

Estudos sobre o Ensemble de Wishart-Tsallis de Matrizes Aleatórias

André M. C. Souza

Colaboração: F. O. S. de Almeida, F. Nobre

Roteiro

- Introdução – Mercado de Ações
- Matrizes Aleatórias
- q-Gaussianas e Matrizes Aleatórias
- Matrizes de Wishart
- q-Gaussianas e Matrizes de Wishart
- Matrizes de Wishart-Tsallis e o Mercado de Ações
- Conclusões e Perspectivas

Mercado de Ações

J. Kwapień et al. / Physica A 309 (2002) 171–182

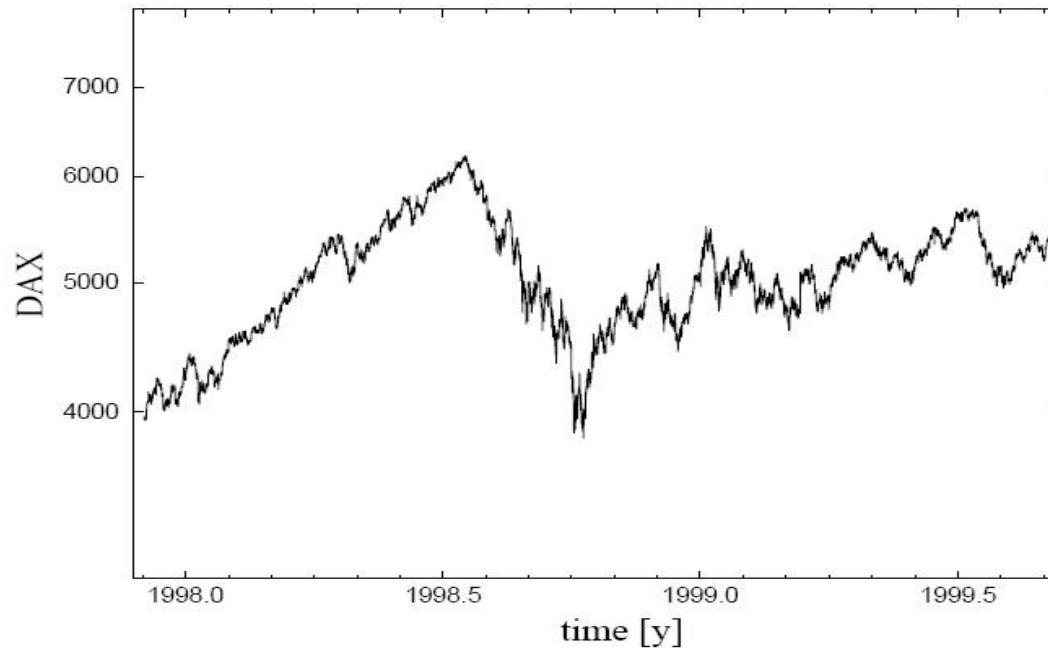


Fig. 1. The DAX in the calendar period November 28, 1997–September 17, 1999.

Mercado de Ações

- $S_i(t)$: Preço da ação da i -ésima empresa num tempo t
- $G_i(t,dt) = \ln S_i(t+dt) - \ln S_i(t)$

Matriz de Correlação/Covariância

$$C_{ij} = \frac{\langle G_i G_j \rangle - \langle G_i \rangle \langle G_j \rangle}{\sigma_i \sigma_j}$$

$\langle \dots \rangle$: Período de tempo
utilizado

$$\sigma_i = \sqrt{\langle G_i^2 \rangle - \langle G_i \rangle^2}$$

$$C = \frac{1}{T} M M^t$$

M : matriz retangular
 $N \times T$

Mercado de Ações

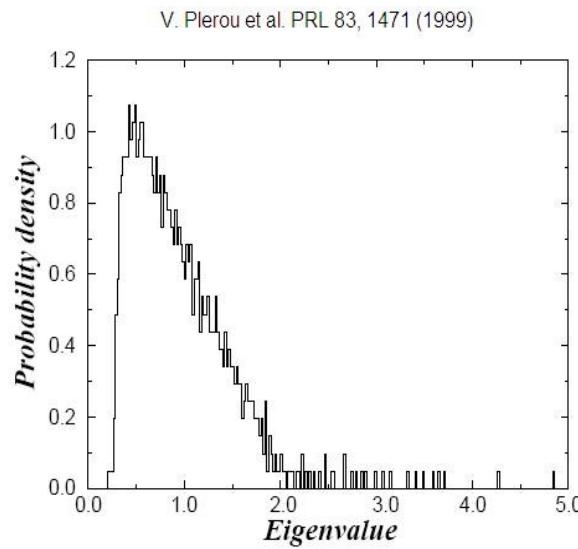


FIG. 1. The probability density function of the eigenvalues of the normalized cross-correlation matrix \mathbf{C} for the 1000 largest U.S. companies in the TAQ database for the 2-year period 1994–1995

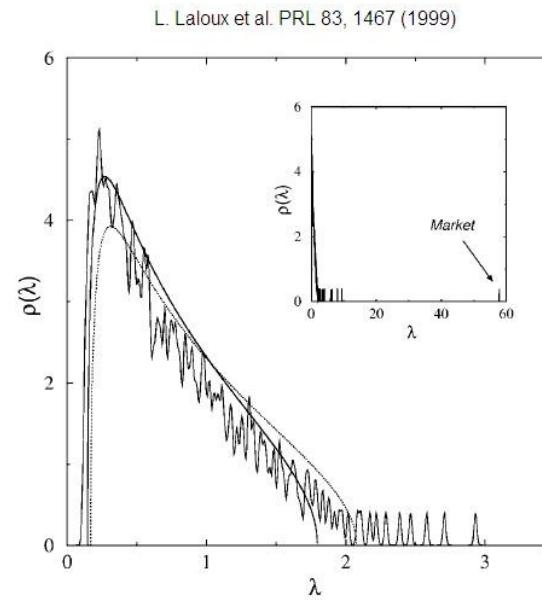


FIG. 1. Smoothed density of the eigenvalues of \mathbf{C} , where the correlation matrix \mathbf{C} is extracted from $N = 406$ assets of the S&P 500 during the years 1991–1996.

Mercado de Ações

174

J. Kwapień et al. / Physica A 309 (2002) 171–182

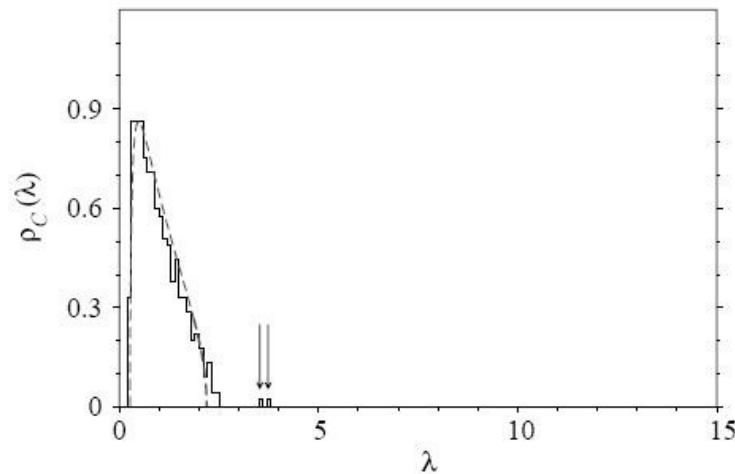


Fig. 2. The probability density (histogram) of the eigenvalues of the correlation matrix \mathbf{C} calculated from the DAX time series of 15 s returns during the calendar period November 28, 1997–September 17, 1999.

MATRIZES ALEATÓRIAS

MATRIZES ALEATÓRIAS

- Elementos das matrizes escolhidos aleatoriamente
- Matrizes necessariamente hermitianas e autovalores reais.
- Cálculo da densidade de probabilidade dos autovalores e distribuição dos espaçamentos entre níveis vizinhos

EM GERAL



Elementos são reais, estatisticamente independentes e obedecem a uma distribuição Gaussiana de probabilidades (GOE)

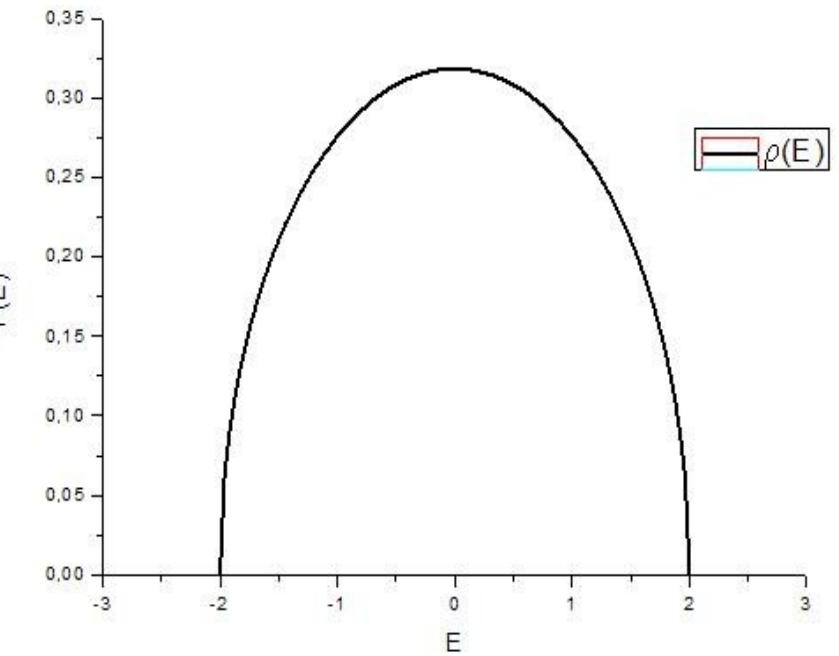
MATRIZES ALEATÓRIAS

• Distribuição de Autovalores

Lei do
semicircul
o

$$\rho(E) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sigma} \left[1 - \left(\frac{E}{2\sigma} \right)^2 \right]^{1/2} & \text{se } |E| < 2\sigma \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

σ representa a largura da distribuição gaussiana associado com os elementos da matriz



MATRIZES ALEATÓRIAS

Espaçamento
entre níveis
vizinhos



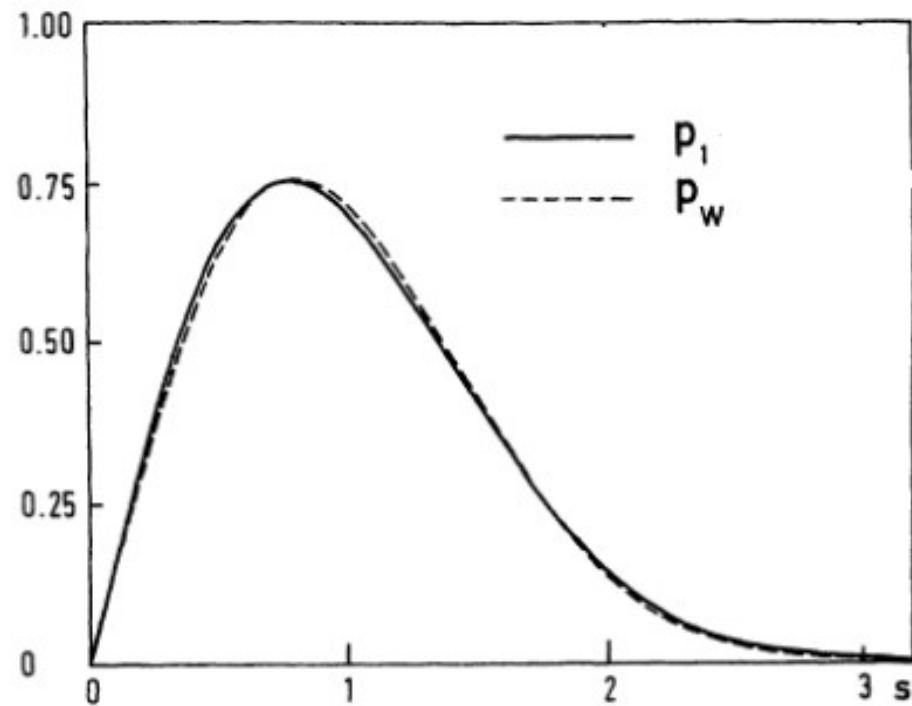
“Conjectura de Wigner”

Autovalores em ordem crescente

$$s_i = E_i - E_{i-1}$$



$$P(s) = \frac{\pi s}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{\pi s^2}{4\sigma^2}\right)$$



q-GAUSSIANAS E MATRIZES ALEATÓRIAS

$$p_q(E) = \frac{N}{\pi\sigma} \left(\frac{5-3q}{2} \right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{E}{2\sigma} \right)^2 \frac{5-3q}{2} \right]^{1/2} \quad \text{para } -\infty < q < \frac{5}{3}$$

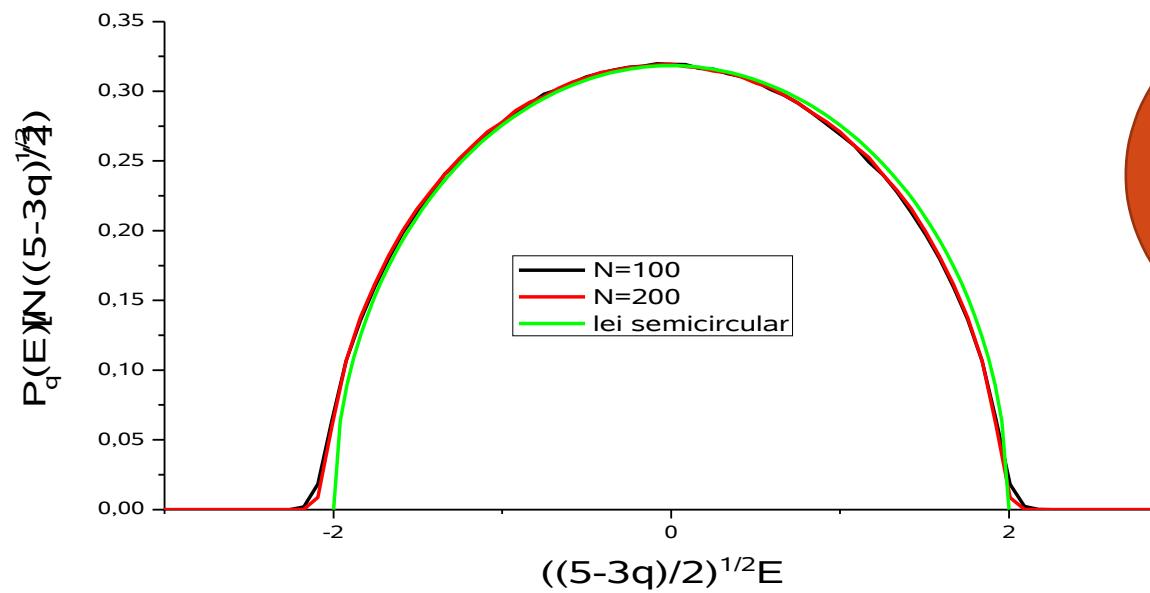
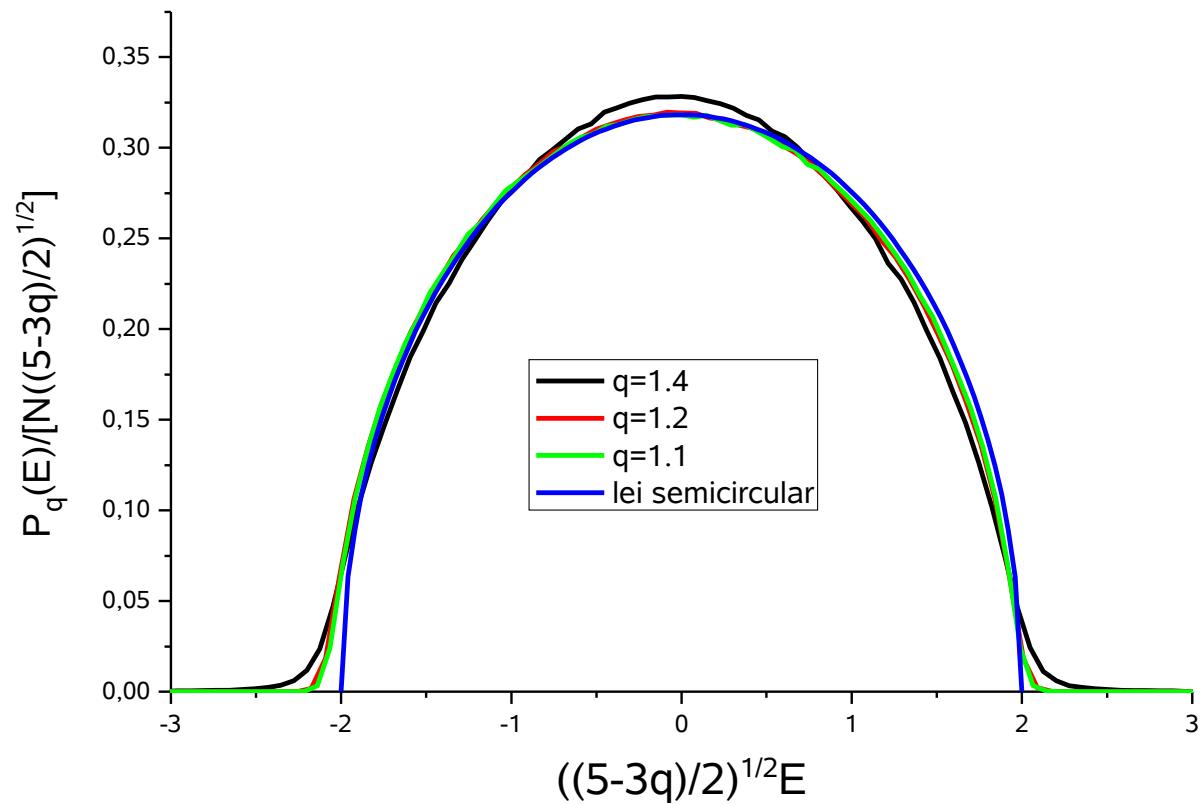


Gráfico com
 $q = 1.2$ fixo.
Quando
comparamos
vimos um bom
resultado com
a teoria





Análise das Densidades dos autovalores das q-Gaussianas para

$$q > \frac{5}{3}$$

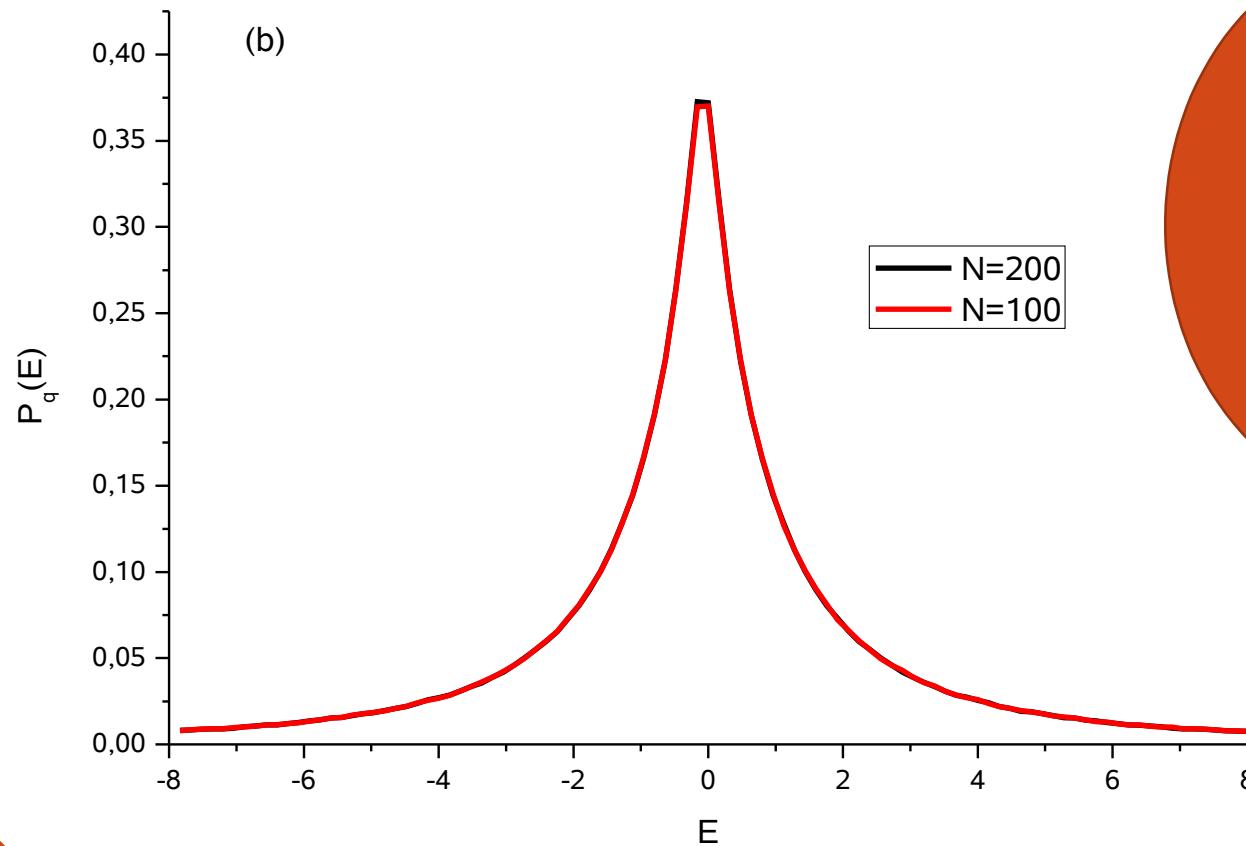
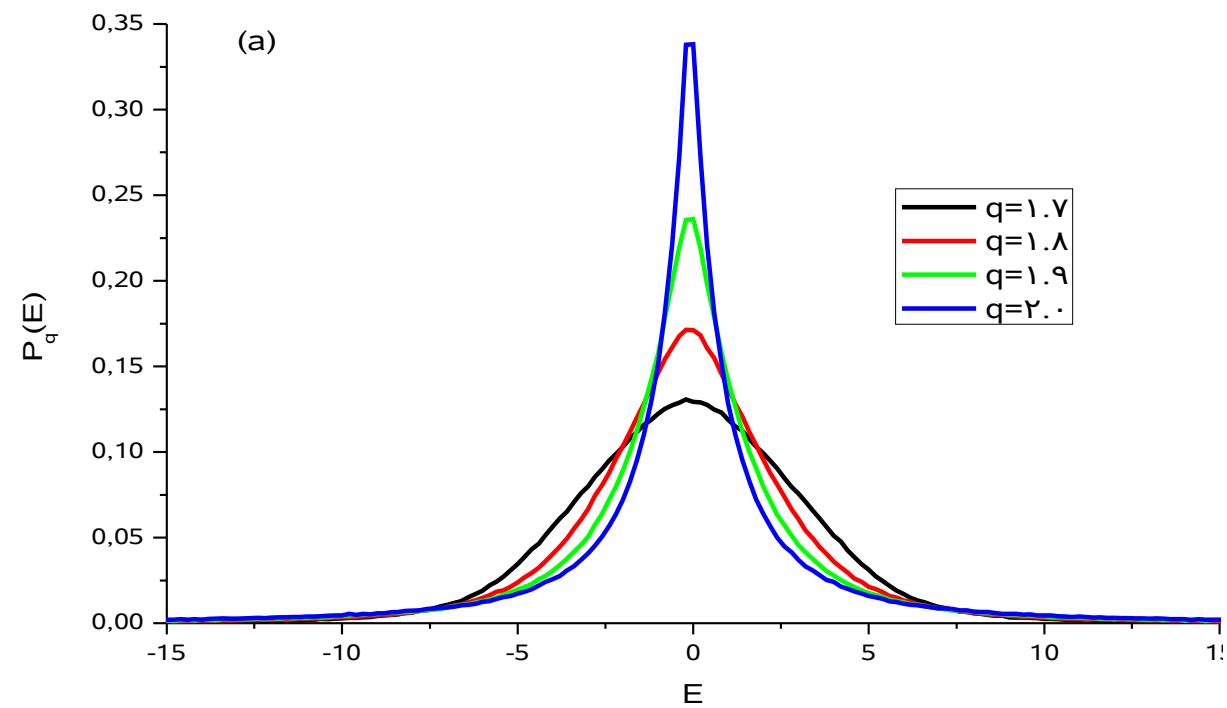


Gráfico com
 $q = 2.0$
fixo. Observar
a
convergência
em N



Distribuição de espaçamentos entre níveis das q-Gaussianas

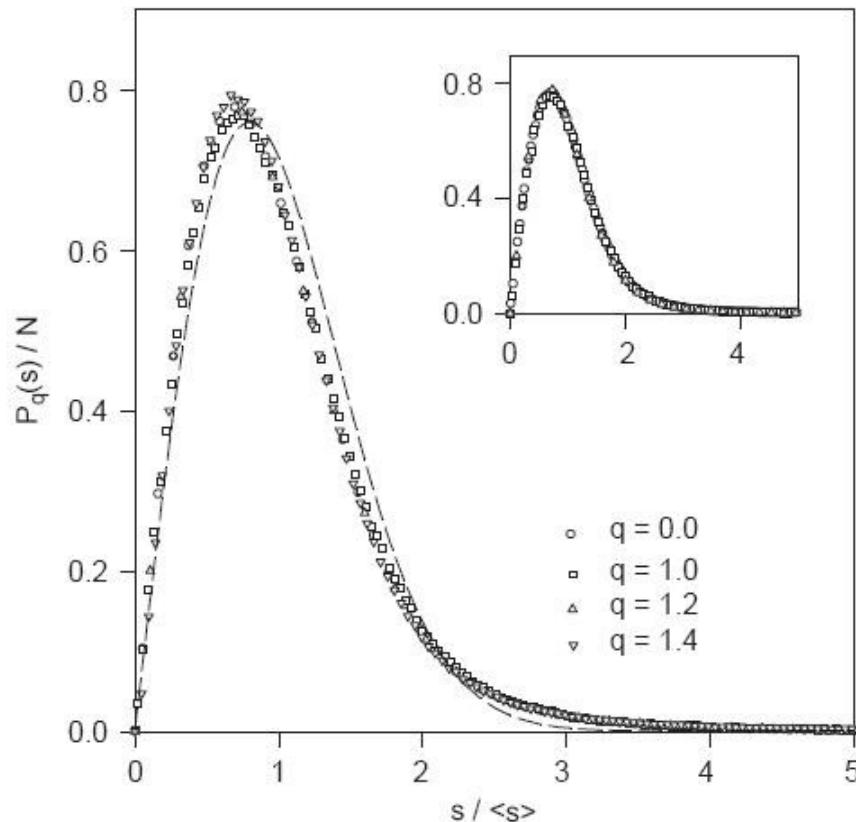


Fig. 3. The distribution of level spacings, in terms of properly rescaled variables, for matrices of size $N=400$ and typical values of q in the range $-\infty < q < \frac{5}{3}$. The dashed line corresponds to the GOE Wigner's surmise [Eq. (1.2)]. In the inset we exhibit the same quantity for $q=1.2$ and different matrix sizes ($N=100$, 200 , and 400).

MATRIZES DE WISHART

MATRIZES DE WISHART

- As matrizes de Wishart são construídas na forma:

$$W = G^T G$$

sendo G uma matriz $N \times M$ e sua transposta uma matriz $M \times N$, logo, W será uma matriz quadrada $N \times N$



**Diagonalizar a matriz para
achar os seus autovalores e
analisarmos o seu
comportamento.**

MATRIZES DE WISHART



Densidade dos autovalores das matrizes aleatórias de Wishart

- A densidade dos autovalores das matrizes de Wishart com seus elementos aleatórios e distribuídos pela Gaussiana é:

$$p_w(E) = \max \left(0, 1 - \frac{1}{a} \right) \delta(E) + \frac{1}{2\pi E a} \sqrt{(b_+ - E)(E - b_-)}$$

$$\text{onde } b_{\pm} = (1 \pm \sqrt{a})^2 \quad \text{e} \quad a = \frac{N}{M}$$

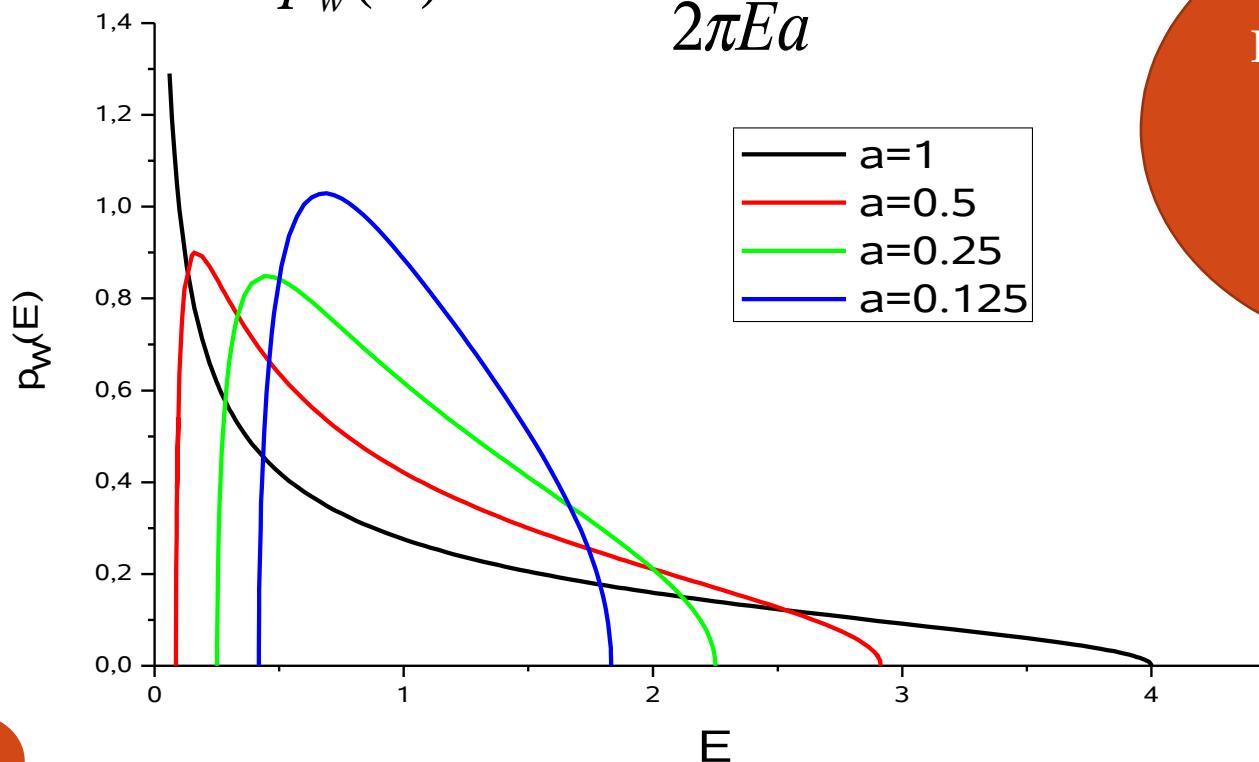
Já que as matrizes são construídas a partir de duas matrizes não quadradas, a relação de N/M caracterizará a densidade.

MATRIZES DE WISHART

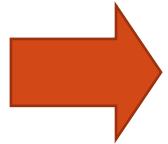


Para $\cdot < a \leq 1$ a equação da densidade dos autovalores ficará:

$$p_w(E) = \frac{\sqrt{(b_+ - E)(E - b_-)}}{2\pi Ea}$$



Iremos fazer uma análise desses 4 valores de a diferente



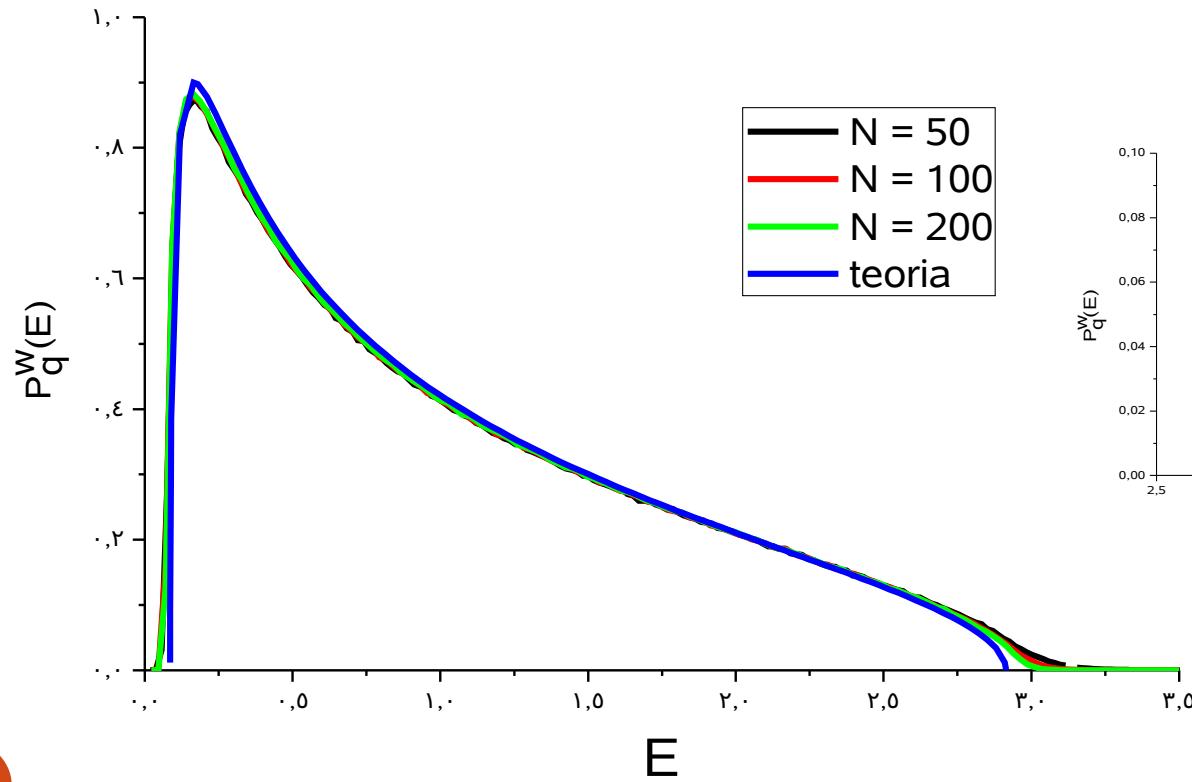
Lembrando que esses resultados foram obtidos considerando os elementos da matriz como sendo aleatórios e distribuídos por gaussianas.

O que acontece se os elementos de G são q-gaussianas?

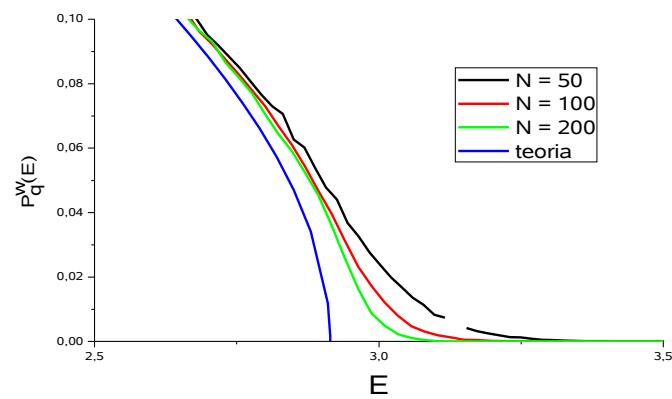
q-GAUSSIANAS E MATRIZES DE WISHART

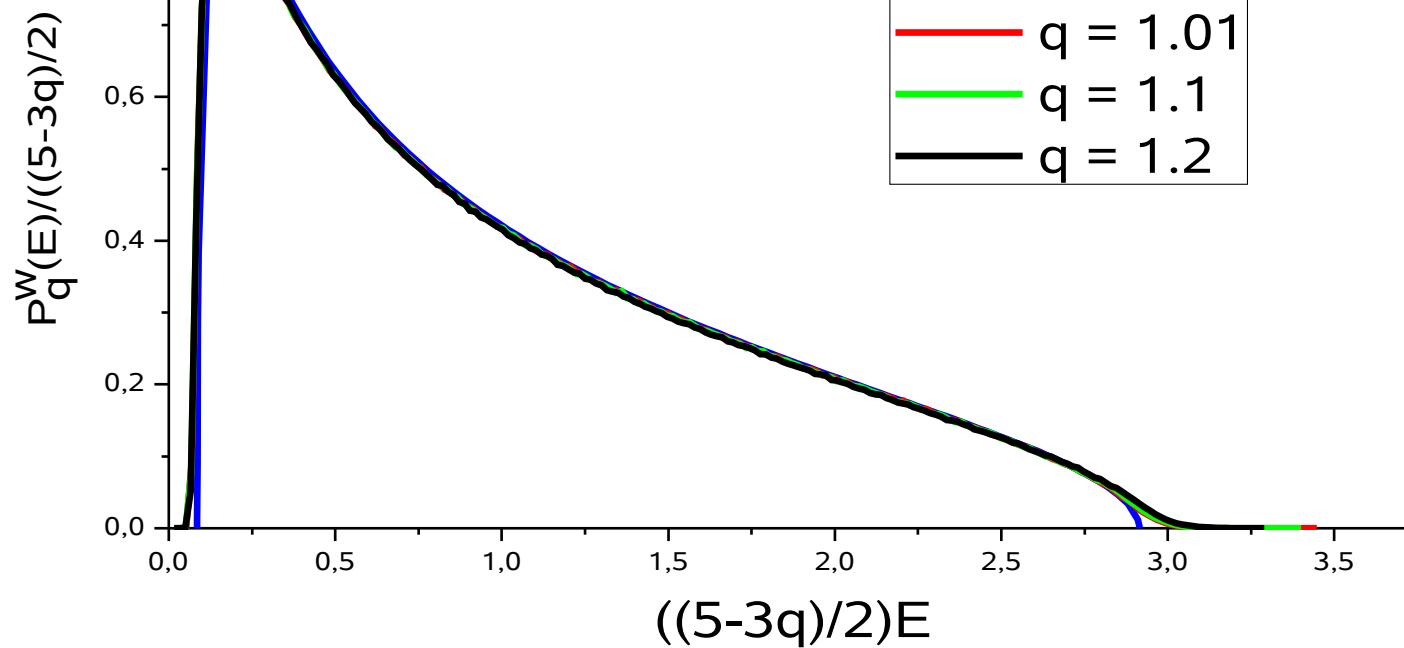


Densidade dos Autovalores

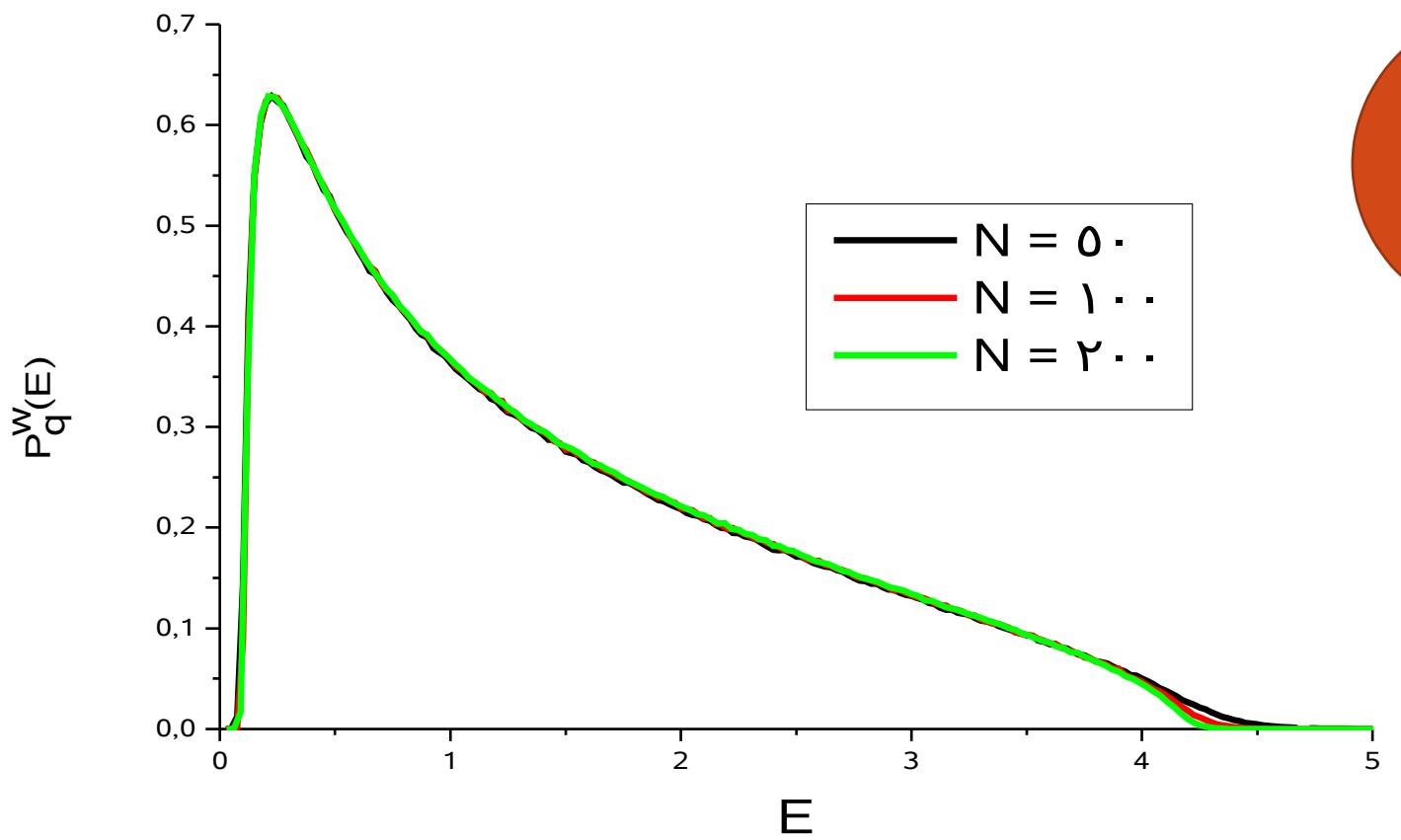


Caso:
 $a=0.5$ e
 $q=1.0$

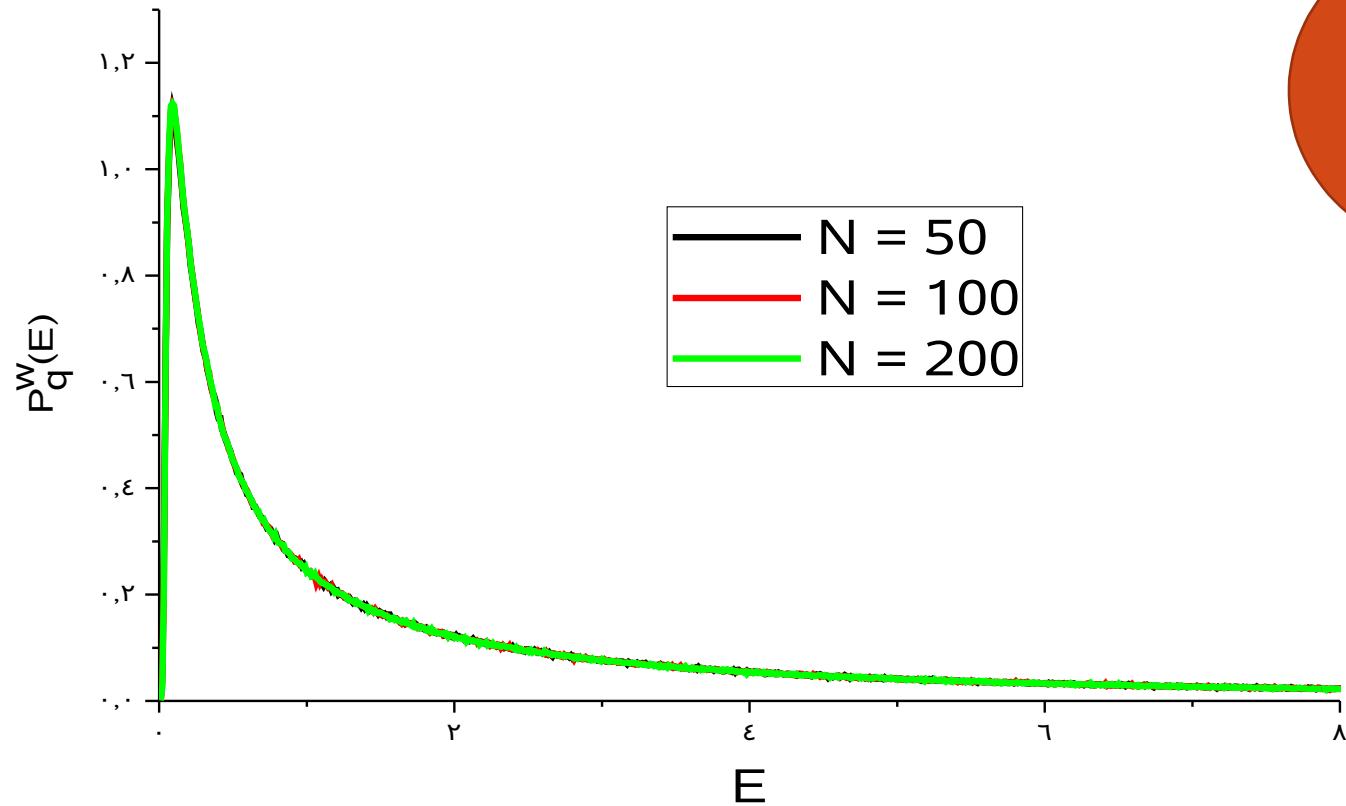




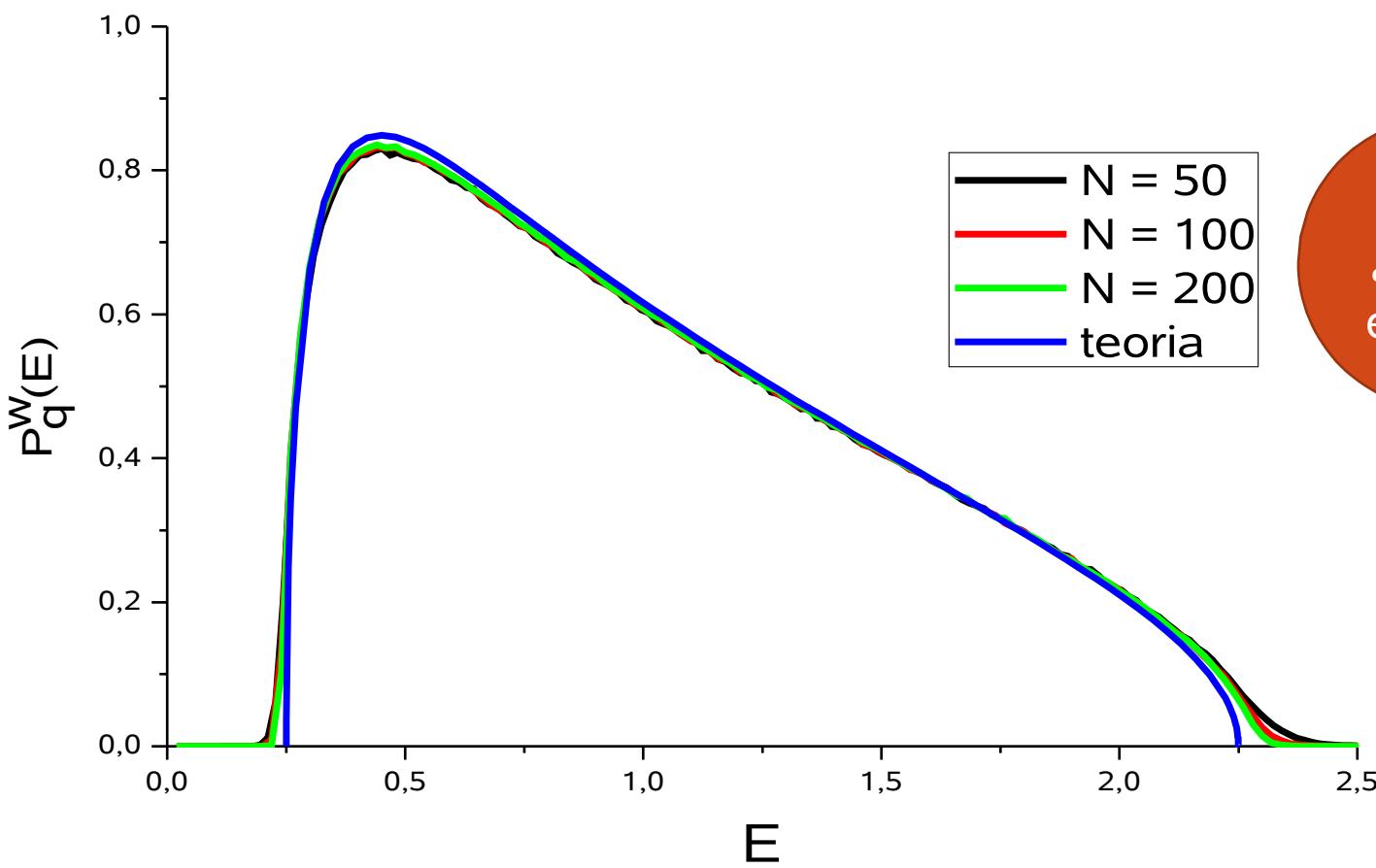
Caso:
 $a=0.5$ e
 $N=100$



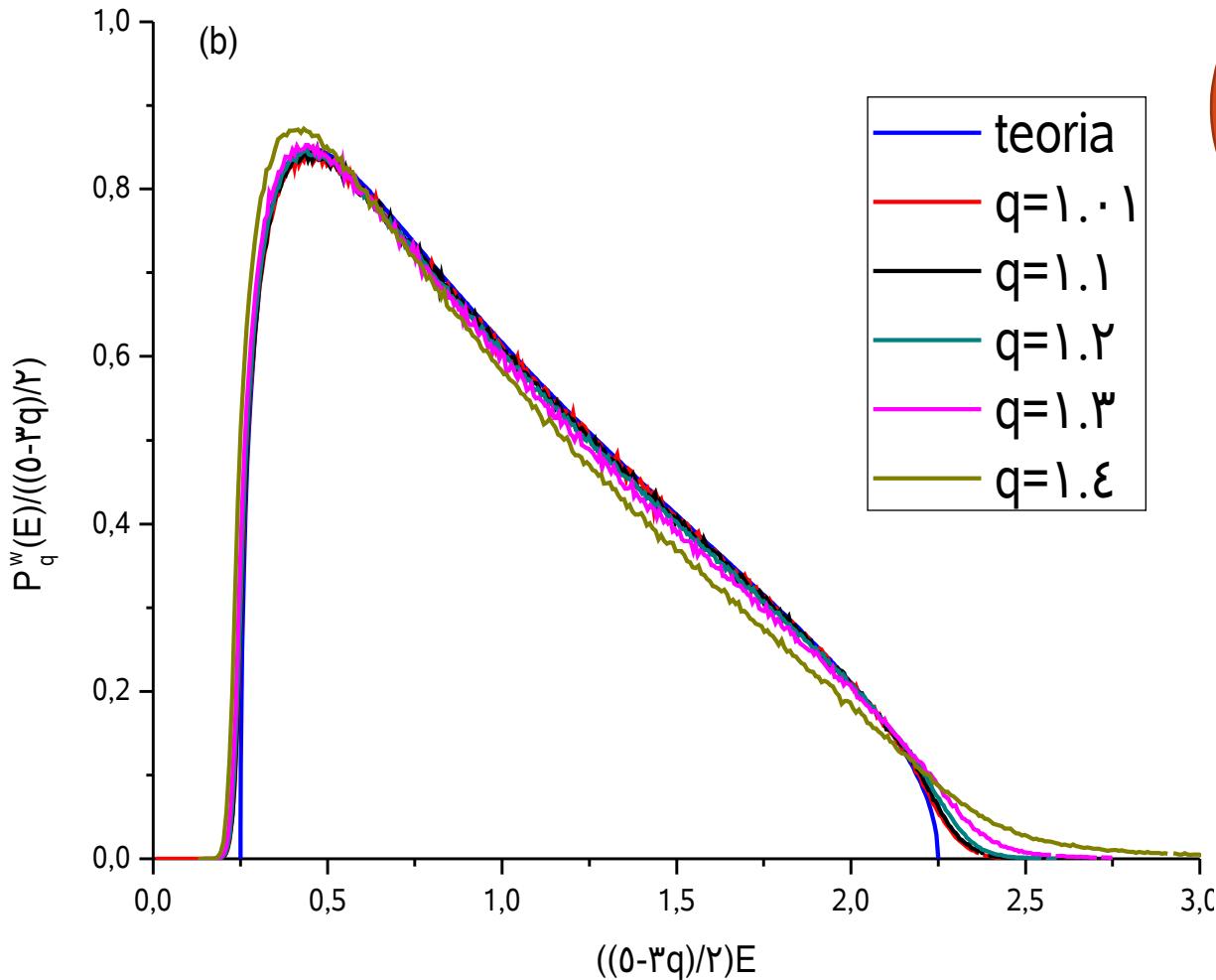
Caso:
 $a=0.5$ e
 $q=1.2$



Caso:
 $a=0.5$ e
 $q=2.0$



Caso:
 $a=0,25$
e $q=1,0$

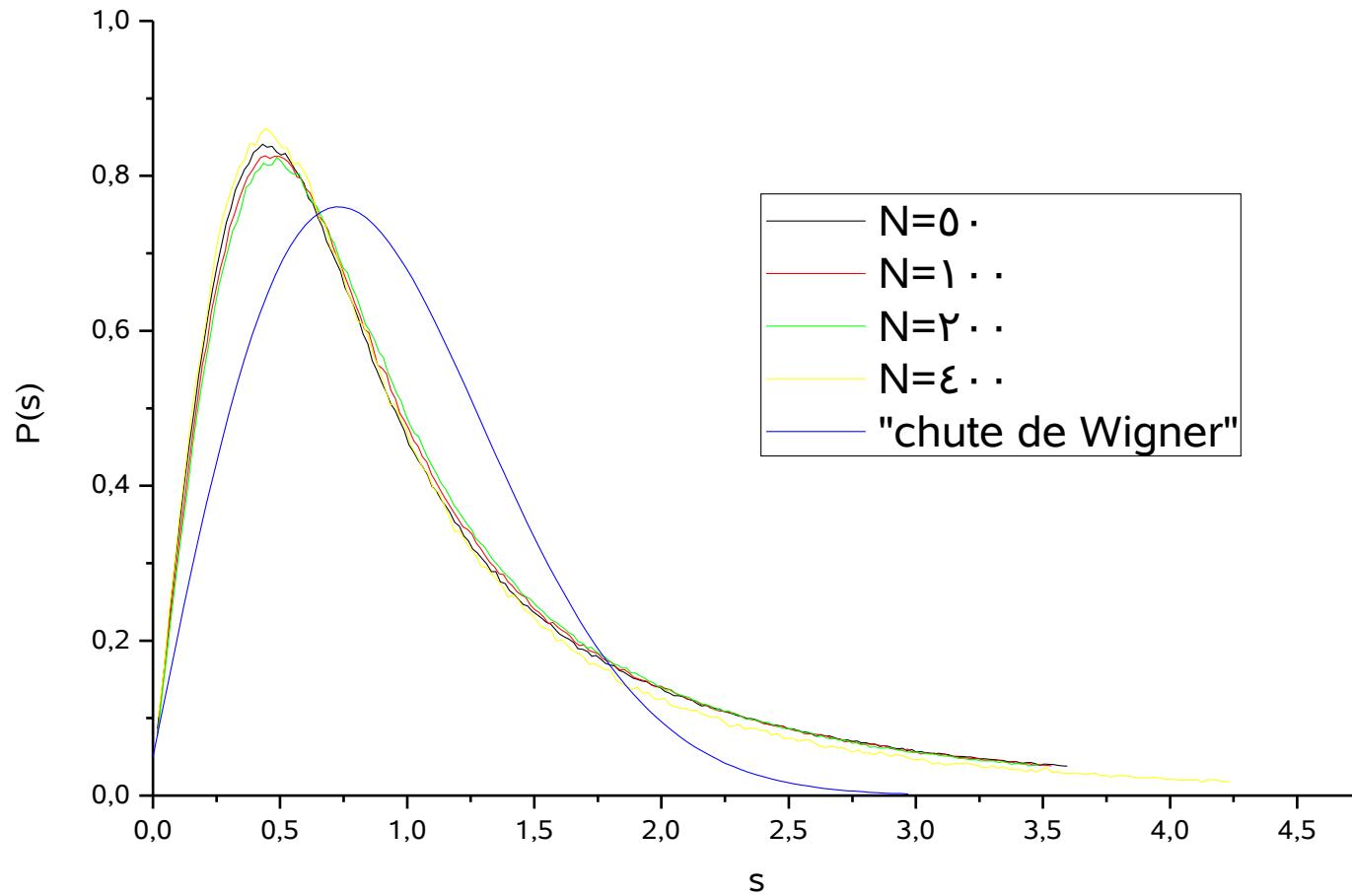


Caso:
 $a=0.25$ e
 $N=100$

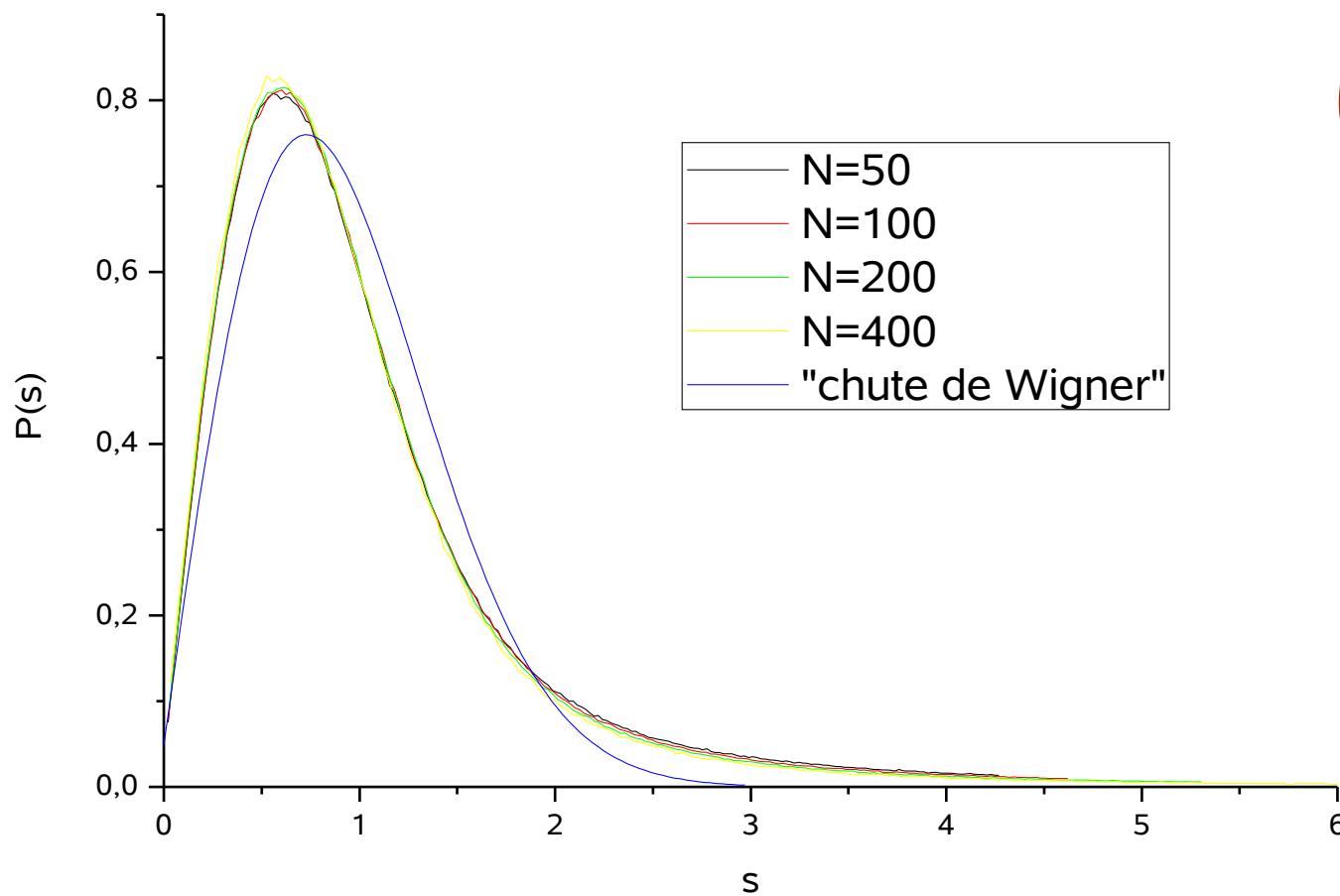
Percebemos
que a
convergência é mais
lenta
quando nos
aproximamos de $q=5/3$



Distribuição de espaçamentos entre níveis

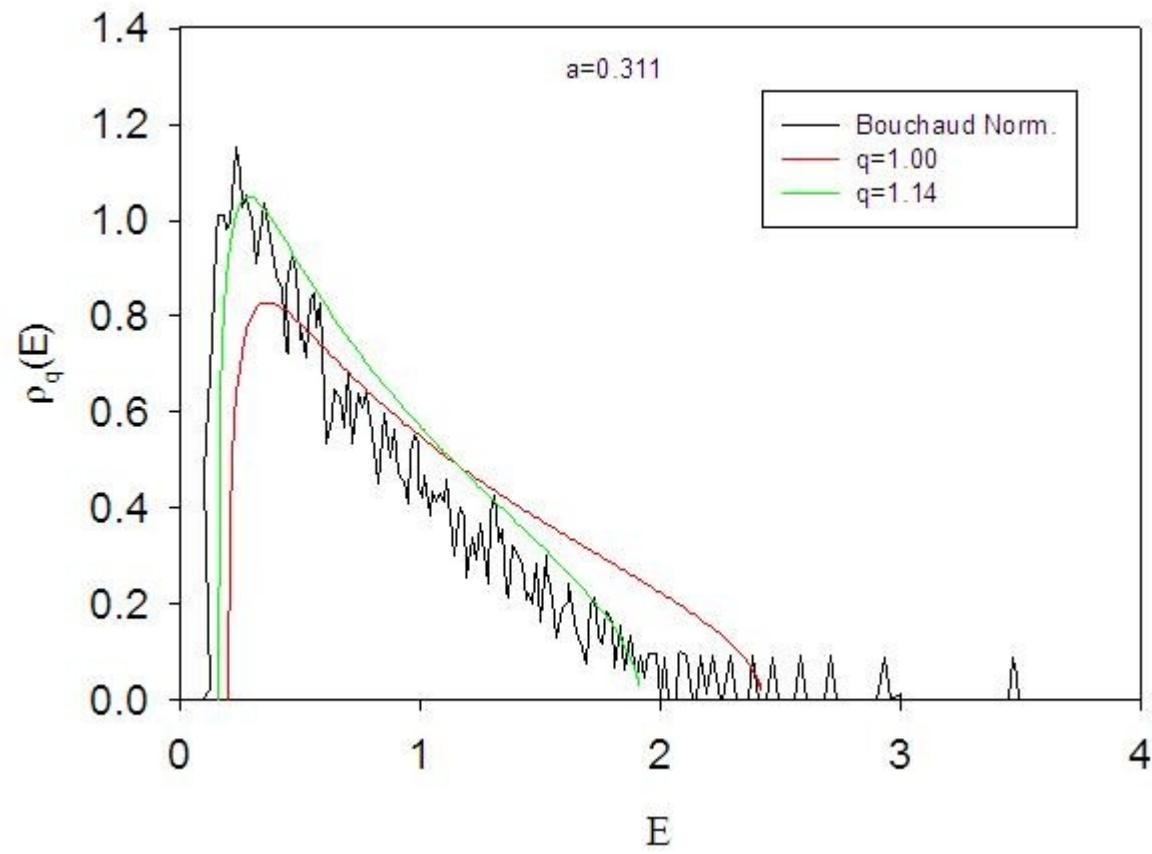


Caso:
 $a=0,5$ e
 $q=1,5$



Caso:
 $a=0,125$ e
 $q=1,5$

MATRIZES DE WISHART-TSALLIS E O MERCADO DE AÇÕES



→ Conjectura do Bouchard: $\sigma^2 = 1 - \frac{\lambda_{\max}}{N}$

→ Relação entre q e σ : $q = \frac{5 - 2\sigma^2}{3}$

$$q = 1 + \frac{2\lambda_{\max}}{3N}$$

→ $q = 1.10$ (Conjectura)
 $q = 1.14$ (melhor ajuste)

Conclusões

- Fizemos um estudo sobre ensemble de Wishart-Tsallis de matrizes aleatórias usando distribuição q-gaussiana para os elementos das matrizes. Para isso analisamos a densidade dos autovalores e os espaçamentos entre níveis vizinhos.
- Comparamos os resultados da densidade dos autovalores das matrizes de Wishart-Tsallis com os resultados das matrizes de correlação do mercado de ações e caracterizamos o valor de q.