

# Difusão, Séries Temporais e Sistemas Complexos

Ervin Kaminski Lenzi  
Renio dos Santos Mendes

*INCT-SC*

Universidade Estadual de Maringá - UEM

# Apresentação

Sobre os participantes

Difusão

Séries temporais

Colaborações

# Sobre os participantes

## Professores da UEM

- Formação
- Pós-graduação
- Grupo de Física Teórica

## Histórico das linhas de pesquisa

- Mecânica estatística não extensiva
- Difusão anômala (linear e não-linear)
- Séries temporais

## Infra-estrutura

## Colaborações (INCT-SC)

- Tsallis, Luciano, Liacir, Soares, Célia
- . . .

# Difusão (usual)

Equação de Langevin

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\alpha v + F(t)$$

Equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [F(x)P(x, t)] + \mathcal{D} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t)$$

# Equação de difusão fracionária linear unidimensional

## Derivada fracionária temporal

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} [F(x, t) \rho(x, t)]$$

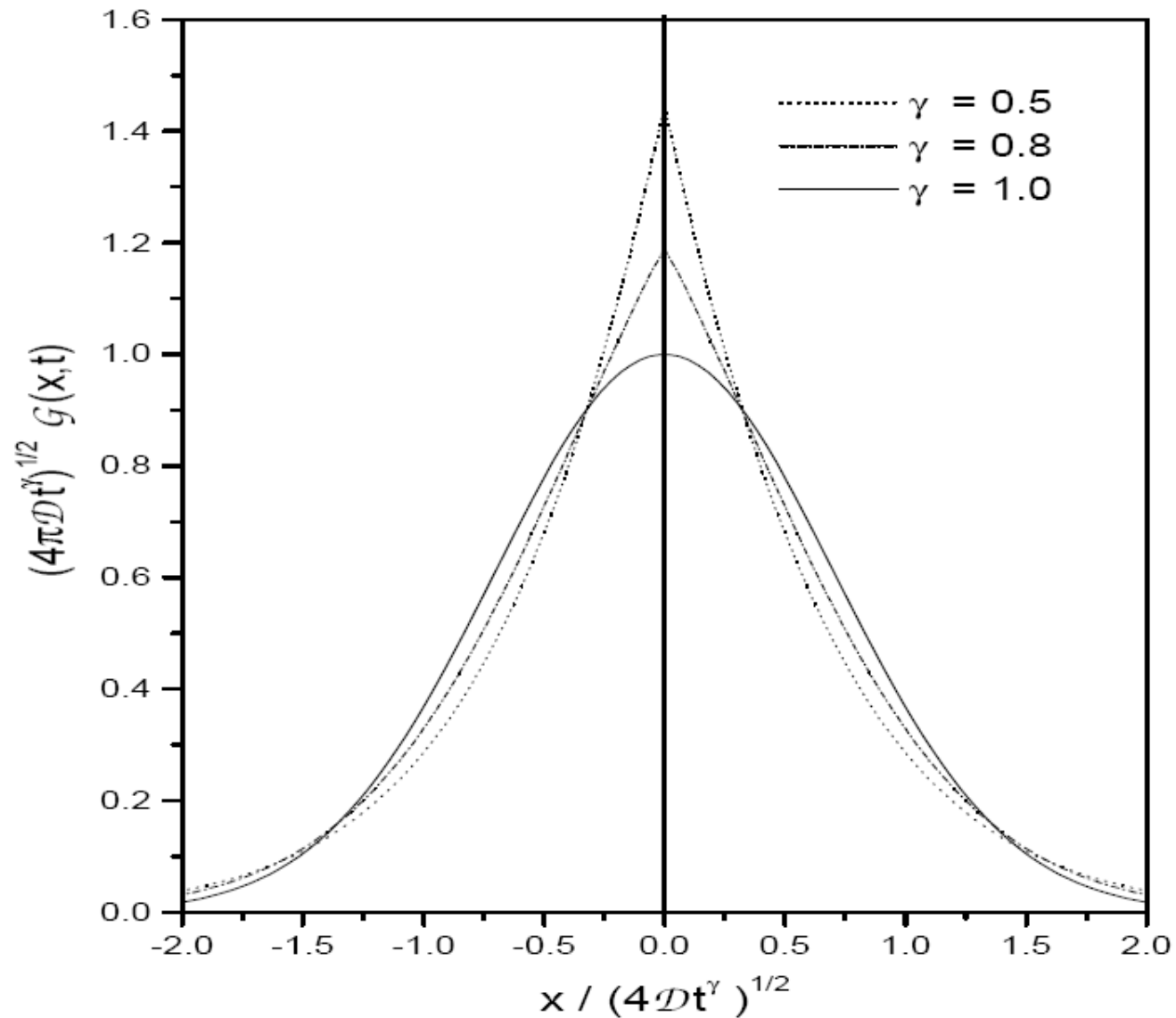
## Operador de derivada fracionária

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n - \gamma)} \int_0^t dt' \frac{\rho^{(n)}(x, t')}{(t - t')^{\gamma+1-n}}$$

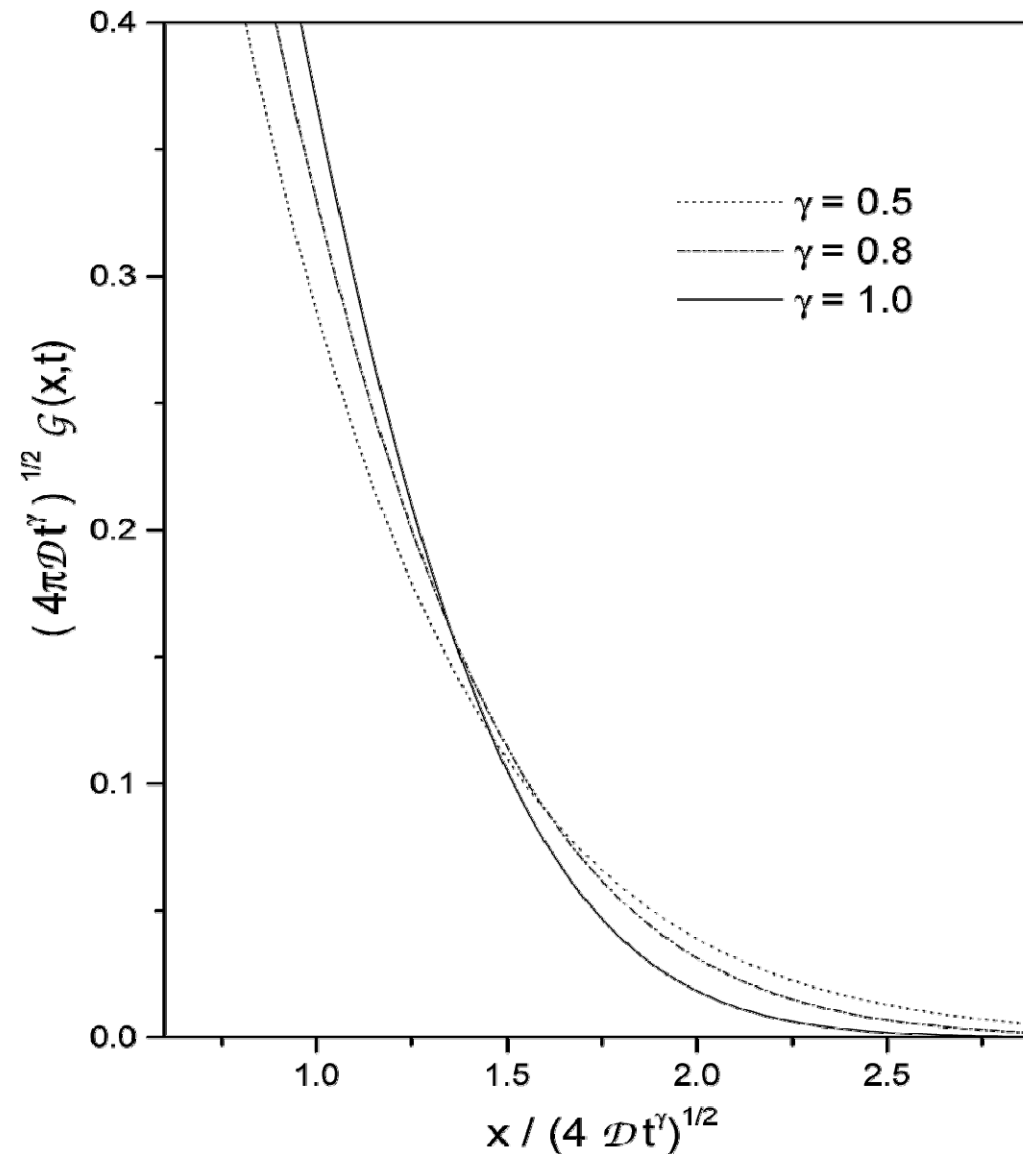
com  $n - 1 < \gamma < n$  .

# Função de Green

$$\mathcal{G}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}t^\gamma}} \text{H}_{12}^{20} \left[ \frac{x^2}{4\mathcal{D}t^\gamma} \left| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2}, \gamma) \\ (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right. \right. \left. \left. (0, 1) \right] \right.$$



# Comportamento assintótico da função de Green



# Função H de FOX

$$\mathbf{H}_{p\ q}^{m\ n} \left[ x \left| \begin{array}{c} (a_1, A_1), (a_2, A_2), \dots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), (b_2, B_2), \dots, (b_q, B_q) \end{array} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L ds \chi(s) x^s$$

$$\chi(s) = \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i - B_i s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i + A_i s)}{\prod_{i=m+1}^q \Gamma(1 - b_i + B_i s) \prod_{i=1+n}^p \Gamma(a_i - A_i s)}$$



## Solução na ausência de forças

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt^\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \tilde{\rho}(x') \mathbf{H}_{1\ 2}^{2\ 0} \left[ \frac{(x - x')^2}{4Dt^\gamma} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{\gamma}{2}, \gamma) \\ (\frac{1}{2}, 1) \quad (0, 1) \end{matrix} \right].$$

Segundo momento  $\langle x^2 \rangle \propto t^\gamma$ .

## Distribuição de tempo de espera

$$w(t) = \frac{1}{\tau_0} \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^{\gamma-1} \mathbf{E}_{\gamma, \gamma} \left( -\frac{t^\gamma}{\tau_0^\gamma} \right),$$

$\tau_0$  é uma constante.

## Função de Mittag-Leffler

$$\mathbf{E}_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n\alpha + \beta)}$$

# Derivada fracionária aplicada à variável espacial

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^\mu \rho}{\partial |x|^\mu} - \frac{\partial}{\partial x} [F(x, t) \rho(x, t)]$$

$\mu = 2$  recupera o caso usual.

Distribuição de comprimento de saltos

$$\lambda(k) = 1 - \sigma^\mu |k|^\mu$$

Solução na ausência de forças

$$L_\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikx - |k|^\mu \mathcal{D}t}$$

# Grafico da solução

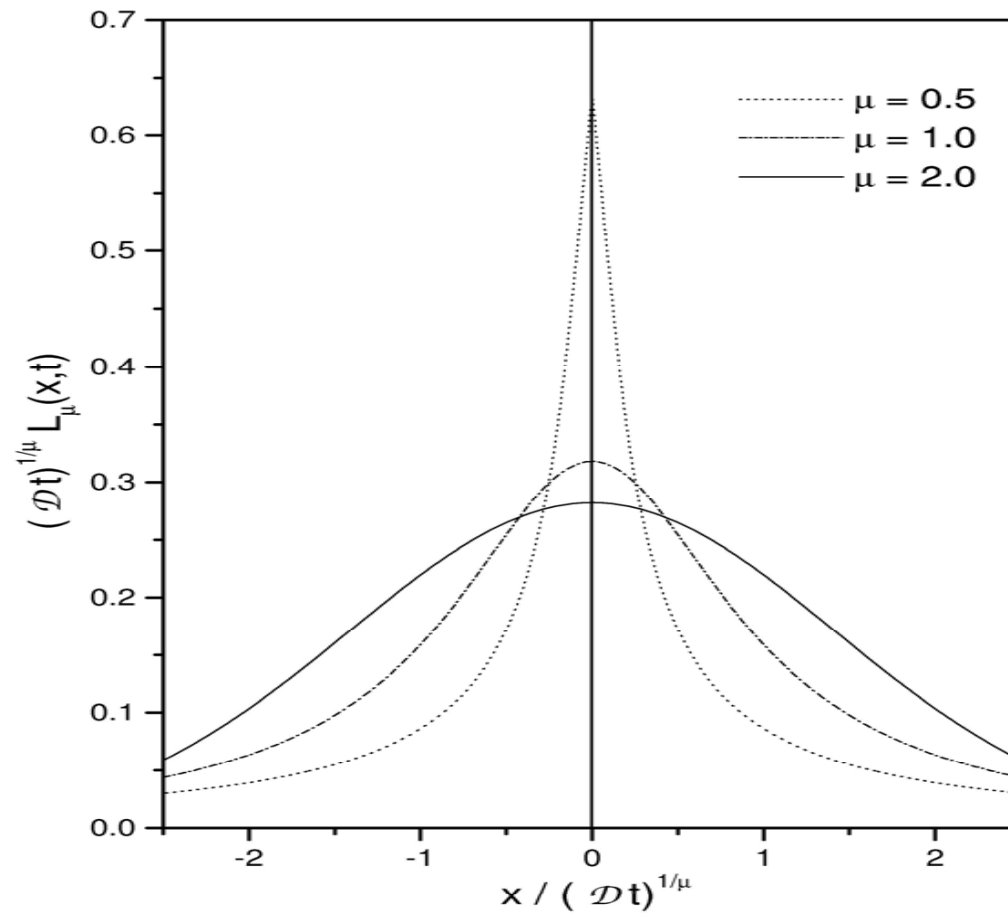




Fig. 11. Comparison of the trajectories of a Brownian or subdiffusive random walk (left) and a Lévy walk with index  $\mu = 1.5$  (right). Whereas both trajectories are statistically self-similar, the Lévy walk trajectory possesses a fractal dimension, characterising the island structure of clusters of smaller steps, connected by a long step. Both walks are drawn for the same number of steps (approx. 7000).

Metzler and Klafter, Phys. Rep. 339, 1 (2000)

## Equação de Difusão não linear fracionária

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial |x|} \left\{ \mathcal{D}(x, t) \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial |x|^{\mu-1}} [\rho(x, t)]^\nu - F(x, t) \rho(x, t) \right\}$$

## Equação de difusão não linear inteira

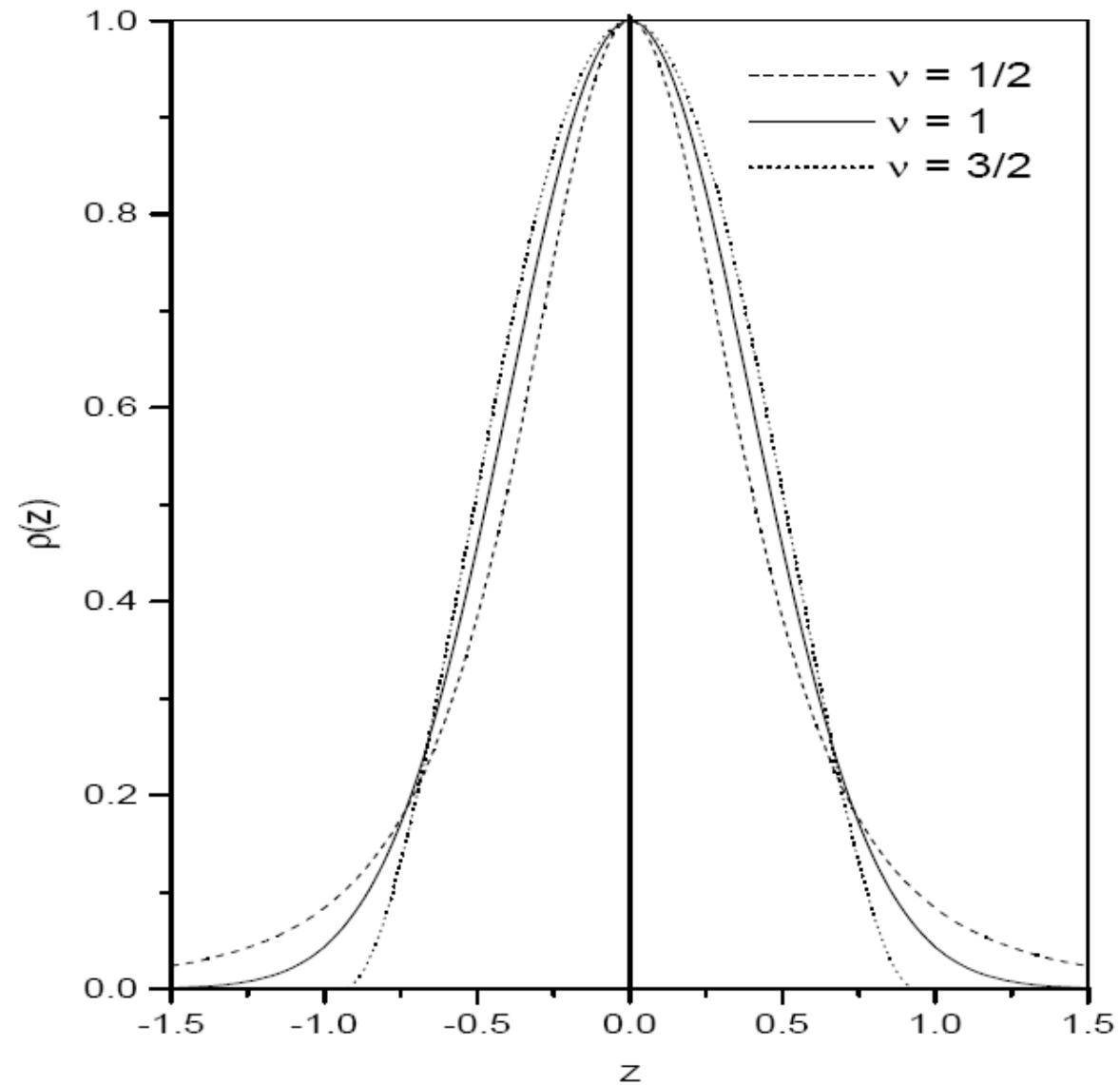
Caso  $\mu = 2$ ,

Solução  $\rho(x, t) = \frac{1}{\Phi(t)} \tilde{\rho} \left[ \frac{x}{\Phi(t)} \right]$

$$\Phi(t) = [(1 + \nu)kt]^{1/(1+\nu)} \quad \text{e} \quad \rho(z) = \left[ 1 - \frac{(\nu - 1)}{2D\nu} kz^2 \right]^{\frac{1}{\nu-1}}$$

Comportamento de

$$\rho(z) = \left[ 1 - \frac{(\nu - 1)}{2D\nu} kz^2 \right]^{\frac{1}{\nu-1}}$$



Considerando  $\mu$  qualquer

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) = \frac{\partial}{\partial |x|} \left\{ \mathcal{D} |x|^{-\theta} \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial |x|^{\mu-1}} [\rho(x, t)]^\nu \right\}$$

$$\tilde{\rho}(z) = \mathcal{N} z^{\alpha/\nu} (a + bz)^{\beta/\nu} \quad \Phi(t) = [\bar{k}_1 \mathcal{D} t + \bar{k}_2]^{\frac{1}{\mu+\nu+\theta-1}},$$

$$\alpha = \frac{(2 - \mu)(\mu + \theta)}{1 - 2\mu - \theta},$$

$$\bar{k}_1 \equiv \bar{k}(1 - \theta - \nu - \mu)$$

$$\beta = -\frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{1 - 2\mu - \theta},$$

$$\nu = \frac{2 - \mu}{1 + \mu + \theta}.$$

$$\rho(x, t) = \frac{\mathcal{N}}{(|\bar{k}_1|t)^{\frac{1+\mu+\theta}{\mu^2+2\mu\theta-\mu+\theta^2-1}}} \left[ \frac{z^{(\mu+\theta)(1+\mu+\theta)}}{(a + bz)^{(1-\mu)(1+\mu+\theta)}} \right]^{\frac{1}{1-2\mu-\theta}},$$

## Duas regiões

$$(i) -\infty < \mu < -1 - \theta$$

Assumindo  $a = 1$  e  $b = -1$ .

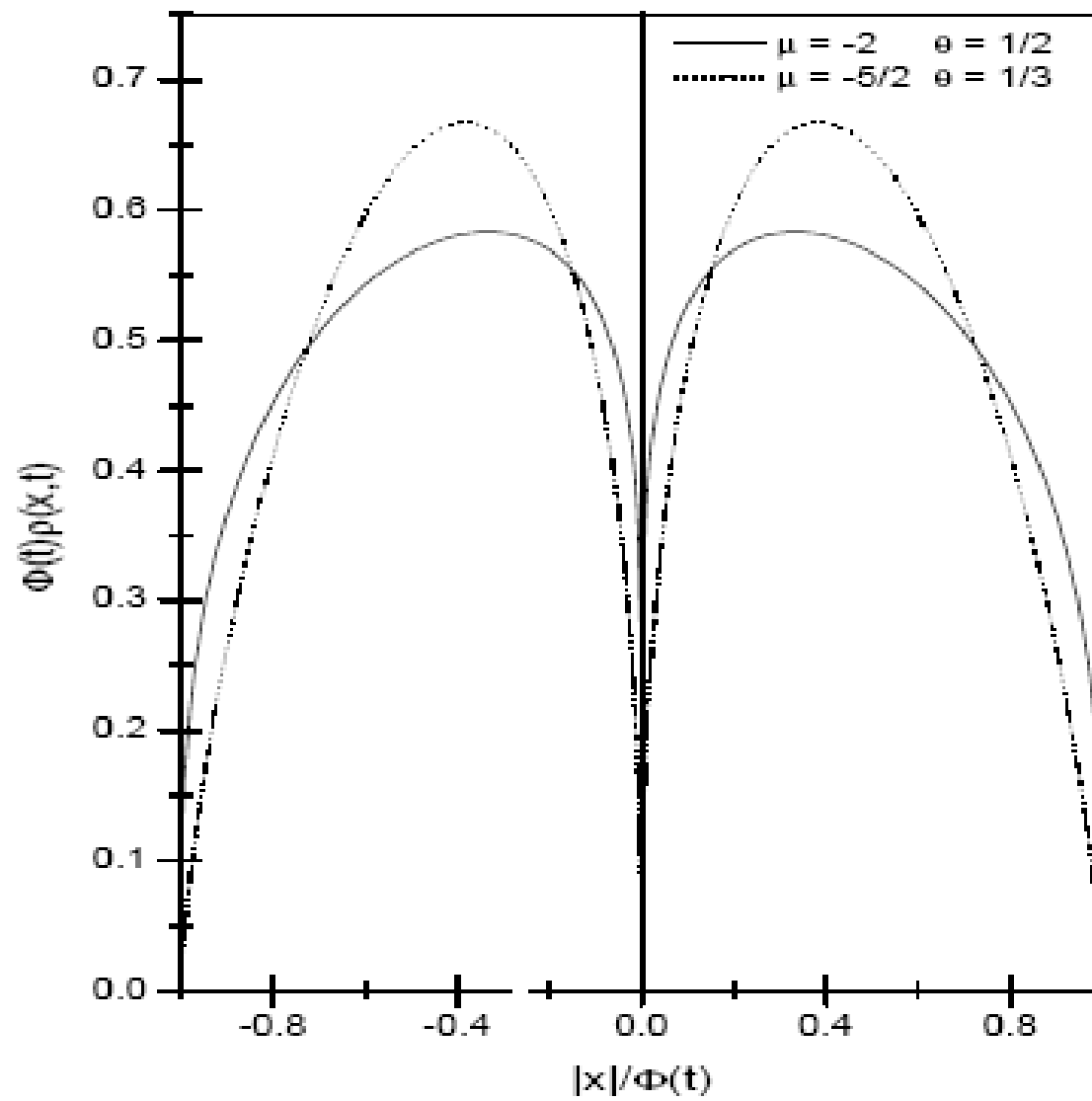
Condição de normalização

$$\mathcal{N} \int_{-1}^1 \left[ \frac{z^{(\mu+\theta)(1+\mu+\theta)}}{(1-z)^{(1-\mu)(1+\mu+\theta)}} \right]^{\frac{1}{1-2\mu-\theta}} dz = 1$$

implica

$$\mathcal{N} = \frac{\Gamma[1 - \mu - \theta]}{2\Gamma\left[\frac{\mu^2 + \mu\theta - 2\theta - 2\mu}{1-2\mu-\theta}\right] \Gamma\left[\frac{1-\mu+\mu^2+\theta^2+2\mu\theta}{1-2\mu-\theta}\right]}$$

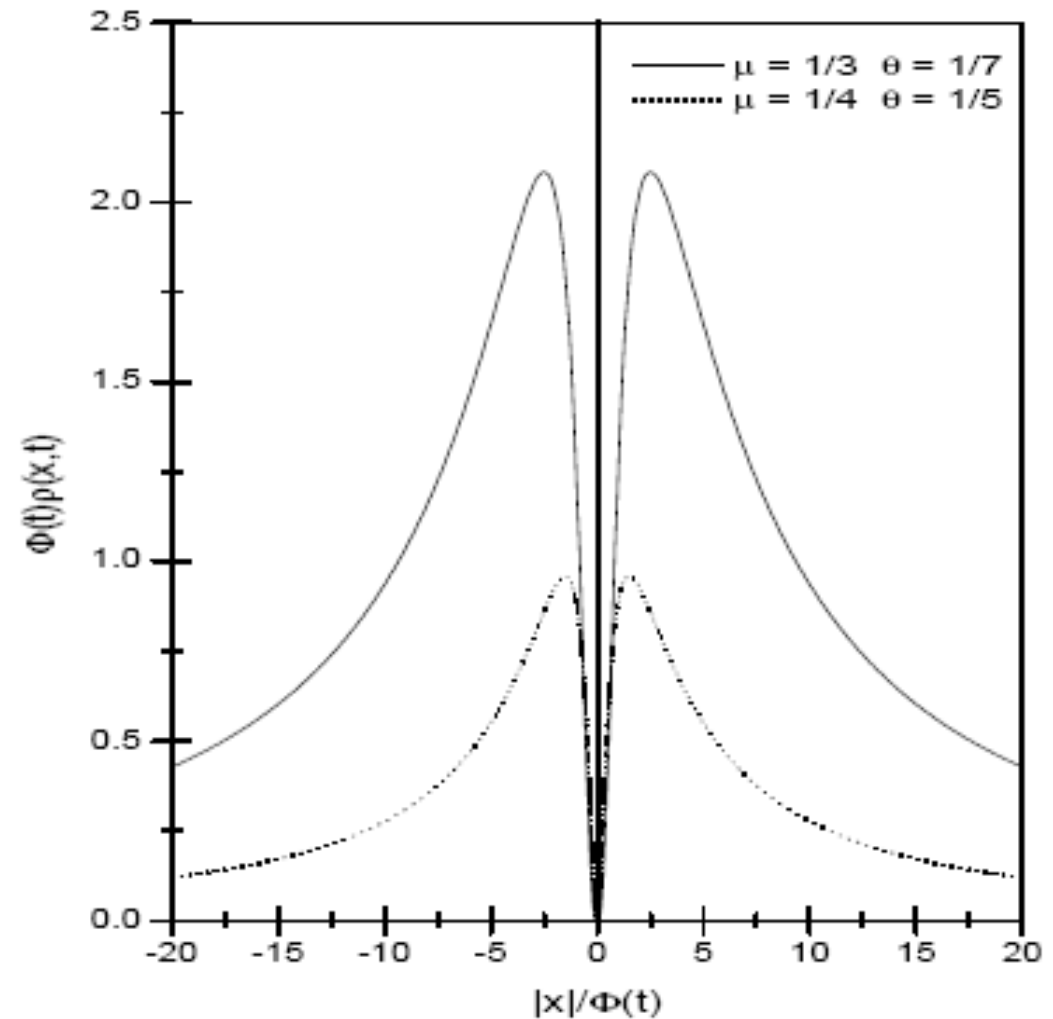




(ii)  $0 < \mu < 1/2$  com  $0 \leq \theta < 1/2 - \mu$

Nesta região  $b = 1$  e

$$\mathcal{N} = \frac{\Gamma\left(\frac{(1-\mu)(1+\mu+\theta)}{1-2\mu-\theta}\right)}{2\Gamma\left(1 + \frac{(\mu+\theta)(1+\mu+\theta)}{1-2\mu-\theta}\right)\Gamma(\mu+\theta)}$$



## Outras Situações

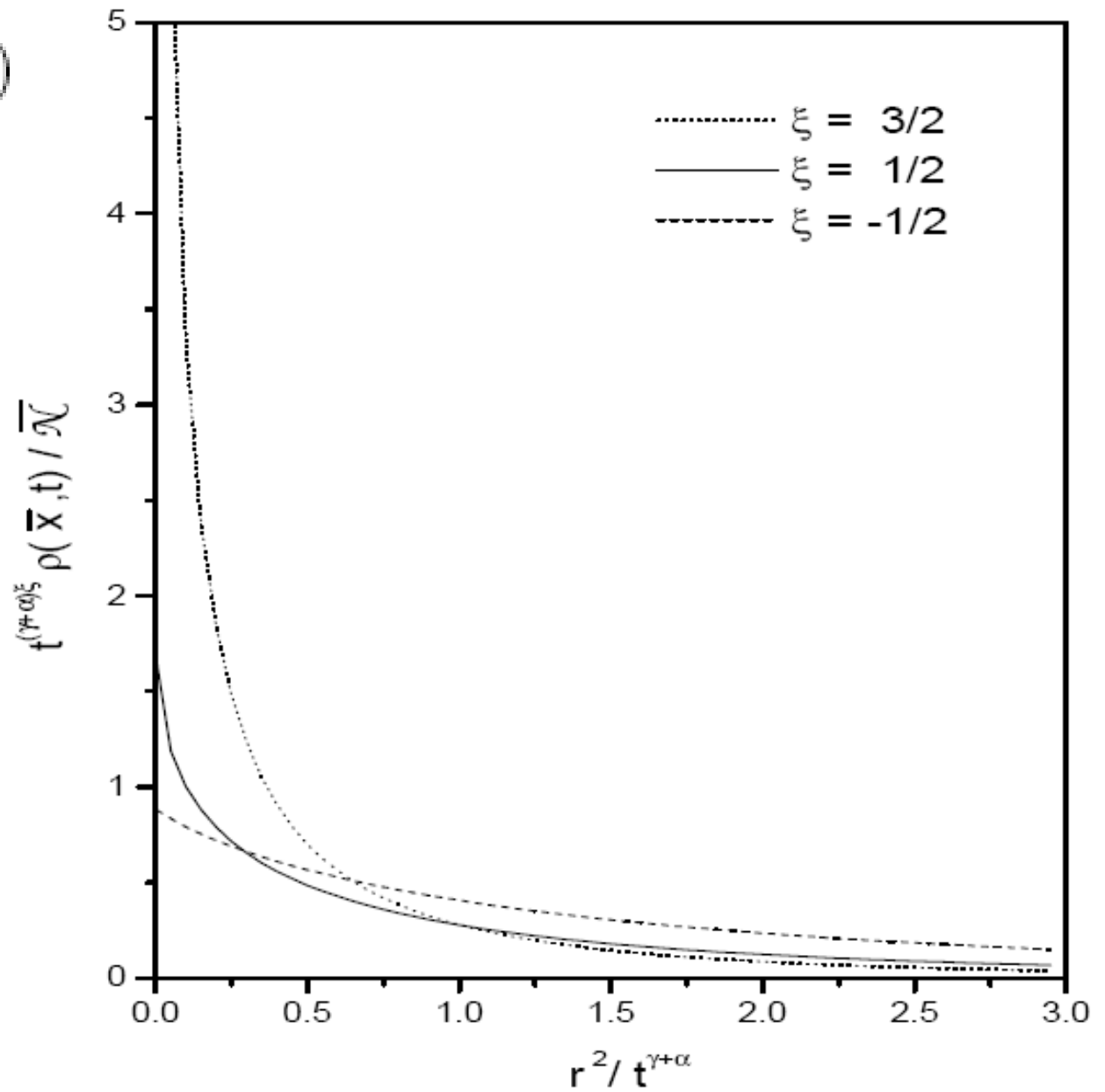
$$\begin{aligned} \frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} \rho(\bar{x}, t) &= \sum_{i,j=1}^d \int_0^t dt' \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t-t') \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho(\bar{x}, t')] \right\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} [F_i(\bar{x}) \rho(\bar{x}, t)] \quad , \end{aligned}$$

Para o caso  $\mathcal{D}_{ij}(\bar{x}, t) = \mathcal{D}_i t^{\alpha-1} \delta_{ij} |x_i|^{-\theta_i} / \Gamma(\alpha)$

$$\begin{aligned} \rho(\bar{x}, t) &= \prod_{i=1}^d \frac{2 + \theta_i}{2\Gamma\left(\frac{1}{2+\theta_i}\right)} \\ &\quad \times \left( \frac{1}{(2 + \theta_i)^2 \mathcal{D}_i t^{\gamma+\alpha}} \right)^{\frac{1}{2+\theta_i}} \mathbb{H}_{1\ 2}^{2\ 0} \left[ \sum_{i=1}^d \frac{|x_i|^{2+\theta_i}}{4\mathcal{D}_i t^{\gamma+\alpha}} \middle| \begin{matrix} (1-\xi(\gamma+\alpha), \gamma+\alpha) \\ (1-\xi, 1) \quad (0, 1) \end{matrix} \right] \end{aligned}$$

onde

$$\xi = \sum_{i=1}^d \frac{1}{2 + \theta_i}$$



## Equações Fracionárias de Ordem Distribuída

$$\int_0^{\infty} d\alpha \bar{p}(\alpha) \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \rho(x, t) = K_{\alpha, \mu} \int_0^{\infty} d\mu \tilde{p}(\mu) \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^\mu} \rho(x, t)$$

## Equações Fracionárias com Termo Não-Local

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \rho(x, t) = K_{\alpha, \mu} \frac{\partial^\mu}{\partial |x|^\mu} \rho(x, t) + \int_0^t d\bar{t} \alpha(t - \bar{t}) \rho(x, \bar{t})$$

# Séries Temporais

Aplicações das equações de difusão  
anômala (procura)

Série temporal (única)

Réplica de séries temporais

Sistema de séries temporais

# Série temporal única

Propriedades globais

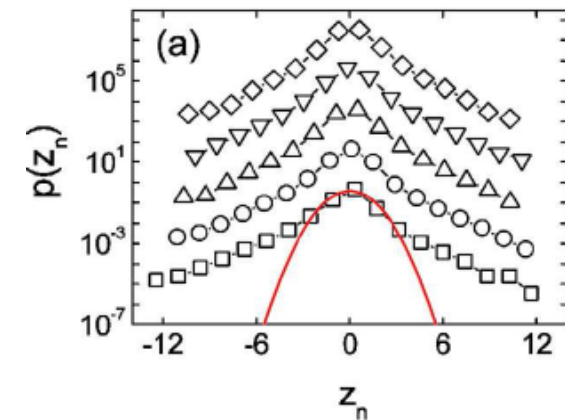
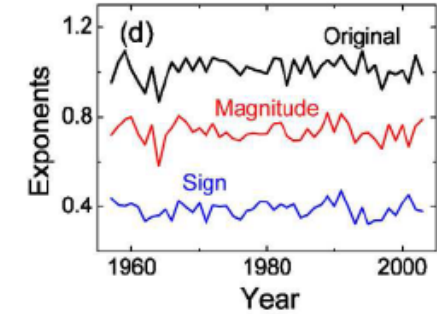
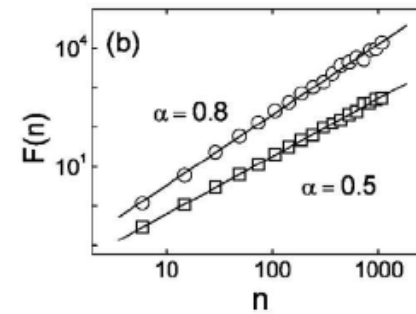
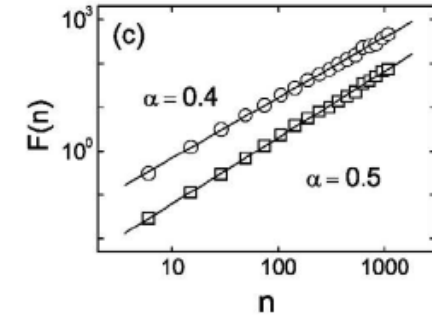
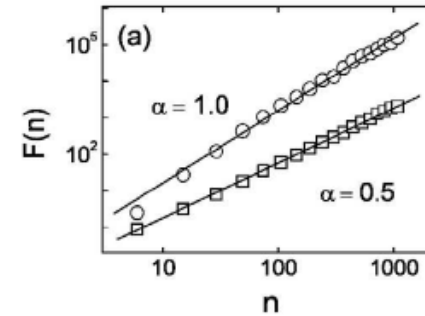
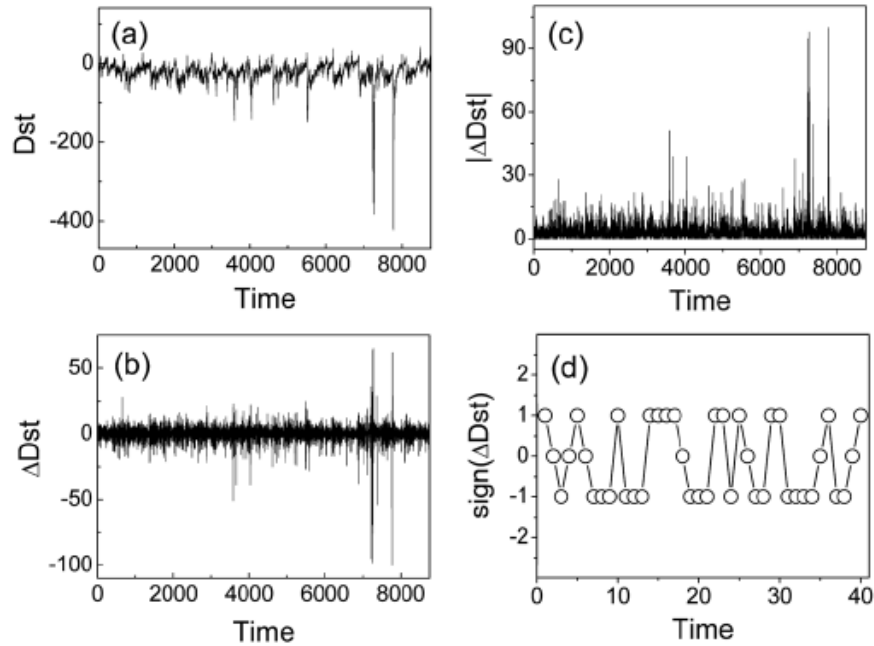
Exemplos:

- Sinal geomagnético
- Atividade religiosa
- Terremotos
- Papel amassado etc

O que investigamos:

- Distribuição das amplitudes
- Distribuição dos retornos
- DFA e MDFA
  - Amplitudes
  - Sinais

# Sinal Geomagnético





# Réplicas de séries temporais

## Exemplos:

- Difusão usual
- Campeonatos de futebol etc

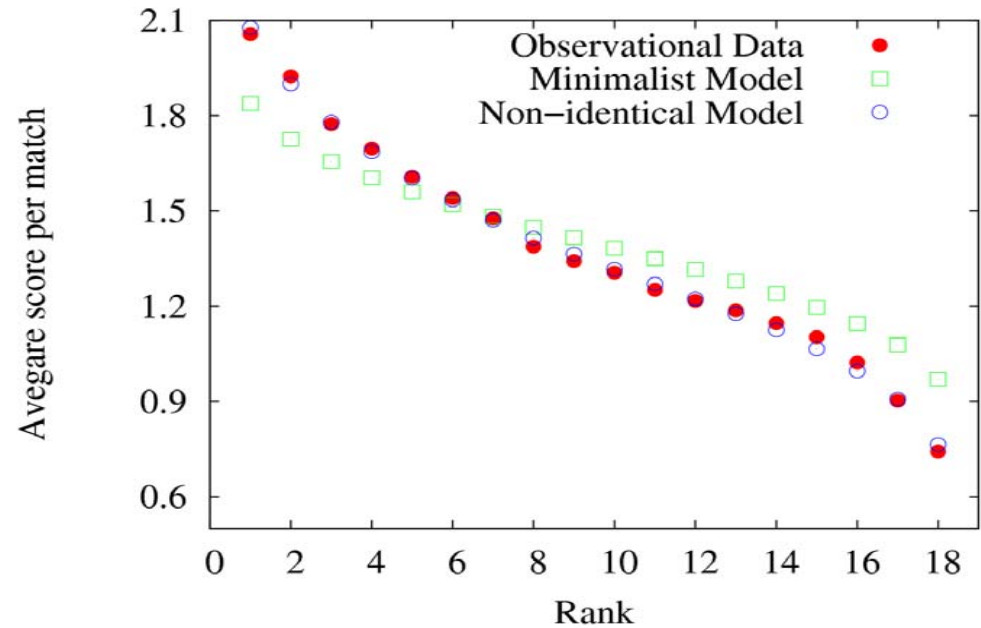
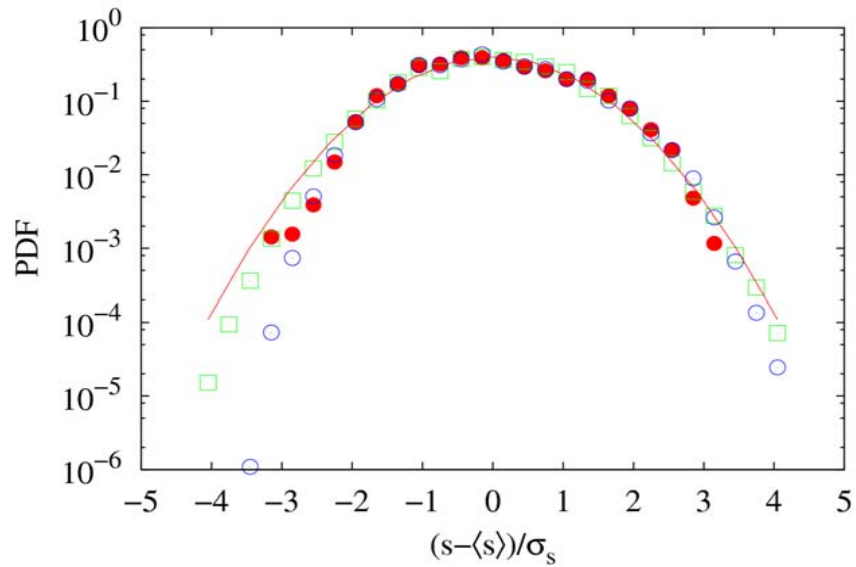
## Réplicas:

- Cada trajetória
- Cada time (em cada campeonato) etc

## Caminha aleatória:

- Passo: pontuação
- Unidade de tempo: cada rodada

# Campeonatos de Futbol



# Sistema de séries temporais

Exemplos:

- Atividade religiosa
- Escolas de um estado etc

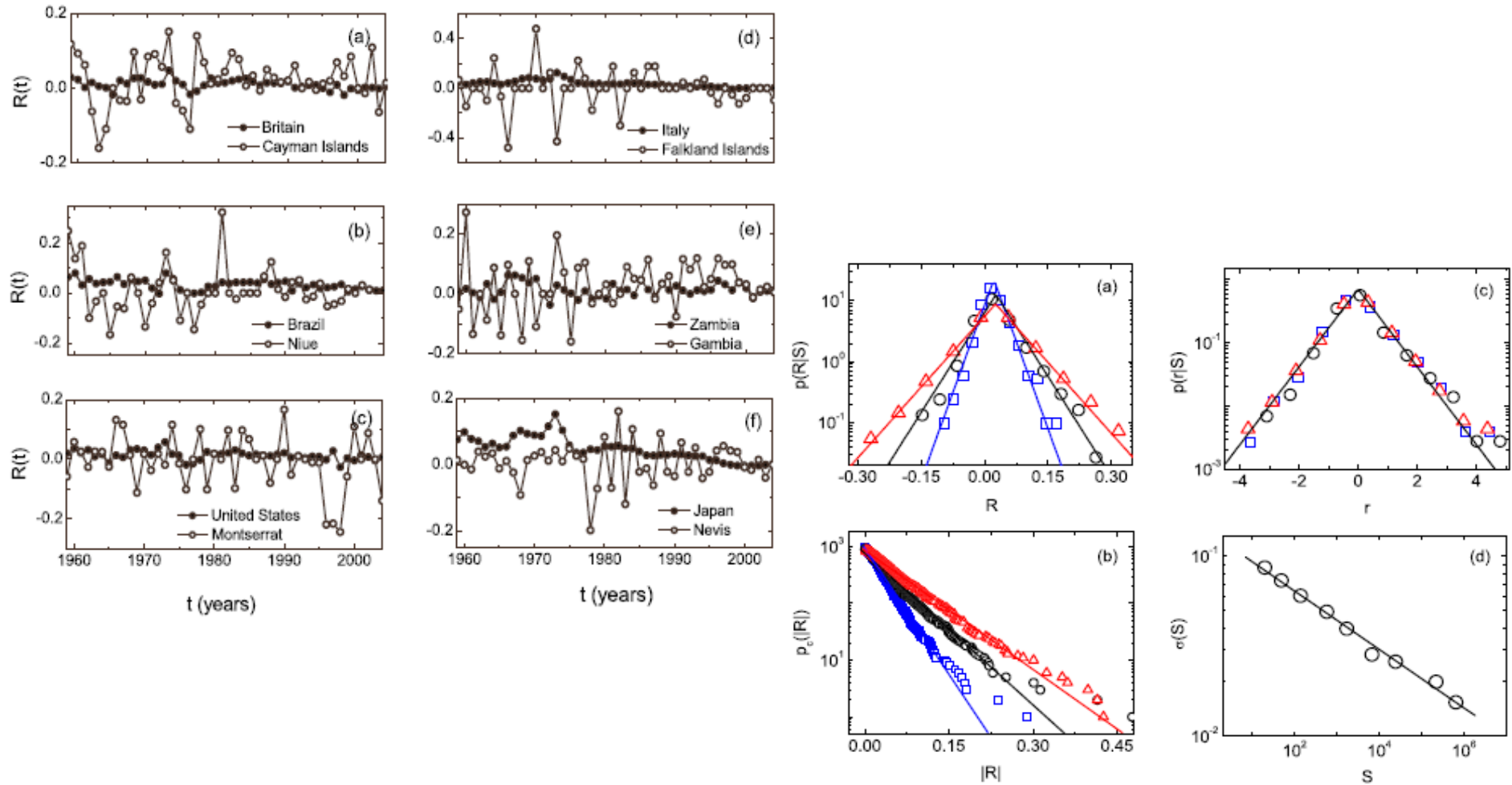
Sistema composto de  $N$  subpartes

- $N$  séries temporais
- $N$  grandes
- Cada série pode ser pequena

Exemplos:

- Quantidade de membros por país/ano
- Quantidade de alunos por escola/ano etc

# Atividade Religiosa



# Colaborações

## Aspectos formais sobre difusão anômala

- Soluções de equações
- Relações gerais etc

## Aspectos empíricos sobre difusão anômala

- Caracterização do sistema
- Modelos
  - Discretos
    - Recursões
    - Redes
  - Contínuos
    - Equação de difusão
    - Equação mestra
    - Equação de Langevin

Outras