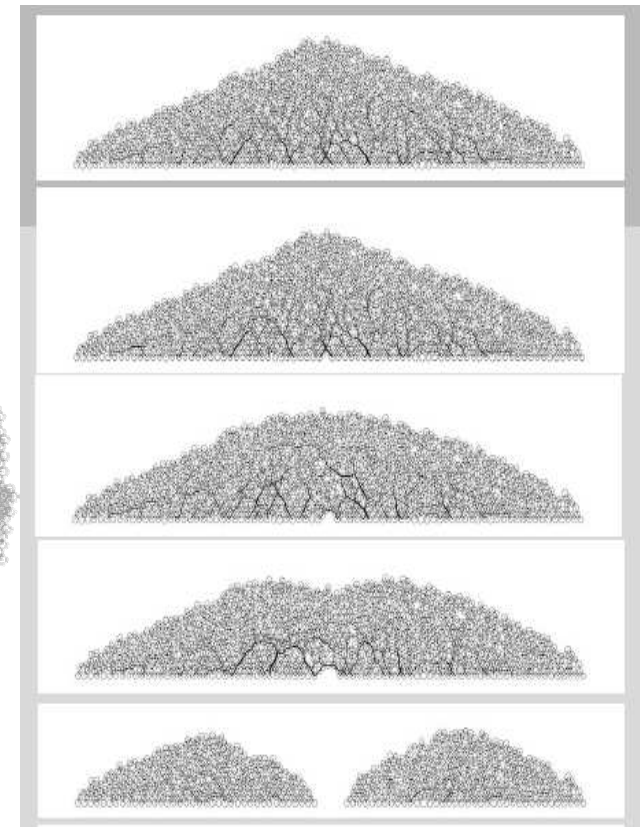
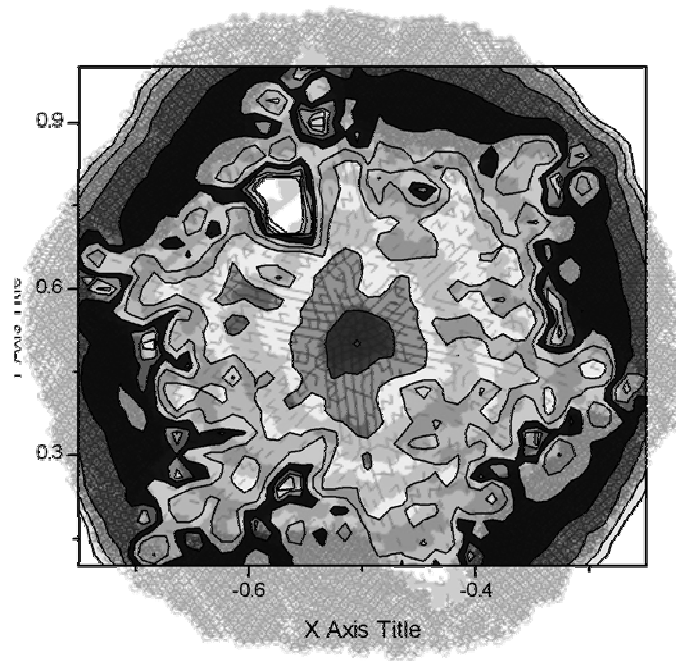
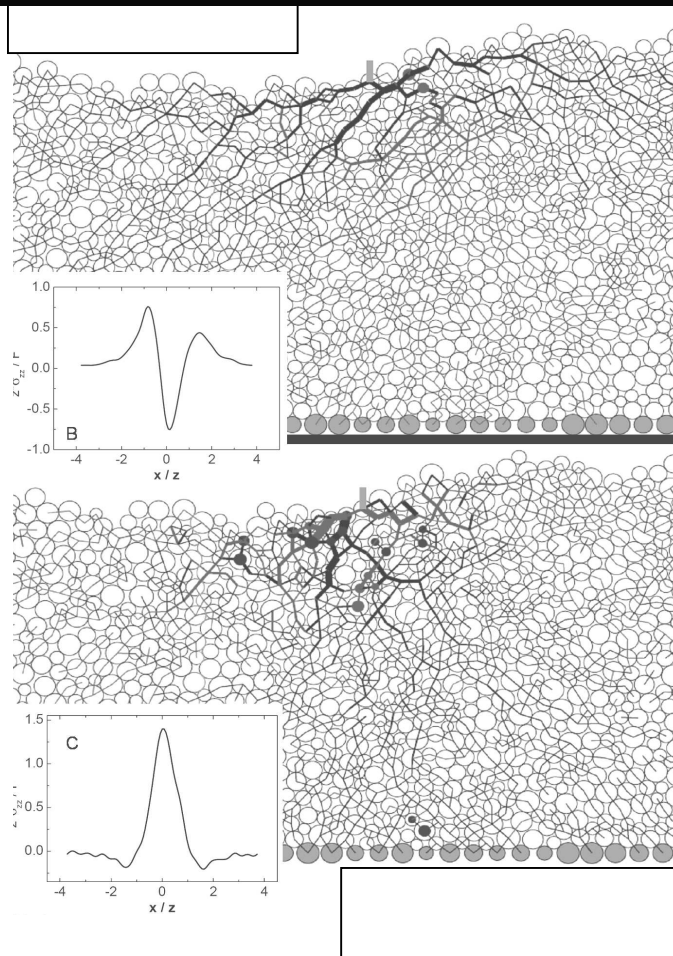


Simulações em Sistemas Granulares:

Função resposta a tensões, formação de padrões e avalanches



Albans ATMAN Picardi Faria – A.P.F. Atman

Departamento de Física e Matemática – CEFET-MG
INCT-Sistemas Complexos



Sumário

1 – Introdução:

Objetivos

Conceitos básicos e fenomenologia

Motivação

Estudo da função resposta em empilhamentos granulares

2 – Planos de Trabalho:

Ajuste de parâmetros para empilhamentos granulares

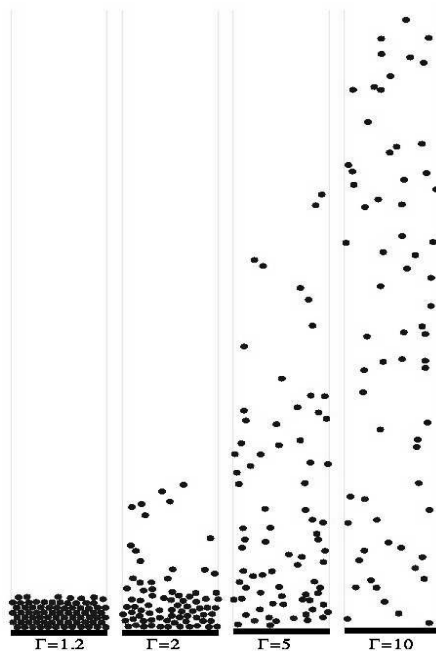
- Afastamento da elasticidade em empilhamentos granulares
 - Formação de padrões no escoamento entre grãos

3– Síntese:

Conceitos Básicos

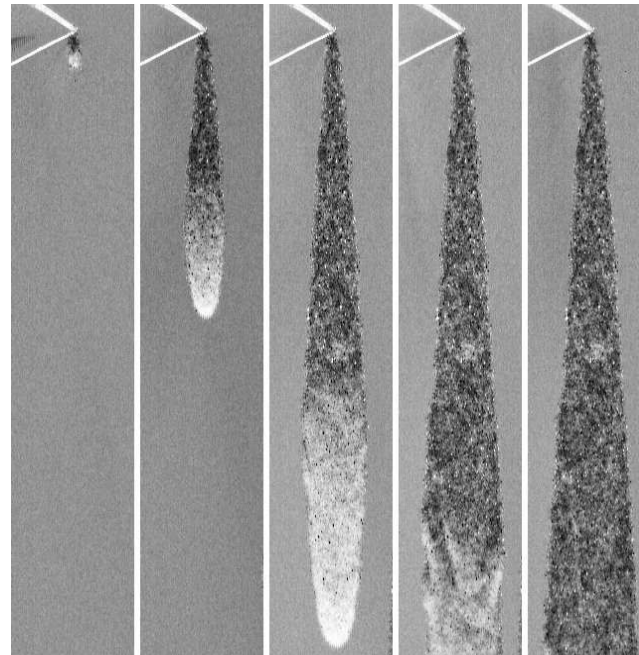
Estados Clássicos da Matéria

Gás



Granulares sob vibração:
Temperatura granular

Líquido



Avalanches em Escoamentos
Granulares

Sólido



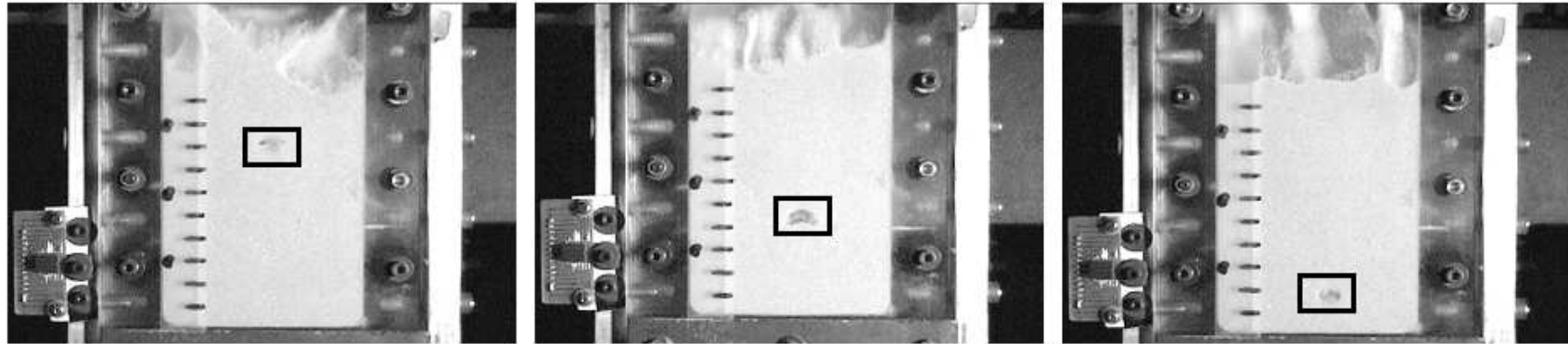
Pilhas de Areia
($\uparrow$ BMétails)

A.Daerr, S.Douady, NATURE **399** 241 (1999)

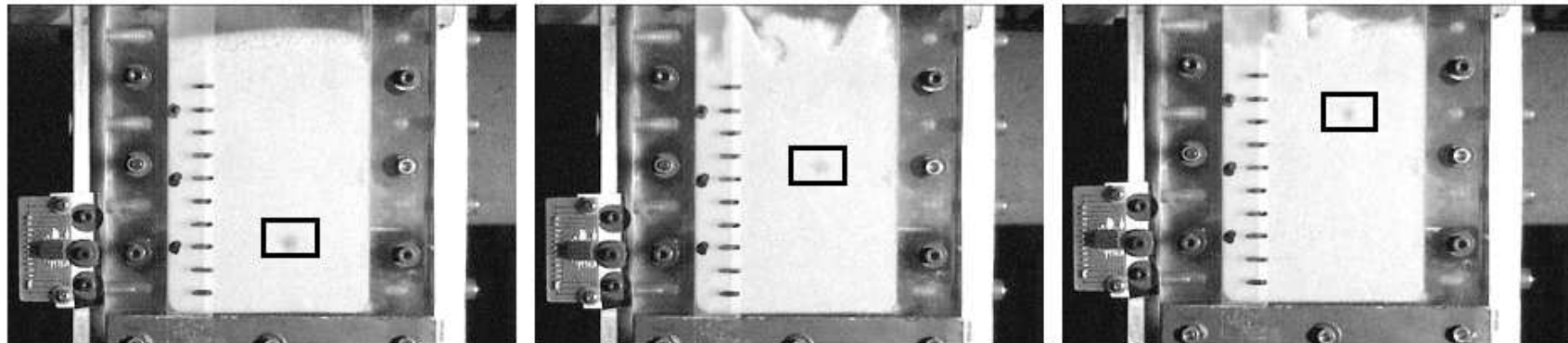
Fenomenologia

Segregação:
“Brazil nut effect” e empuxo reverso.

$$\Delta\rho > 0$$

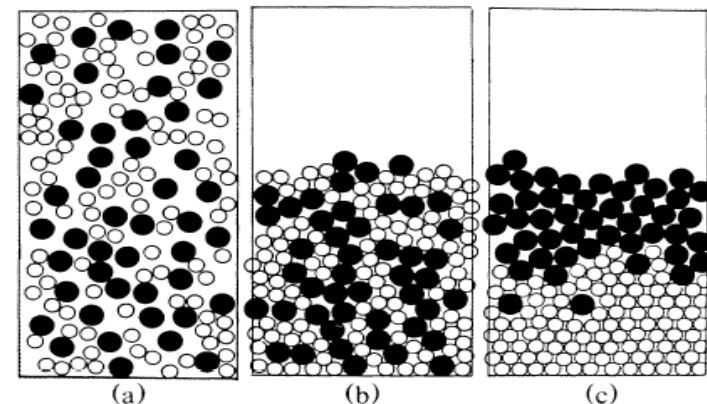
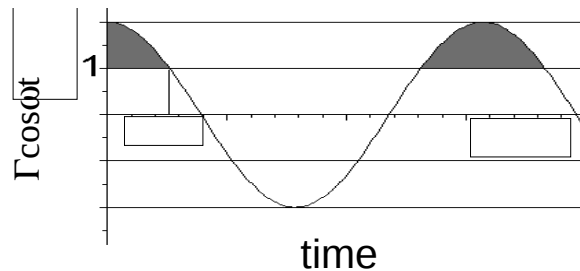


$$\Delta\rho < 0$$



$$\Gamma = \frac{y_0 \omega^2}{g}$$

$$\Delta\rho = \rho_m - \rho_i$$



G. Gutiérrez, et al., EUROPHYS LETT **67**, 369 (2004)

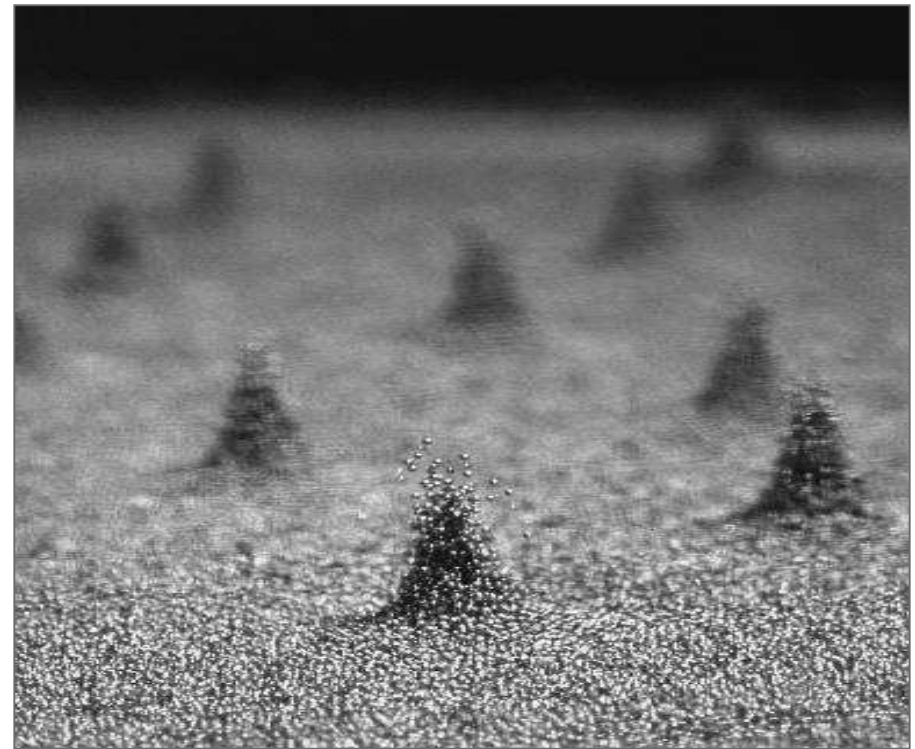
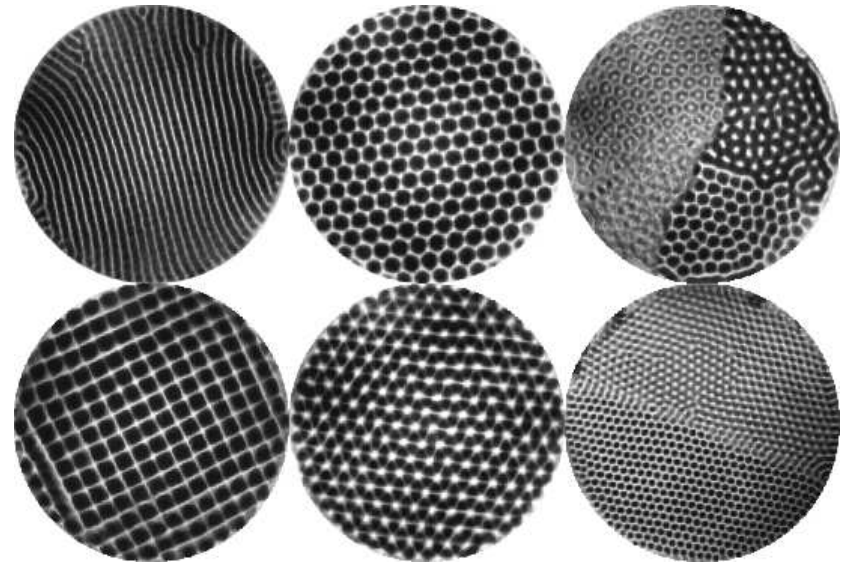
A. Rosatto et al., PHYS REV LETT **58**, 1038 (1987)

Fenomenologia

Formação de Padrões:

Esteira vibrante

Óscilons!



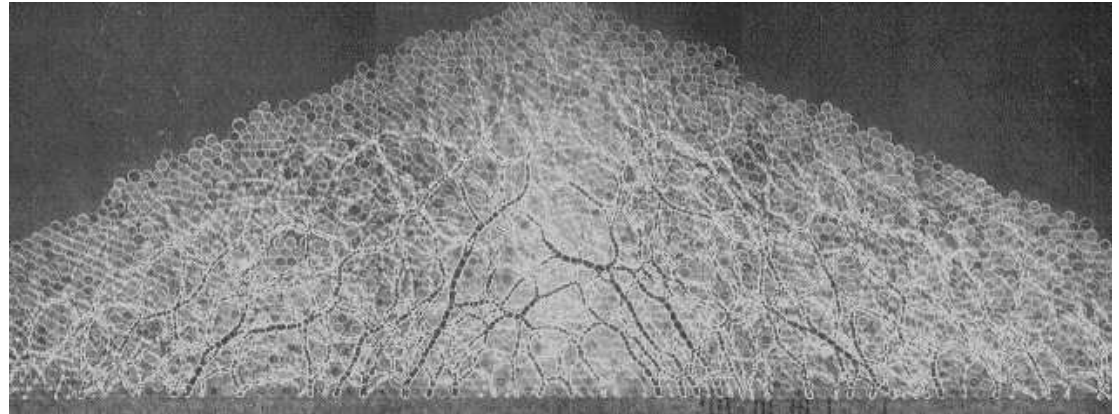
F. Melo, P. B. Unbanhovar, H. L. Swinney, PHYS REV LETT 75 3838 (1995).

A.P.F.Atman, Simulações em Sistemas Granulares, INCT X, CBPF, 23 Março de 2009.

Fenomenologia

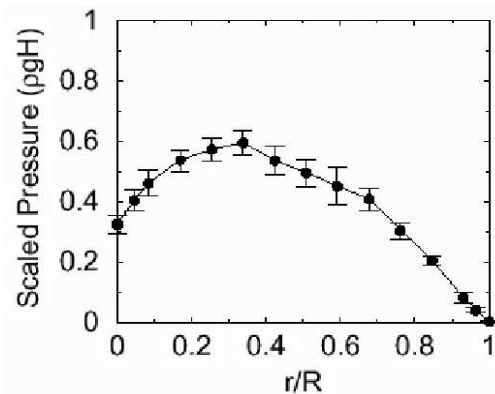
Estática de materiais granulares

- dependência da preparação;
- texturas



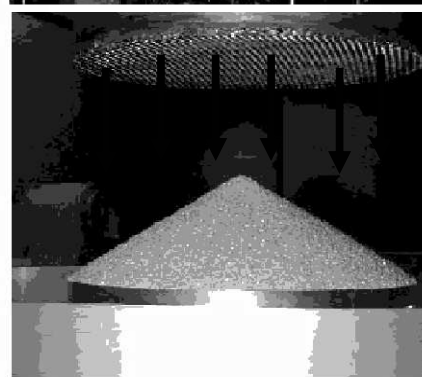
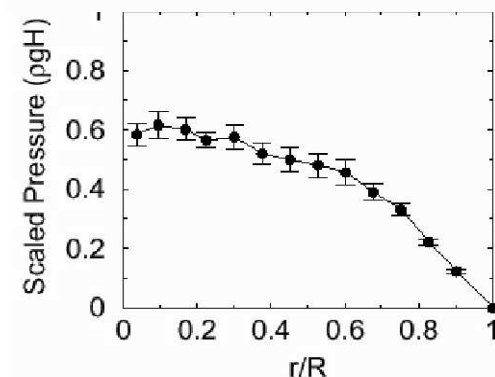
Distribuição de tensões depende da história da preparação

Vanel et al. PRE **60** R5040 (1999)



Deposição por fonte única (funil):
queda na pressão axial

Sandpile Stress Dip Effect

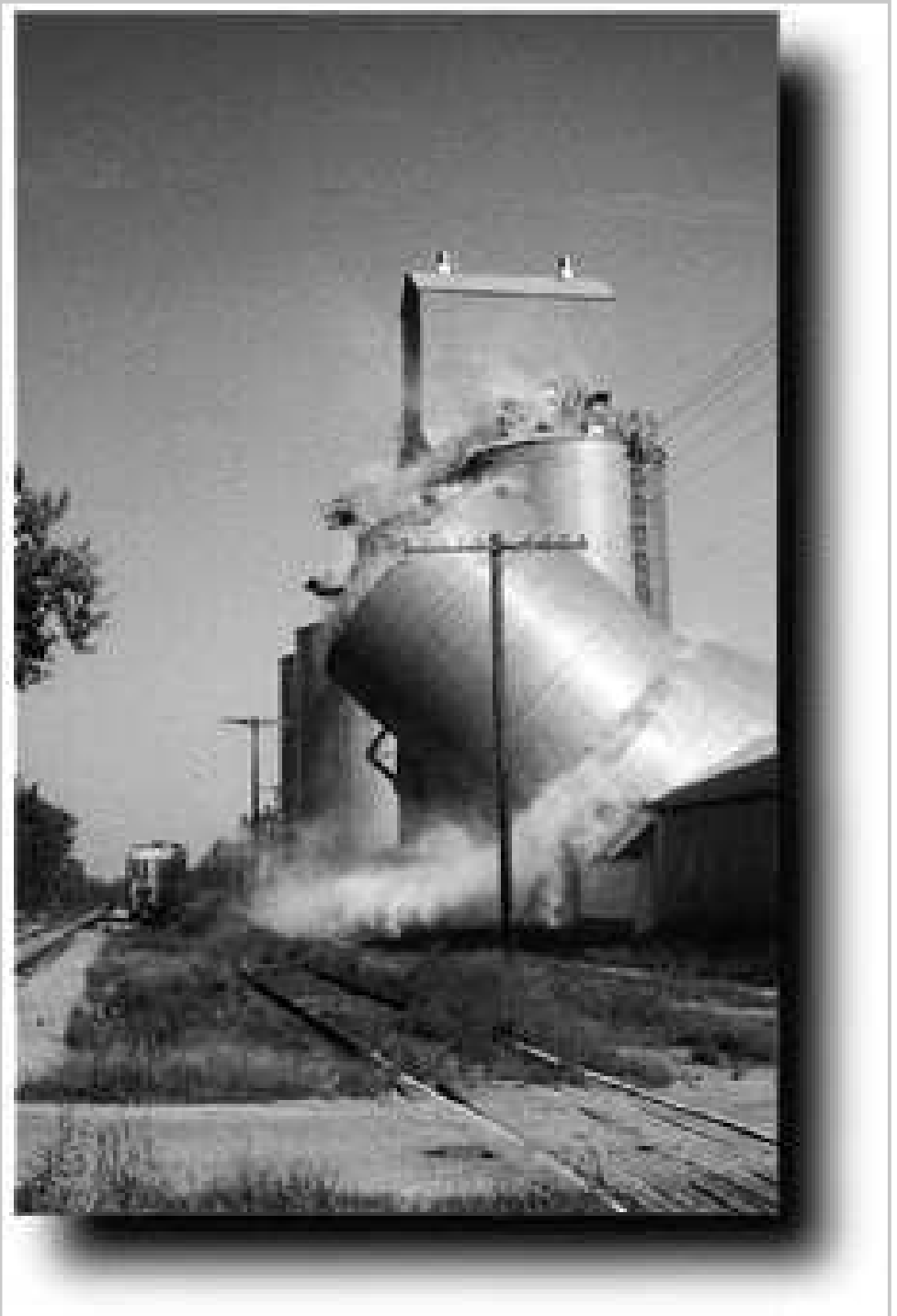
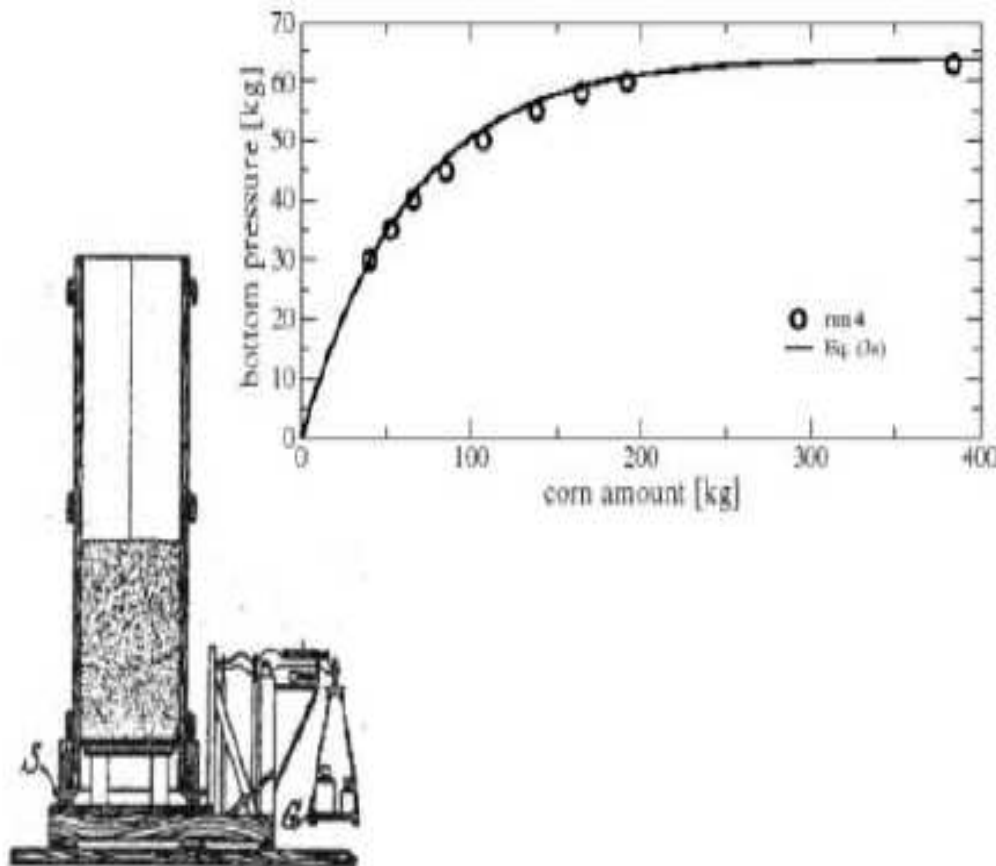


Deposição homogênea (peneira):
Não há queda na pressão axial

Fenomenologia

Fluidização de um meio granular;

Efeito Janssen



Fragilidade dos Materiais Granulares

Philippe Brunet
Guillaume Reydellet
Evelyne Kolb
Philippe Claudin
Eric Clément

PMMH/ESPCI – CNRS – Paris VI

Gaël Combe

*Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche Implémentant la
Géologie et la Mécanique- LIRIGM,
Grenoble*

Junfei Geng
Bob Behringer
Duke University

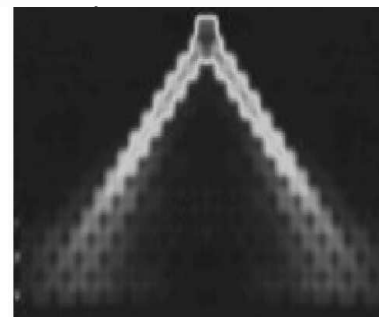
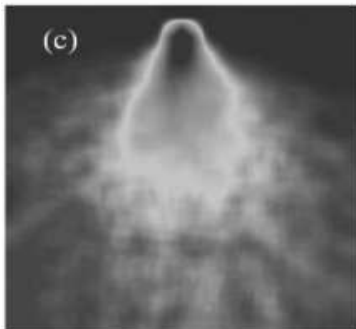
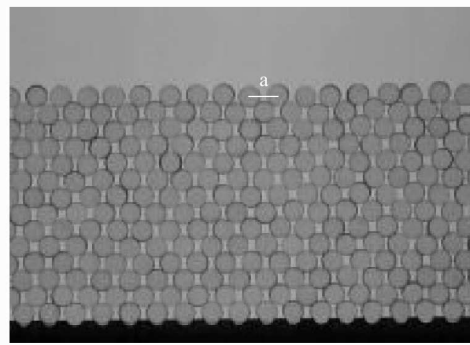
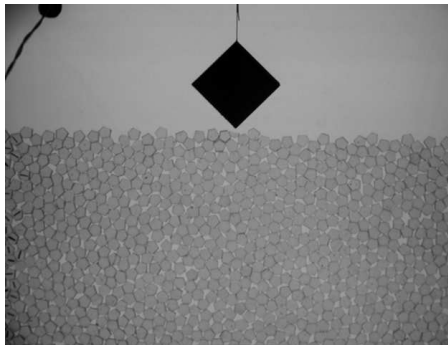
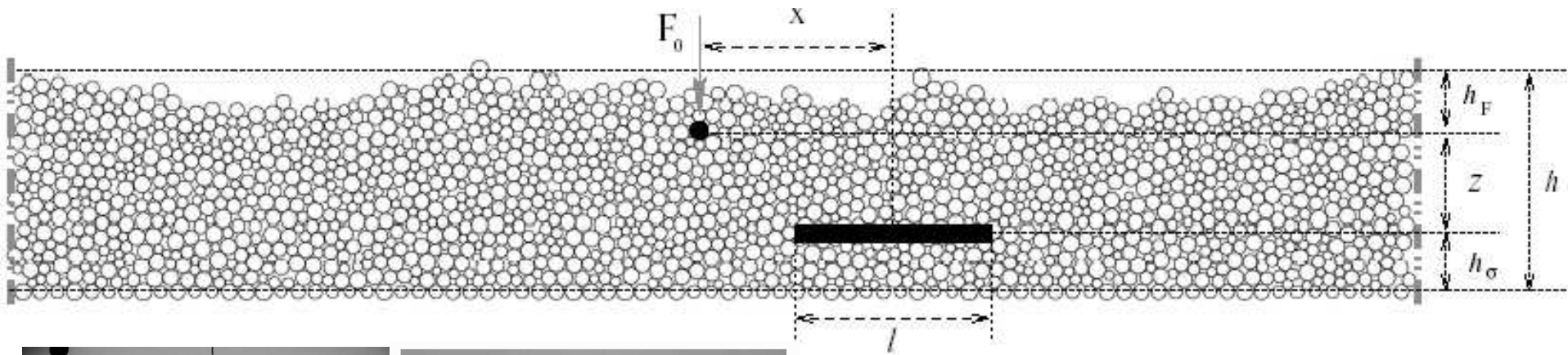
Isaac Goldhirsch
Chay Goldenberg
Tel Aviv University

A.P.F. Atman
Rosiene Correa Ruiz- Mestrado
Nayara Batista dos Santos- PIBIC FAPEMIG
Gustavo Henrique Borges Martins- PIBIC- FAPEMIG
CEFET MG

Conceitos Básicos

Função resposta a tensões

“Assinatura” da textura do empilhamento ?



Três abordagens:

experimentos[1];
modelos[2,3];
simulações;

[1] Geng et al PHYSICA D **182**, 274 (2003)

[2] Wittmer, J. P., Claudin, P., Cates, M. E. & Bouchaud, J.-P. NATURE **382**, 336–338 (1996).

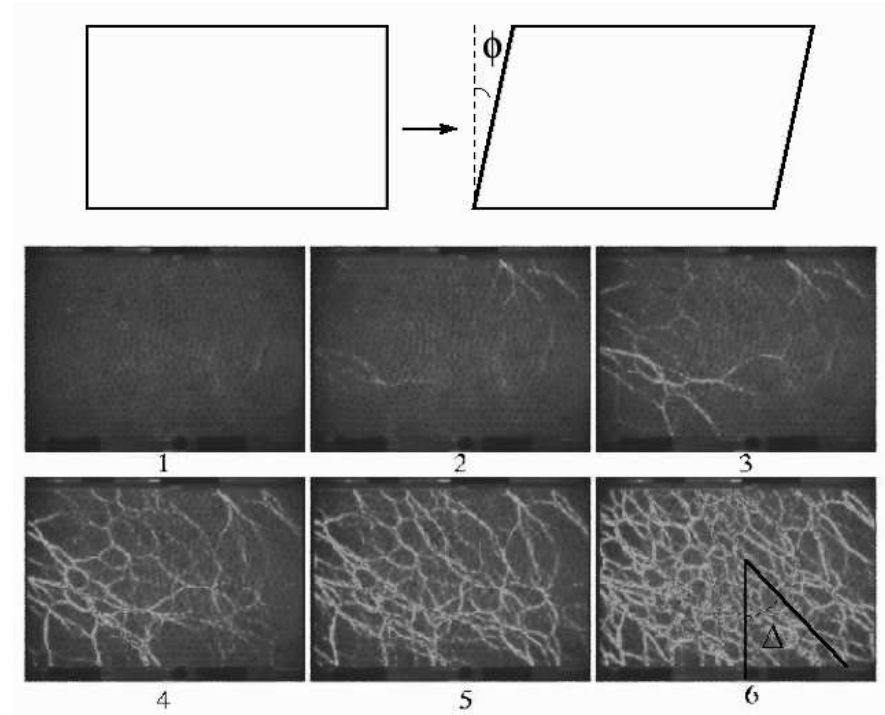
[3] Claudin P, Bouchaud J.-P., Cates ME and Wittmer J P *Models of stress fluctuations in granular media* PHYS REV E **57** 4441–57 (1998)

Desvio na função resposta devido à deformação por cisalhamento

Cisalhamento de uma célula 2D: $\phi=5^\circ$

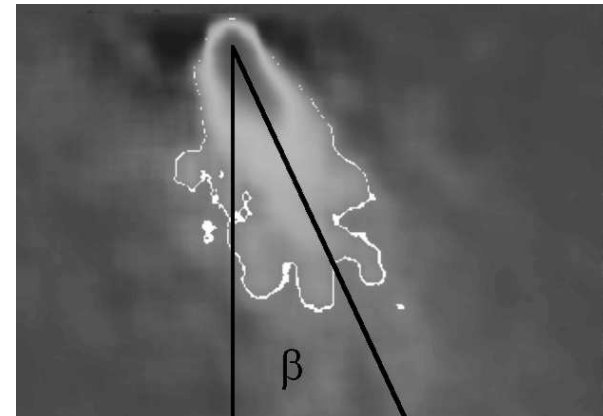
Interior: empilhamento de pentágonos fotoelásticos

Desvio na orientação das cadeias de força devido ao cisalhamento:
 $\Delta = 45^\circ$



Desvio na orientação da
função resposta: $\beta=22^\circ$ (2D)
 $\beta = 8^\circ$ (3D)

Geng et al., PHYSICA D **182**, 274 (2003)



Em síntese

- A textura é sensível a deformações/tensões externas, induzindo fortes efeitos macroscópicos na distribuição de tensões

Distribuição de contatos

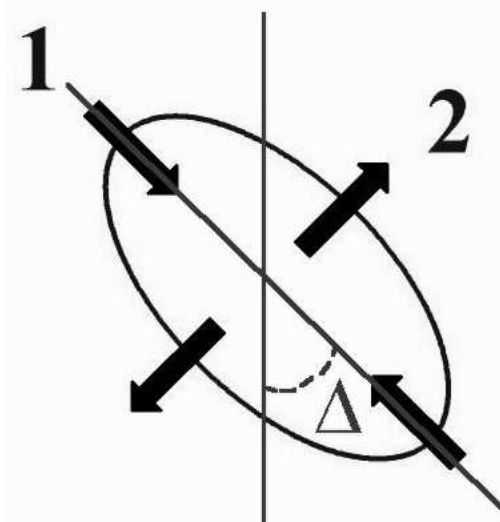
Orientação das cadeias de forças

- Elasticidade isotrópica é uma abordagem compatível mecanicamente?
- Podemos modelar a dinâmica dos coeficientes constitutivos em relação à evolução da textura devido aos esforços externos?
Um passo para compreender a plasticidade granular...

From the stress response function (back) to the sandpile pressure ‘dip’,

A. P. F. Atman, G. Reydellet, P. Brunet, P. Claudin, J. Geng, R. P. Behringer and E. Clément,
EUR. PHYS. J. E, **17**, 93–100 (2005).

Modelo Elástico Anisotrópico



2D Simplified Elastic Model
(modelo elástico simplificado)

Módulos de Young

1 direção 'dura': E_1

2 direção 'macia': $E_2 < E_1$

Δ : direção de ortotropia
eixo de rotação simétrico

$\Delta = 45^\circ$ a partir da direção de
cisalhamento

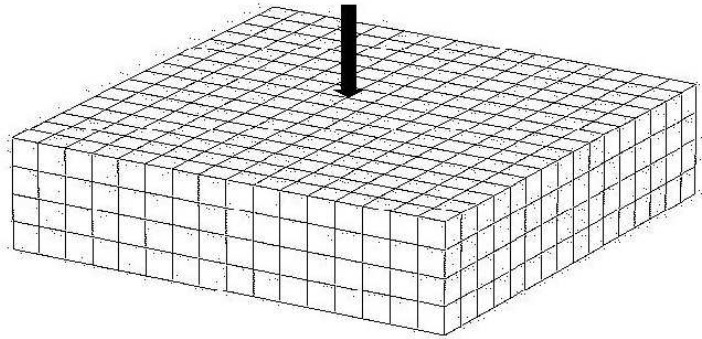
$$E_{iso} = (E_1 + E_2) / 2 = const$$

$$\nu_p = (\nu_1 + \nu_2) / 2$$

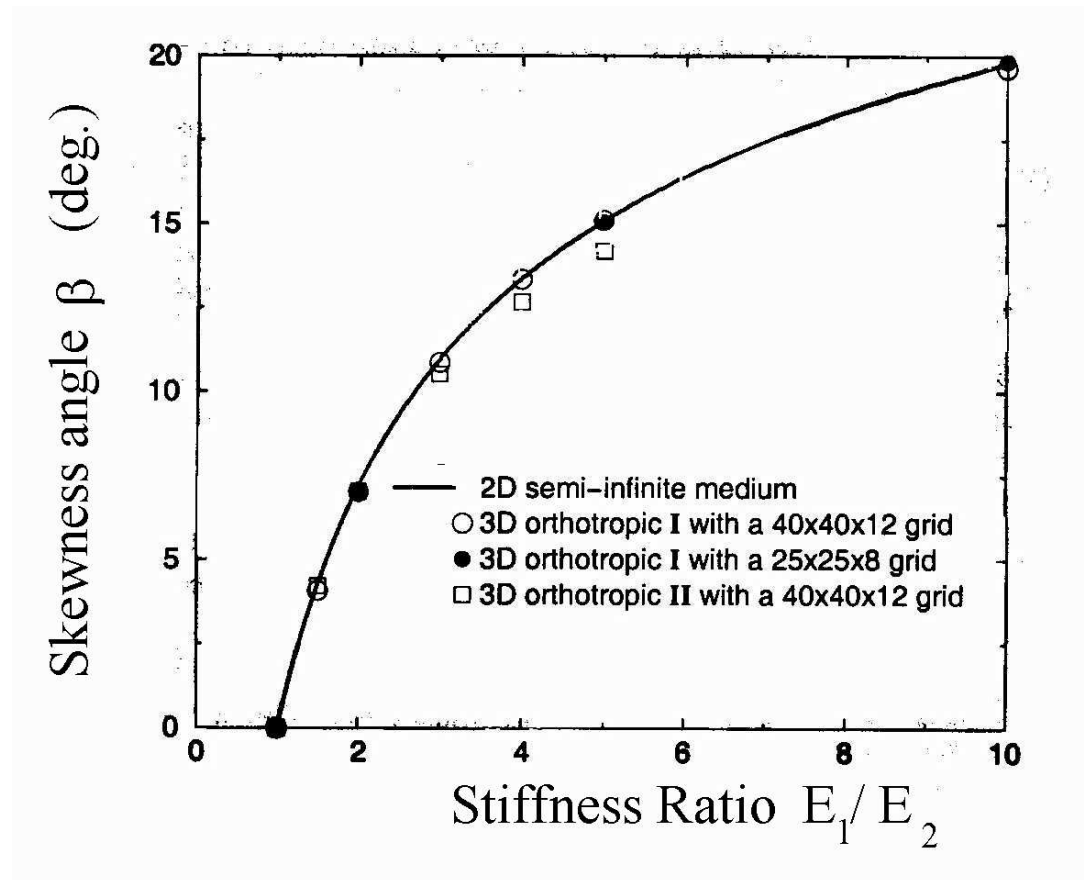
$$G = \frac{E_{iso}}{2(1 + \nu_p)}$$

Generalização 3D

SEM: Cálculos por elementos finitos (CASTEM)

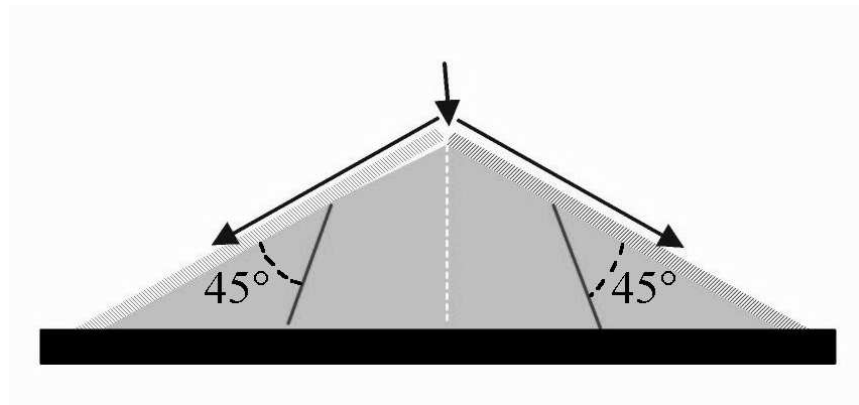
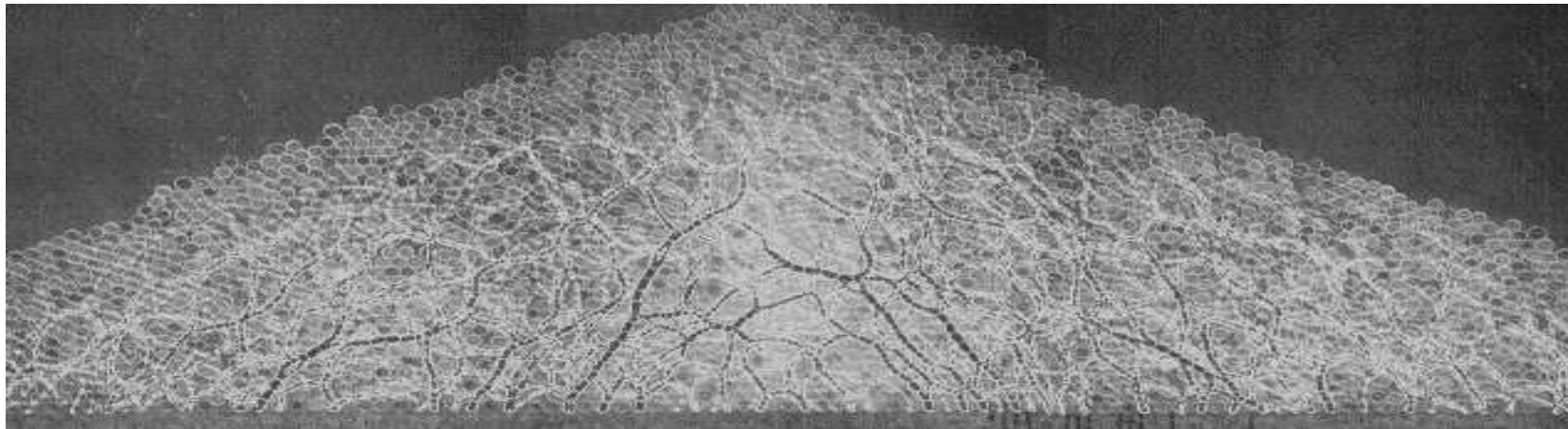


Quando a razão entre os módulos de Young aumenta, o ângulo de desvio aumenta



Uma explicação qualitativa para a queda de pressão sob uma pilha de areia

Efeito na textura devido ao cisalhamento provocado pelo processo de avalanches



Modelo elástico anisotrópico

Eixo de ortotropia

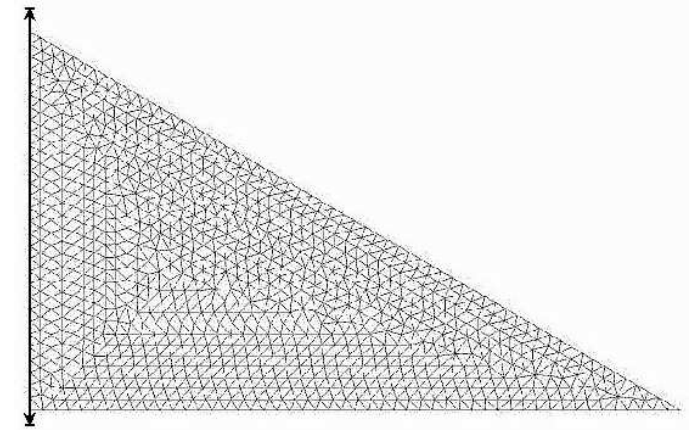
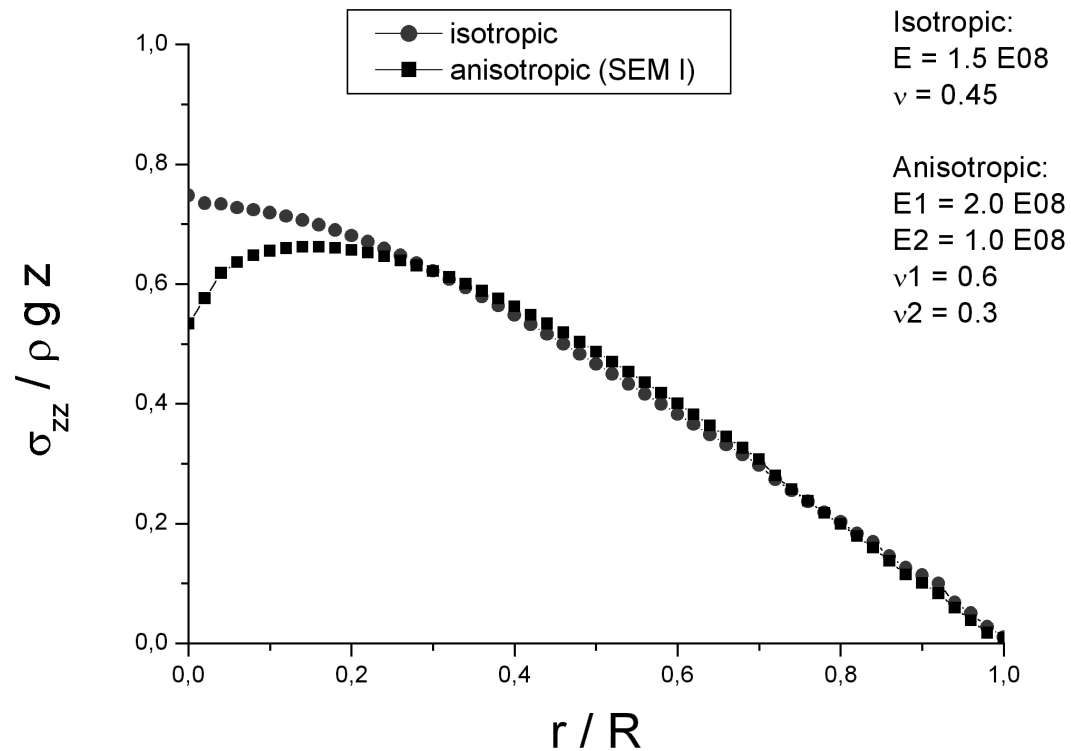
$\Delta = 45^\circ$ / direção das avalanches

ângulo de repouso para a pilha de areia:

$$\theta = 30^\circ$$

Cálculos numéricos no SEM

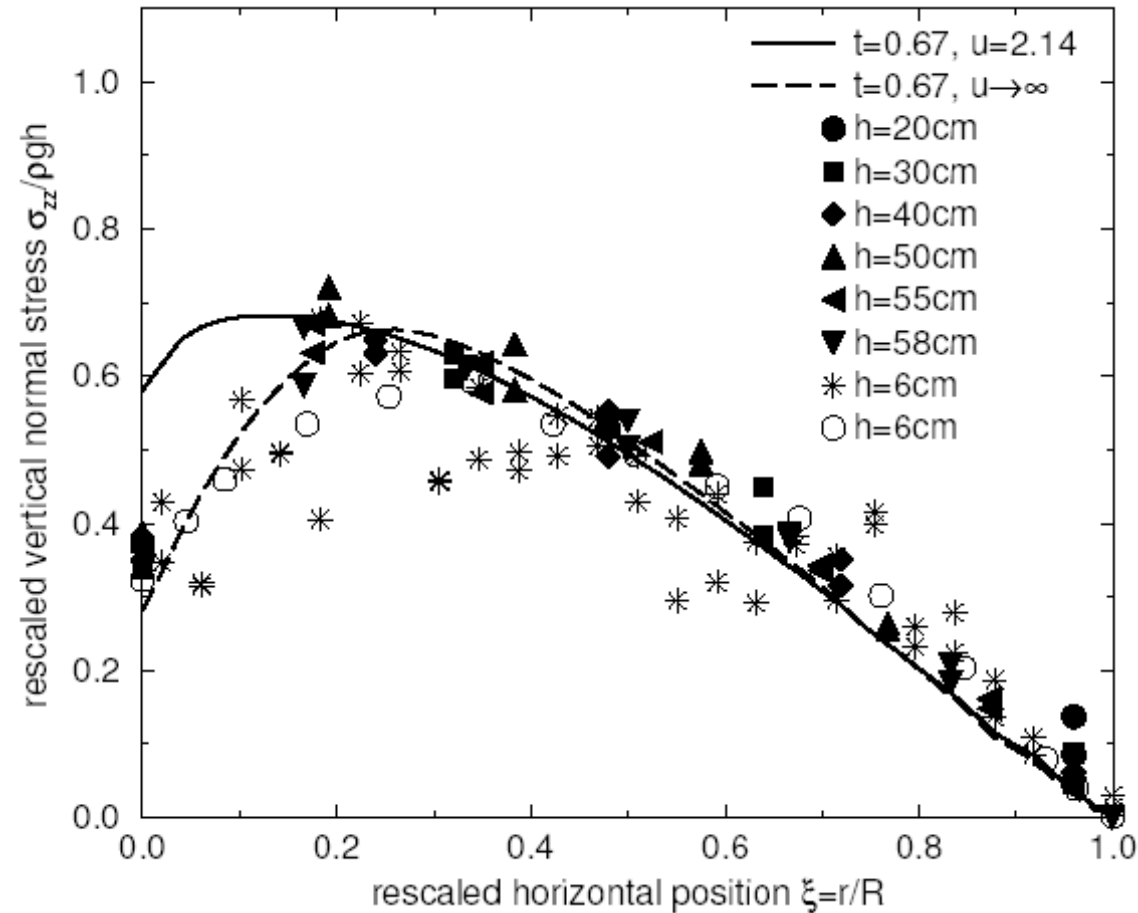
pilha cônica 3D



Elasticidade Isotrópica:
sem queda na pressão
 $\nu_p = 0.45$

Elasticidade Anisotrópica:
queda na pressão
 $E_1/E_2 = 2$ e $E_2 = E_3$ SEM I

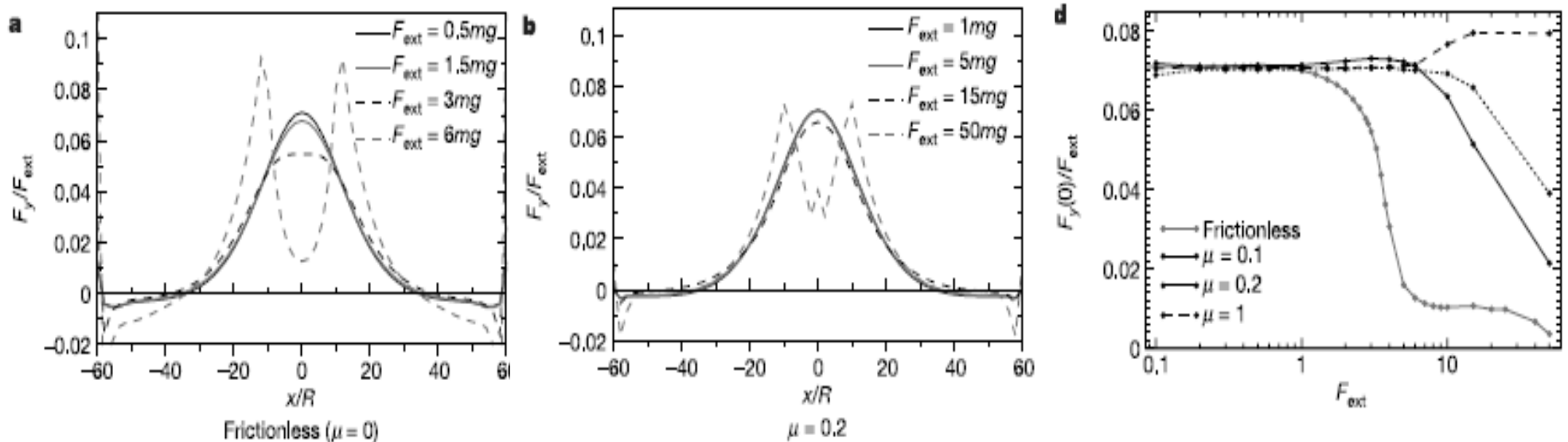
Comparação com experimentos



From the stress response function (back) to the sandpile pressure ‘dip’,

A. P. F. Atman, G. Reydellet, P. Brunet, P. Claudin, J. Geng, R. P. Behringer and E. Clément, EUR. PHYS. J. E, **17**, 93 100 (2005).

- O estudo das propriedades estáticas de empilhamentos granulares é um dos mais ativos campos de pesquisa nos últimos anos. Um dos temas cruciais é a natureza das equações que governam a distribuição de tensões em um meio granular – equações hiperbólicas predizem uma resposta com dois picos (um anel em 3D) enquanto um pico único é previsto pelas equações elípticas obtidas no modelo de elasticidade isotrópica.
- Hoje está claro que para empilhamentos genéricos de grãos com atrito, a descrição a partir de equações elípticas é mais apropriada; para amostras preparadas em casos específicos, como empilhamentos isostáticos ou sistemas monodispersos, a resposta esperada é do tipo hiperbólica.
- Goldenberg and Goldhirsch [NATURE, **435**, 188 (2005)] mostraram que o atrito desempenha papel fundamental, evidenciando uma transição de uma resposta elíptica para hiperbólica dependendo da magnitude da força empregada.



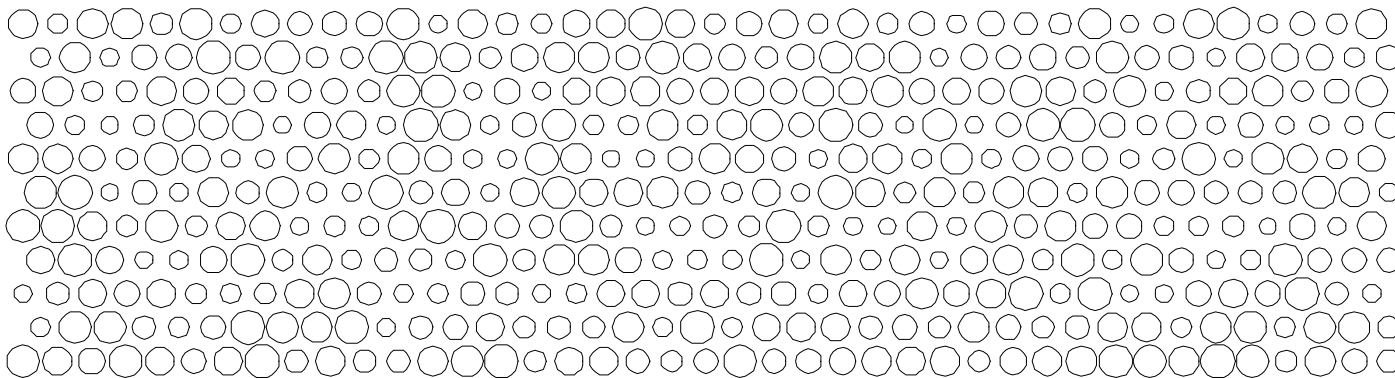
- A função resposta a tensões é uma ferramenta poderosa para explorar os efeitos dos tipos de preparação e revelar detalhes da microestrutura. Ela possui o caráter particular de teste não destrutivo e permite sondar a estrutura do empilhamento para determinação das características elásticas efetivas, possibilitando aos pesquisadores buscarem o “*Santo Graal*” desta área: relacionar unívocamente os perfis da função resposta (*aspecto macroscópico*) à textura interna do empacotamento (*aspecto microscópico*).
- Nesse ponto, fica claro porque as simulações desempenham papel fundamental nestes estudos: elas permitem relacionar as características microscópicas dos modelos – os parâmetros de controle – às grandezas macroscópicas mensuráveis, obtidas por análise estatística dos resultados simulados ou a partir de experimentos reais. Um primeiro passo nesse sentido foi feito explorando a sensibilidade dos perfis de resposta a tensões à preparação do sistema.

Simulação

Algoritmo de Dinâmica Molecular (MD) em três estágios: preparação, deposição e sobrecarga;

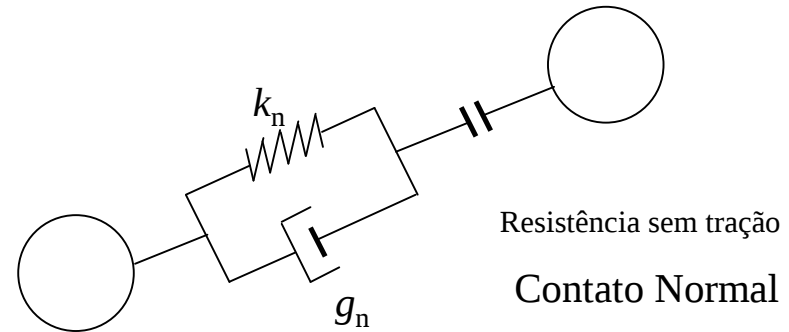
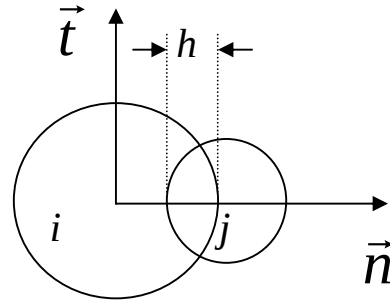
Preparação:

- parte de um arranjo de grãos polidispersos com razão de aspecto 1:4 e raios entre $R_{\min}$ e $R_{\max} = 2 * R_{\min}$;
- características das partículas: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Constantes de mola normal/tangencial, } k_n, k_s; \\ \text{Coeficiente de atrito, } \mu = 0.5; \\ \text{Coeficiente de amortecimento, } g_n \text{ (Kelvin-Voigt)}; \end{array} \right.$



Modelo: P.A. Cundall and O.D.L. Strack, *Geotechnique* **29**, 47 (1979).

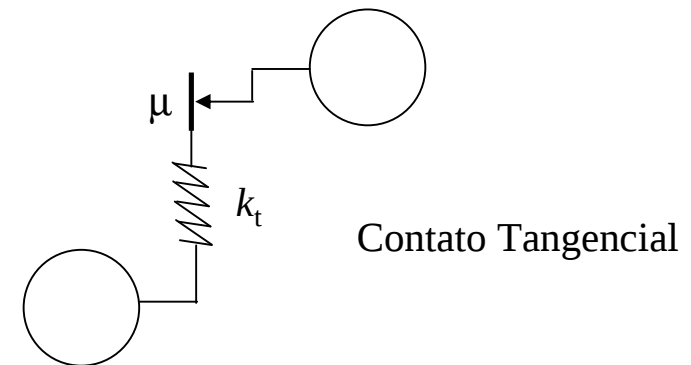
$$F_{ij} = k_n h$$



Equações DM:

$$M\ddot{\vec{x}}_i = \sum_j \vec{f}_{j \rightarrow i} + \vec{F}$$

$$I\ddot{\vec{\theta}}_i = \sum \vec{\Gamma}_{j \rightarrow i} + \vec{M}_{\vec{F}}$$



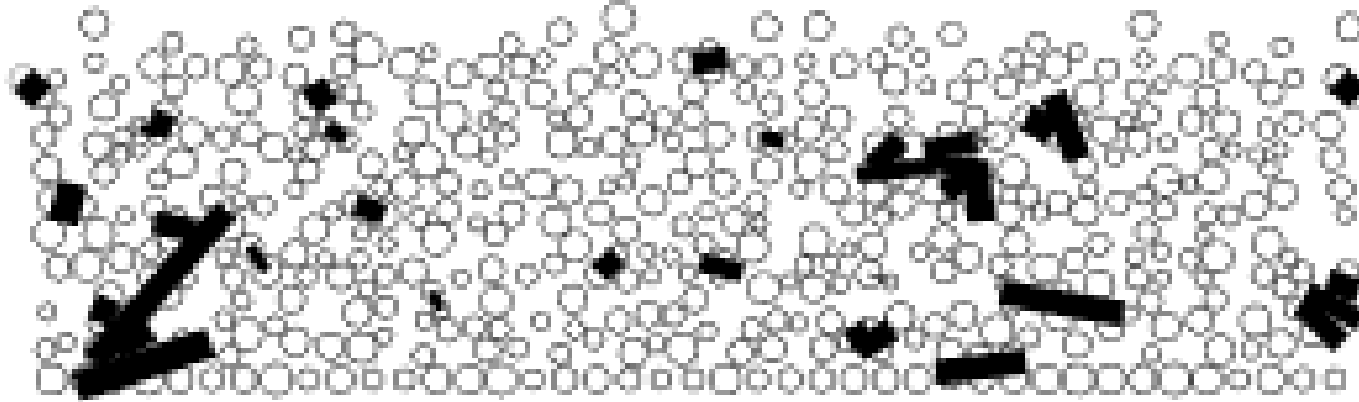
Preditor e corretor de 3ª ordem com algoritmo de Verlet modificado;

M.P. Allen and D.J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2003).

Deposição

Deposição tipo ‘chuva’ sob gravidade e condições periódicas de fronteira;
Grãos interagindo através de forças elásticas e de fricção;

Critério de equilíbrio para parar a deposição:



Critério de equilíbrio (testado a cada 100 MD passos):

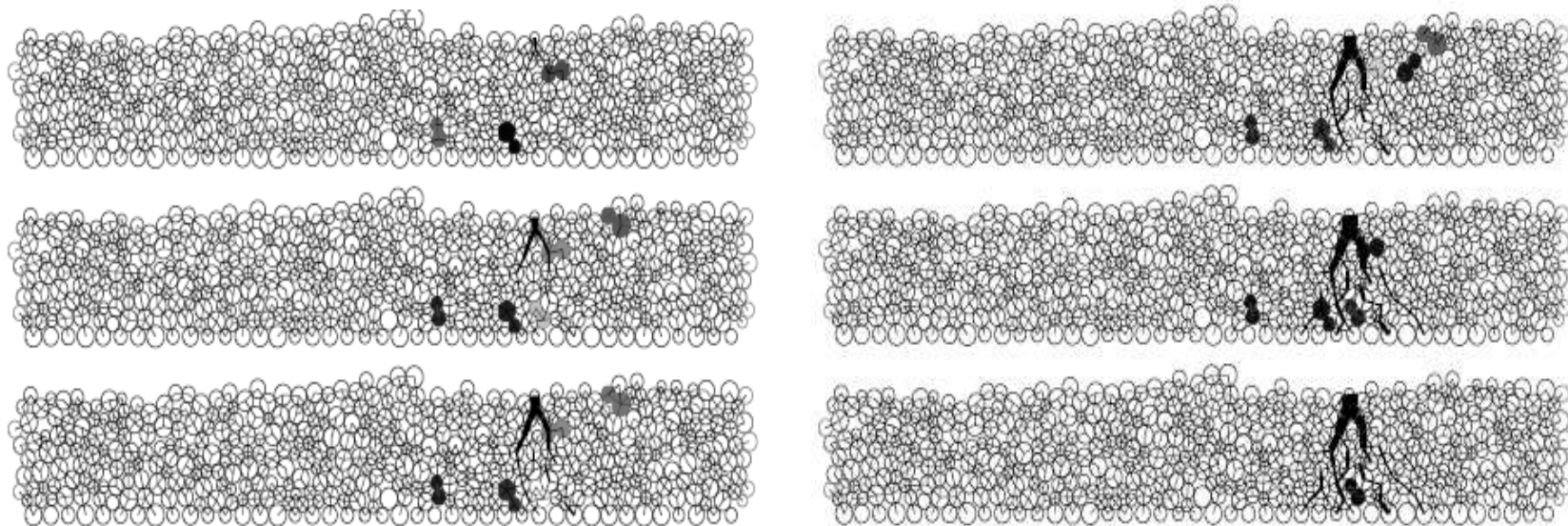
1. Número de contatos ganhos ou perdidos = 0;
2. Número de contatos ‘deslizando’ = 0;
3. Peso total = $\sum$ pesos das partículas individuais $\pm$ tolerância
4. Ao menos dois contatos por partícula;
5. Energia cinética total < valor limite;

Sobrecarga

Força aplicada sobre um único grão com magnitude F_0 ;

O valor de F_0 deve ser suficientemente pequeno para não causar qualquer rearranjo do empilhamento (ver Testes a seguir);

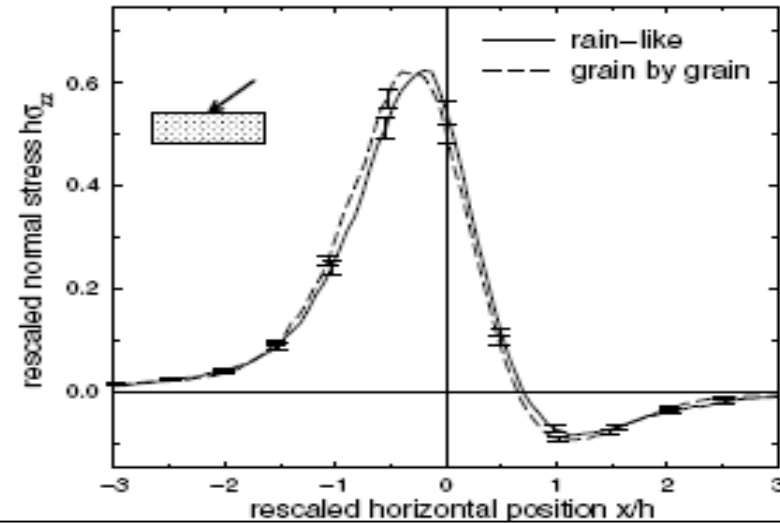
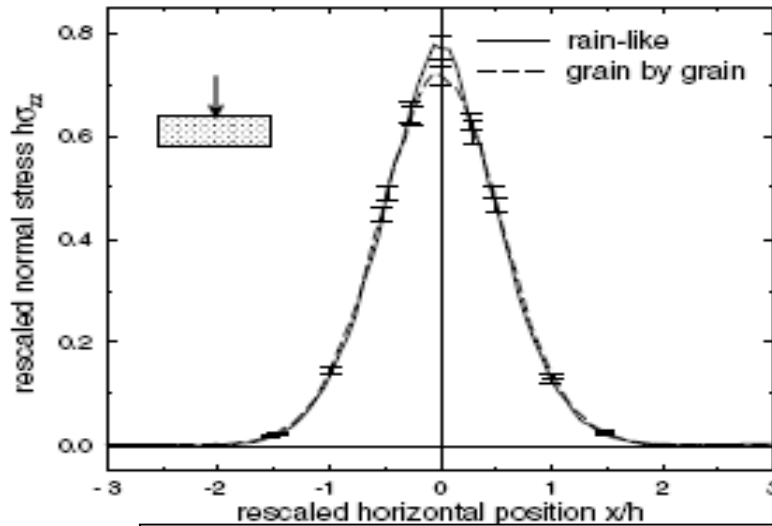
Sobrecarga aumenta paulatinamente durante 10000 MD passos (em cada passo a força é aumentada por $F_0/10000$ e permanece igual a F_0 após).



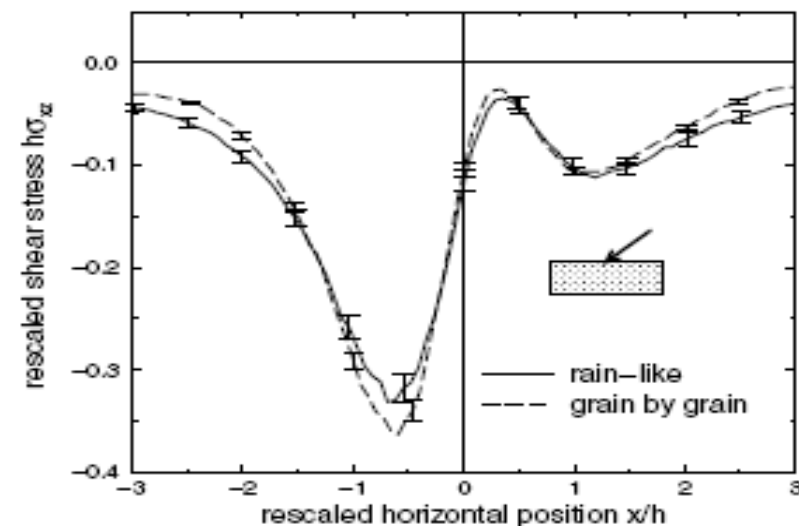
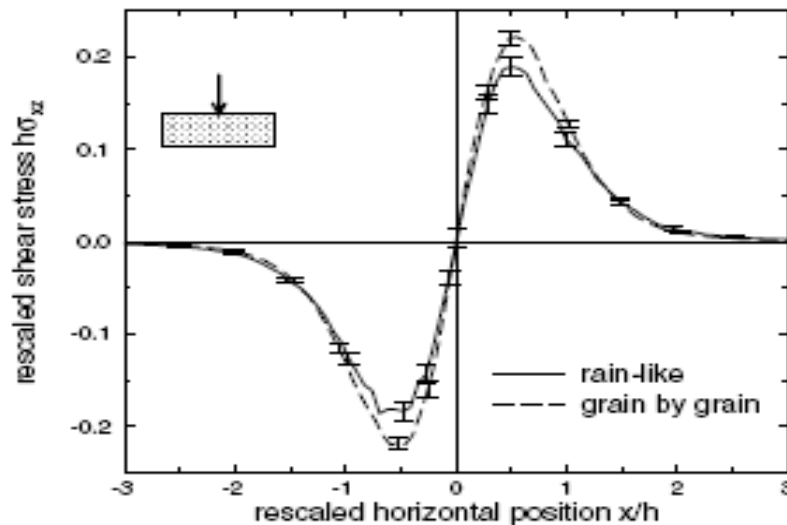
Critério de equilíbrio (testado a cada 100 MD passos): o mesmo usado na deposição, porém agora o peso total = $\sum$ pesos das partículas individuais + F_0 ;

Resultados

$N=3600$, $h \sim 22d$, ~ 110 amostras, 5 realizações diferentes de empilhamentos para cada preparação



A.P.F Atman, P. Brunet, J. Geng, G. Reydellet, G. Combe, P. Claudin, R. P. Behringer, E. Clément, *Sensitivity of stress response function to packing preparation*, J. Phys. Cond. Matt. **17**, p. S2391–S2403 (2005).

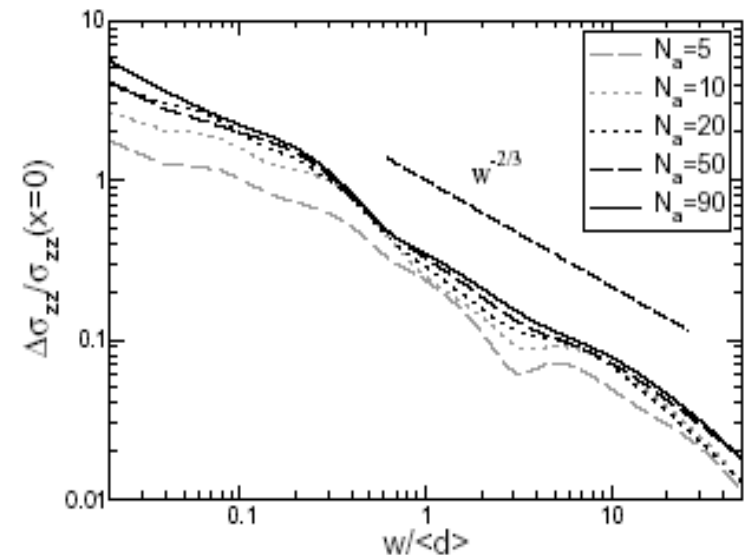
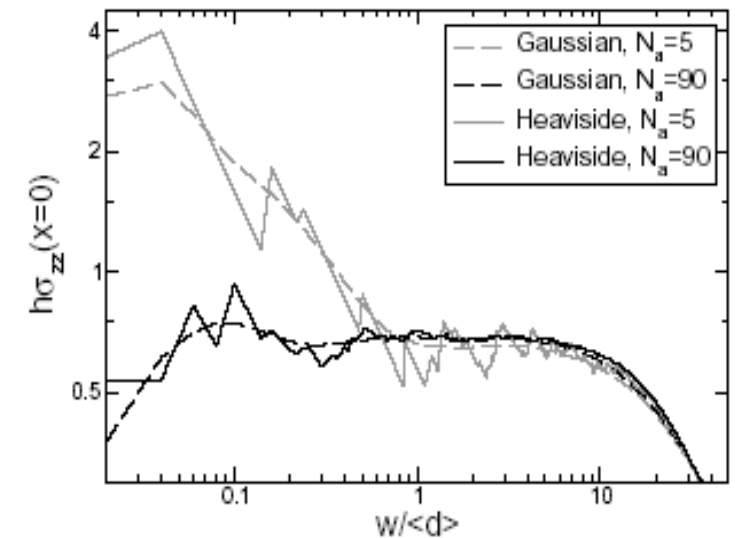
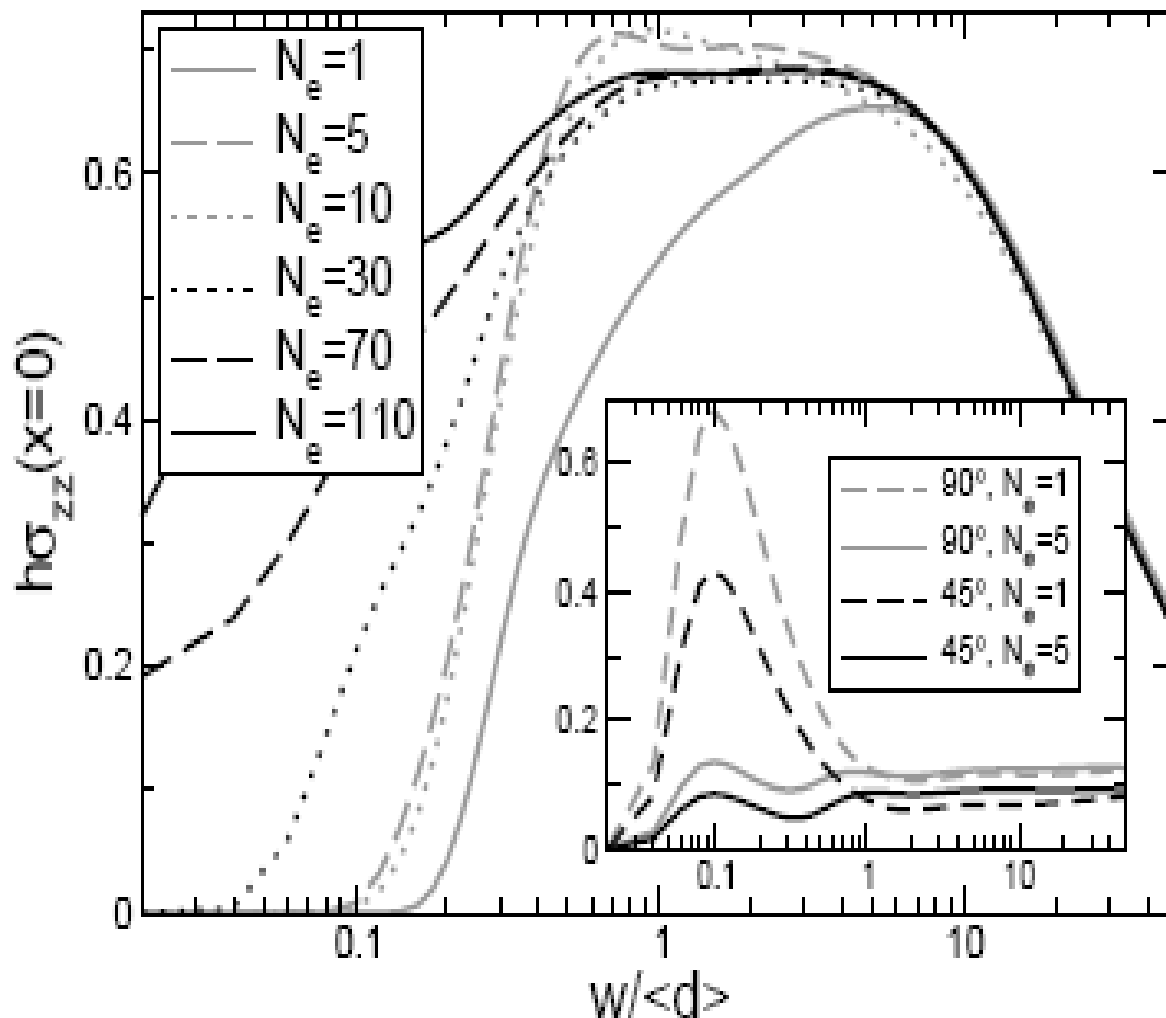


Flutuações

GOLDENBERG, C; ATMAN, A. P. F.; CLAUDIN, P; COMBE, G; GOLDBIRSCH, I.
Physical Review Letters, New York, v. 96, n.16, 168001, 2006.

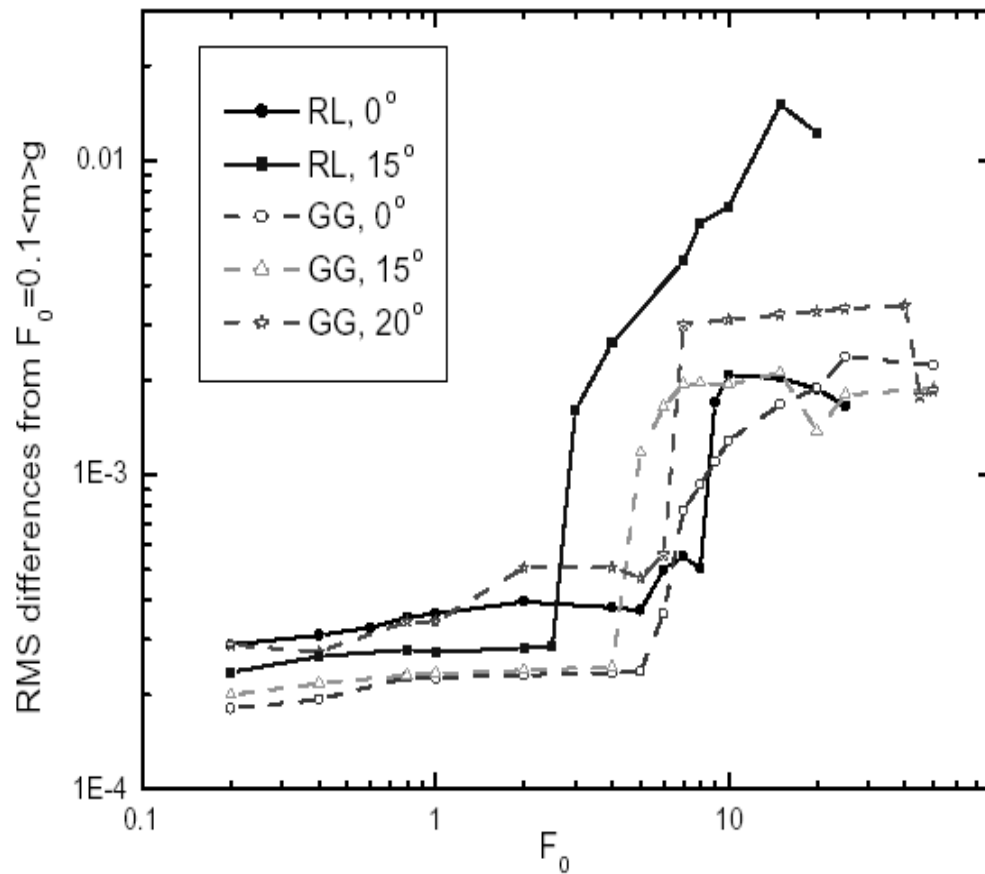
* Editor's Note in the same edition.

Deposição GG 3600 grãos
 razão de aspecto: $120 d \times 22 d$



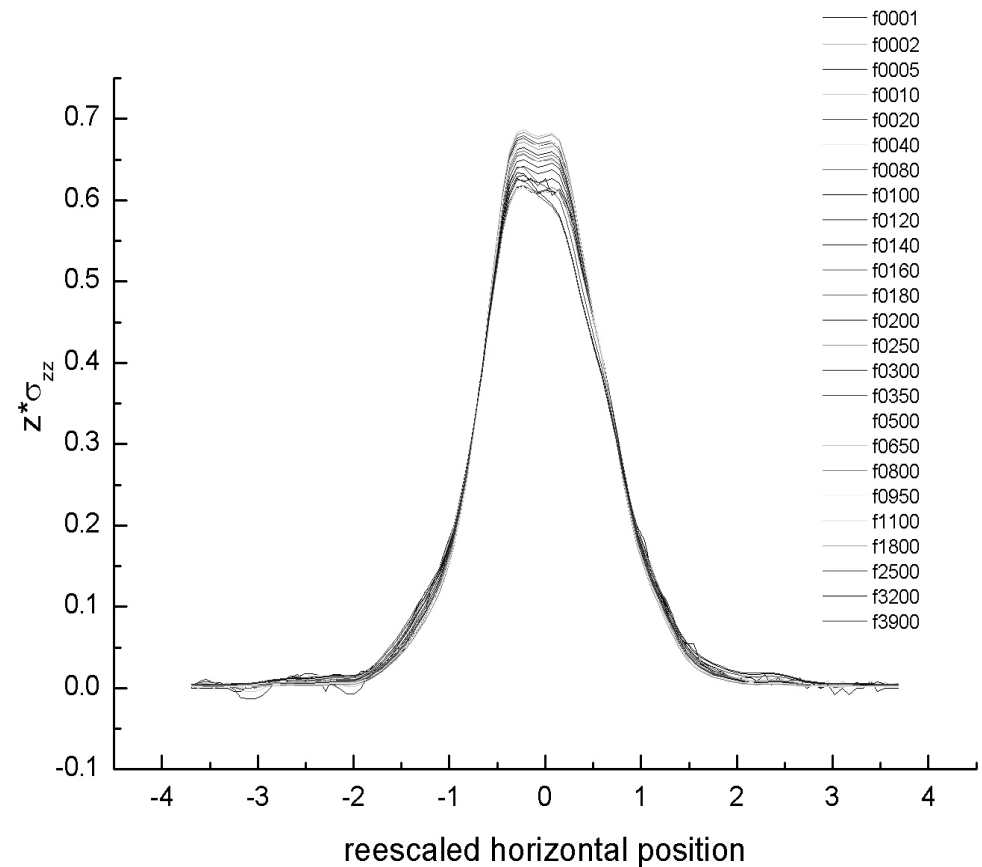
Afastamento da elasticidade:

Respostas individuais

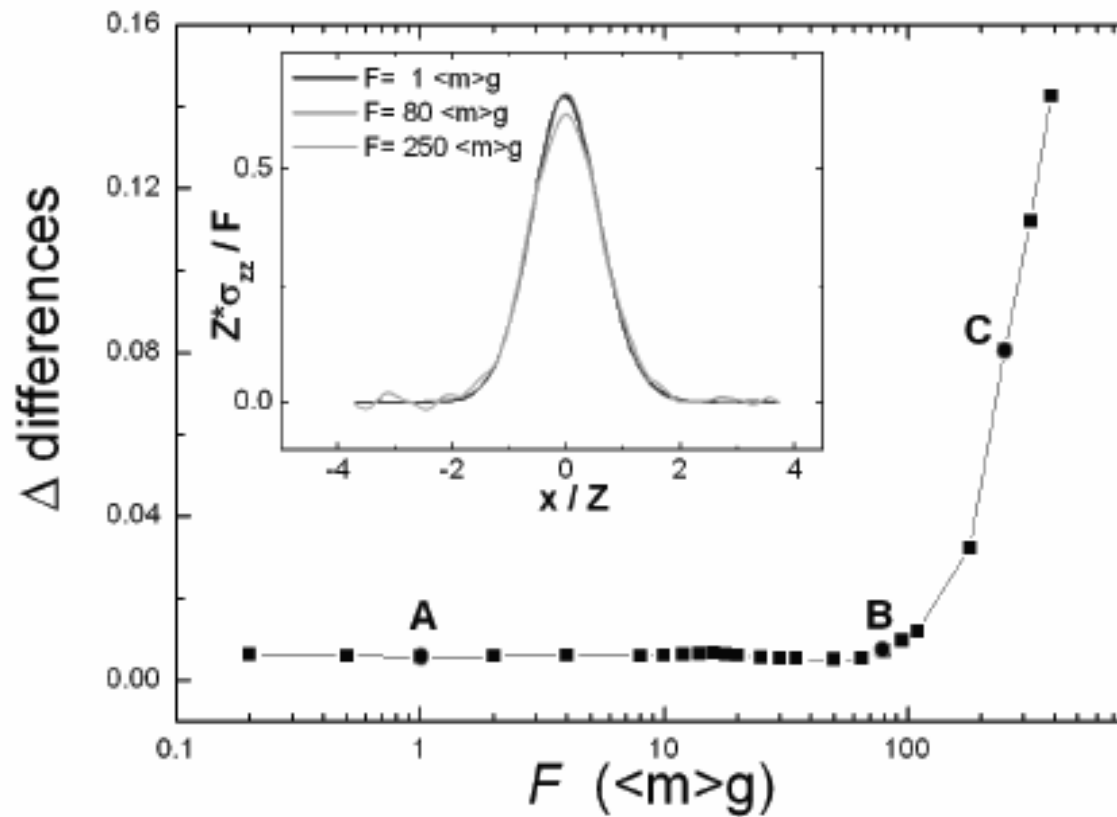


Teste de linearidade para uma vasta faixa de valores de força;

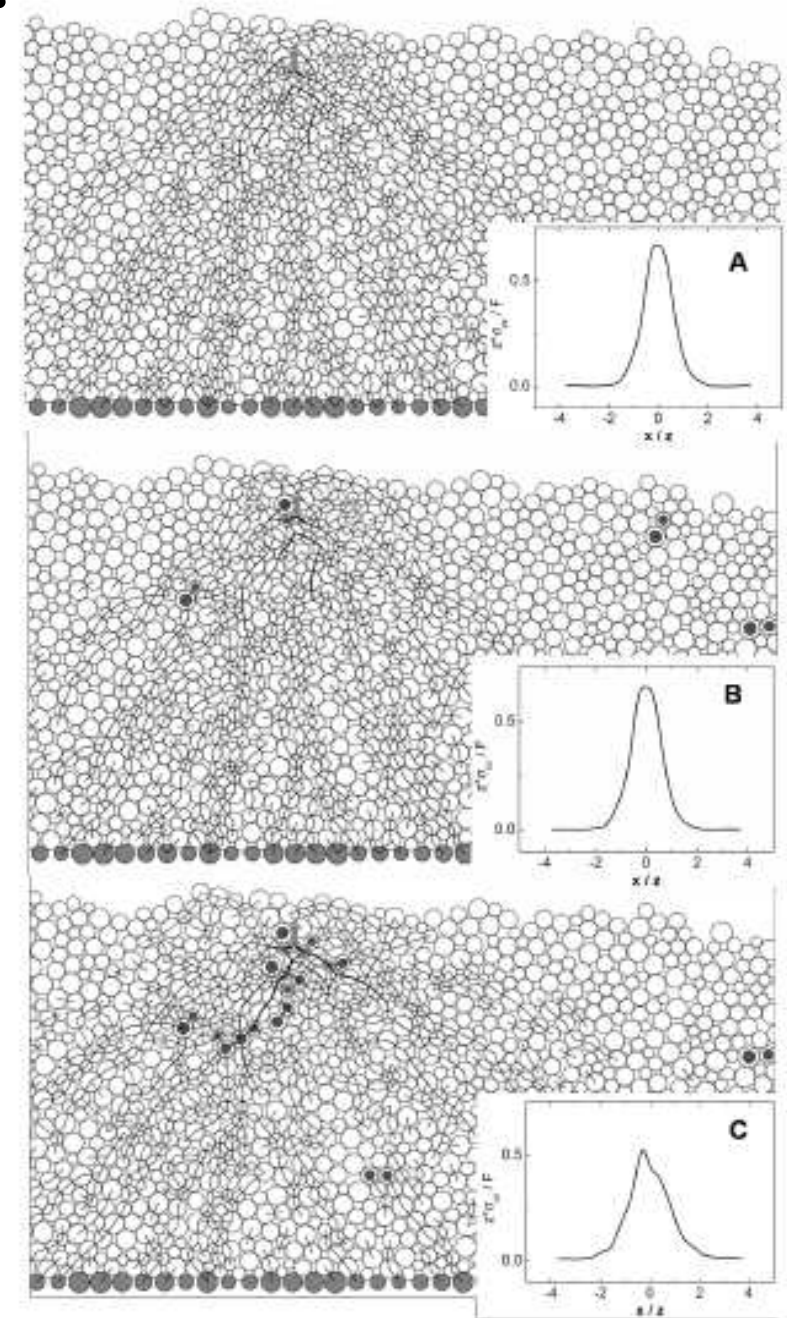
Diferenças RMS são medidas considerando um determinado perfil de resposta à tensões;



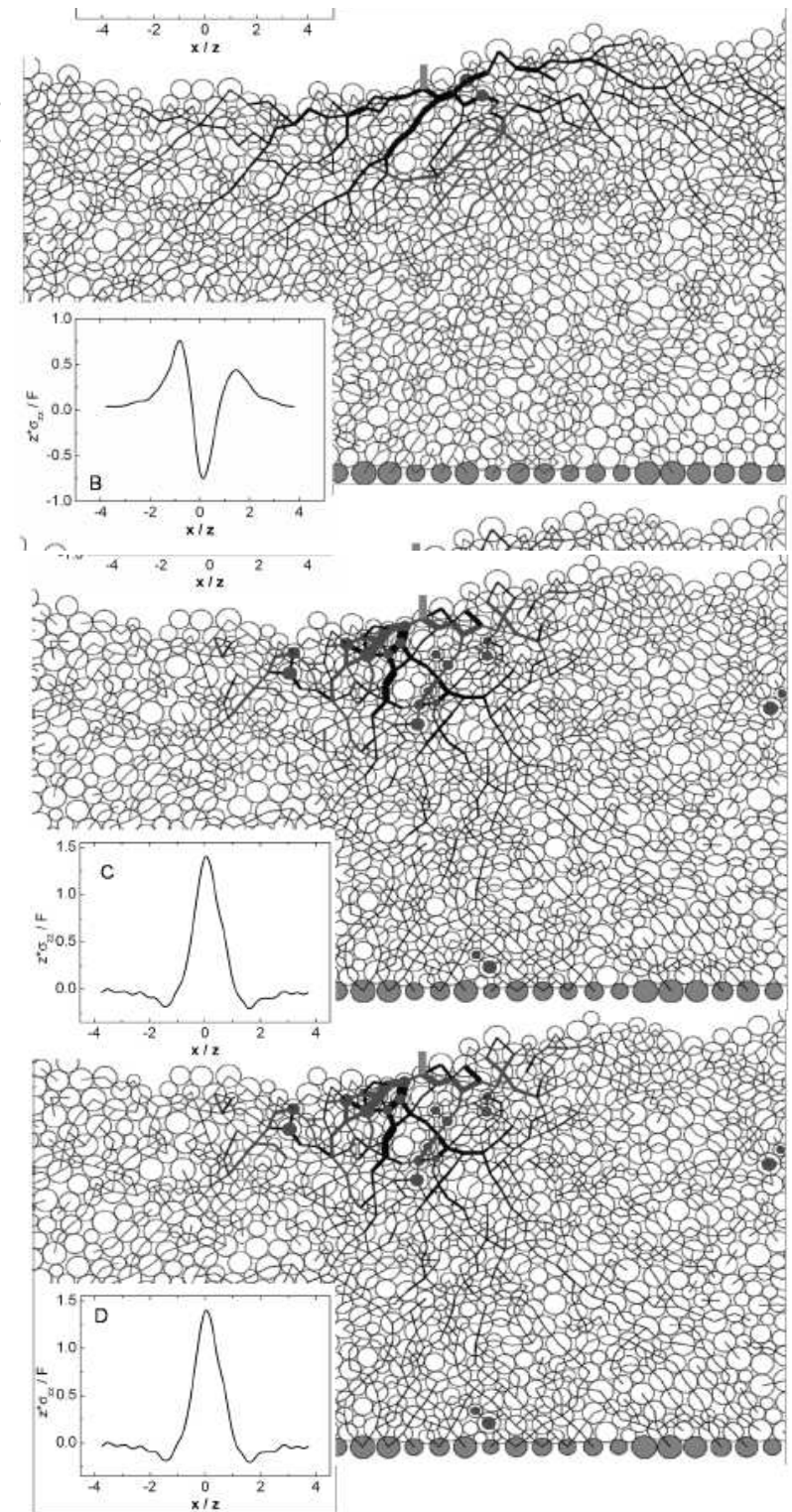
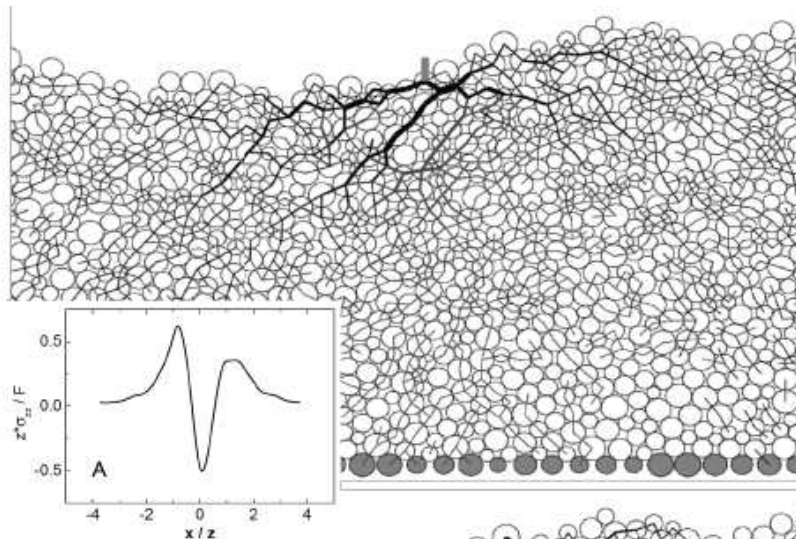
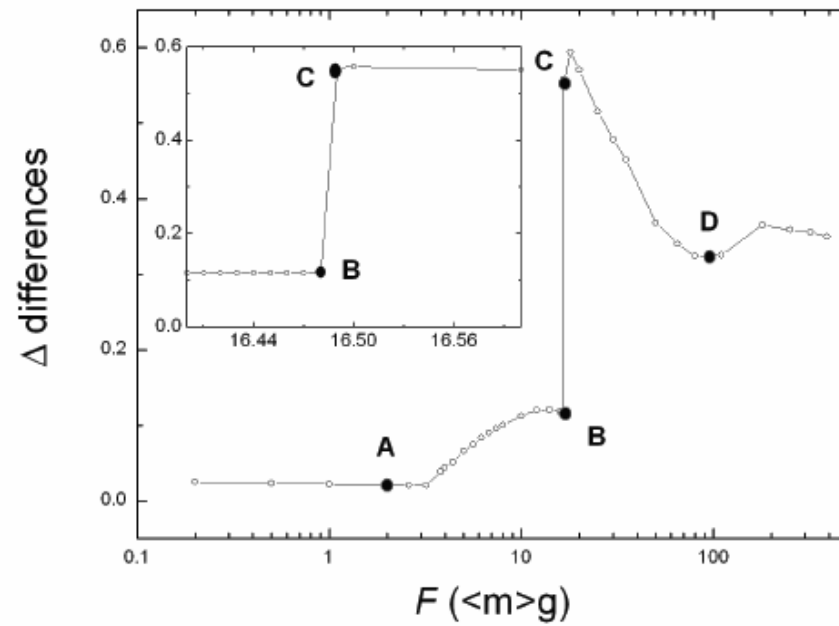
Afastamento da elasticidade:



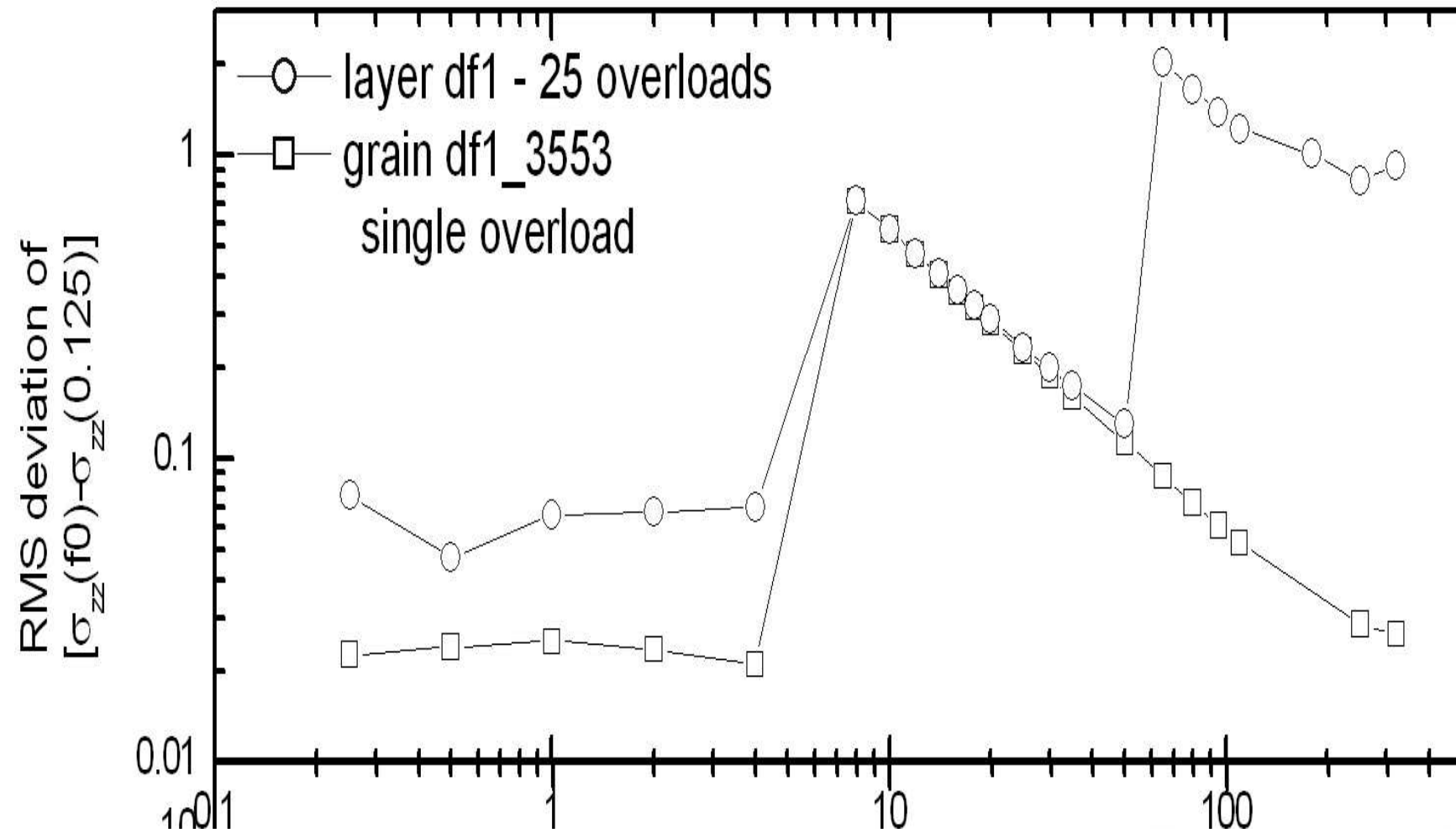
A.P.F. Atman, P. Claudin, G. Combe, C. Goldenberg, I. Goldhirsch, *Transitions in the response of a granular layer*, aceito para publicação em *Powders and Grains* (2009).



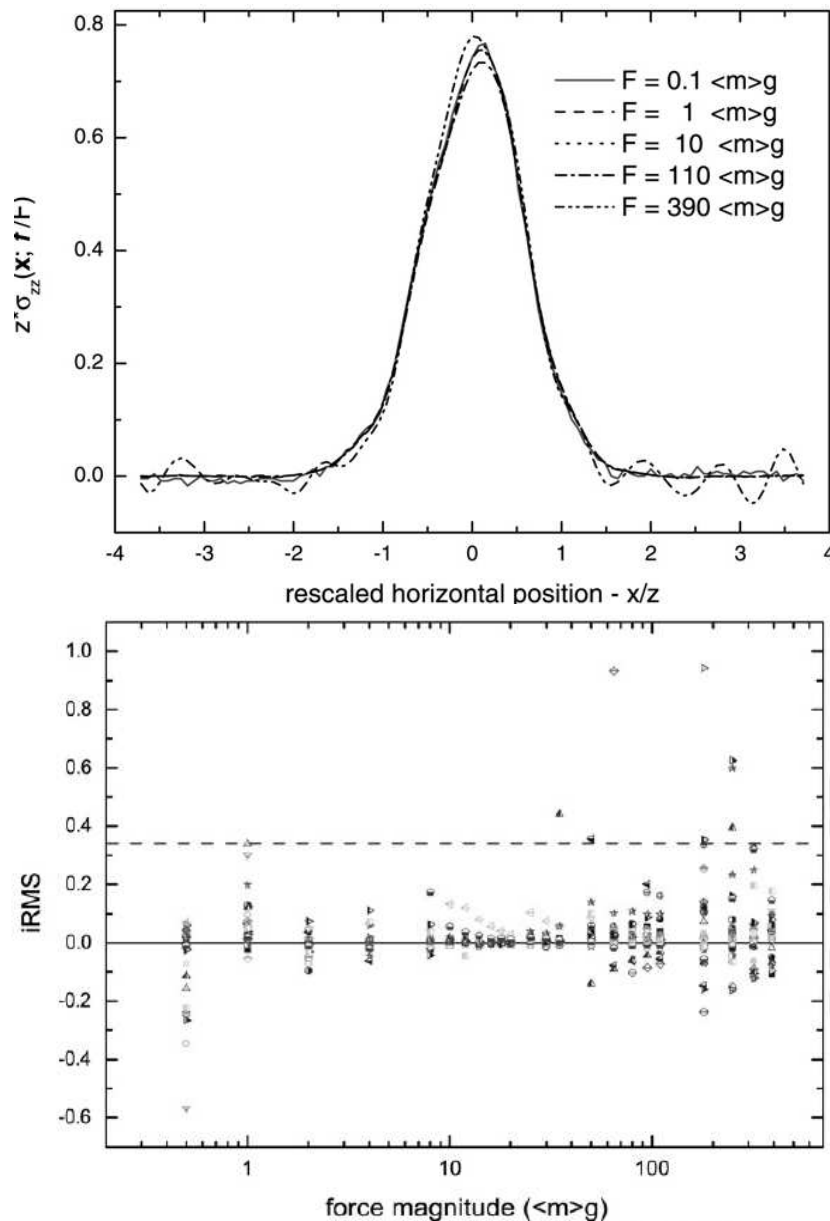
Afastamento da elasticidade



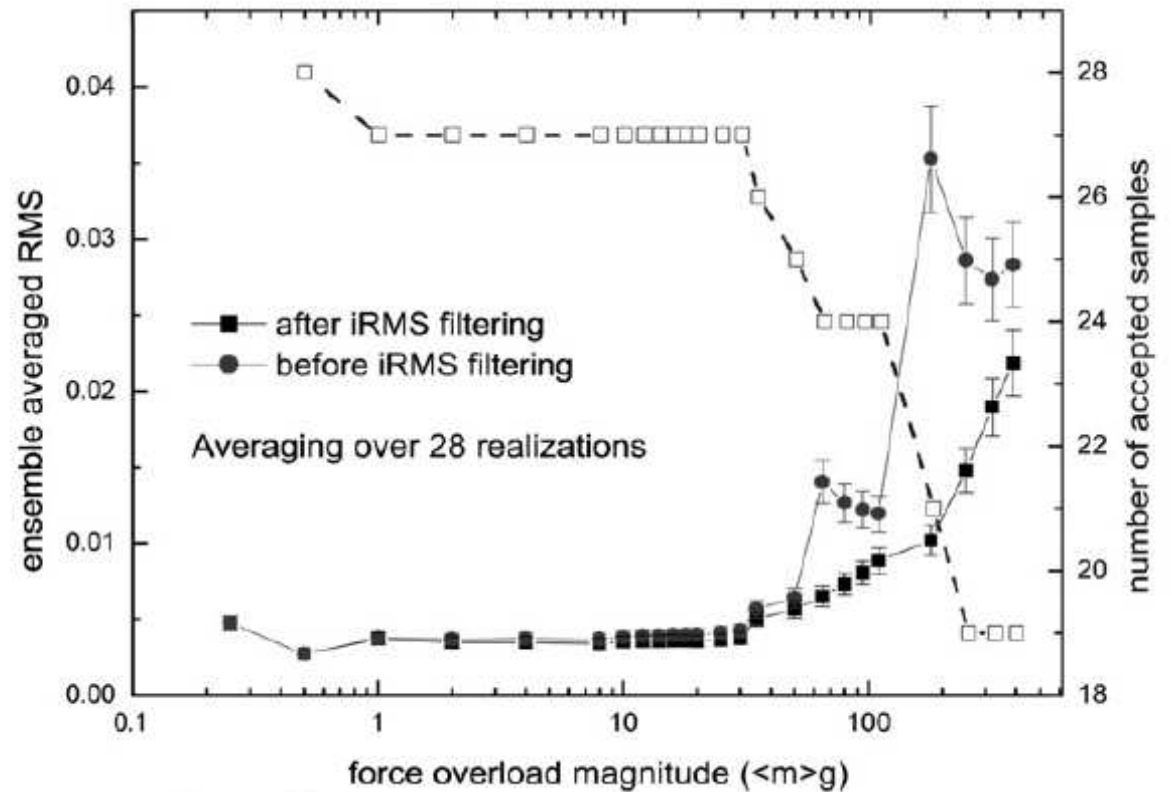
Afastamento da elasticidade:



Afastamento da elasticidade:



A.P.F. Atman, P. Claudin, G. Combe.,
*Departure from elasticity in granular layers:
 investigation of a crossover overload force,*
 COMP PHYS COMM (2009),
 doi:10.1016/j.cpc.2008.12.017



Conclusões

- Escalonamento da função resposta a tensões para os diferentes sistemas estudados;
- Testes de elasticidade válidos para os empilhamentos estudados;
- Resposta a tensões é bem definida sobre uma extensa faixa de escalas;
- É possível quantificar o afastamento da elasticidade medindo as diferenças RMS para valores crescentes de F_0 no teste de linearidade ?

Perspectivas:

- Ajuste de experimentos e simulações com as equações elásticas anisotrópicas;
- Relacionar os coeficientes elásticos efetivos aos parâmetros microscópicos para valores diferentes de θ_0 e z/b ;

Simulações:

- Preparações diversas: *chuva, comprimida, cisalhada, avalanches, limite de atrito nulo ($\mu \rightarrow 0$).*
- Efeitos da polidispersão / desordem;
- 2D vs. 3D;

Granular Fingers on Jammed Systems: New Fluidlike Patterns Arising in Grain Grain Invasion Experiments

PRL, **99**, 068001 (2007).

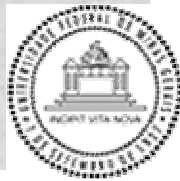


Sandro F. Pinto
Marcos S. Couto

Universidade Federal de Viçosa

A. P. F. Atman
Sidiney G. Alves

*Universidade Federal
de Minas Gerais*



Américo T. Bernardes
Hélio F.V. de Resende
Ester C. Souza
*Universidade Federal
de Ouro Preto*

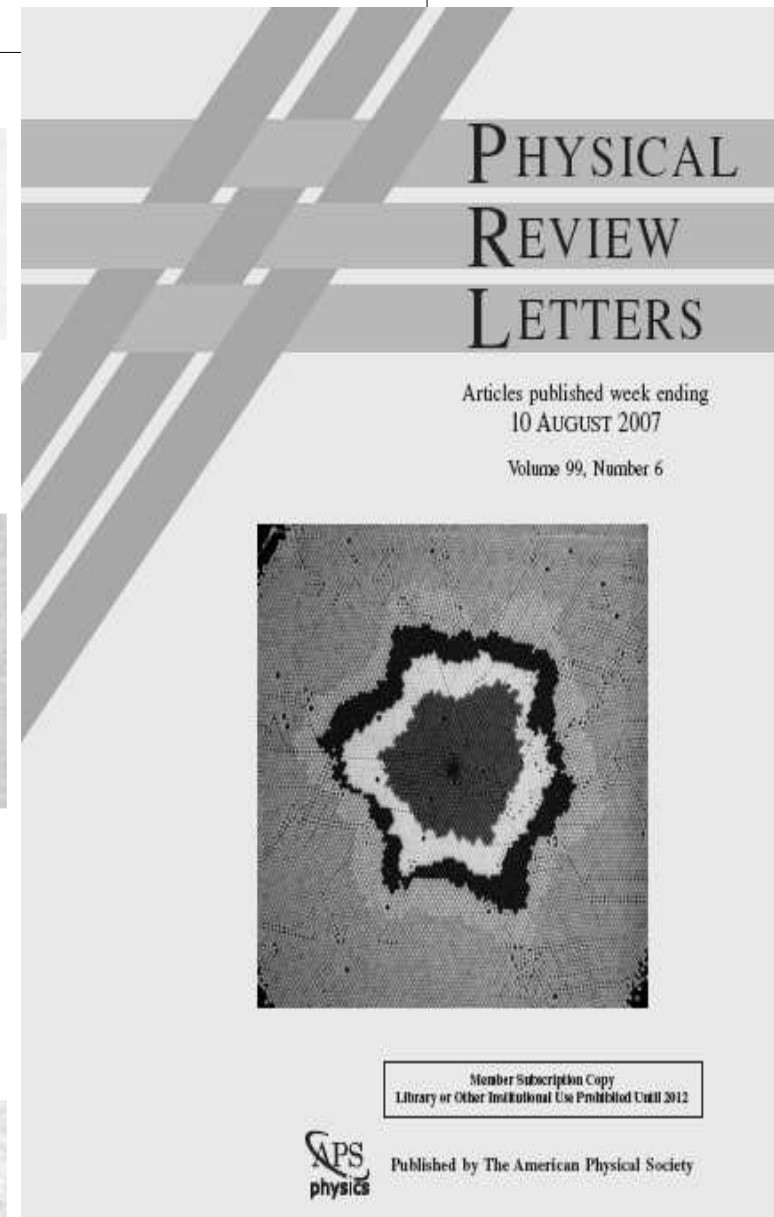
A. P. F. Atman

Daniel I. F. Barragan – PIBIC Fapemig
Gustavo H. B. Martins – PIBIC Fapemig

CEFET MG

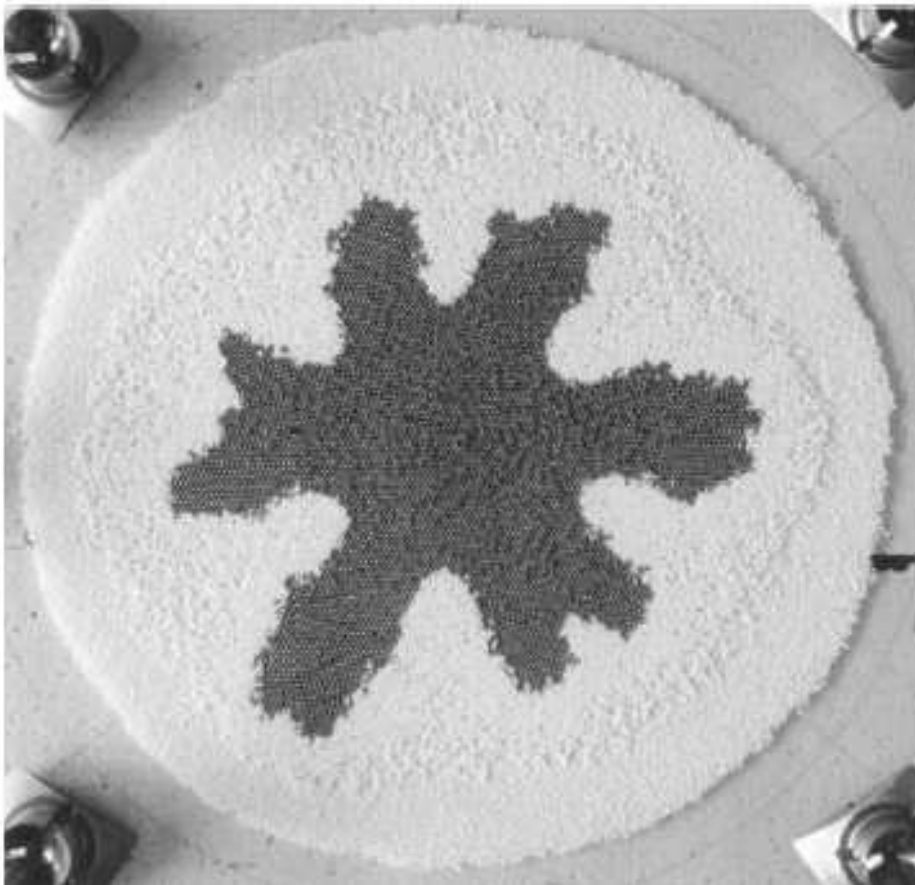


Evelyne Kolb
PMMH/ESPCI – Paris VI & VII

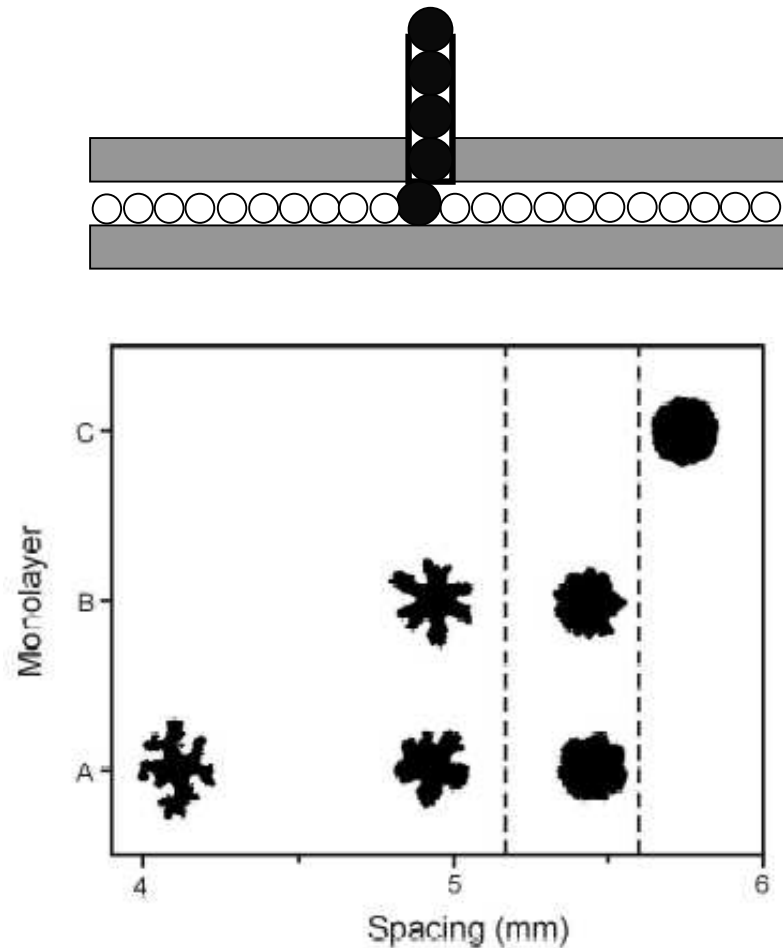


Dedos granulares na célula de Hele-Shaw

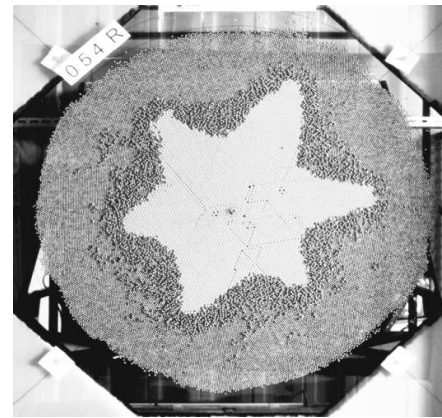
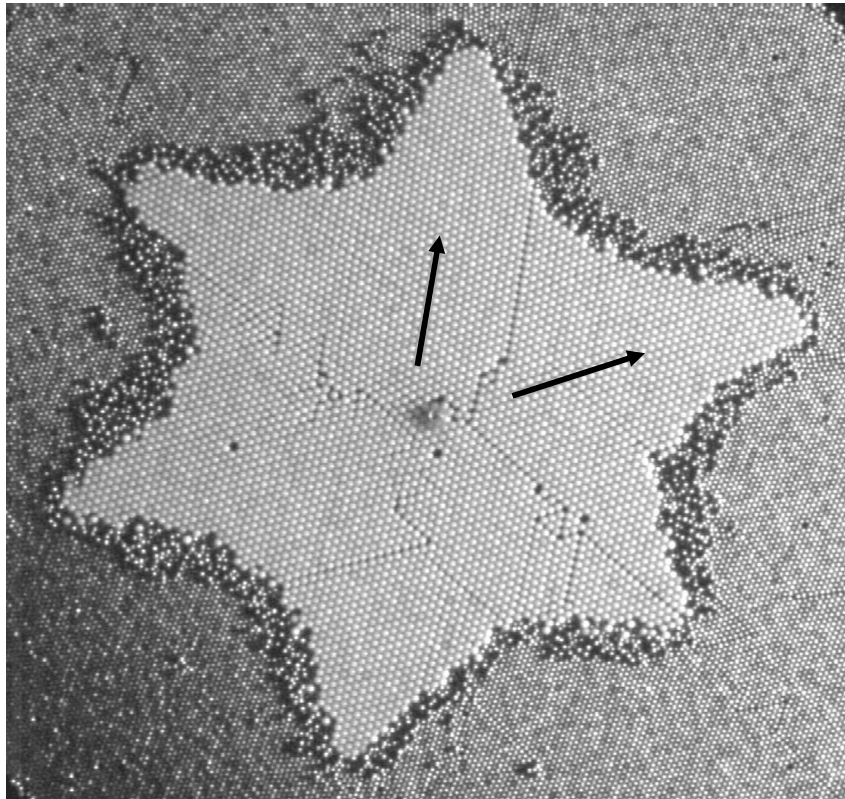
Marcos S. Couto (UFV), M. L. Martins (UFV), S. G. Alves(UFMG) [arXiv:cond-mat/0012441](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0012441)



Bolas de aço deslocando isopor

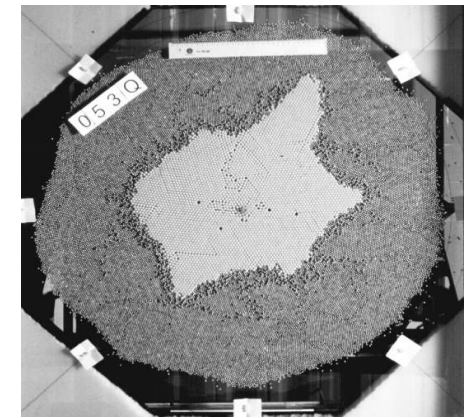


Dedos Granulares

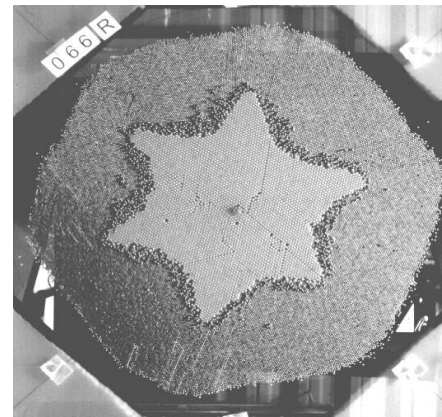


(a)

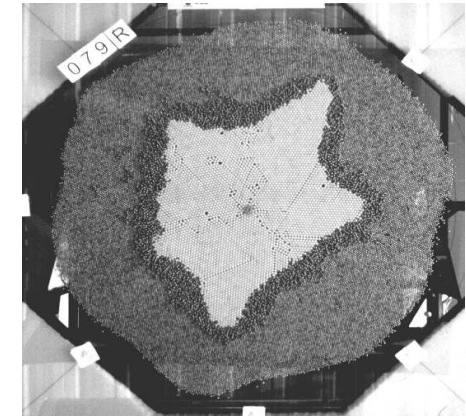
20 cm



(b)

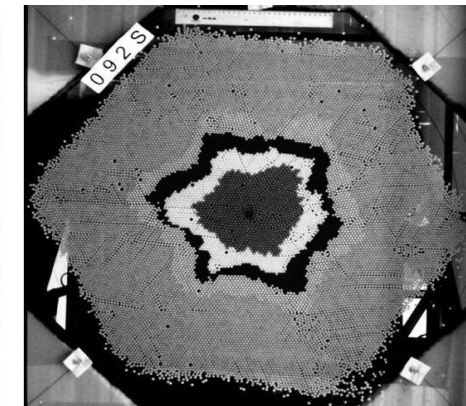
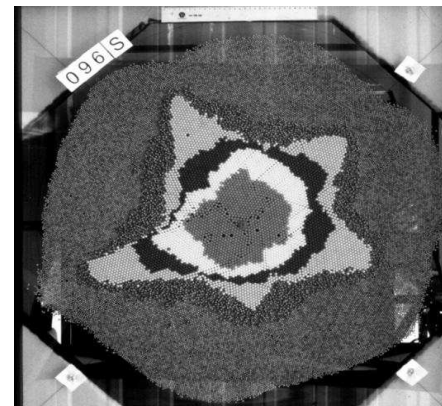
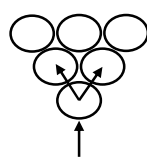
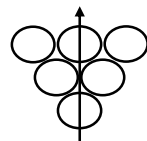
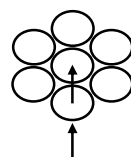
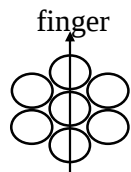


(c)



(d)

Bolas de plástico
(grandes) deslocando
bolas de ferro
(pequenas)



Simulações

DM com parâmetros de controle adicionais:

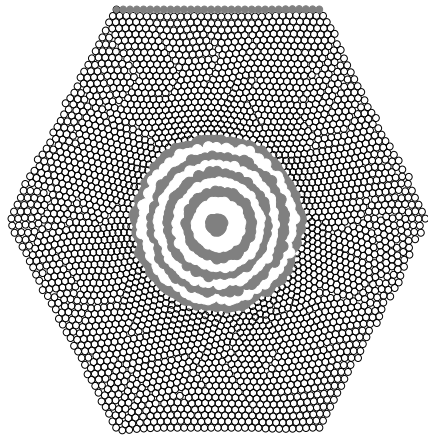
μ – coeficiente atrito entre grãos;

η – atrito ‘viscoso’ devido à resistência do ‘meio’ (placas de vidro);

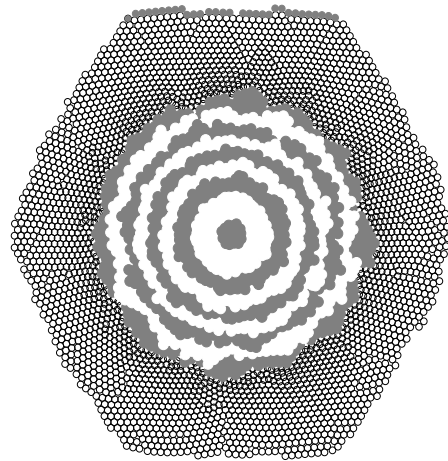
R/r – razão entre o raio dos grãos injetados e dos grãos deslocados (monocamada inicial);

K/k – razão entre as constante de mola dos grãos injetados sobre os deslocados;

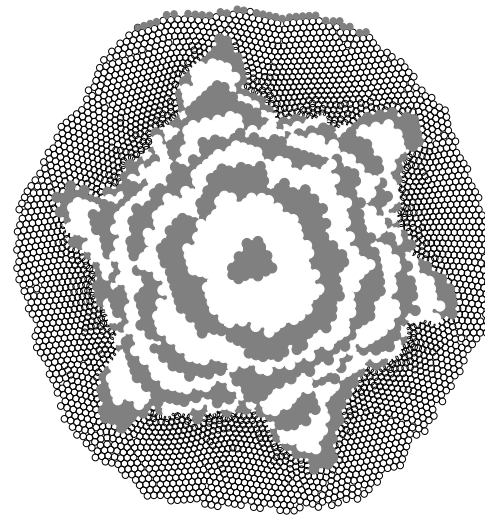
$\mu=0, \eta=0.99 \quad R/r = 1.5$



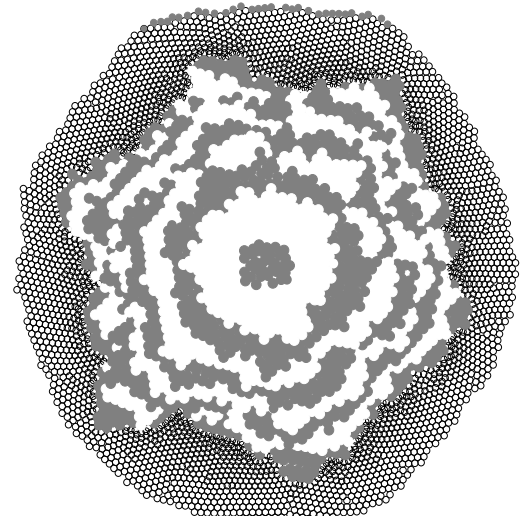
$K/k = 0.1$



1



10



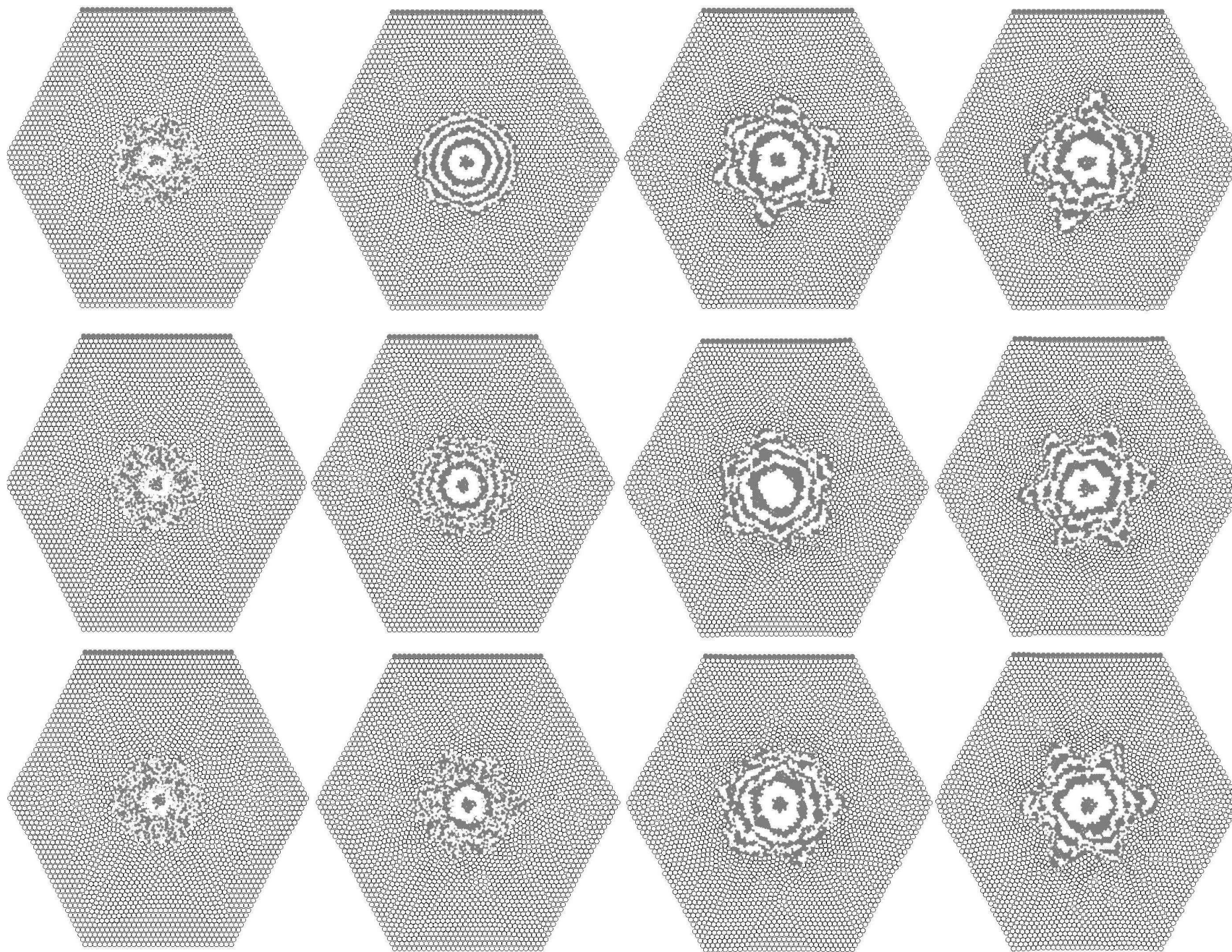
100

$R/r = 0.5$
 $\eta = 0.99$

$\mu=0.0$

$\mu=0.5$

$\mu=0.99$



$K/k = 0.1$

$K/k = 1$

$K/k = 10$

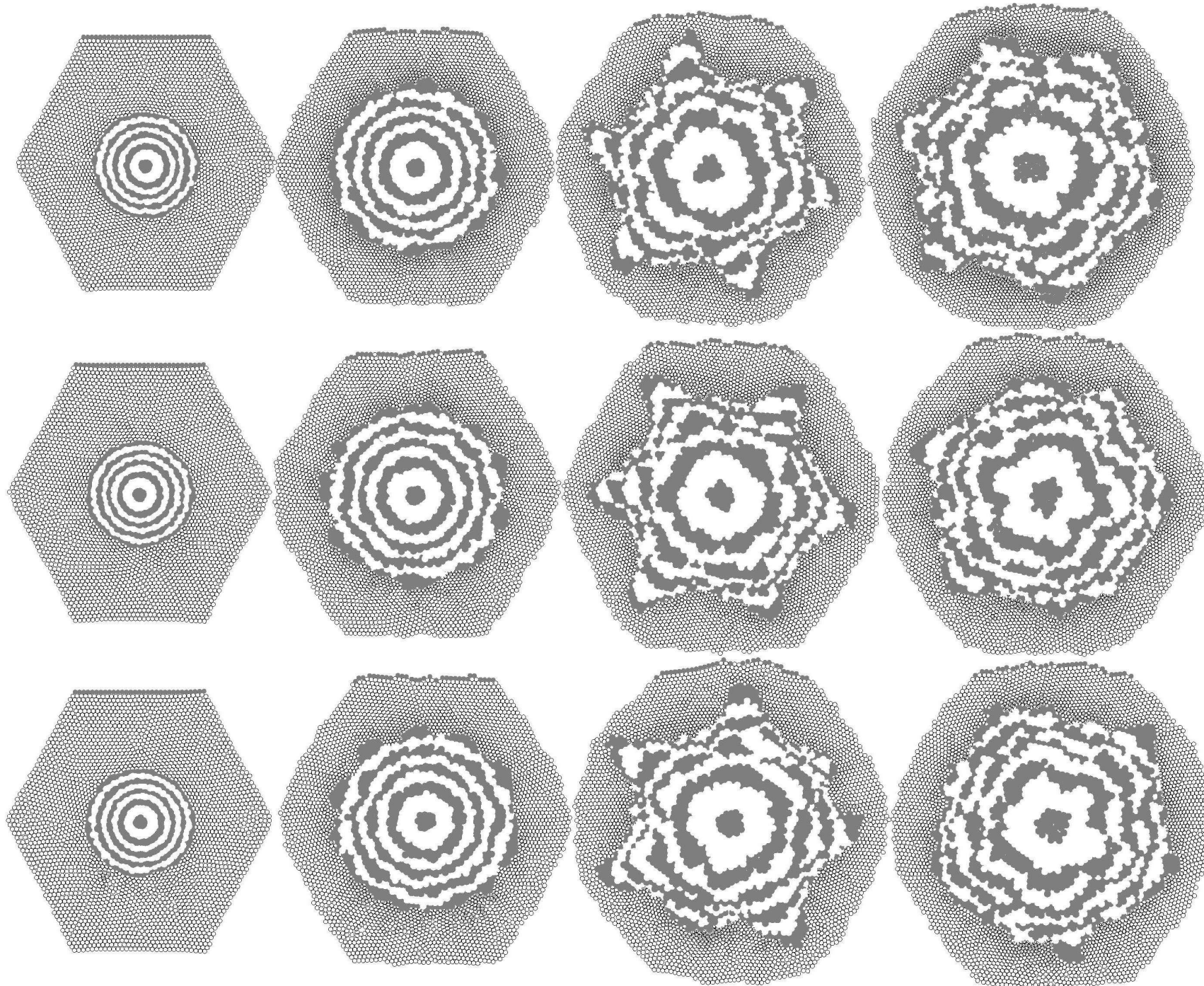
$K/k = 100$

$R/r = 1.5$
 $\eta = 0.99$

$\mu = 0.0$

$\mu = 0.5$

$\mu = 0.99$



$K/k = 0.1$

$K/k = 1$

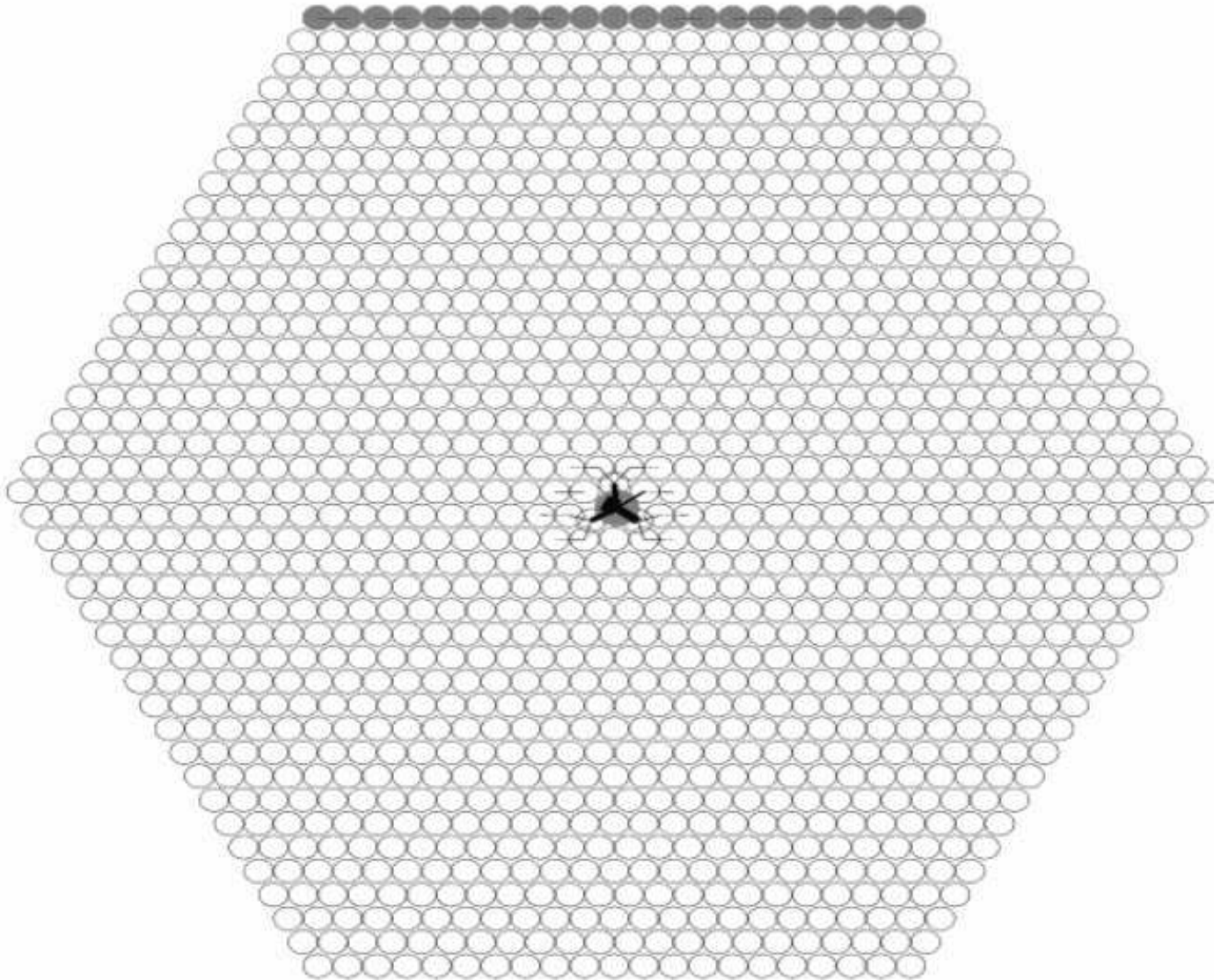
$K/k = 10$

$K/k = 100$

Simulações do escoamento entre materiais granulares

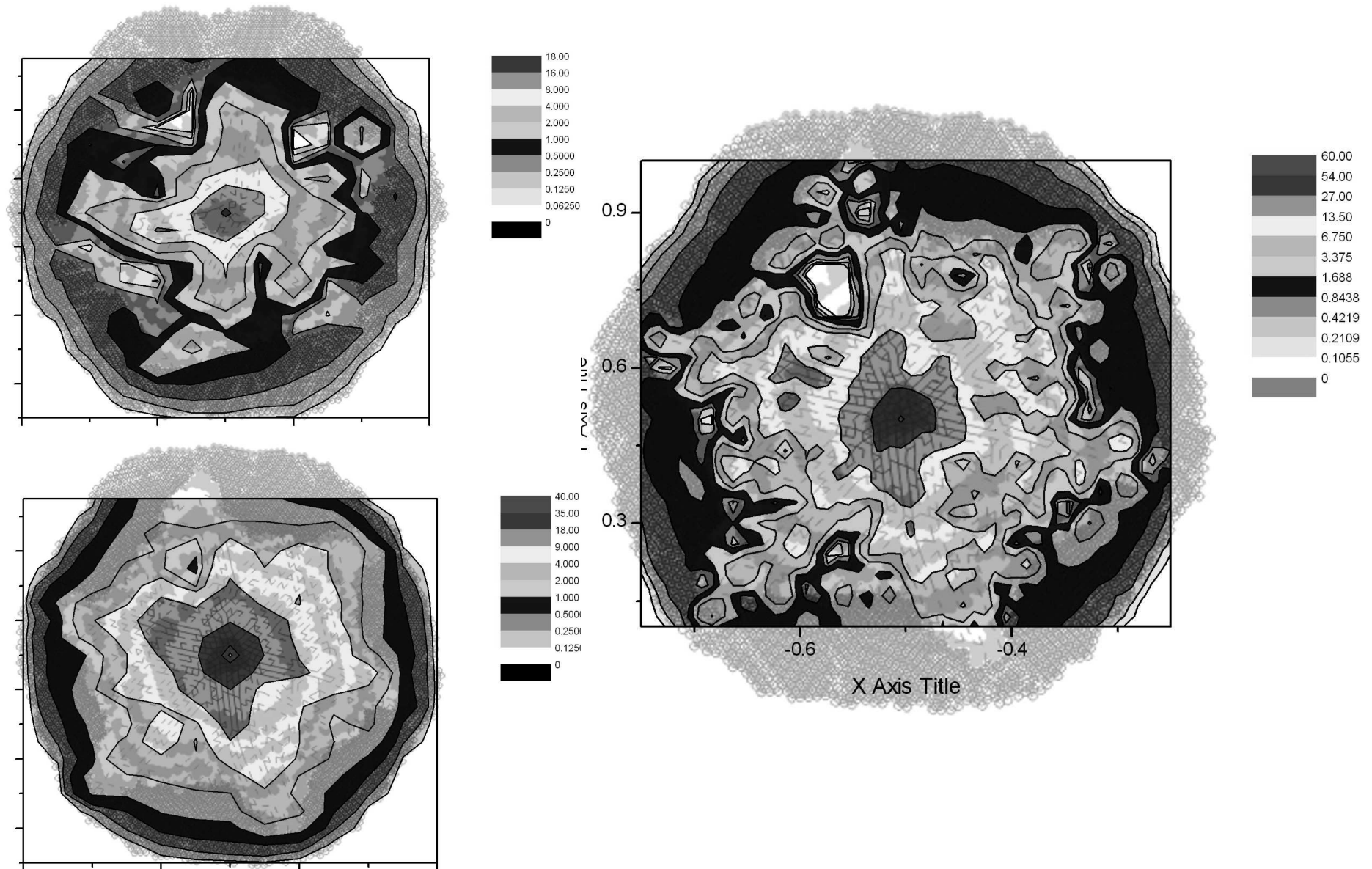
Daniel Ítalo Barragan Frattezi

A.P.F. Atman



Tensor de tensões

calculado a partir da rede de
contactos



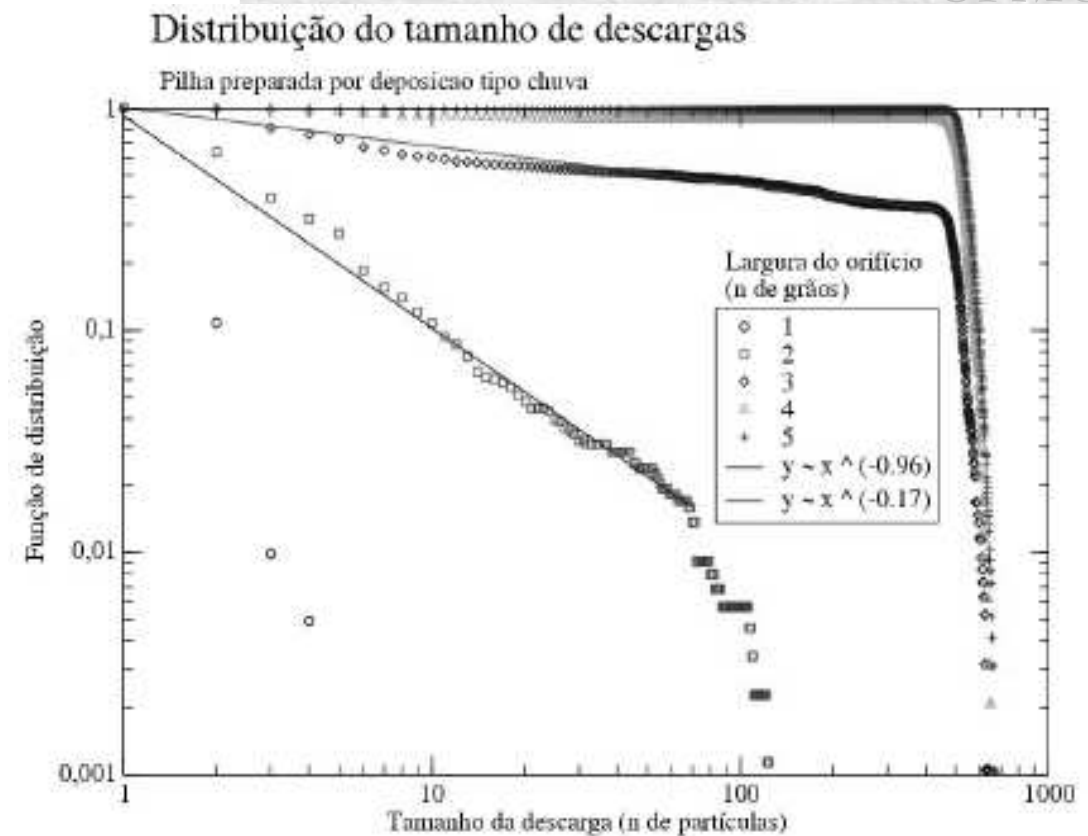
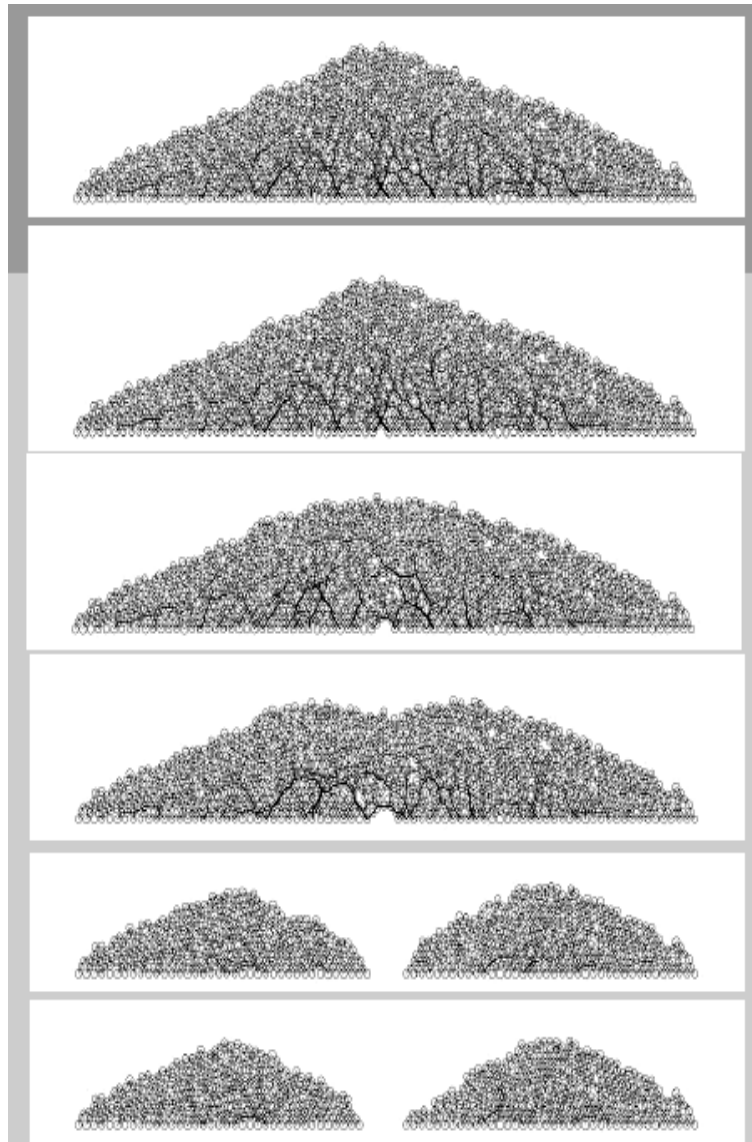
Avalanches na descarga de empilhamentos granulares



A.P.F. Atman
CEFET MG



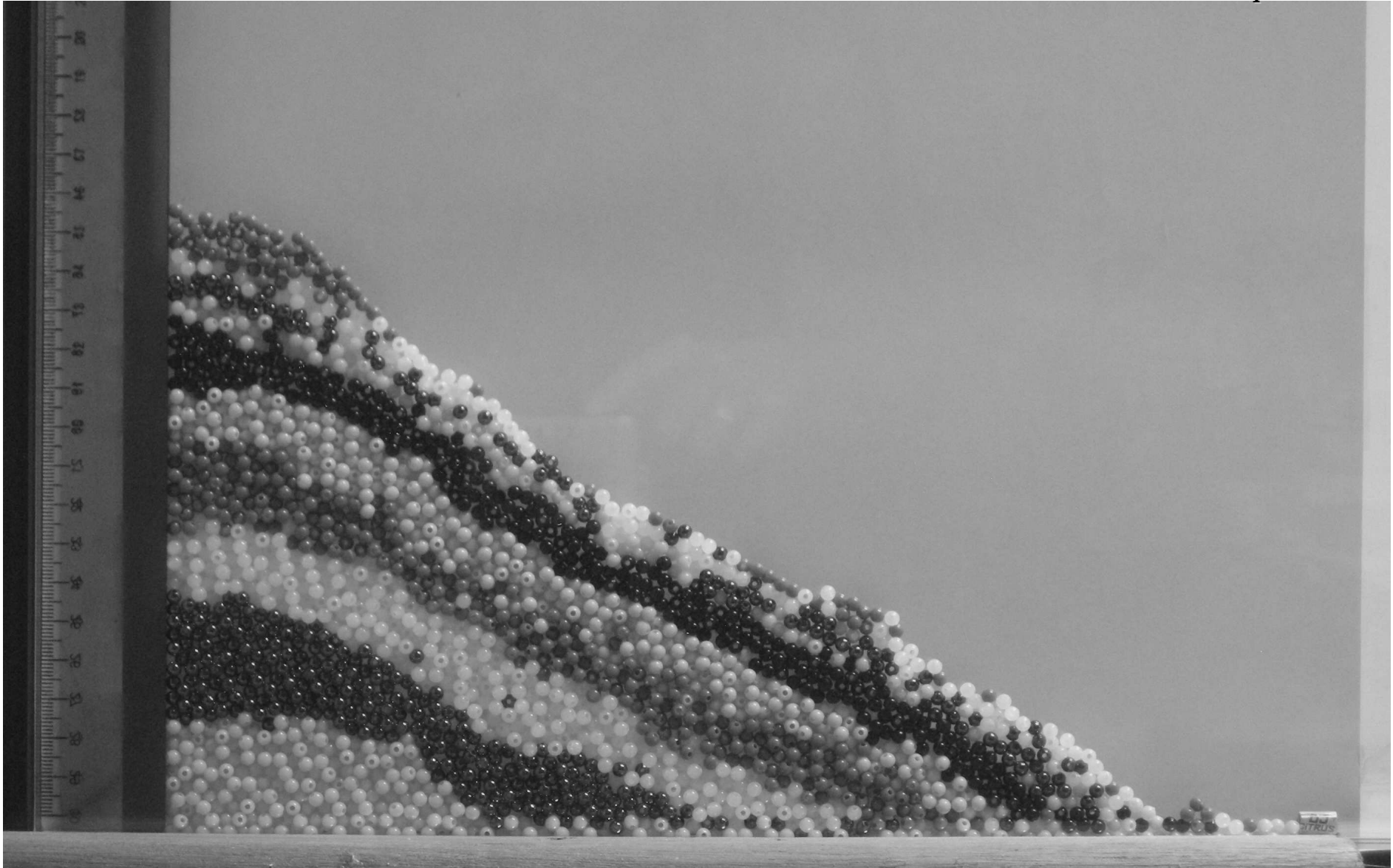
José Guilherme Moreira
Caio F. M. Magalhães- Doutorado
Ana Cristina de Oliveira- PIBIC – CNPq
UFMG



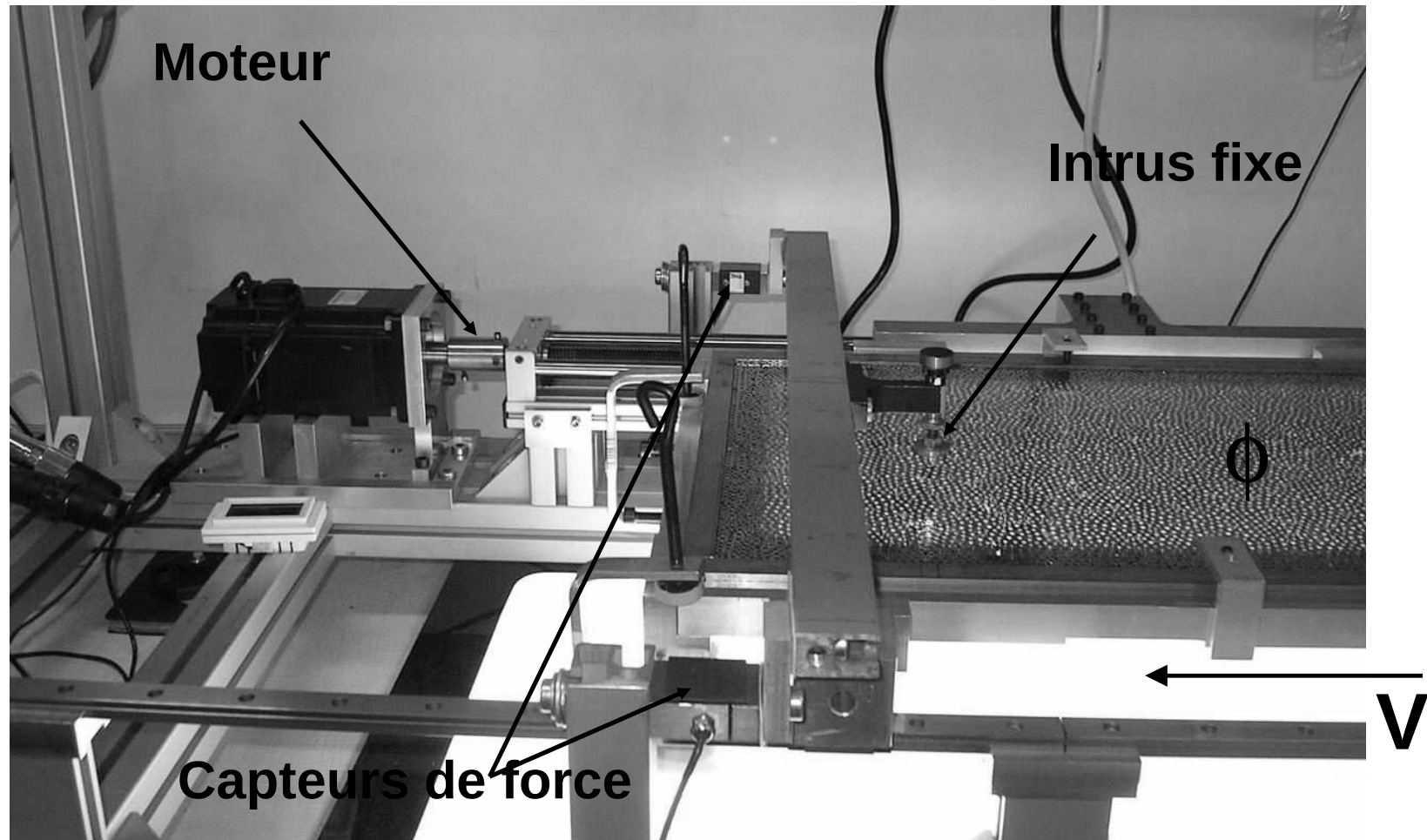
Avalanches em empilhamentos granulares

José Guilherme Moreira – UFMG

Ana Cristina de Oliveira PIBIC – CNPq - UFMG

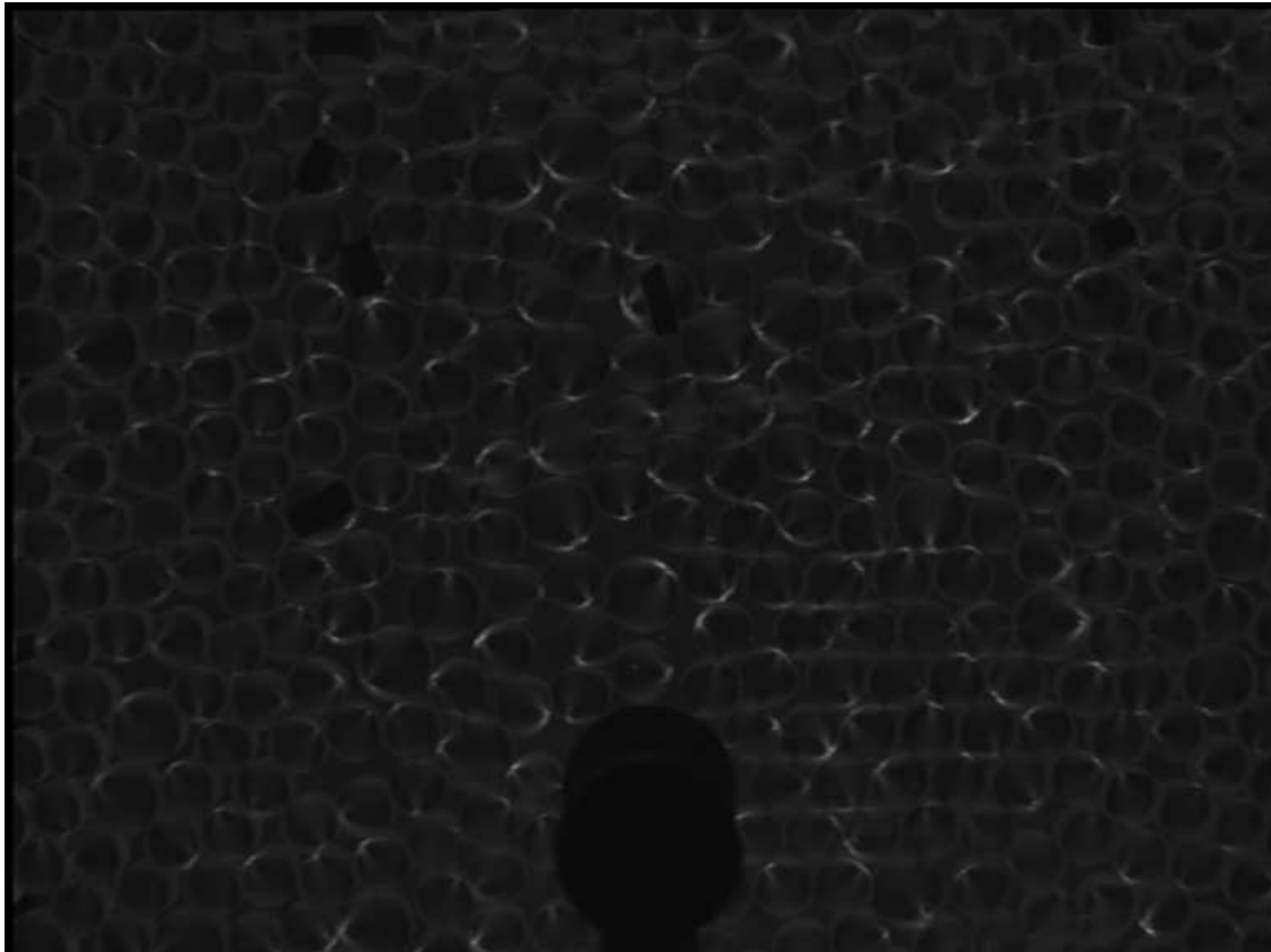


Escoamento granular em torno de um intruso



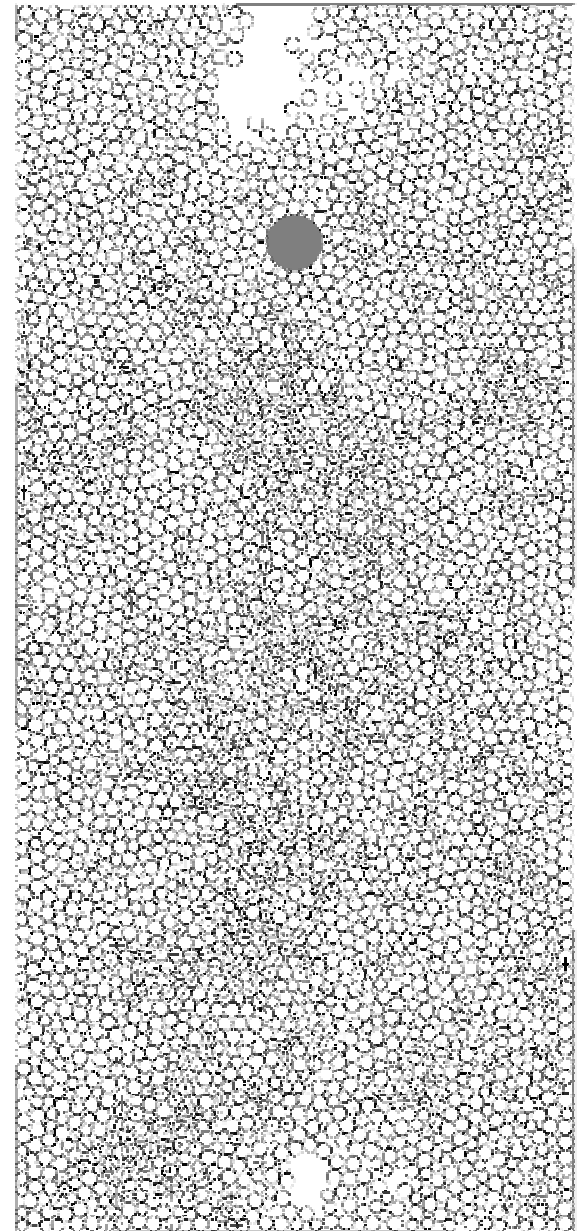
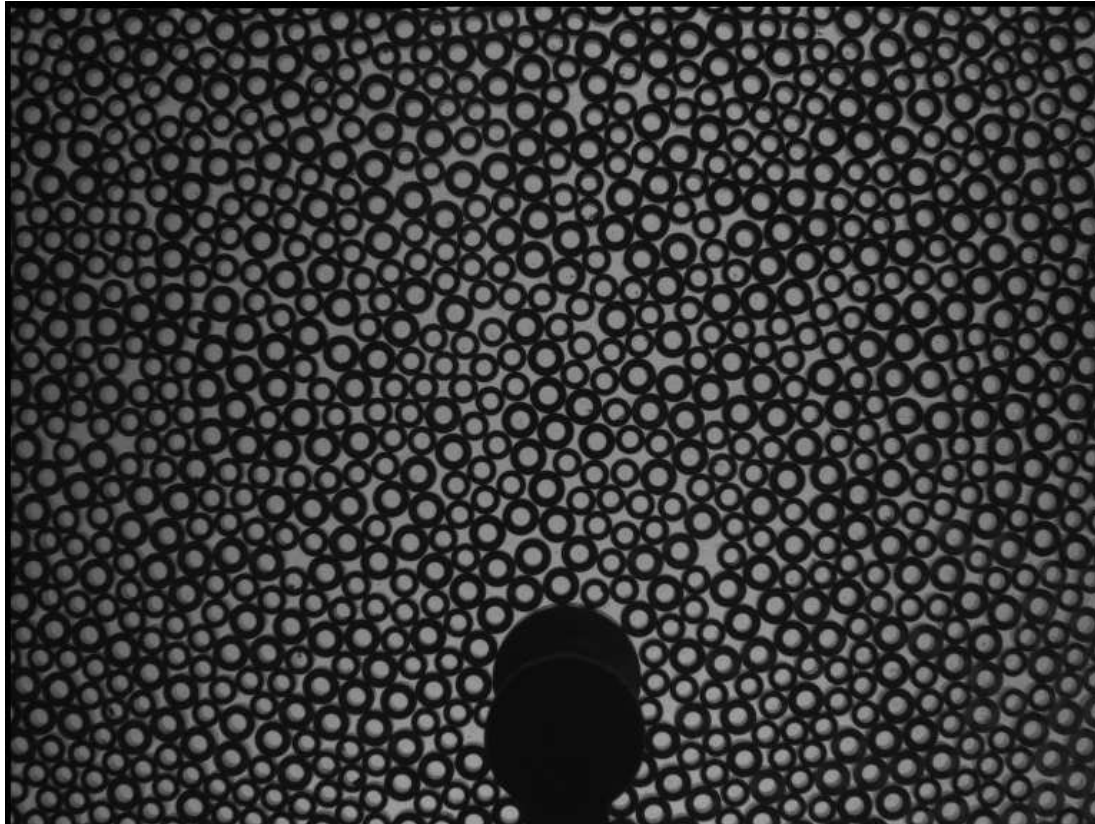
Aparato Experimental – Evelyne Kolb – PMMH/ESPCI – Université Paris 6&7

Experimento com grãos fotoelásticos



Experimento com meio granular bidisperso –

P. Cixous, E. Kolb, J.P. Charmet, *Powders and Grains* 2009



Simulações:

A.P.F. Atman

Gustavo H. B. Martins PIBIC- Fapemig

Síntese

- Propostas para investigação de assuntos de interesse tecnológico e acadêmico em materiais granulares e sistemas complexos fora do equilíbrio;
- Utilização de técnicas analíticas e simulações computacionais oriundas da mecânica estatística;
- Projetos com grande potencial de formação acadêmica nos níveis de graduação e pós-graduação;
- Fortalecimento nas colaborações entre instituições mineiras, nacionais e internacionais;

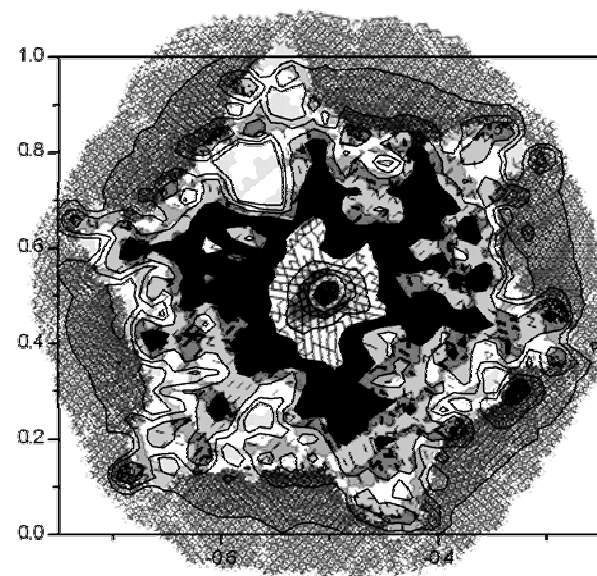
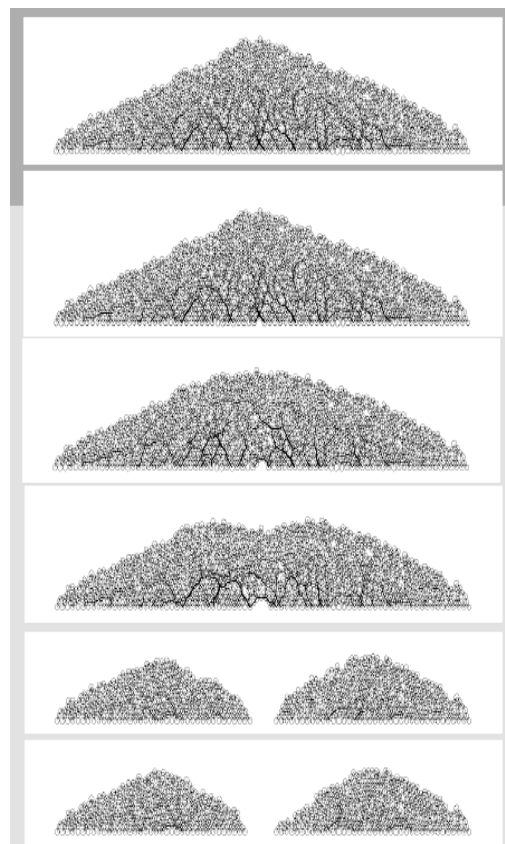
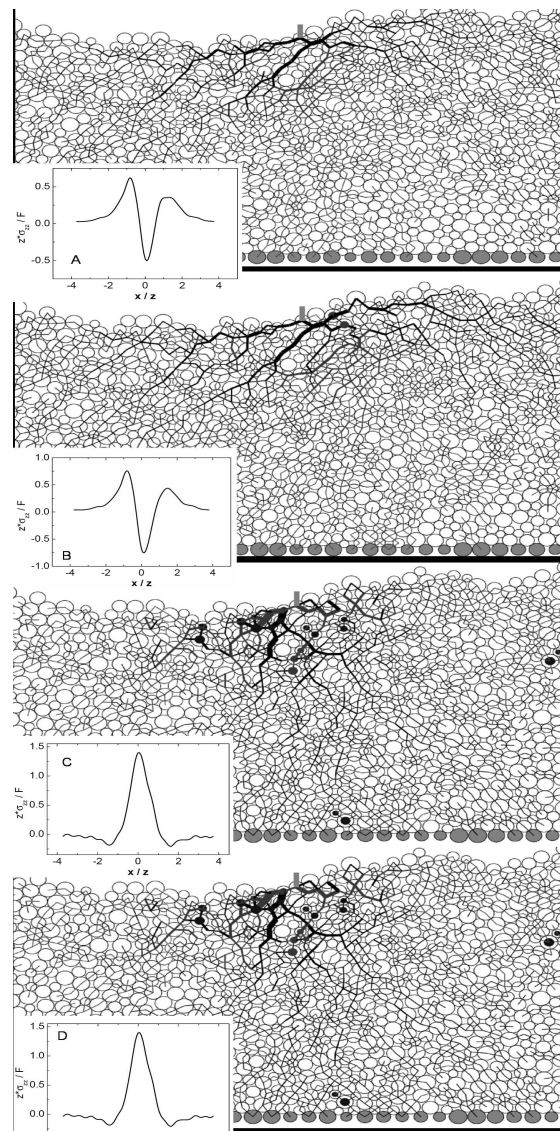
Simulações em Sistemas Complexos:

Função resposta a tensões, formação de padrões e avalanches em sistemas granulares.

Allbens ATMAN Picardi Faria

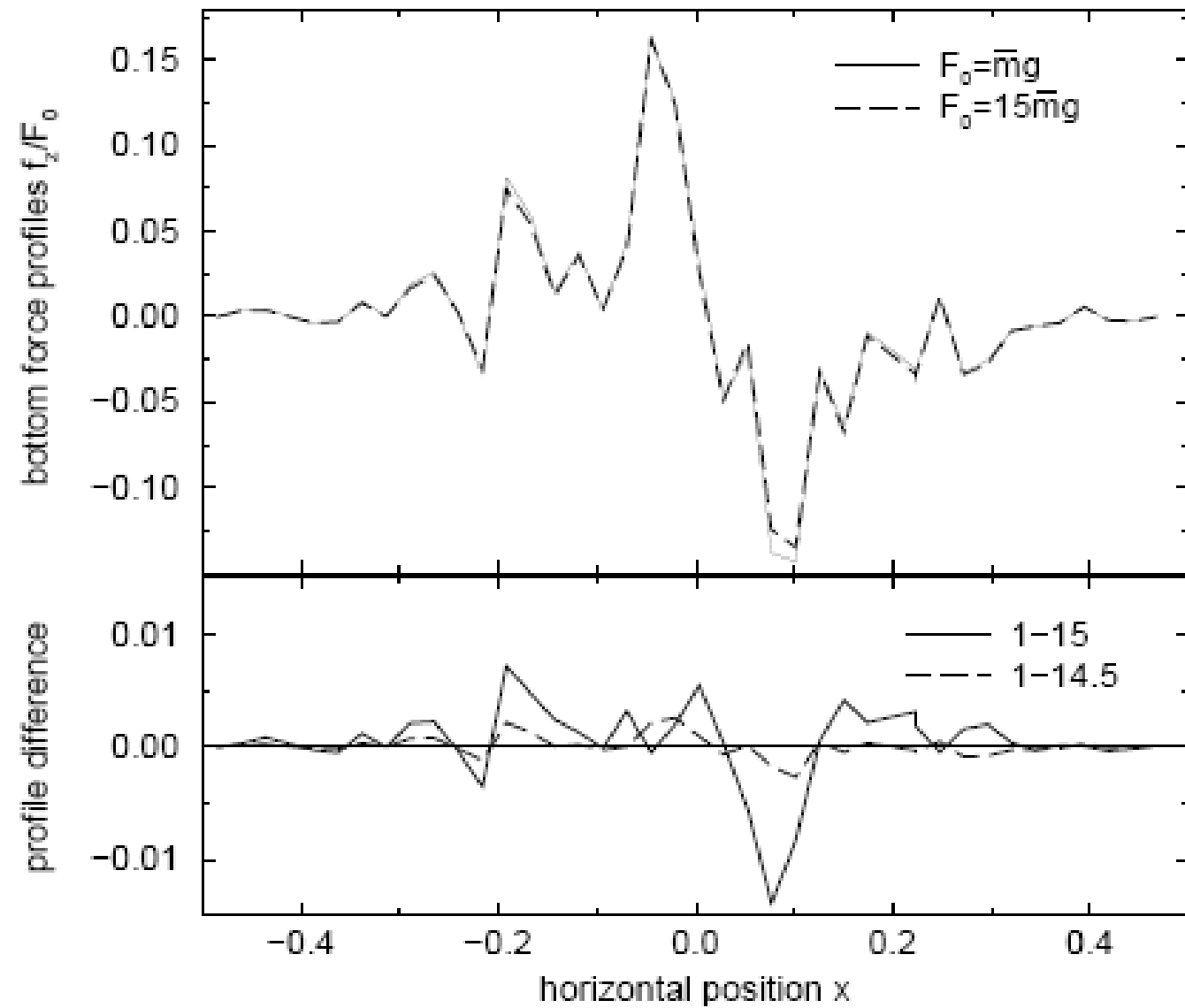
Professor Adjunto II CEFET/MG

Pesquisador CNPq nível II



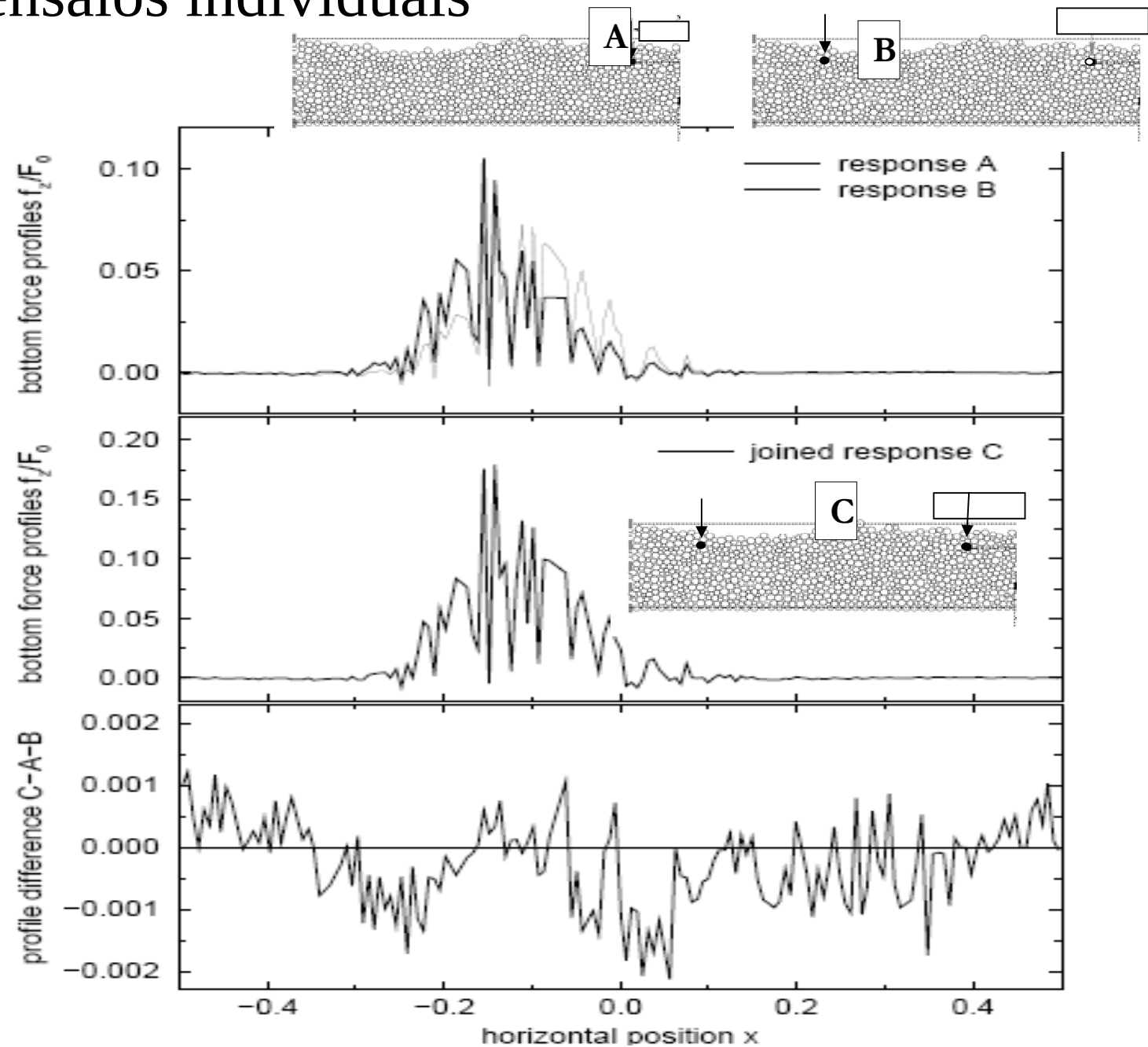
Testes: ensaios individuais

Linearidade:

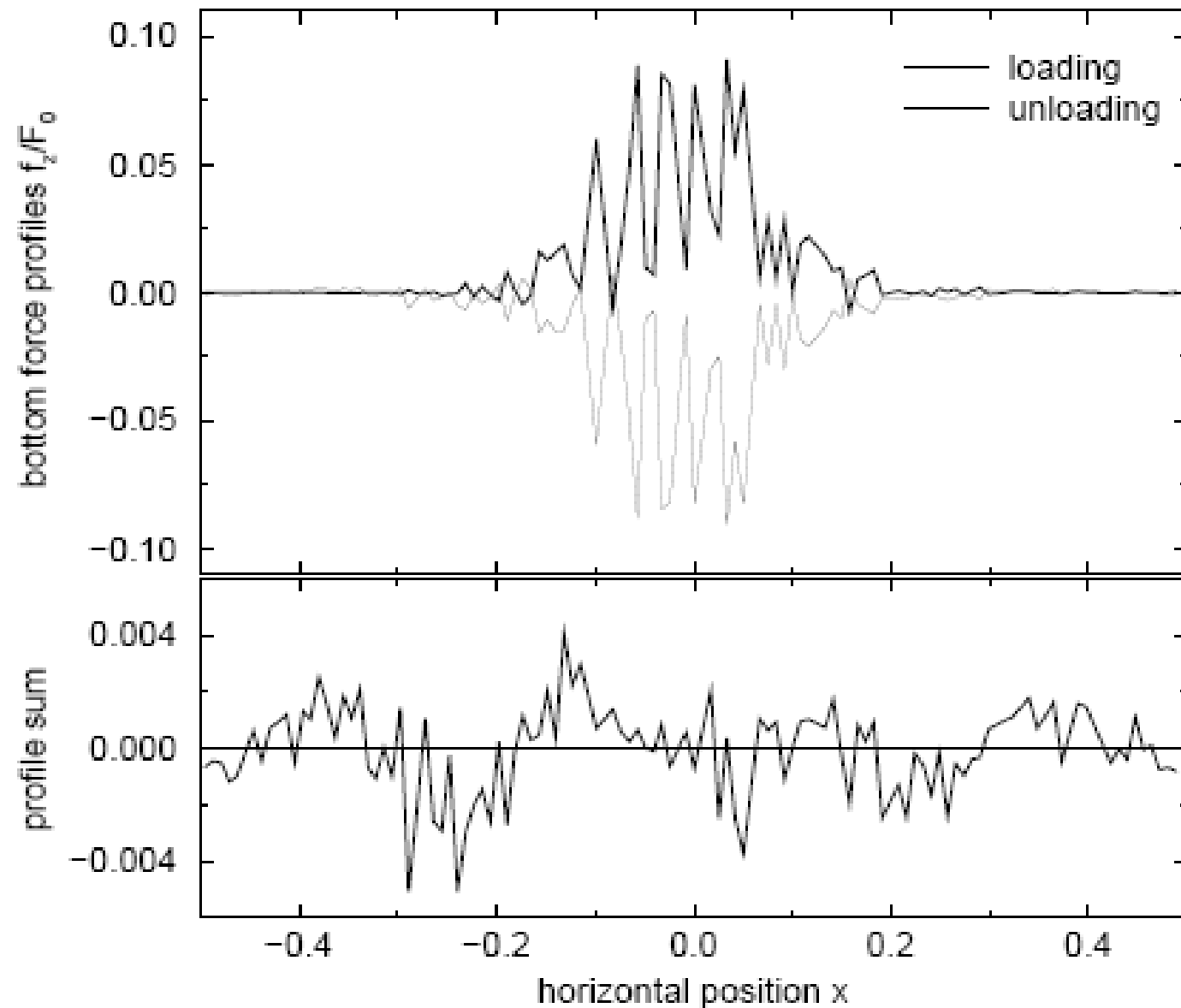


Testes: ensaios individuais

Aditividade

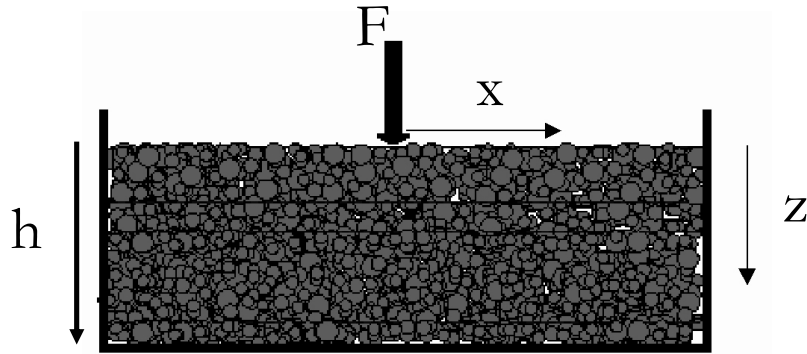


Testes: ensaios individuais



Reversibilidade:

Elasticidade Isotrópica



E : módulo de Young

ν_p : razão de Poisson

D : dimensão espacial

- espaço semi-ínnfinito

$$z^{D-1} \sigma_{ij} = F \Phi_{ij}^{\infty} \left(\frac{x}{z} \right)$$

- empilhamento finito de espessura h

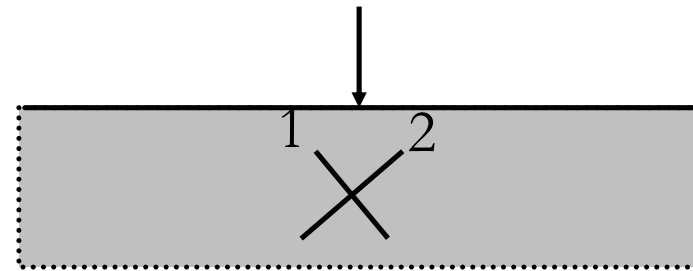
$$h^{D-1} \sigma_{ij} = F \Phi_{ij} \left(\frac{x}{h}, \nu_p \right)$$

Elasticidade Anisotrópica

$$\begin{pmatrix} \sigma_{22} \\ \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-\nu_1\nu_2)} \begin{pmatrix} E_2 & \nu_1 E_2 & 0 \\ \nu_2 E_1 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(G(1-\nu_1\nu_2)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Para plano semi infinito

Otto et al. PRE **67**,031302 (2003)



Duas variáveis independentes

$$t = E_2 / E_1 = \nu_2 / \nu_1$$

$$r = \frac{1}{2} E_2 \left(\frac{2}{G} - \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right)$$



Teoria Elástica

Tensor de tensões: σ_{ij} ; tensor de deformações: $u_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$

Relação
tensão deformação:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_x \nu_z} \begin{pmatrix} E_x & \nu_z E_x & 0 \\ \nu_x E_z & E_z & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu_x \nu_z)G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xx} \\ u_{zz} \\ u_{xz} \end{pmatrix}$$

onde E_x, E_z e G são respectivamente o módulo de Young e o módulo de cisalhamento, e ν_x, ν_z são os coeficientes de Poisson.

Condições de Equilíbrio:

$$\begin{cases} \partial_z \sigma_{zz} + \partial_x \sigma_{xz} = 0 \\ \partial_z \sigma_{xz} + \partial_x \sigma_{xx} = 0 \end{cases}$$

Relação de compatibilidade:

$$\partial_z^2 u_{xx} + \partial_x^2 u_{zz} - 2 \partial_x \partial_z u_{xz} = 0$$



Teoria Elástica (2)

Considerando soluções do tipo $e^{iqx + iX_k qz}$, vemos que X deve ser soluções da equação:

$$X^4 + 2rX^2 + t = 0$$

$$(\text{caso isotrópico: } (X^2 - 1)^2 = 0)$$

$$\Rightarrow X = \pm \sqrt{\frac{-r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - t}}$$

$$\text{onde } t = \frac{E_x}{E_z} \text{ e } r = \frac{1}{2} E_x \left(\frac{2}{G} - \frac{\nu_z}{E_z} - \frac{\nu_x}{E_x} \right)$$

As soluções para as componentes de tensão são

$$\sigma_{zz} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \sum_{k=1}^4 a_k(q) e^{iqx + iX_k qz}$$

$$\sigma_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} dq \sum_{k=1}^4 a_k(q) X_k^2 e^{iqx + iX_k qz}$$

$$\sigma_{xz} = - \int_{-\infty}^{\infty} dq \sum_{k=1}^4 a_k X_k(q) e^{iqx + iX_k qz}$$

com a_k determinados pelas condições de fronteira.



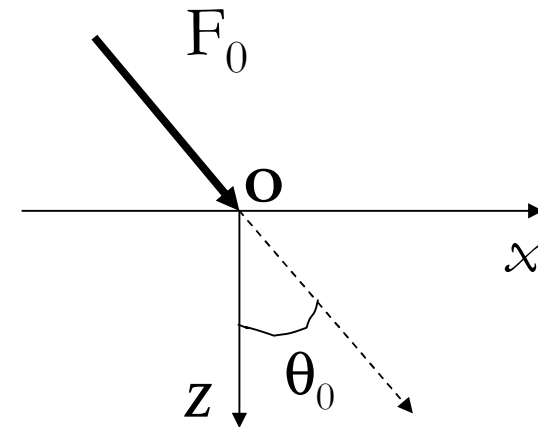
Plano Semi-infinito

Condições de fronteira:

Para $z = 0$: $\sigma_{zz} = F_0 \cos \theta_0 \delta(x)$

$$\sigma_{xz} = F_0 \sin \theta_0 \delta(x)$$

Para $z = \infty$: todas as tensões se anulam.



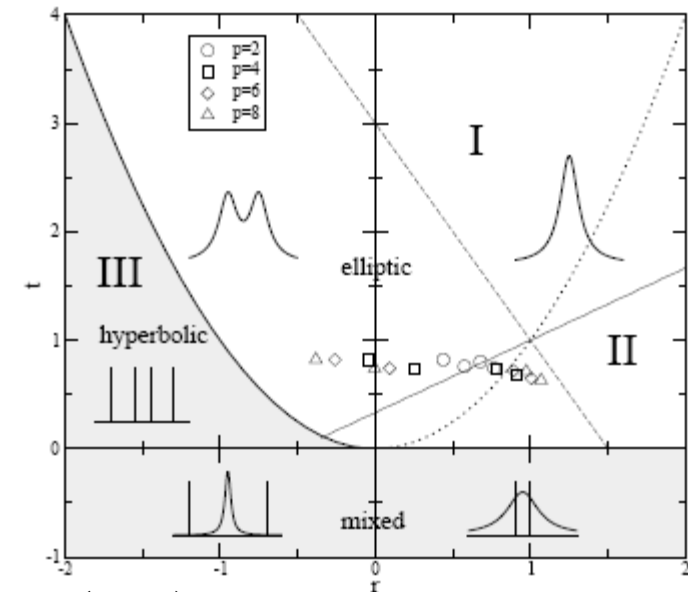
Considerando os possíveis valores para os X_k , existem dois casos:

Caso I ($t > r^2$):
Região I

$$\begin{cases} X_1 = -X_4 = \beta - i\alpha \\ X_2 = -X_3 = -\beta - i\alpha \end{cases}$$

Caso II ($t < r^2, r > 0$):
Região II

$$\begin{cases} X_1 = -X_4 = i\alpha_1 \\ X_2 = -X_3 = i\alpha_2 \end{cases}$$



Expressões analíticas para as tensões: Otto *et al.*, PRE **67**, 031302 (2003).



Camada Finita

Condições de fronteira:

$$\begin{aligned} \text{Para } x, z = 0: \quad \sigma_{zz} &= Q(x) \\ \sigma_{xz} &= P(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } x, z = h: \quad u_x &= 0 \\ \text{(fundo rugoso)} \quad u_z &= 0 \end{aligned}$$

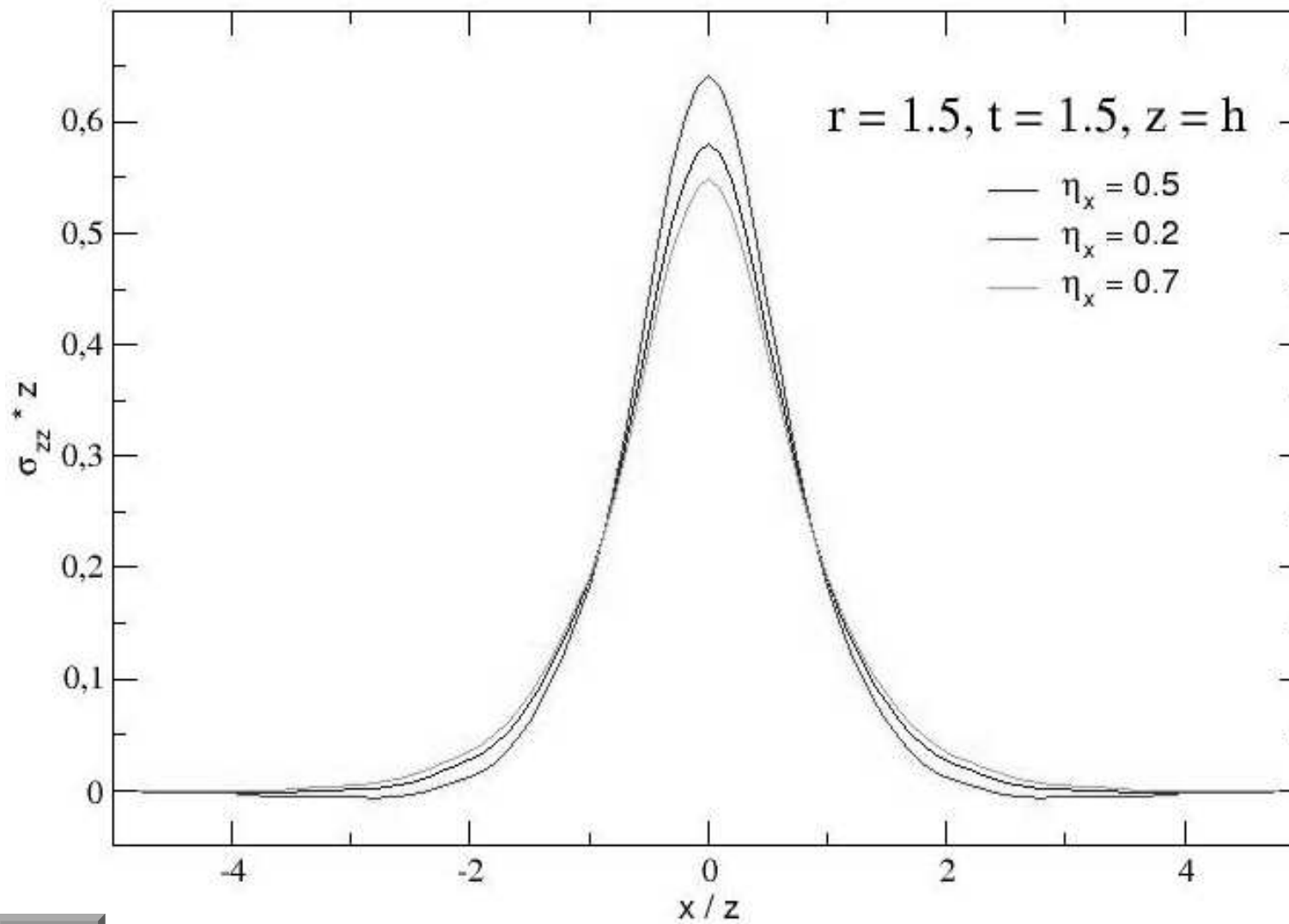
Isso implica em

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^4 a_k &= s(q) \\ \sum_{k=1}^4 a_k X_k &= p(q) \\ \sum_{k=1}^4 a_k e^{iX_k qh} (v_x - X_k^2) &= 0 \\ \sum_{k=1}^4 a_k e^{iX_k qh} X_k (r + X_k^2) &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \, s(q) e^{iqx} \\ P(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \, p(q) e^{iqx} \end{aligned}$$



Perfis

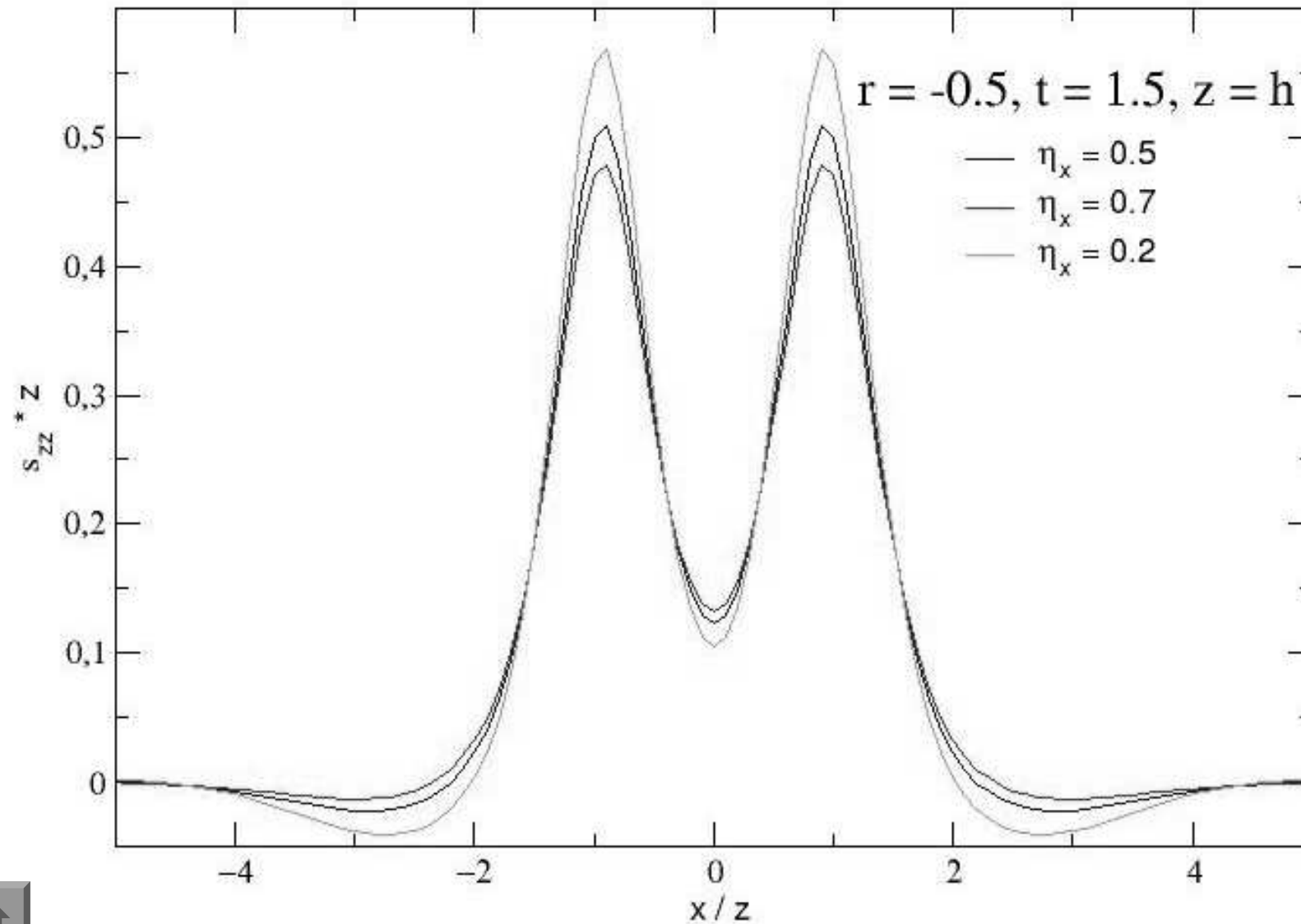


pico único
pico duplo

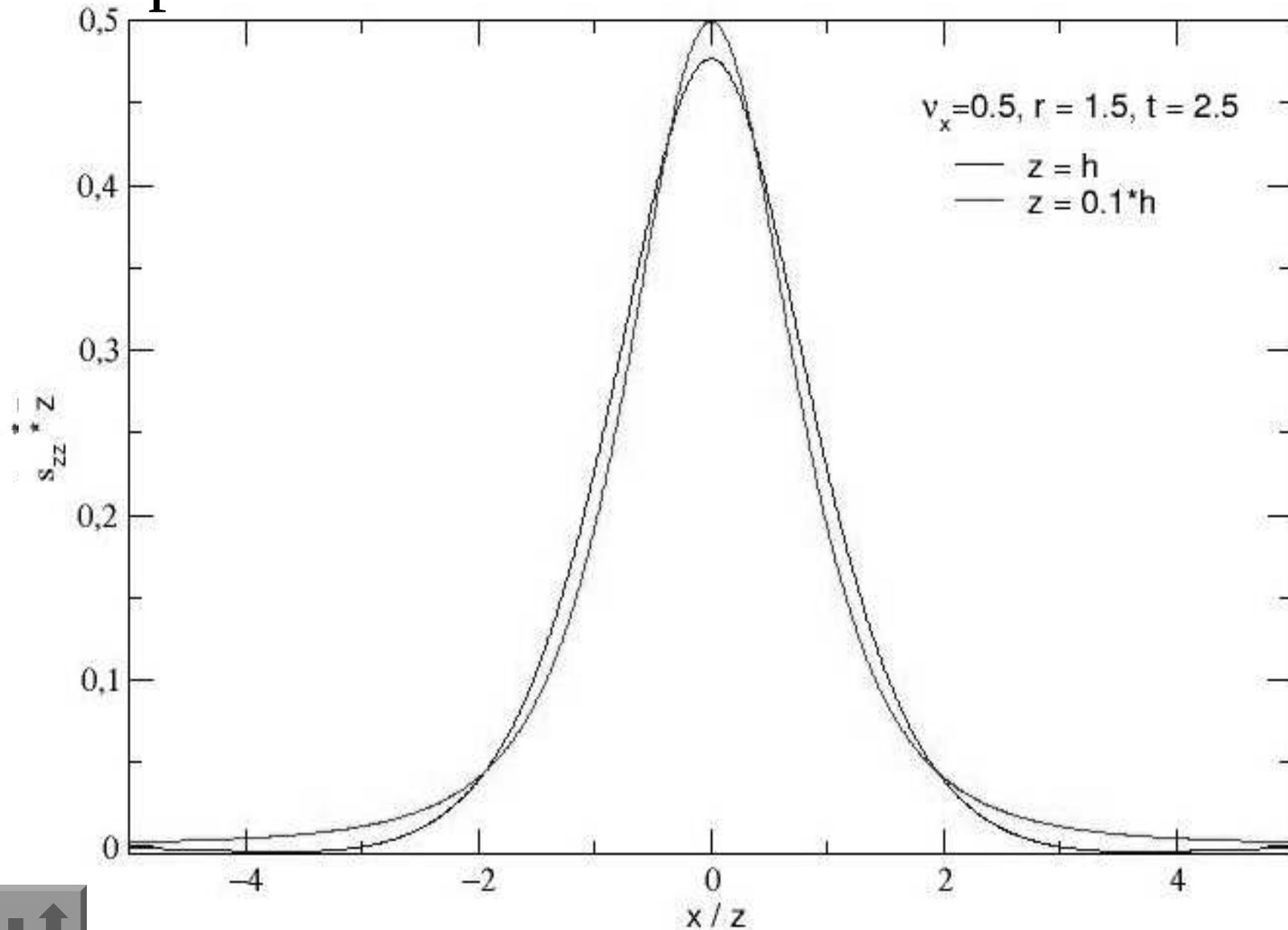
z e h



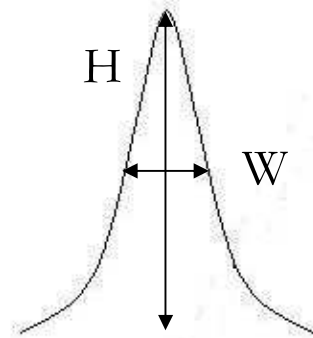
Duplo pico



Dependência z/h



Ajuste

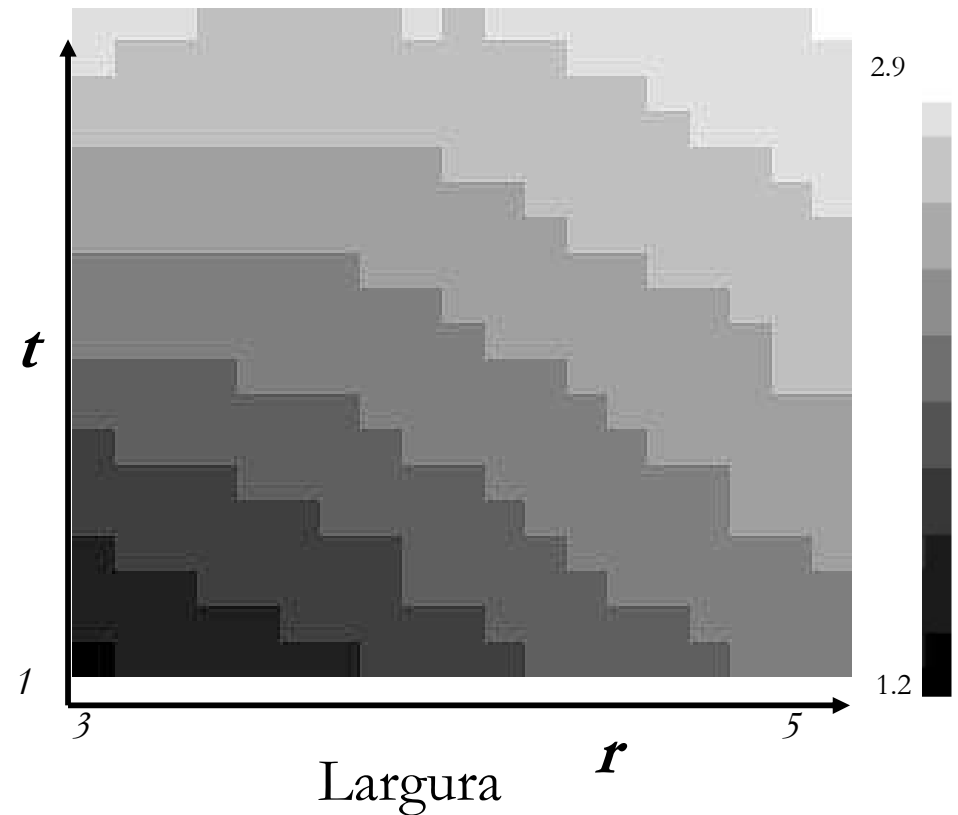
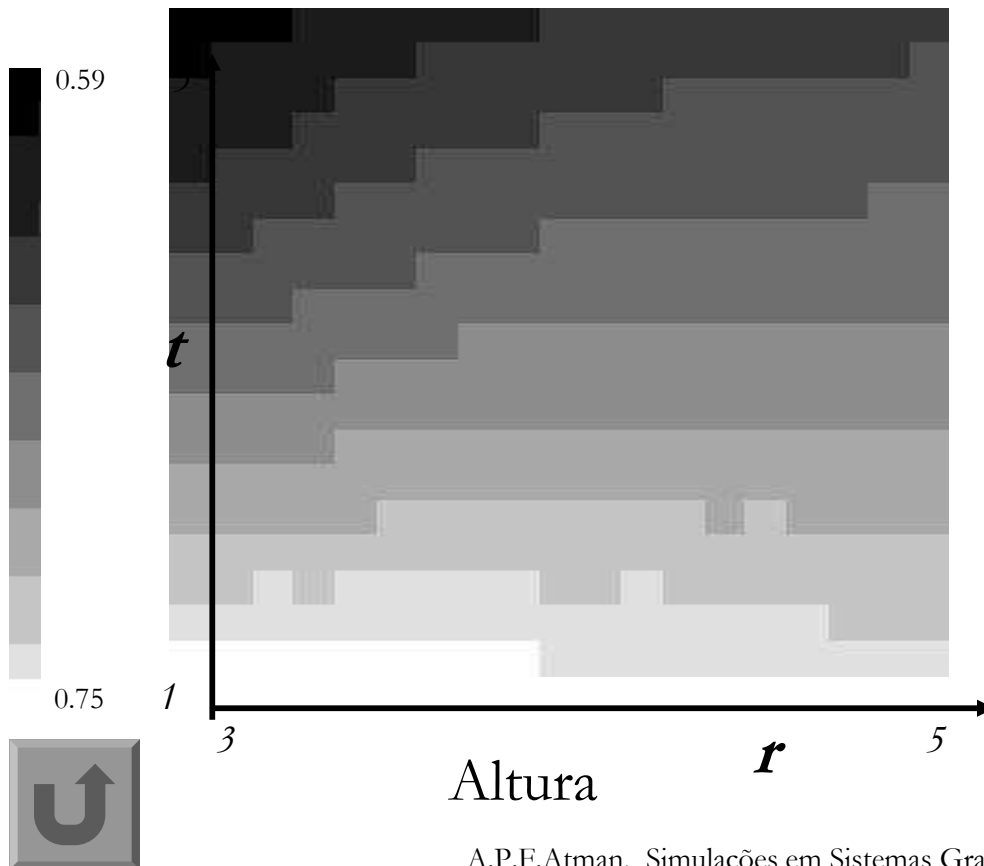


Parâmetros: r , t e v_x

Entrada: h , z , θ_0 , dados experimentais
ou de simulação;

Saída: tensões e parâmetros macroscópicos!

“Pré – ajuste”: largura (W) e altura (H) $\rightarrow$ mapeamento;



Resultados - Ajuste elástico

