Curso de Cosmologia 2013B

Parte IV
Aula 5

Martín Makler
CBPF

ICRA CBPF

MCTI

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

Teoria de perturbação relativística

- O ponto de partida da teoria de perturbação cosmológica é a métrica de Robertson-Walker perturbada:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \left[g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu}\right] dx^\mu dx^\nu \\
&= a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + \gamma_{ij}(\vec{x}\,)dx^i dx^j + h_{\mu\nu}(\vec{x},\tau)dx^\mu dx^\nu\right] \;,
\end{aligned}
$$

Referências recomendadas:

• Mukhanov V.F. Physical foundations of cosmology (CUP, 2005) (ISBN 0521563984) [várias cópias disponíveis na biblioteca]

• Edmund Bertschinger, Cosmological Dynamics, arXiv:astro-ph/9503125

Teoria de perturbação relativística

- O ponto de partida da teoria de perturbação cosmológica é a métrica de Robertson-Walker perturbada:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu}\right] dx^\mu dx^\nu \\ &= a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + \gamma_{ij}(\vec{x}\,)dx^i dx^j + h_{\mu\nu}(\vec{x},\tau)dx^\mu dx^\nu\right] \ , \end{aligned}$$

Referências recomendadas:

• Mukhanov V.F. Physical foundations of cosmology (CUP, 2005) (ISBN 0521563984) [várias cópias disponíveis na biblioteca]

• Edmund Bertschinger, Cosmological Dynamics, arXiv:astro-ph/9503125

Decomposição escalar-vetorial-tensorial da métrica

Tensor Energia-Momentum

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u^{\alpha} u^{\beta} + p g^{\alpha\beta} + \Sigma^{\mu\nu}$$

obs.: escolha do referencial de Landau
(referencial de energia, $q_i = 0$)

pressão
(pode conter viscosidade volumar)

Tensão anisotrópica

Perturbações lineares

$$\rho\left(x^{i}, \tau\right) = \bar{\rho}\left(\tau\right) + \delta\rho\left(x^{i}, \tau\right)$$

$$p\left(x^{i}, \tau\right) = \bar{p}\left(\tau\right) + \delta p\left(x^{i}, \tau\right)$$

$$v^{i} := dx^{i}/d\tau = u^{i}/u^{0}$$

Equações de Einstein

Tensor de Einstein também decomposto em escalar-tensorial-vetorial:

$$G^0{}_0: \qquad \left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi - 3\frac{\dot a}{a}\left(\dot\Phi + \frac{\dot a}{a}\Psi\right) = 4\pi G a^2 \delta\rho \ ,$$

$$G^0{}_{i,\,\parallel}: \qquad -(\dot\Phi + \frac{\dot a}{a}\Psi)_{;i} = 4\pi G a^2 \left[(\rho+p)(v_i + W_i)\right]_{\parallel} \ ,$$

$$G^0{}_{i,\,\perp}: \qquad \left(\nabla^2 + 2K\right) W_i = 16\pi G a^2 \left[(\rho+p)(v_i + W_i)\right]_{\perp} \ ,$$

$$G^i{}_i: \qquad \ddot\Phi - K\Phi + \frac{\dot a}{a}(\dot\Psi + 2\dot\Phi) + \left[2\frac{\dot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right]\Psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi G a^2 \delta p$$

$$G^i{}_{j\neq i,\,\parallel}: \qquad (\Phi - \Psi)_{,(i;j)} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\parallel} \ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\perp}: \qquad \dot W_{(j;i)} + 2\frac{\dot a}{a} W_{(j;i)} = -8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\perp} \ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\mathrm{T}}: \qquad \ddot S_{ij} + 2H\dot S_{ij} - \nabla^2 S_{ij} + 2K S_{ij} = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\mathrm{T}} \ ,$$

obs.: neste módulo $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$ e $H = \frac{\dot a}{a}$ $\qquad (\nabla^2 A_{ij} := A_{ij;k}{}^{;k})$

Equações de Einstein

Tensor de Einstein também decomposto em escalar-tensorial-vetorial:

$$G^0{}_0: \qquad \left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi\right) = 4\pi G a^2 \delta\rho \,,$$

$$G^0{}_{i,\,\parallel}: \qquad -(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi)_{;i} = 4\pi G a^2 \left[(\rho + p)(v_i + W_i)\right]_{\parallel} \,,$$

$$G^0{}_{i,\,\perp}: \qquad \left(\nabla^2 + 2K\right) W_i = 16\pi G a^2 \left[(\rho + p)(v_i + W_i)\right]_{\perp} \,,$$

$$G^i{}_i: \qquad \ddot{\Phi} - K\Phi + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\Psi} + 2\dot{\Phi}) + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\Psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi G a^2 \delta p$$

$$G^i{}_{j\neq i,\,\parallel}: \qquad \boxed{(\Phi - \Psi)_{,(i;j)} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\parallel}} \,,$$

$$G^i{}_{j,\,\perp}: \qquad \dot{W}_{(j;i)} + 2\frac{\dot{a}}{a}W_{(j;i)} = -8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\perp} \,,$$

$$G^i{}_{j,\,\mathrm{T}}: \qquad \ddot{S}_{ij} + 2H\dot{S}_{ij} - \nabla^2 S_{ij} + 2KS_{ij} = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\mathrm{T}} \,,$$

obs.: neste módulo $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$ e $H = \frac{\dot{a}}{a}$ $\qquad (\nabla^2 A_{ij} := A_{ij;k}{}^{;k})$

Equações de Einstein

Tensor de Einstein também decomposto em escalar-tensorial-vetorial:

$$G^0{}_0: \qquad \left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi - 3\frac{\dot a}{a}\left(\dot\Phi + \frac{\dot a}{a}\Psi\right) = 4\pi G a^2 \delta\rho \ ,$$

$$G^0{}_{i,\,\parallel}: \qquad -(\dot\Phi + \frac{\dot a}{a}\Psi)_{;i} = 4\pi G a^2 \left[(\rho+p)(v_i + W_i)\right]_\parallel \ ,$$

$$G^0{}_{i,\,\perp}: \qquad \boxed{\left(\nabla^2 + 2K\right) W_i = 16\pi G a^2 \left[(\rho+p)(v_i + W_i)\right]_\perp} \ ,$$

$$G^i{}_i: \qquad \ddot\Phi - K\Phi + \frac{\dot a}{a}(\dot\Psi + 2\dot\Phi) + \left[2\frac{\dot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right]\Psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi G a^2 \delta p$$

$$G^i{}_{j\neq i,\,\parallel}: \qquad \boxed{(\Phi - \Psi)_{,(i;j)} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\parallel}} \ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\perp}: \qquad \dot W_{(j;i)} + 2\frac{\dot a}{a} W_{(j;i)} = -8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\perp} \ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\mathrm{T}}: \qquad \ddot S_{ij} + 2H\dot S_{ij} - \nabla^2 S_{ij} + 2K S_{ij} = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\mathrm{T}} \ ,$$

obs.: neste módulo $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$ e $H = \frac{\dot a}{a}$ $\qquad (\nabla^2 A_{ij} := A_{ij;k}{}^{;k})$

Equações de Einstein

Tensor de Einstein também decomposto em escalar-tensorial-vetorial:

$$G^0{}_0: \qquad \left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi\right) = 4\pi G a^2 \delta\rho \ ,$$

$$G^0{}_{i,\,\parallel}: \qquad -(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi)_{;i} = 4\pi G a^2 \left[(\rho+p)(v_i + W_i)\right]_{\parallel} \ ,$$

$$G^0{}_{i,\,\perp}: \qquad \left(\nabla^2 + 2K\right) W_i = 16\pi G a^2 \left[(\rho+p)(v_i + W_i)\right]_{\perp} \ ,$$

$$G^i{}_i: \qquad \ddot{\Phi} - K\Phi + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\Psi} + 2\dot{\Phi}) + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\Psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi G a^2 \delta p$$

$$G^i{}_{j\neq i,\,\parallel}: \qquad \boxed{(\Phi - \Psi)_{,(i;j)} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\parallel}} \ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\perp}: \qquad \dot{W}_{(j;i)} + 2\frac{\dot{a}}{a}W_{(j;i)} = -8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\perp} \ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\mathrm{T}}: \qquad \ddot{S}_{ij} + 2H\dot{S}_{ij} - \nabla^2 S_{ij} + 2KS_{ij} = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\mathrm{T}} \ ,$$

obs.: neste módulo $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$ e $H = \frac{\dot{a}}{a}$ $\qquad (\nabla^2 A_{ij} := A_{ij;k}{}^{;k})$

Equações de Einstein

Tensor de Einstein também decomposto em escalar-tensorial-vetorial:

$$G^0{}_0: \quad \left(\nabla^2+3K\right)\Phi-3\frac{\dot a}{a}\left(\dot\Phi+\frac{\dot a}{a}\Psi\right)=4\pi G a^2\delta\rho\ ,$$

$$G^0{}_{i,\,\parallel}: \quad -(\dot\Phi+\frac{\dot a}{a}\Psi)_{;i}=4\pi G a^2\left[(\rho+p)(v_i+W_i)\right]_\parallel\ ,$$

$$G^0{}_{i,\,\perp}: \quad \left(\nabla^2+2K\right)W_i=16\pi G a^2\left[(\rho+p)(v_i+W_i)\right]_\perp\ ,$$

$$G^i{}_i: \quad \ddot\Phi-K\Phi+\frac{\dot a}{a}(\dot\Psi+2\dot\Phi)+\left[2\frac{\dot a}{a}+\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right]\Psi-\frac{1}{3}\nabla^2(\Phi-\Psi)=4\pi G a^2\delta p$$

$$G^i{}_{j\neq i,\,\parallel}: \quad (\Phi-\Psi)_{,(i;j)}-\frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2(\Phi-\Psi)=8\pi G a^2\Sigma_{ij,\,\parallel}\ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\perp}: \quad \dot W_{(j;i)}+2\frac{\dot a}{a}W_{(j;i)}=-8\pi G a^2\Sigma_{ij,\,\perp}\ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\mathrm{T}}: \quad \ddot S_{ij}+2H\dot S_{ij}-\nabla^2 S_{ij}+2KS_{ij}=8\pi G a^2\Sigma_{ij,\,\mathrm{T}}\ ,$$

obs.: neste módulo $\dot{} = \frac{d}{d\tau}$ e $H=\frac{\dot a}{a}$ $\qquad (\nabla^2 A_{ij} := A_{ij;k}{}^{;k})$

Equações de Einstein

Tensor de Einstein também decomposto em escalar-tensorial-vetorial:

$$G^0{}_0: \quad \boxed{\left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi - 3\frac{\dot a}{a}\left(\dot\Phi + \frac{\dot a}{a}\Psi\right) = 4\pi G a^2 \delta\rho\ ,}$$

$$G^0{}_{i,\,\parallel}: \quad \boxed{-(\dot\Phi + \frac{\dot a}{a}\Psi)_{;i} = 4\pi G a^2\left[(\rho+p)(v_i + W_i)\right]_{\parallel}\ ,}$$

$$G^0{}_{i,\,\perp}: \quad \left(\nabla^2 + 2K\right) W_i = 16\pi G a^2\left[(\rho+p)(v_i + W_i)\right]_{\perp}\ ,$$

$$G^i{}_i: \quad \ddot\Phi - K\Phi + \frac{\dot a}{a}(\dot\Psi + 2\dot\Phi) + \left[2\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right]\Psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi G a^2 \delta p$$

$$G^i{}_{j\neq i,\,\parallel}: \quad \left(\Phi - \Psi\right)_{,(i;j)} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2\left(\Phi - \Psi\right) = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\parallel}\ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\perp}: \quad \dot W_{(j;i)} + 2\frac{\dot a}{a} W_{(j;i)} = -8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\perp}\ ,$$

$$G^i{}_{j,\,\mathrm{T}}: \quad \ddot S_{ij} + 2H\dot S_{ij} - \nabla^2 S_{ij} + 2K S_{ij} = 8\pi G a^2 \Sigma_{ij,\,\mathrm{T}}\ ,$$

obs.: neste módulo $\dot{} = \dfrac{d}{d\tau}$ e $H = \dfrac{\dot a}{a}$ $\qquad (\nabla^2 A_{ij} := A_{ij;k}{}^{;k})$

Modos escalares

- Desacoplamento entre os modos no regime linear
- Perturbações escalares:

(para um fluido perfeito $\Phi = \Psi$)

Modos escalares

- Desacoplamento entre os modos no regime linear
- Perturbações escalares:

$$\boxed{ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\Psi)d\tau^2 + (1-2\phi)\gamma_{ij}\,dx^i dx^j\right]}$$

(para um fluido perfeito $\Phi = \Psi$)

Modos escalares

- Desacoplamento entre os modos no regime linear
- Perturbações escalares:

$$\boxed{ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\Psi)d\tau^2 + (1-2\phi)\gamma_{ij}\,dx^i dx^j\right]}$$

Modos escalares

- Desacoplamento entre os modos no regime linear
- Perturbações escalares:

$$\boxed{ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\Psi)d\tau^2 + (1-2\phi)\gamma_{ij}\,dx^i dx^j\right]}$$

Modos escalares

- Desacoplamento entre os modos no regime linear
- Perturbações escalares:

$$\boxed{ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\Psi)d\tau^2 + (1-2\phi)\gamma_{ij}\, dx^i dx^j\right]}$$

(para um fluido perfeito $\Phi = \Psi$)

Limite newtoniano I

Tensor de Einstein também decomposto em escalar-tensorial-vetorial:

$$\left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi = 4\pi G a^2 \left[\delta\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}\phi_f\right] \quad , \qquad -\phi_{f,i} \equiv \left[(\rho + p)(v_i + W_i)\right]_{||} \quad .$$

Dentro do raio de Hubble, para velocidades não relativísticas e curvatura desprezível:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho$$

Limite newtoniano I

Tensor de Einstein também decomposto em escalar-tensorial-vetorial:

$$\left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi = 4\pi G a^2 \left[\delta\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}\phi_f\right] \quad , \qquad -\phi_{f,i} \equiv \left[(\rho + p)(v_i + W_i)\right]_{||} \quad .$$

Dentro do raio de Hubble, para velocidades não relativísticas e curvatura desprezível:

$$\boxed{\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho}$$

Conservação do tensor Energia-Momentum

Parte emporal

$$\dot{\rho} + 3(\frac{\dot{a}}{a} - \dot{\phi})(\rho + p) + \left[(\rho + p)v^i\right]_{;i} = 0,$$

Parte espacial

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[(\rho + p)(v_i + W_i)\right] + 4\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)(v_i + W_i) + p_{,i} + (\mathrm{div}\,\Sigma)_i + (\rho + p)\Psi_{,i} = 0$$

Perturbação no potencial

$$\ddot{\Phi} - K\Phi + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\Psi} + 2\dot{\Phi}) + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\Psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi G a^2 \delta p \ ,$$

$$(\Phi - \Psi)_{,(i;j)} - \left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi\right) = 4\pi G a^2 \delta\rho$$

$$\Psi = \Phi$$

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho + T\delta s, \qquad c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right), \qquad T = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)$$

Combinando as relações acima:

$$\ddot{\Phi} + 3(1 + c_s^2)\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - c_s^2\nabla\Phi + \left(2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + (1 + 3c_s^2)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\Phi = 4\pi G a^2 T\delta s$$

Perturbação no potencial

$$\ddot{\Phi} - K\Phi + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\Psi} + 2\dot{\Phi}) + \left[2\frac{\dot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right]\Psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi - \Psi) = 4\pi G a^2 \delta p\ ,$$

$$(\Phi - \Psi)_{,(i;j)} - \left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{\Phi} + \frac{\dot{a}}{a}\Psi\right) = 4\pi G a^2 \delta\rho$$

$$\Psi = \Phi$$

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho + T\delta s, \qquad c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right), \qquad T = \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)$$

Combinando as relações acima:

$$\boxed{\ddot{\Phi} + 3(1 + c_s^2)\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - c_s^2\nabla\Phi + \left(2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + (1 + 3c_s^2)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\Phi = 4\pi G a^2 T\delta s}$$

Soluções

$$\ddot{\Phi} + 3(1+c_s^2)\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - c_s^2\nabla\Phi + \left(2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + (1+3c_s^2)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\Phi = 4\pi G a^2 T\delta s$$

Perturbações de curvatura em um fluido não relativístico sem colisões (matéria escura):

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + \left(2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\Phi = 0$$

Soluções

$$\ddot{\Phi} + 3(1+c_s^2)\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - c_s^2\nabla\Phi + \left(2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + (1+3c_s^2)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\Phi = 4\pi G a^2 T \delta s$$

Perturbações de curvatura em um fluido não relativístico sem colisões (matéria escura):

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} + \left(2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\Phi = 0$$

Modo que entra no horizonte depois da dominação pela matéria