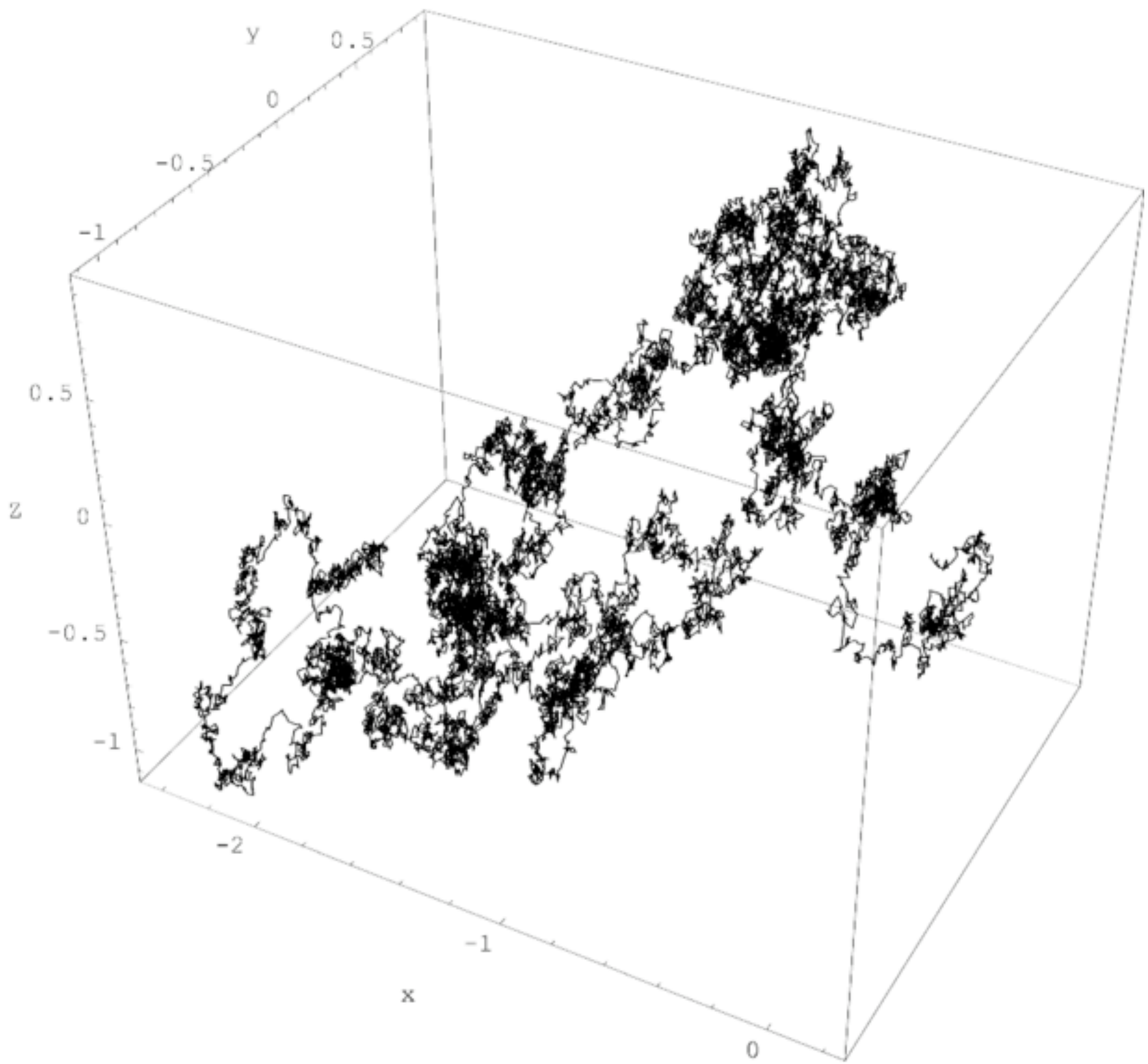
# Soluções exatas para condutividade térmica em sistemas pequenos: via direta e Green-Kubo


- *Welles A. M. Morgado*
- *PUC – Rio*


- *Apresentado no 1º Encontro do INCT-SC (24/03/2009), CBPF, RJ*


- *Colaborador: Diogo Soares-Pinto (CBPF)*



y
0.5
0
-0.5
-1
z
0.5
0
-0.5
-1
-2
-1
x
0

# Sumário

- Equação de Langevin
- Trabalho micro/macroscópico
- Média temporal & transformações de Laplace
- Funções resposta

# Motivação básica

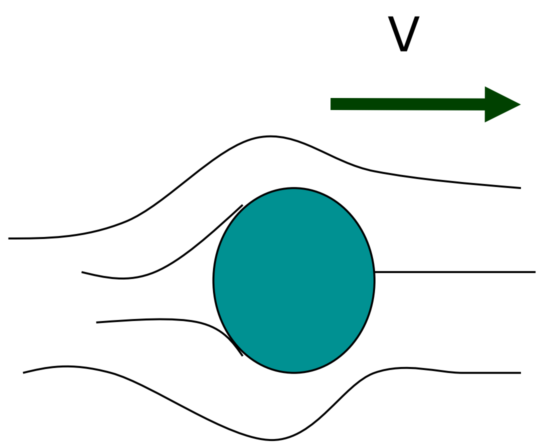
- Simples "toy model" que permite obter resultados exatos para sistemas fora do equilíbrio
- Média temporal é equivalente a integrar completamente a dinâmica do sistema
- O papel das propriedades não-Markovianas  do ruído e da inércia (massa) do sistema podem ser levados me conta de maneira exata

# Equação de Langevin

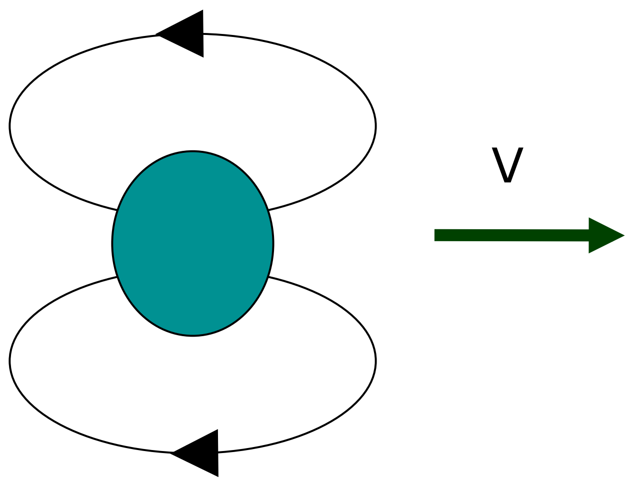
- Descreve a evolução temporal das variáveis dinâmicas do sistema
- Equações de Langevin generalizadas podem ser derivadas, por meio de operadores de projeção, diretamente da Equação de Liouville para o sistema, onde a função ruído é conseqüência dos graus rápidos de liberdade do sistema
- O ruído pode ser assumido efetivamente como Gaussiano, e tanto como branco (Markovian) ou colorido (não-Markoviana)

# Função memória para o ruído

- O ruído pode se acoplar à velocidade da partícula, via uma função memória, devido à excitação de graus hidrodinâmicos de liberdade




Referencial da partícula

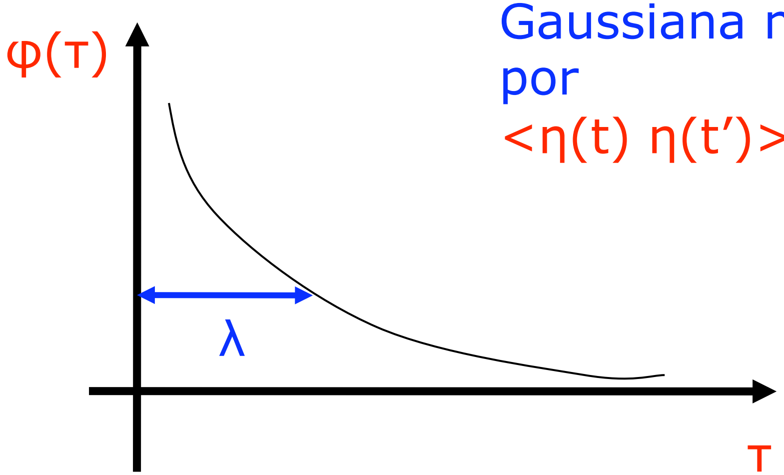



Referencial do lab.

# Ruído Colorido Gaussiano (não Markoviano)

- Se as interações entre as moléculas do fluido e a PB tem duração não nula, uma correlação temporal não-nula aparece entre ruídos a tempos diferentes.

A distribuição para $\eta(t)$ ainda é Gaussiana mas a variância é dada por
$\langle \eta(t)\, \eta(t') \rangle = \varphi(t-t')$




Escala de tempo → λ

# Ruído Branco Gaussiano (Markoviano)

- Quando as colisões entre o banho térmico e a partícula Browniana são rápidas, podemos considerar que o ruído, $\eta(t)$, não tem uma escala de tempo definida e a função de correlação no tempo é

$$\langle \eta(t)\, \eta(t') \rangle \propto \delta(t-t')$$

- Supomos também que a forma da distribuição para $\eta(t)$ é Gaussiana.

# Trabalho micro/macroscópico

- Trabalho macroscópico é realizado de forma organizada (poucos graus de liberdade)
- Trabalho microscópico é realizado de forma desorganizada (muitos graus de liberdade)
- Para sistemas pequenos a diferenciação trabalho-calor se torna ambígua

# Forma para o trabalho microscópico em 1-D (calor)

- Trabalho corresponde à força realizada pela mola sobre uma das partículas

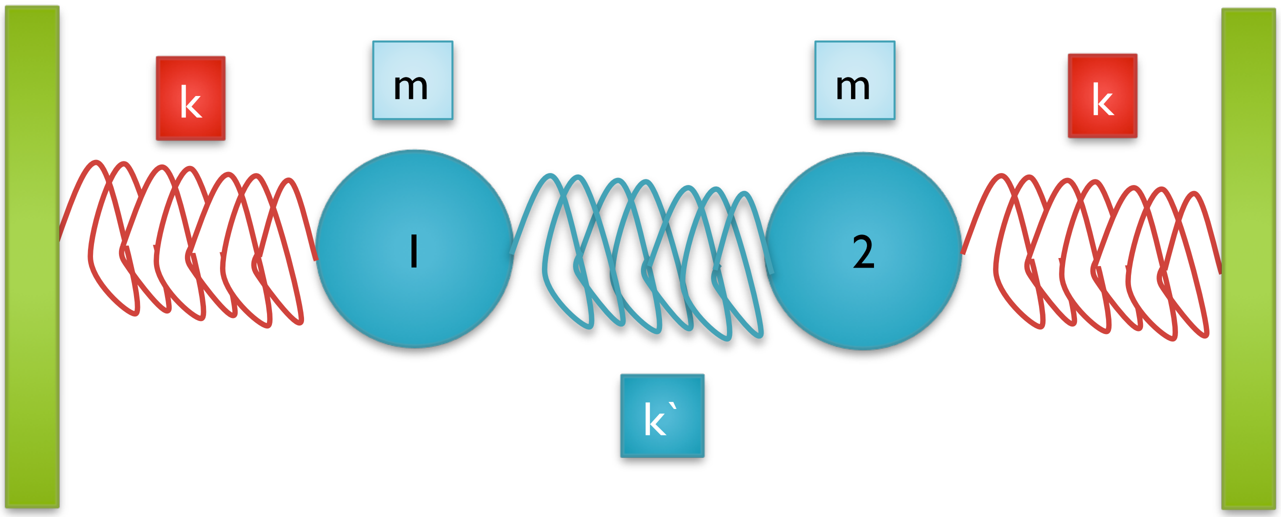
$$dW_1 = -k` (x_1 - x_2)\, dx_1$$
$$dW_2 = -k` (x_2 - x_1)\, dx_2$$

- Fluxo de energia corresponde a

$$J_{12} = (dW_1 - dW_2) / \Delta t$$

# Energia local e sua transferência

- O sistema consiste de massas e molas acopladas entre si e com reservatórios térmicos.
- A energia "local" de cada partícula corresponde a sua energia cinética e a parte (½) da energia acumulada na mola que as conecta



# Média temporal

- A média temporal é dada por

$$\rho(x,v,t) = \delta[x - x(x_0,v_0,t)]\,\delta[v - v(x_0,v_0,t)]$$

Devemos tomar a média sobre todas a realizações do ruído para obtermos uma distribuição de densidades de probabilidade significativa.

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt \langle \rho(x,v,t)\rangle_{\xi,\eta}$$

$$= \lim_{z\to 0^+} z \int_0^\infty dt e^{-zt} \langle \rho(x,v,t)\rangle_{\xi,\eta}.$$

Vemos que a distribuição estacionária é naturalmente uma transformada de Laplace da distribuição de probabilidades instantânea

# Média temporal → média experimental

- Qualquer experimento é realizado ao longo do tempo, sobre o mesmo sistema
- Médias experimentais são médias tomadas ao longo do tempo
- Não existe ambigüidade sobre qual ensemble deve ser o correto
- Mas são difíceis de serem obtidas explicitamente...

# Busca do equilíbrio

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = L\,\rho(t) \equiv \{H, \rho(t)\}$$

# Busca do equilíbrio

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = L\,\rho(t) \equiv \{H, \rho(t)\}$$

$$\rho(t) = e^{L\,t}\,\rho(0)$$

# Busca do equilíbrio

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = L\,\rho(t) \equiv \{H, \rho(t)\}$$

$$\rho(t) = e^{L\,t}\,\rho(0)$$

$$< \rho >_{ta} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\,\rho(t)$$

$$= \lim_{z\to 0^+} z\int_0^\infty dt\,e^{-zt}\,\rho(t)$$

$$= \lim_{z\to 0^+} z\int_0^\infty dt\,e^{-zt}\,e^{L\,t}\,\rho(0)$$

# Busca do equilíbrio

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = L\,\rho(t) \equiv \{H, \rho(t)\}$$

$$L\phi_n = \lambda_n \phi_n,$$

$$\rho(t) = e^{L\,t}\,\rho(0)$$

$$\begin{aligned} < \rho >_{ta} &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt\,\rho(t) \\ &= \lim_{z\to 0+} z\int_0^\infty dt\,e^{-zt}\,\rho(t) \\ &= \lim_{z\to 0+} z\int_0^\infty dt\,e^{-zt}\,e^{L\,t}\,\rho(0) \end{aligned}$$

# Busca do equilíbrio

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = L\,\rho(t) \equiv \{H, \rho(t)\}$$

$$\rho(t) = e^{L\,t}\,\rho(0)$$

$$< \rho >_{ta} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt\; \rho(t)$$

$$= \lim_{z\to 0+} z \int_0^\infty dt\, e^{-zt}\, \rho(t)$$

$$= \lim_{z\to 0+} z \int_0^\infty dt\, e^{-zt}\, e^{L\,t}\, \rho(0)$$

$$L\phi_n = \lambda_n \phi_n,$$

$$< \rho >_{ta} = \lim_{z\to 0+} z \int_0^\infty dt\, e^{-zt}\, e^{L\,t}\, \rho(0)$$

$$= \lim_{z\to 0+} z \int_0^\infty dt\, e^{-zt} \sum_n c_n^{(0)} e^{\lambda_n\,t} \phi_n$$

$$= \lim_{z\to 0+} \sum_n \frac{z}{z-\lambda_n} c_n^{(0)} \phi_n.$$

# Busca do equilíbrio

$$
\begin{aligned}
< \rho >_{ta} &= \lim_{z \to 0^+} z \int_0^\infty dt\, e^{-zt}\, e^{L\,t}\, \rho(0) \\
&= \lim_{z \to 0^+} z \int_0^\infty dt\, e^{-zt} \sum_n c_n^{(0)} e^{\lambda_n\, t} \phi_n \\
&= \lim_{z \to 0^+} \sum_n \frac{z}{z - \lambda_n} c_n^{(0)} \phi_n .
\end{aligned}
$$

# Coeficientes de resposta

- Seja o fluxo de calor $\langle j_{12} \rangle_{\Delta T}$ gerado pela diferença de temperatura dos reservatórios em contato com as partículas 1 e 2
- A condutividade térmica $\kappa(T, \Delta T)$ é definida por

$$\kappa(T, \Delta T) = \partial \langle j_{12} \rangle_{\Delta T} / \partial \Delta T$$

$$\langle j_{12} \rangle_{\Delta T} = \langle j_{12} \rangle (T, \Delta T) = \int d\Delta T \; \kappa(T, \Delta T)$$

# Transformada de Laplace da dinâmica

- As equações de movimento são

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= v_1(t), \\
m_1\, \dot{v}_1(t) &= -k\,(x_1(t) - x_2(t)) - k'\, x_1(t) - \gamma_1 v_1(t) + \eta_1(t), \\
\dot{x}_2(t) &= v_2(t), \\
m_2\, \dot{v}_2(t) &= -k\,(x_2(t) - x_1(t)) - k''\, x_2(t) - \gamma_2 v_2(t) + \eta_2(t).
\end{aligned}
$$

- As transformações de Laplace para as equações de movimento são

$$
\begin{aligned}
\bar{x}_1(s) &= \Lambda(s)\, \bar{\eta}_1(s) + \Delta(s)\, \bar{\eta}_2(s), \\
\bar{v}_1(s) &= s\, \Lambda(s)\, \bar{\eta}_1(s) + s\, \Delta(s)\, \bar{\eta}_2(s), \\
\bar{x}_2(s) &= \Delta(s)\, \bar{\eta}_1(s) + \Lambda(s)\, \bar{\eta}_2(s), \\
\bar{v}_2(s) &= s\, \Delta(s)\, \bar{\eta}_1(s) + s\, \Lambda(s)\, \bar{\eta}_2(s),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Lambda(s) &\equiv \frac{\Gamma(s)}{\Gamma^2(s) - k^2}, \\
\Delta(s) &\equiv \frac{k}{\Gamma^2(s) - k^2}.
\end{aligned}
$$

$$\Gamma(s) \equiv m\, s^2 + \gamma\, s + k + k'$$

# Transformação de Laplace para os ruídos

Ruído branco

$$\langle \tilde{\eta}(iq_i+\epsilon)\,\tilde{\eta}(iq_j+\epsilon)\rangle = \frac{2\Gamma_1 T_1}{i(q_i+q_j)+2\epsilon}$$

Ruído colorido

$$\langle \tilde{\xi}(iq_i+\epsilon)\tilde{\xi}(iq_j+\epsilon)\rangle = \left\{\frac{2\Gamma_2 T_2}{[i(q_i+q_j)+2\epsilon][1-\tau(iq_i+\epsilon)][1-\tau(iq_j+\epsilon)]}\right\}$$
$$-\Gamma_2 T_2 \tau \left\{\frac{3+\tau[i(q_i+q_j)+2\epsilon]-\tau^2(iq_i+\epsilon)(iq_j+\epsilon)}{[1-\tau(iq_i+\epsilon)][1+\tau(iq_i+\epsilon)][1-\tau(iq_j+\epsilon)][1+\tau(iq_j+\epsilon)]}\right\}$$

# Expressando x e v em função do ruído

# Expressando x e v em função do ruído

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z\to 0^+} z \int_0^\infty e^{-zt} \langle \delta[x - x(t)]\delta[v - v(t)] \rangle dt .$$

# Expressando x e v em função do ruído

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z\to 0^+} z\int_0^\infty e^{-zt}\langle \delta[x-x(t)]\delta[v-v(t)]\rangle dt .$$

$$\begin{aligned}\langle \delta[x-x(t)]\delta[v-v(t)]\rangle \\ = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dQ}{2\pi}e^{iQx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dP}{2\pi}e^{iPv} \\ \times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-iQ)^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-iP)^m}{m!}\langle x^l(t)v^m(t)\rangle\end{aligned}$$

# Expressando x e v em função do ruído

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z\to 0^+} z\int_0^\infty e^{-zt}\langle \delta[x-x(t)]\delta[v-v(t)]\rangle dt.$$

$$\langle \delta[x-x(t)]\delta[v-v(t)]\rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dQ}{2\pi}e^{iQx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dP}{2\pi}e^{iPv}$$
$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-iQ)^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-iP)^m}{m!}\langle x^l(t)v^m(t)\rangle$$

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z\to 0^+} z\int_0^\infty dt e^{-zt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dQ}{2\pi}e^{iQx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dP}{2\pi}e^{iPv}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-iQ)^l}{l!}$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-iP)^m}{m!}\int_0^\infty\prod_{f=1}^{l}dt_{lf}\delta(t-t_{lf})$$
$$\times\int_0^\infty\prod_{h=1}^{m}dt_{mh}\delta(t-t_{mh})\left\langle\prod_{f=1}^{l}x(t_{lf})\prod_{h=1}^{m}v(t_{mh})\right\rangle.$$

# Expressando x e v em função do ruído (2)

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z,\epsilon \to 0^+} z \int_0^{\infty} dt e^{-zt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ}{2\pi} e^{iQx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP}{2\pi} e^{iPv} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-iQ)^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iP)^m}{m!}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{f=1}^{l} \frac{dq_f}{2\pi} \prod_{h=1}^{m} \frac{dp_h}{2\pi} \int_0^{\infty} \prod_{f=1}^{l} dt_{lf} \int_0^{\infty} \prod_{h=1}^{m} dt_{mh} e^{\sum_{f=1}^{l}(t-t_{lf})(iq_f+\epsilon)+\sum_{h=1}^{m}(t-t_{mh})(ip_h+\epsilon)} \left\langle \prod_{f=1}^{l} x(t_{lf}) \prod_{h=1}^{m} v(t_{mh}) \right\rangle.$$

# Expressando x e v em função do ruído (2)

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z,\epsilon\to 0^+} z\int_0^{\infty} dt e^{-zt} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ}{2\pi} e^{iQx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP}{2\pi} e^{iPv} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-iQ)^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iP)^m}{m!}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{f=1}^{l} \frac{dq_f}{2\pi} \prod_{h=1}^{m} \frac{dp_h}{2\pi} \int_0^{\infty} \prod_{f=1}^{l} dt_{lf} \int_0^{\infty} \prod_{h=1}^{m} dt_{mh} e^{\sum_{f=1}^{l}(t-t_{lf})(iq_f+\epsilon)+\sum_{h=1}^{m}(t-t_{mh})(ip_h+\epsilon)} \left\langle \prod_{f=1}^{l} x(t_{lf}) \prod_{h=1}^{m} v(t_{mh}) \right\rangle .$$

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z,\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ}{2\pi} e^{iQx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dP}{2\pi} e^{iPv} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-iQ)^l}{l!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iP)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{f=1}^{l} \frac{dq_f}{2\pi} \prod_{h=1}^{m} \frac{dp_h}{2\pi}$$

$$\times \int_0^{\infty} dt z e^{-t\{z-\sum_{f=1}^{l}(iq_f+\epsilon)-\sum_{h=1}^{m}(ip_h+\epsilon)\}} \left\langle \prod_{f=1}^{l} \tilde{x}(iq_f+\epsilon) \prod_{h=1}^{m} \tilde{v}(ip_h+\epsilon) \right\rangle .$$

# Expressando x e v em função do ruído (2)

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z,\epsilon\to 0^+} z\int_0^{\infty} dt e^{-zt}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dQ}{2\pi}e^{iQx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dP}{2\pi}e^{iPv}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-iQ)^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-iP)^m}{m!}$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{f=1}^{l}\frac{dq_f}{2\pi}\prod_{h=1}^{m}\frac{dp_h}{2\pi}\int_0^{\infty}\prod_{f=1}^{l}dt_{lf}\int_0^{\infty}\prod_{h=1}^{m}dt_{mh}e^{\sum_{f=1}^{l}(t-t_{lf})(iq_f+\epsilon)+\sum_{h=1}^{m}(t-t_{mh})(ip_h+\epsilon)}\left\langle\prod_{f=1}^{l}x(t_{lf})\prod_{h=1}^{m}v(t_{mh})\right\rangle.$$

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z,\epsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dQ}{2\pi}e^{iQx}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dP}{2\pi}e^{iPv}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-iQ)^l}{l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-iP)^m}{m!}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{f=1}^{l}\frac{dq_f}{2\pi}\prod_{h=1}^{m}\frac{dp_h}{2\pi}$$

$$\times\int_0^{\infty}dtze^{-t\{z-\sum_{f=1}^{l}(iq_f+\epsilon)-\sum_{h=1}^{m}(ip_h+\epsilon)\}}\left\langle\prod_{f=1}^{l}\tilde{x}(iq_f+\epsilon)\prod_{h=1}^{m}\tilde{v}(ip_h+\epsilon)\right\rangle.$$

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z,\epsilon\to 0^+}\sum_{l,m=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dQ}{2\pi}\frac{dP}{2\pi}e^{iQx+iPv}\frac{(-iQ)^l}{l!}\frac{(-iP)^m}{m!}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{f=1}^{l}\frac{dq_f}{2\pi}\prod_{h=1}^{m}\frac{dp_h}{2\pi}$$

$$\times\frac{z}{z-\left[\sum_{f=1}^{l}iq_f+\sum_{h=1}^{m}ip_h+(l+m)\epsilon\right]}\left\langle\prod_{f=1}^{l}\tilde{x}(iq_f+\epsilon)\prod_{h=1}^{m}\tilde{v}(ip_h+\epsilon)\right\rangle.$$

# Especial atenção para com os pólos

- Devemos levar em conta os pólos de todas as funções do problema pois estes serão cruciais para a solução exata que propomos
- Em especial, os pólos das correlações de ruído serão fundamentais para encontrarmos as contribuições não nulas para o resultado final

$$\frac{z}{z-\left[\sum_{f=1}^{l} iq_f+\sum_{h=1}^{m} ip_h+(l+m)\epsilon\right]}$$

$$\langle\tilde{\eta}(iq_i+\epsilon)\tilde{\eta}(iq_j+\epsilon)\rangle=\frac{2\Gamma_1 T_1}{i(q_i+q_j)+2\epsilon}$$

# Especial atenção para com os pólos

- Devemos levar em conta os pólos de todas as funções do problema pois estes serão cruciais para a solução exata que propomos
- Em especial, os pólos das correlações de ruído serão fundamentais para encontrarmos as contribuições não nulas para o resultado final

$$\frac{z}{z - \left[ \sum_{f=1}^{l} iq_f + \sum_{h=1}^{m} ip_h + (l+m)\epsilon \right]}$$

$$\langle \tilde{\eta}(iq_i+\epsilon)\tilde{\eta}(iq_j+\epsilon)\rangle = \frac{2\Gamma_1 T_1}{i(q_i+q_j)+2\epsilon}$$

$$\langle \tilde{\xi}(iq_i+\epsilon)\tilde{\xi}(iq_j+\epsilon)\rangle = \left\{ \frac{2\Gamma_2 T_2}{[i(q_i+q_j)+2\epsilon][1-\tau(iq_i+\epsilon)][1-\tau(iq_j+\epsilon)]} \right\} - \Gamma_2 T_2 \tau \left\{ \frac{3+\tau[i(q_i+q_j)+2\epsilon]-\tau^2(iq_i+\epsilon)(iq_j+\epsilon)}{[1-\tau(iq_i+\epsilon)][1+\tau(iq_i+\epsilon)][1-\tau(iq_j+\epsilon)][1+\tau(iq_j+\epsilon)]} \right\}$$

# Especial atenção para com os pólos

- Devemos levar em conta os pólos de todas as funções do problema pois estes serão cruciais para a solução exata que propomos
- Em especial, os pólos das correlações de ruído serão fundamentais para encontrarmos as contribuições não nulas para o resultado final

$$\frac{z}{z-\left[\sum_{f=1}^{l} iq_f+\sum_{h=1}^{m} ip_h+(l+m)\epsilon\right]}$$

$$\langle\tilde{\eta}(iq_i+\epsilon)\tilde{\eta}(iq_j+\epsilon)\rangle=\frac{2\Gamma_1 T_1}{i(q_i+q_j)+2\epsilon}$$

Se τ → 0 o ruido ξ se torna branco

$$\langle\tilde{\xi}(iq_i+\epsilon)\tilde{\xi}(iq_j+\epsilon)\rangle=\left\{\frac{2\Gamma_2 T_2}{[i(q_i+q_j)+2\epsilon][1-\tau(iq_i+\epsilon)][1-\tau(iq_j+\epsilon)]}\right\}$$
$$-\Gamma_2 T_2\tau\left\{\frac{3+\tau[i(q_i+q_j)+2\epsilon]-\tau^2(iq_i+\epsilon)(iq_j+\epsilon)}{[1-\tau(iq_i+\epsilon)][1+\tau(iq_i+\epsilon)][1-\tau(iq_j+\epsilon)][1+\tau(iq_j+\epsilon)]}\right\}$$

# Especial atenção para com os pólos

- Devemos levar em conta os pólos de todas as funções do problema pois estes serão cruciais para a solução exata que propomos
- Em especial, os pólos das correlações de ruído serão fundamentais para encontrarmos as contribuições não nulas para o resultado final

$$\frac{z}{z-\left[\sum_{f=1}^{l} iq_f + \sum_{h=1}^{m} ip_h + (l+m)\epsilon\right]}$$

$$\langle\tilde{\eta}(iq_i+\epsilon)\tilde{\eta}(iq_j+\epsilon)\rangle = \frac{2\Gamma_1 T_1}{i(q_i+q_j)+2\epsilon}$$

Se τ → 0 o ruido ξ se torna branco

**Contribuicao = 0**

$$\langle\tilde{\xi}(iq_i+\epsilon)\tilde{\xi}(iq_j+\epsilon)\rangle = \left\{\frac{2\Gamma_2 T_2}{[i(q_i+q_j)+2\epsilon][1-\tau(iq_i+\epsilon)][1-\tau(iq_j+\epsilon)]}\right\} - \Gamma_2 T_2 \tau \left\{\frac{3+\tau[i(q_i+q_j)+2\epsilon]-\tau^2(iq_i+\epsilon)(iq_j+\epsilon)}{[1-\tau(iq_i+\epsilon)][1+\tau(iq_i+\epsilon)][1-\tau(iq_j+\epsilon)][1+\tau(iq_j+\epsilon)]}\right\}$$

# Distribuição de probabilidades estacionária

$$P^{SS}(x,v) = \lim_{z,\epsilon\to 0^+} \sum_{l,m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ}{2\pi}\frac{dP}{2\pi} e^{iQx+iPv} \frac{(-iQ)^l}{l!}\frac{(-iP)^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{f=1}^{l} \frac{dq_f}{2\pi} \prod_{h=1}^{m} \frac{dp_h}{2\pi}$$

$$\times \frac{z}{z - \left[ \sum_{f=1}^{l} iq_f + \sum_{h=1}^{m} ip_h + (l+m)\epsilon \right]} \left\langle \prod_{f=1}^{l} \tilde{x}(iq_f+\epsilon) \prod_{h=1}^{m} \tilde{v}(ip_h+\epsilon) \right\rangle.$$

# Pólos e caminho para integração

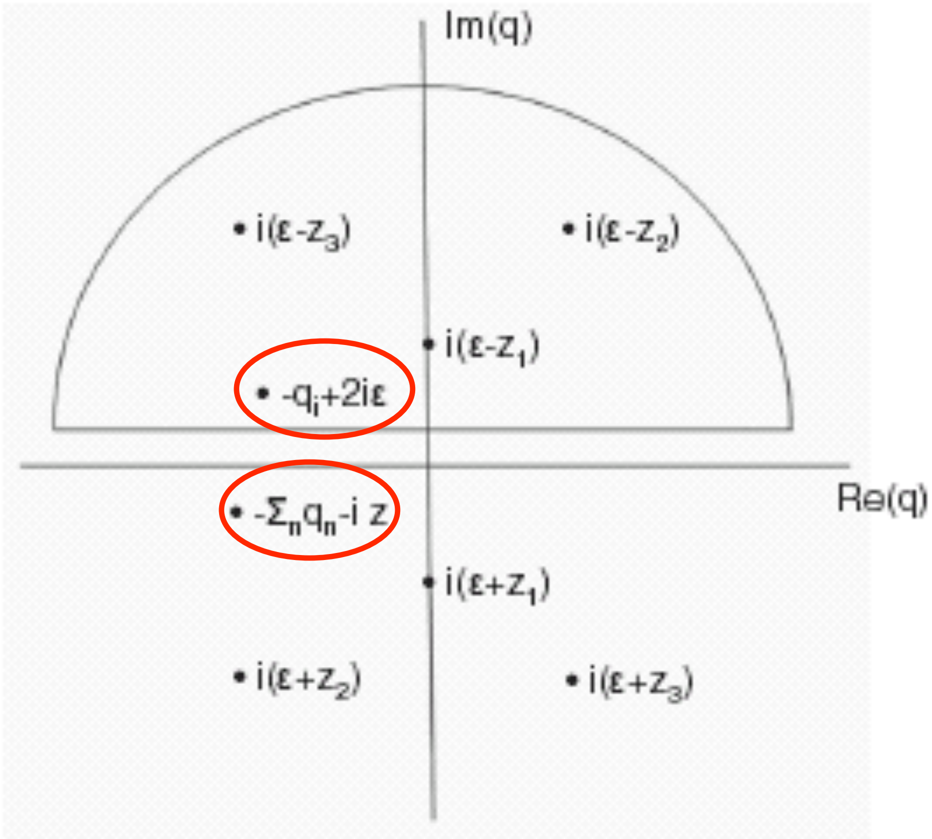



FIG. 1. Integration path for the $q$ or $p$ variables.

# Limite z → 0: função I(z)

- Função I(z) é que "decide" se um termo do integrando contribui ou não para o valor final das distribuições.

$$I(z) = \frac{z}{z - \left[\sum_{f=1}^{l} iq_f + \sum_{h=1}^{m} ip_h + (l+m)\epsilon\right]}.$$

- Quando as integrais "carregam" resíduos para o denominador de I(z), o limite z → 0 faz com que I(z→0)→0. Assim, todos os q's e p's devem se cancelar mutuamente em I(z):

$$\lim_{z\to 0} I(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{z} = 1.$$

# Integrações típicas

$$\mathcal{C}_{\tilde{\alpha}_r\,\tilde{\beta}_s} = \int_0^\infty \frac{dq_i}{2\pi}\frac{dq_j}{2\pi}\frac{z}{z - i(q_i + q_j + 2\epsilon + \oslash)}\langle\tilde{\alpha}_r(iq_i+\epsilon)\,\tilde{\beta}_s(iq_j+\epsilon)\rangle,$$

Exemplo:

$$\int_0^\infty \frac{dq_i}{2\pi}\frac{dq_j}{2\pi}\frac{z}{z - i(q_i + q_j + \circ)}\langle\tilde{x}_2(iq_i+\epsilon)\,\tilde{x}_2(iq_j+\epsilon)\rangle_{\Delta\Delta+\Lambda\Lambda} =$$
$$= \int_0^\infty \frac{dq_i}{2\pi}\frac{dq_j}{2\pi}\frac{z}{z - i(q_i + q_j + \circ)}\Delta(iq_i+\epsilon)\,\Delta(iq_j+\epsilon)\,\langle\tilde{\eta}_1(iq_i+\epsilon)\,\tilde{\eta}_1(iq_j+\epsilon)\rangle$$
$$+ \int_0^\infty \frac{dq_i}{2\pi}\frac{dq_j}{2\pi}\frac{z}{z - i(q_i + q_j + \circ)}\Lambda(iq_i+\epsilon)\,\Lambda(iq_j+\epsilon)\,\langle\tilde{\eta}_2(iq_i+\epsilon)\,\tilde{\eta}_2(iq_j+\epsilon)\rangle =$$
$$= \frac{z}{z - i\oslash}\left\{\gamma\bar{T}_1\,(2+A_1^2)\mathcal{Q}_{\Delta\,\Delta} + \gamma\,\bar{T}_2\,(2+A_2^2)\mathcal{Q}_{\Lambda\,\Lambda}\right\}.$$

$$\mathcal{Q}_{\Lambda\,\Lambda} = \frac{k+k'}{4\,\gamma\,(k'^2+2\,k\,k')} + \frac{\gamma}{4\,[m\,k^2+(k+k')\,\gamma^2]},$$
$$\mathcal{Q}_{\Delta\,\Delta} = \frac{k^2\,(k+k'+\gamma^2)}{4\,\gamma\,k'\,(2\,k+k')[m\,k^2+(k+k')\,\gamma^2]}.$$

# Após uma longa conta…

- As integrais sobre as transformadas de x e v dão:

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{M=0}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{S=0}^{\infty}\sum_{T=0}^{\infty} \frac{(iQ_1)^M}{M!}\frac{(iQ_2)^N}{N!}\frac{(iP_1)^S}{S!}\frac{(iP_2)^T}{T!}\langle \tilde{x}_1^M \tilde{x}_2^N \tilde{v}_1^S \tilde{v}_2^T \rangle \\
&= \exp\left\{-H\left[\bar{T}_1(2+A_1^2)-\bar{T}_2(2+A_2^2)\right]\left[Q_1P_2-Q_2P_1\right]\right\} \times \\
&\times \exp\left\{-\left(\frac{Q_1^2\mathcal{Q}_{\Lambda\Lambda}+2Q_1Q_2\,\mathcal{Q}_{\Delta\Lambda}+Q_2^2\mathcal{Q}_{\Delta\Delta}}{2}\right)\left[\gamma\bar{T}_1\,(2+A_1^2)\right]\right. \\
&- \left.\left(\frac{Q_2^2\mathcal{Q}_{\Lambda\Lambda}+2Q_1Q_2\,\mathcal{Q}_{\Delta\Lambda}+Q_1^2\mathcal{Q}_{\Delta\Delta}}{2}\right)\left[\gamma\bar{T}_2\,(2+A_2^2)\right]\right\} \\
&\times \exp\left\{-\frac{P_1^2}{2}\left[\frac{\bar{T}_1}{m}(2+A_1^2)\mathcal{R}_{\Lambda\Lambda}+\frac{\bar{T}_2}{m}(2+A_2^2)\mathcal{R}_{\Delta\Delta}\right]\right\}\times \\
&\times \exp\left\{-\frac{P_2^2}{2}\left[\frac{\bar{T}_1}{m}(2+A_1^2)\mathcal{R}_{\Delta\Delta}+\frac{\bar{T}_2}{m}(2+A_2^2)\mathcal{R}_{\Lambda\Lambda}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

# Estado estacionário

$$
\begin{aligned}
p^{ss}(x_1, v_1, x_2, v_2) \;=\; & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dQ_1}{2\pi}\frac{dQ_2}{2\pi}\frac{dP_1}{2\pi}\frac{dP_2}{2\pi} e^{iQ_1x_1+iP_1v_1+iQ_2x_2+iP_2v_2} \times \\
& \times \; \exp\left\{-H\left[\bar{T}_1(2+A_1^2) - \bar{T}_2(2+A_2^2)\right]\left[Q_1P_2 - Q_2P_1\right]\right\} \times \\
& \times \; \exp\left\{-\left(\frac{Q_1^2\mathcal{Q}_{\Lambda\,\Lambda} + 2Q_1Q_2\,\mathcal{Q}_{\Delta\,\Lambda} + Q_2^2\mathcal{Q}_{\Delta\,\Delta}}{2}\right)\left[\gamma\,\bar{T}_1\,(2+A_1^2)\right]\right. \\
& - \; \left.\left(\frac{Q_2^2\mathcal{Q}_{\Lambda\,\Lambda} + 2Q_1Q_2\,\mathcal{Q}_{\Delta\,\Lambda} + Q_1^2\mathcal{Q}_{\Delta\,\Delta}}{2}\right)\left[\gamma\,\bar{T}_2\,(2+A_2^2)\right]\right\} \\
& \times \; \exp\left\{-\frac{P_1^2}{2}\left[\frac{\bar{T}_1}{m}(2+A_1^2)\mathcal{R}_{\Lambda\,\Lambda} + \frac{\bar{T}_2}{m}(2+A_2^2)\mathcal{R}_{\Delta\,\Delta}\right]\right\} \times \\
& \times \; \exp\left\{-\frac{P_2^2}{2}\left[\frac{\bar{T}_1}{m}(2+A_1^2)\mathcal{R}_{\Delta\,\Delta} + \frac{\bar{T}_2}{m}(2+A_2^2)\mathcal{R}_{\Lambda\,\Lambda}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Após fazer as contas:

$$
\begin{aligned}
p^{ss}(x_1, v_1, x_2, v_2) \;=\; & G_0\,\exp\{T_{x1x1}x_1^2 + T_{x2x2}x_2^2 + T_{v1v1}v_1^2 + T_{v2v2}v_2^2 + \\
& + \; T_{x1v1}x_1v_1 + T_{x1x2}x_1x_2 + T_{x1v2}x_1v_2 + T_{x2v1}x_2v_1 + T_{x2v2}x_2v_2 + T_{v1v2}v_1v_2\}
\end{aligned}
$$

# Resultados “explícitos”

$$
\begin{aligned}
T_{x1x1} &= \frac{A_{11}}{4A_{12}}, \\
T_{x2x2} &= \frac{A_{21}}{4A_{22}} = \frac{A_{21}}{4A_{12}}, \\
T_{v1v1} &= \frac{m\gamma\, A_{31}}{4A_{32}}, \\
T_{v2v2} &= \frac{m\gamma\, A_{41}}{4A_{42}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{x1v1} &= \frac{mH\, Q_{\Lambda\Delta}\,\gamma\, A_{51}}{2A_{52}}, \\
T_{x1x2} &= \frac{Q_{\Lambda\Delta}\,\gamma\, A_{61}}{2A_{62}}, \\
T_{x1v2} &= -\frac{mH\, A_{71}}{2A_{72}}, \\
T_{x2v1} &= \frac{mH\, A_{81}}{2A_{82}}, \\
T_{x2v2} &= -\frac{mH\, Q_{\Lambda\Delta}\,\gamma\, A_{91}}{2A_{92}}, \\
T_{v1v2} &= -\frac{m^2H^2\, Q_{\Lambda\Delta}\,\gamma\, A_{101}}{2A_{102}}
\end{aligned}
$$

A distribuição é :

$$
\begin{aligned}
p^{ss}(x_1, v_1, x_2, v_2) &= G_0 \exp\{T_{x1x1}x_1^2 + T_{x2x2}x_2^2 + T_{v1v1}v_1^2 + T_{v2v2}v_2^2 + \\
&+ T_{x1v1}x_1v_1 + T_{x1x2}x_1x_2 + T_{x1v2}x_1v_2 + T_{x2v1}x_2v_1 + T_{x2v2}x_2v_2 + T_{v1v2}v_1v_2\}
\end{aligned}
$$

# Um dos A´s: $A_{22}$

$$
\begin{aligned}
A_{22} &= -Q_{\Delta\Delta}\, T_2{}^4 R_{\Lambda\Lambda}\, H^2 m\gamma + \gamma^2 T_1{}^4 Q_{\Lambda\Lambda}\, R_{\Delta\Delta}\, R_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Delta\Delta} - \\
&- 2\gamma^2 T_1\, R_{\Delta\Delta}\, T_2{}^3 Q_{\Lambda\Delta}{}^2 R_{\Lambda\Lambda} - T_1{}^4 Q_{\Lambda\Lambda}\, R_{\Delta\Delta}\, H^2 m\gamma + \\
&+ \gamma^2 T_1{}^3 R_{\Delta\Delta}\, R_{\Lambda\Lambda}\, T_2\, Q_{\Lambda\Lambda}{}^2 + \gamma^2 T_1\, Q_{\Lambda\Lambda}{}^2 R_{\Delta\Delta}\, T_2{}^3 R_{\Lambda\Lambda} - 2\gamma^2 T_1{}^2 R_{\Delta\Delta}\, T_2{}^2 Q_{\Lambda\Delta}{}^2 R_{\Lambda\Lambda} + \\
&+ \gamma^2 Q_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Delta\Delta}\, T_2{}^4 R_{\Lambda\Lambda}\, R_{\Delta\Delta} + \gamma^2 T_1{}^3 Q_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Delta\Delta}\, T_2\, R_{\Lambda\Lambda}{}^2 + \\
&+ \gamma^2 T_1{}^3 R_{\Delta\Delta}\, R_{\Lambda\Lambda}\, T_2\, Q_{\Delta\Delta}{}^2 - Q_{\Lambda\Lambda}\, R_{\Delta\Delta}\, T_2{}^4 H^2 m\gamma - 2\gamma^2 T_1{}^3 R_{\Delta\Delta}\, Q_{\Lambda\Delta}{}^2 R_{\Lambda\Lambda}\, T_2 + \\
&+ \gamma^2 T_1\, Q_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Delta\Delta}\, R_{\Delta\Delta}{}^2 T_2{}^3 + \gamma^2 T_1\, Q_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Delta\Delta}\, T_2{}^3 R_{\Lambda\Lambda}{}^2 + \gamma^2 T_1\, Q_{\Delta\Delta}{}^2 R_{\Delta\Delta}\, T_2{}^3 R_{\Lambda\Lambda} + \\
&+ \gamma^2 T_1{}^3 Q_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Delta\Delta}\, R_{\Delta\Delta}{}^2 T_2 + 2\gamma^2 T_1{}^2 Q_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Delta\Delta}\, R_{\Delta\Delta}\, R_{\Lambda\Lambda}\, T_2{}^2 + \\
&+ 4\, T_1{}^2 Q_{\Lambda\Lambda}\, H^2 T_2{}^2 R_{\Lambda\Lambda}\, m\gamma - 2\, T_1{}^2 Q_{\Lambda\Lambda}\, H^2 T_2{}^2 R_{\Delta\Delta}\, m\gamma - \\
&- 2\, T_1{}^2 H^2 T_2{}^2 Q_{\Delta\Delta}\, R_{\Lambda\Lambda}\, m\gamma - 2\, T_1\, R_{\Delta\Delta}\, T_2{}^3 H^2 Q_{\Delta\Delta}\, m\gamma - 2\, T_1{}^3 Q_{\Lambda\Lambda}\, H^2 R_{\Lambda\Lambda}\, T_2\, m\gamma + \\
&+ 4\, T_1{}^2 H^2 Q_{\Delta\Delta}\, T_2{}^2 R_{\Delta\Delta}\, m\gamma + 2\, T_1\, Q_{\Lambda\Lambda}\, R_{\Delta\Delta}\, T_2{}^3 H^2 m\gamma + 2\, T_1{}^3 Q_{\Lambda\Lambda}\, R_{\Delta\Delta}\, H^2 T_2\, m\gamma + \\
&+ 2\, T_1\, T_2{}^3 R_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Delta\Delta}\, H^2 m\gamma - 2\, T_1\, Q_{\Lambda\Lambda}\, T_2{}^3 R_{\Lambda\Lambda}\, H^2 m\gamma + \\
&+ 2\, T_1{}^3 H^2 Q_{\Delta\Delta}\, R_{\Lambda\Lambda}\, T_2\, m\gamma - 2\, T_1{}^3 R_{\Delta\Delta}\, Q_{\Delta\Delta}\, H^2 T_2\, m\gamma + \\
&+ \gamma^2 T_1{}^2 Q_{\Delta\Delta}{}^2 R_{\Delta\Delta}{}^2 T_2{}^2 - \gamma^2 T_1{}^4 R_{\Delta\Delta}\, R_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Lambda\Delta}{}^2 - \gamma^2 T_1{}^3 R_{\Delta\Delta}{}^2 T_2\, Q_{\Lambda\Delta}{}^2 + \\
&+ \gamma^2 T_1{}^2 Q_{\Lambda\Lambda}{}^2 R_{\Delta\Delta}{}^2 T_2{}^2 + \gamma^2 T_1{}^2 Q_{\Delta\Delta}{}^2 T_2{}^2 R_{\Lambda\Lambda}{}^2 - \\
&- \gamma^2 T_1{}^3 T_2\, R_{\Lambda\Lambda}{}^2 Q_{\Lambda\Delta}{}^2 - \gamma^2 T_1\, T_2{}^3 R_{\Lambda\Lambda}{}^2 Q_{\Lambda\Delta}{}^2 - \gamma^2 R_{\Delta\Delta}\, T_2{}^4 Q_{\Lambda\Delta}{}^2 R_{\Lambda\Lambda} + \\
&+ \gamma^2 T_1{}^2 Q_{\Lambda\Lambda}{}^2 T_2{}^2 R_{\Lambda\Lambda}{}^2 - 2\gamma^2 T_1{}^2 R_{\Delta\Delta}{}^2 Q_{\Lambda\Delta}{}^2 T_2{}^2 - \\
&- 2\gamma^2 T_1{}^2 T_2{}^2 R_{\Lambda\Lambda}{}^2 Q_{\Lambda\Delta}{}^2 - \gamma^2 T_1\, R_{\Delta\Delta}{}^2 T_2{}^3 Q_{\Lambda\Delta}{}^2 - \\
&- T_1{}^4 H^2 R_{\Lambda\Lambda}\, Q_{\Delta\Delta}\, m\gamma + 6\, m^2 T_1{}^2 H^4 T_2{}^2 + m^2 T_1{}^4 H^4 - 4\, m^2 T_1{}^3 H^4 T_2 - \\
&- 4\, m^2 T_1\, H^4 T_2{}^3 + m^2 H^4 T_2{}^4,
\end{aligned}
$$

# Condutividade térmica partícula-partícula

$$\langle j_{12} \rangle_{\Delta T} = -k \left\langle (x_1 - x_2) \left( \frac{v_1 + v_2}{2} \right) \right\rangle = -\frac{k}{2} \left( \langle x_1 v_2 \rangle - \langle x_2 v_1 \rangle \right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle j_{12} \rangle_{\Delta T} = -\frac{k\,(D_1 - D_3)}{2\,D_2}$$

# Condutividade térmica partícula-partícula

$$\langle j_{12}\rangle_{\Delta T} = -k\left\langle (x_1 - x_2)\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\right\rangle = -\frac{k}{2}\left(\langle x_1 v_2\rangle - \langle x_2 v_1\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle j_{12}\rangle_{\Delta T} = -\frac{k\,(D_1 - D_3)}{2\,D_2}$$

Onde

$$\begin{aligned} D_1 = {} & 4\,T_{x1v2}\,T_{x2x2}\,T_{v1v1} - T_{x1v2}\,T_{x2v1}{}^2 - 2\,T_{x1x2}\,T_{x2v2}\,T_{v1v1} - \\ & - 2\,T_{x1v1}\,T_{x2x2}\,T_{v1v2} + T_{x1v1}\,T_{x2v1}\,T_{x2v2} + T_{v1v2}\,T_{x1x2}\,T_{x2v1} \end{aligned}$$

# Condutividade térmica partícula-partícula

$$\langle j_{12}\rangle_{\Delta T} = -k\left\langle (x_1 - x_2)\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\right\rangle = -\frac{k}{2}\left(\langle x_1 v_2\rangle - \langle x_2 v_1\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle j_{12}\rangle_{\Delta T} = -\frac{k\,(D_1 - D_3)}{2\,D_2}$$

Onde

$$\begin{aligned} D_1 = {} & 4\,T_{x1v2}\,T_{x2x2}\,T_{v1v1} - T_{x1v2}\,{T_{x2v1}}^2 - 2\,T_{x1x2}\,T_{x2v2}\,T_{v1v1} - \\ & - 2\,T_{x1v1}\,T_{x2x2}\,T_{v1v2} + T_{x1v1}\,T_{x2v1}\,T_{x2v2} + T_{v1v2}\,T_{x1x2}\,T_{x2v1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \langle j_{12}\rangle_{\Delta T} = 2\,k\,H\Delta T \Rightarrow \kappa = \frac{k^2\,\gamma}{2\,[m\,k^2 + \gamma^2(k+k')]}$$

# Cálculo analítico

- Seja a forma apropriada para sistemas pequenos:

$$\begin{aligned}\kappa &= \lim_{\Omega\to\infty}\frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega} dt\,\frac{1}{T^2}\int_0^{\infty} d\tau\;\langle j_{12}(t+\tau)j_{12}(t)\rangle_{\Delta T=0}\,,\\ &= \lim_{\Omega\to\infty}\lim_{\theta\to 0^+}\frac{1}{\Omega}\int_0^{\Omega} dt\,\frac{1}{T^2}\int_0^{\infty} d\tau\,e^{-\theta\tau}\;\langle j_{12}(t+\tau)j_{12}(t)\rangle_{\Delta T=0}\end{aligned}$$

- A forma da corrente é a mesma anterior

$$j_{12} = -k\,(x_1(t) - x_2(t))\left(\frac{v_1(t)+v_2(t)}{2}\right).$$

# Etapas seguintes

$$
\begin{aligned}
\kappa &= \lim_{z\to 0+} \lim_{\theta\to 0+} z \int_0^\infty dt\, e^{-zt} \frac{k^2}{T^2} \int_0^\infty d\tau\, e^{-\theta\tau} \times \\
&\times \left\langle \left[ (x_1(t+\tau) - x_2(t+\tau)) \left( \frac{v_1(t+\tau) + v_2(t+\tau)}{2} \right) \right] \times \right. \\
&\times \left. \left[ (x_1(t) - x_2(t)) \left( \frac{v_1(t) + v_2(t)}{2} \right) \right] \right\rangle_{\Delta T = 0} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to 0+} \lim_{\theta\to 0+} \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{k^2}{16\, T^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_4}{2\pi} \times \\
&\times \frac{z}{z - [(iq_1+\epsilon) + (iq_2+\epsilon) + (iq_3+\epsilon) + (iq_4+\epsilon)]} \; \frac{1}{\theta - [(iq_1+\epsilon) + (iq_3+\epsilon)]} \times \\
&\times \langle [(\tilde{x}_1(iq_1+\epsilon) - \tilde{x}_2(iq_1+\epsilon)) (\tilde{v}_1(iq_3+\epsilon) + \tilde{v}_2(iq_3+\epsilon))] \times \\
&\times [(\tilde{x}_1(iq_2+\epsilon) - \tilde{x}_2(iq_2+\epsilon)) (\tilde{v}_1(iq_4+\epsilon) + \tilde{v}_2(iq_4+\epsilon))] \rangle .
\end{aligned}
$$

# Etapas seguintes

$$\begin{aligned}
\kappa \;=\; & \lim_{z\to 0+}\lim_{\theta\to 0+} z\int_0^{\infty} dt\, e^{-zt}\,\frac{k^2}{T^2}\int_0^{\infty} d\tau\, e^{-\theta\tau}\times \\
& \times\left\langle\left[(x_1(t+\tau)-x_2(t+\tau))\left(\frac{v_1(t+\tau)+v_2(t+\tau)}{2}\right)\right]\times\right. \\
& \times\left.\left[(x_1(t)-x_2(t))\left(\frac{v_1(t)+v_2(t)}{2}\right)\right]\right\rangle_{\Delta T=0}. \\
= \; & \lim_{z\to 0+}\lim_{\theta\to 0+}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{k^2}{16\,T^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq_1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq_2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq_3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq_4}{2\pi}\times \\
& \times\frac{z}{z-[(iq_1+\epsilon)+(iq_2+\epsilon)+(iq_3+\epsilon)+(iq_4+\epsilon)]}\;\frac{1}{\theta-[(iq_1+\epsilon)+(iq_3+\epsilon)]}\times \\
& \times\langle[(\tilde{x}_1(iq_1+\epsilon)-\tilde{x}_2(iq_1+\epsilon))\,(\tilde{v}_1(iq_3+\epsilon)+\tilde{v}_2(iq_3+\epsilon))]\times \\
& \times[(\tilde{x}_1(iq_2+\epsilon)-\tilde{x}_2(iq_2+\epsilon))\,(\tilde{v}_1(iq_4+\epsilon)+\tilde{v}_2(iq_4+\epsilon))]\rangle\,.
\end{aligned}$$

E finalmente → $$\kappa = \frac{k^2\,\gamma}{2\,\left[m\,k^2+\gamma^2(k+k')\right]},$$

# Agradecimentos

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

CNPq

ALIS GRAVE NIL
PUC
RIO

CAPES

CBPF
CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FÍSICAS