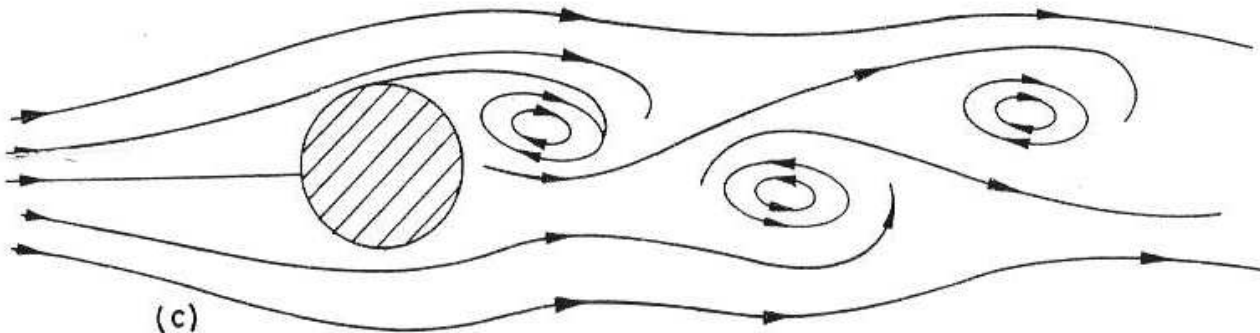
# A mecânica do fluido



(a)  
 $R \approx 10^{-2}$



(b)  
 $R \approx 20$



(c)  
 $R \approx 100$

Desenhos de Richard Feynman  
(observações experimentais  
para um cilindro, Lectures II-41)

número de Reynolds:  
 $R = VD/\nu$

# Feynman, de novo

# Feynman, de novo

Equações de Navier-Stokes para fluido incompressível

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

na formulação de Feynman  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$  (vorticidade):

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 \vec{\omega} - \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

# Feynman, de novo

Equações de Navier-Stokes para fluido incompressível

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

na formulação de Feynman  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$  (vorticidade):

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 \vec{\omega} - \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

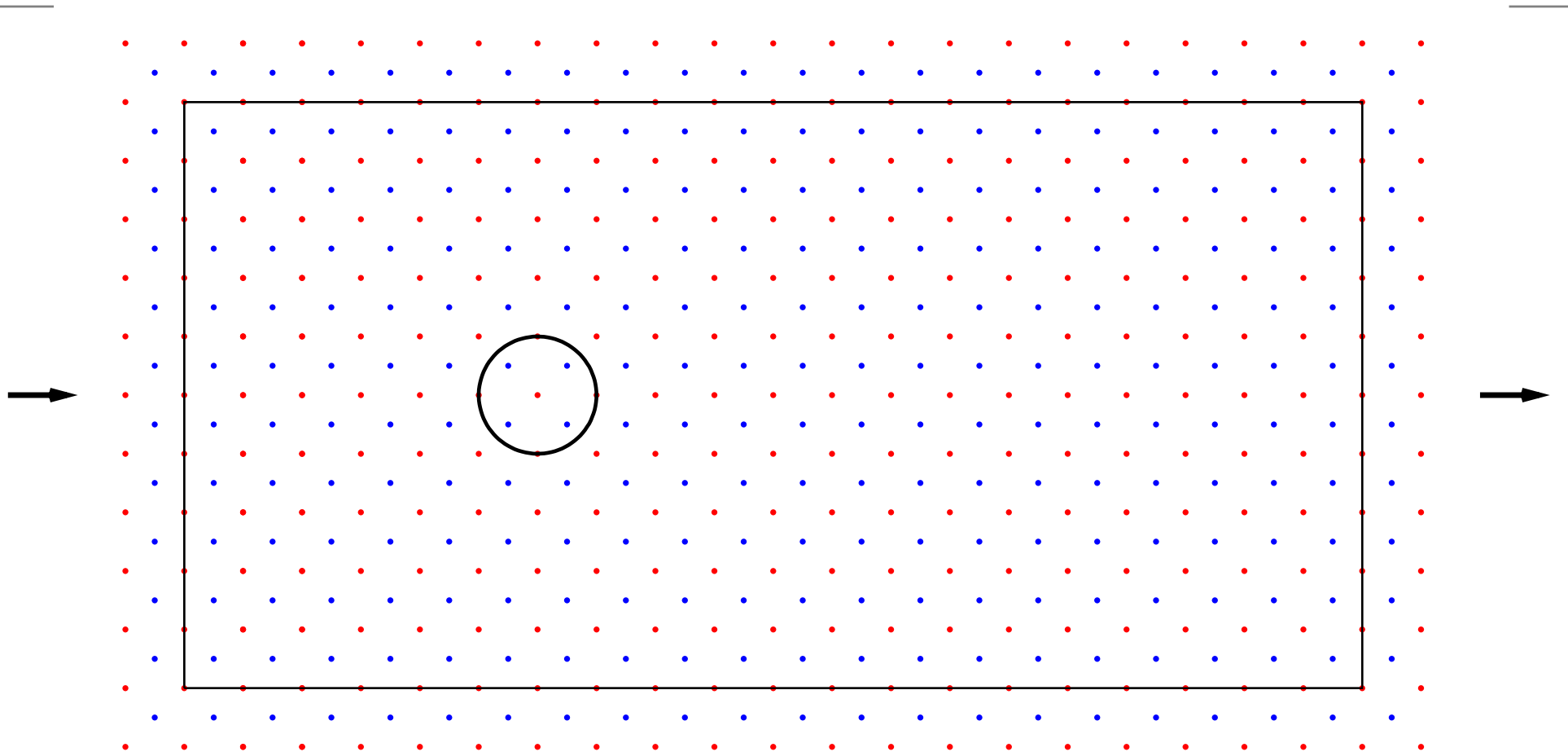
Caso limite famoso, devido a Stokes  $\mathcal{R} \rightarrow 0$ :

$$\nabla^2 \vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad F = -6\pi\eta r v_0$$

(equação de Laplace)

# Solução numérica

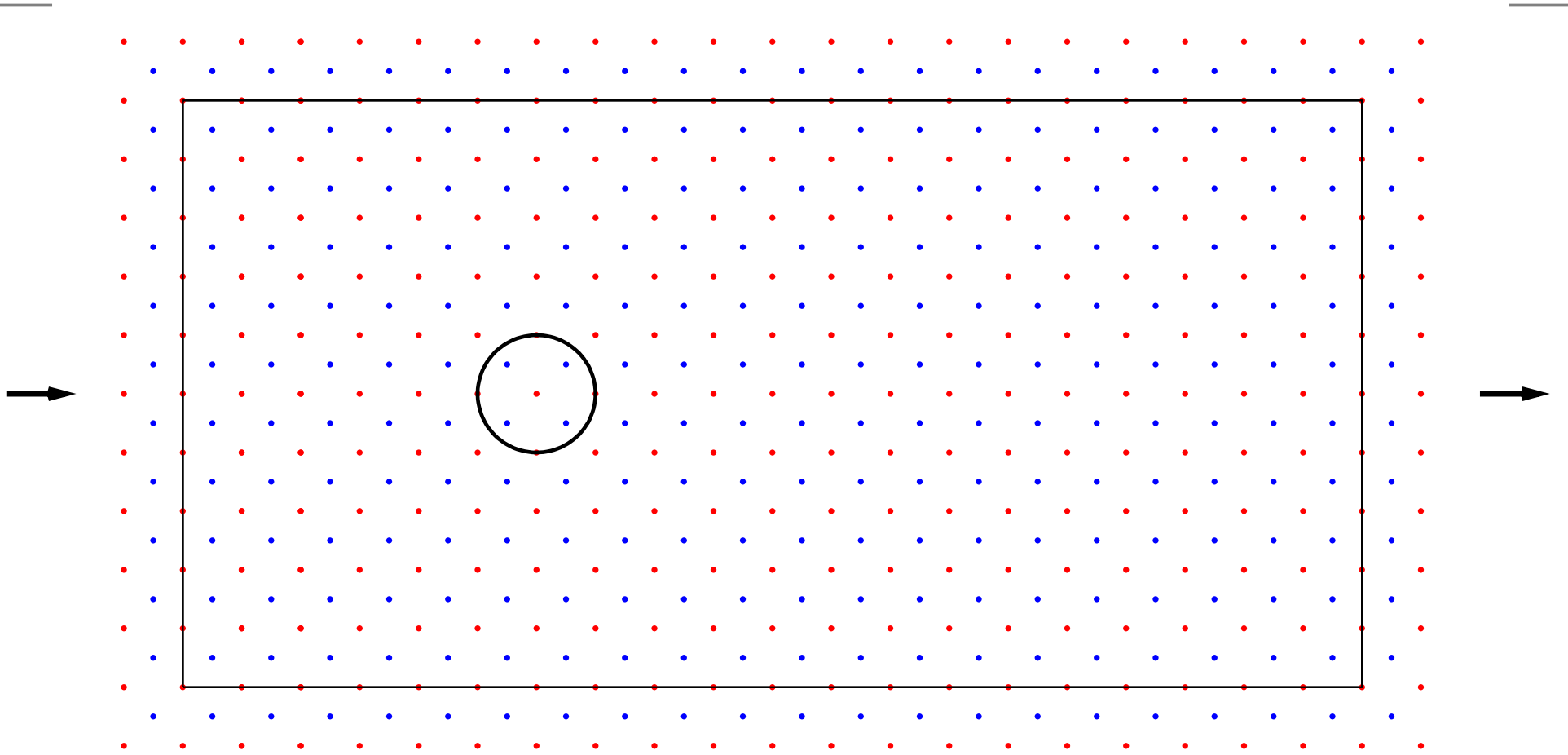
# Solução numérica



# Solução numérica



# Solução numérica



$\vec{v}$  na rede vermelha

$\omega$  na azul

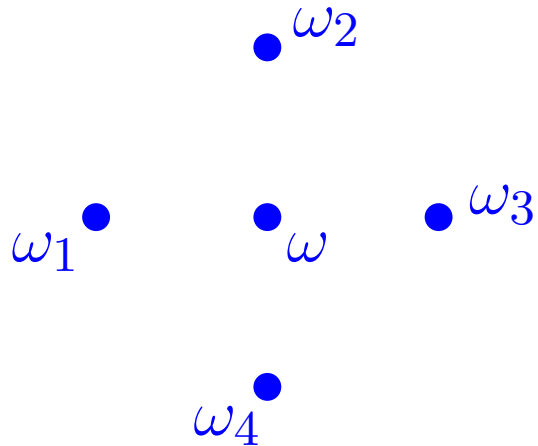
contorno:  $\vec{v} = 0$  na superfície do cilindro, e dentro dele;

$|\vec{v}| = 1$  (para a direita) no quadro preto, e fora dele.



# Exemplos

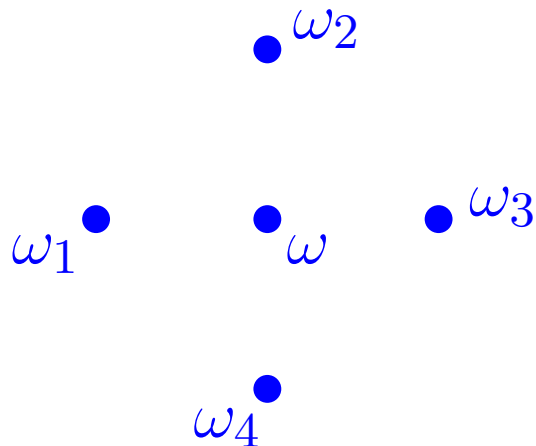
# Exemplos



$$\Delta x = \Delta y = h$$

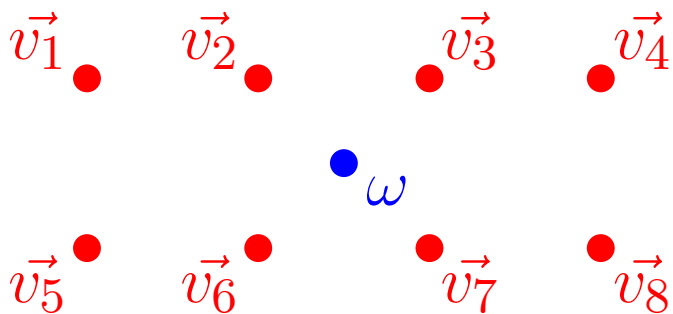
$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{h^2} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - 4\omega)$$

# Exemplos



$$\Delta x = \Delta y = h$$

$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{h^2} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - 4\omega)$$

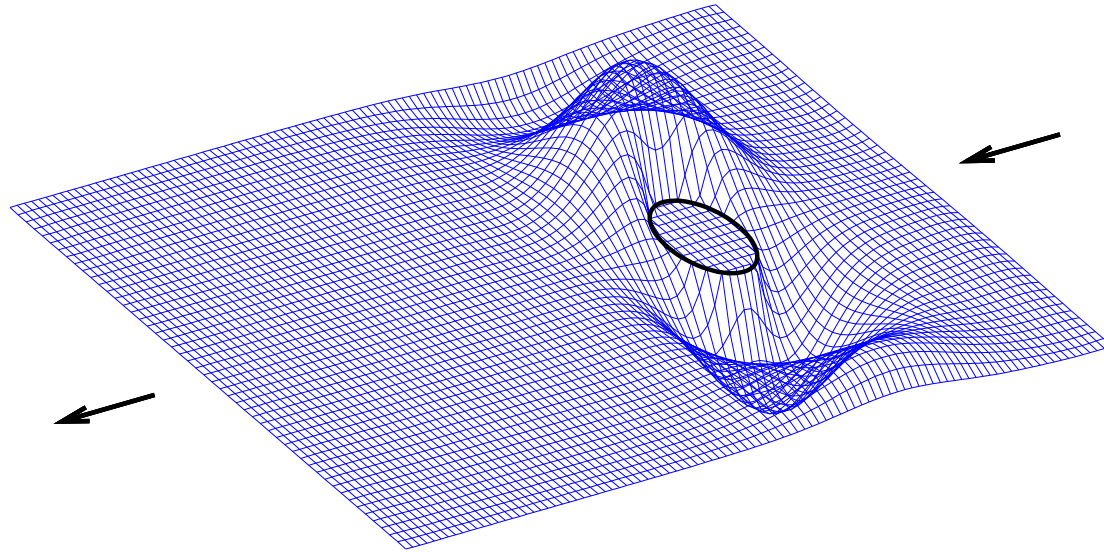


$$\omega = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v})$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{16h} [9(v_{2x} + v_{3x}) - (v_{1x} + v_{4x}) - 9(v_{6x} + v_{7x}) + (v_{5x} + v_{8x})]$$

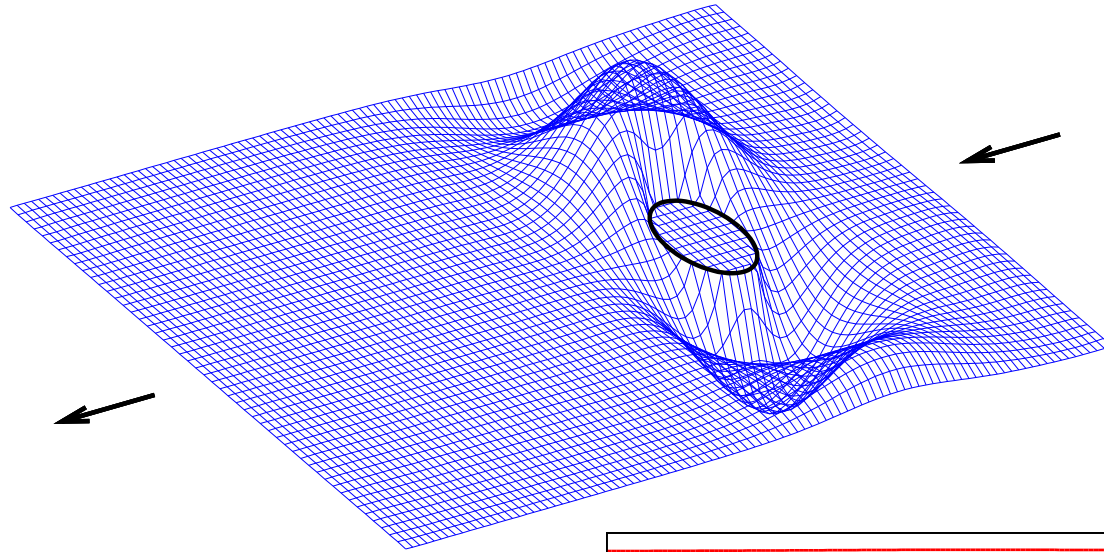
# Stokes ( $\mathcal{R} \rightarrow 0$ )

# Stokes ( $\mathcal{R} \rightarrow 0$ )

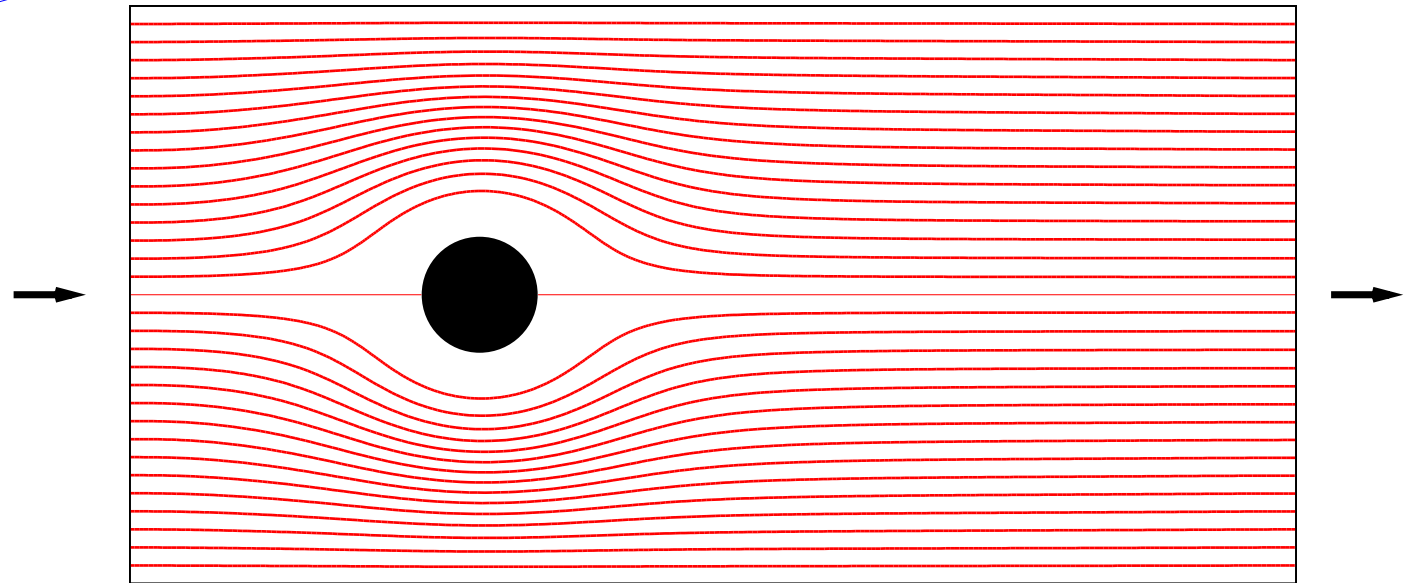


200 × 400

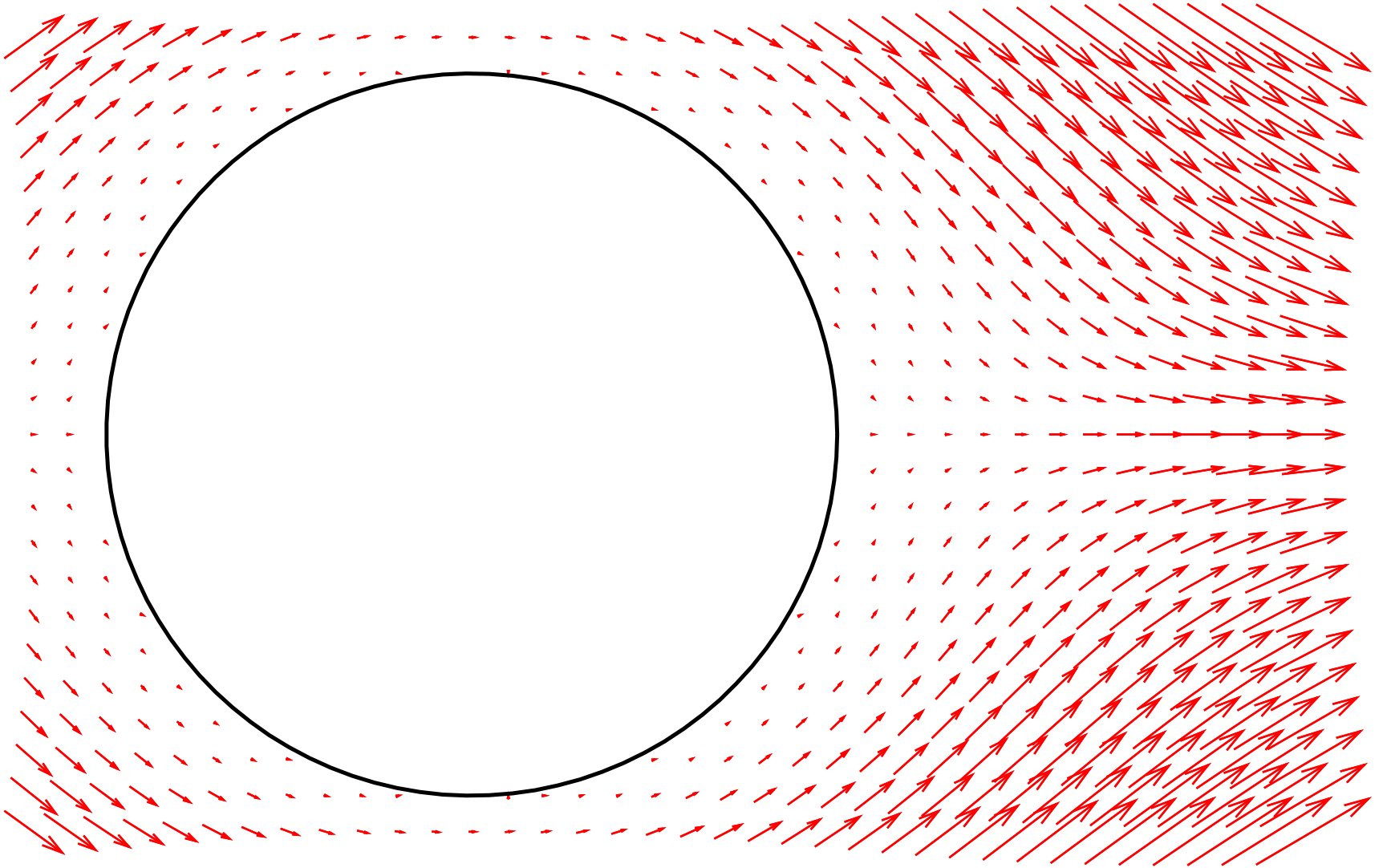
# Stokes ( $\mathcal{R} \rightarrow 0$ )



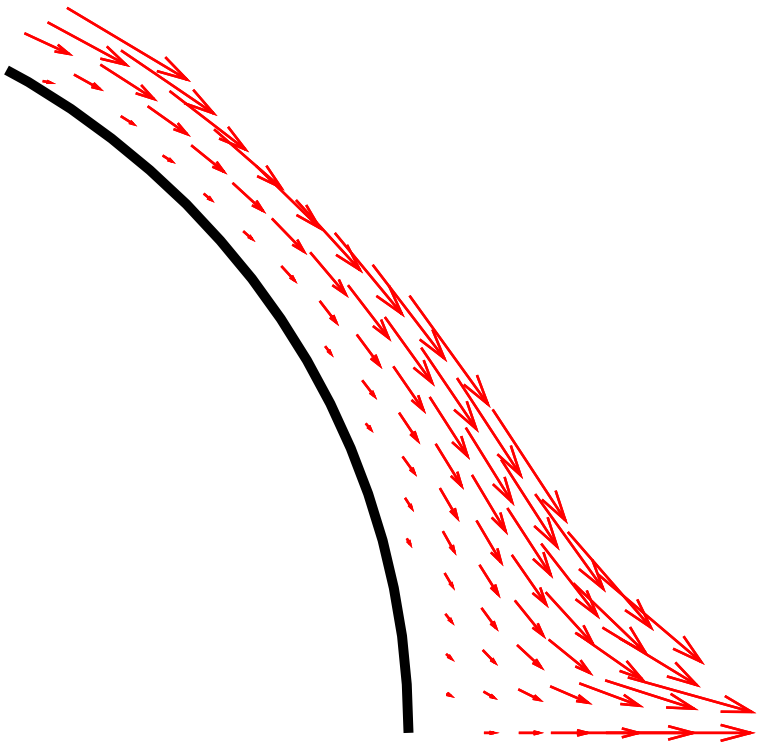
$200 \times 400$



# Stokes ( $\mathcal{R} \rightarrow 0$ )



# Stokes ( $\mathcal{R} \rightarrow 0$ )



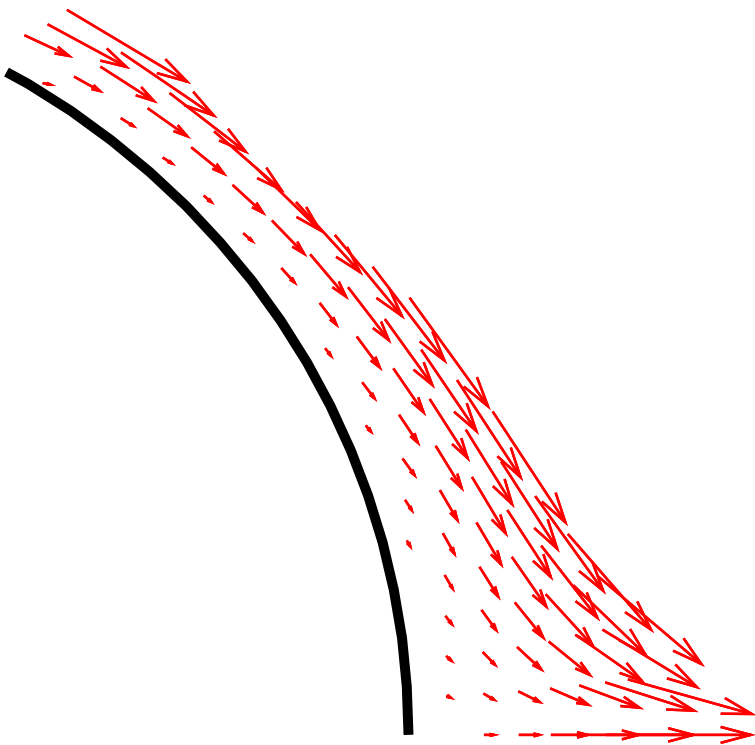


# Stokes ( $\mathcal{R} \rightarrow 0$ )

Esta configuração é o ponto de partida para o problema de Reynolds com

$$\begin{array}{l} \mathcal{R} = 30 \quad \text{até } t = 3.0 \\ \text{e } \mathcal{R} = 1000 \quad \text{até } t = 53.0 \end{array}$$

a seguir, em  
função do tempo



# Propaganda

# Propaganda

## *Computing Boolean Statistical Models*

P.M.C. de Oliveira

World Scientific, London New York Singapore, ISBN 981-02-0238-5 (1991)

## *Evolution, Money, War and Computers*

## *Non-Traditional Applications of Computational Statistical Physics*

S. Moss de Oliveira, P.M.C. de Oliveira and D. Stauffer

Teubner, Stuttgart Leipzig, ISBN 3-519-00279-5 (1999)

## *Biology, Sociology, Geology by Computational Physicists*

D. Stauffer, S. Moss de Oliveira, P.M.C. de Oliveira and Jorge Sá Martins

Elsevier, Amsterdam, ISBN 0-444-52146-1 (2006)

# O grupo da UFF

# O grupo da UFF

- Suzana Moss
- Jorge Sá Martins
- Thadeu Penna
- Marcio Argollo
- Jürgen Stilck
- Dietrich Stauffer (penetra de Köln)
- PMCO

# O grupo da UFF

- Suzana Moss  
Jorge Sá Martins  
Thadeu Penna  
Marcio Argollo  
Jürgen Stilck  
Dietrich Stauffer (penetra de Köln)  
PMCO
- Veit Schwämmle (Stuttgart)  
Eduardo Aguilar  
Klauko Mota  
Cinthya Chianca  
Nuno Crokidakis Peregrino  
Tiago J. de Oliveira
- C. Eduardo Galhardo  
Orahcio F. de Sousa

# O grupo da UFF

- Suzana Moss  
Jorge Sá Martins  
Thadeu Penna  
Marcio Argollo  
Jürgen Stilck  
Dietrich Stauffer (penetra de Köln)  
PMCO

- Veit Schwämmle (Stuttgart)  
Eduardo Aguilar  
Klauko Mota  
Cinthya Chianca  
Nuno Crokidakis Peregrino  
Tiago J. de Oliveira

C. Eduardo Galhardo  
Orahcio F. de Sousa

em memória de  
Pierre Henri Lucie