de estado na radiação cósmica de fundo. Também estudaremos um modelo com simetria esférica para investigar o comportamento não-linear, onde devem aparecer os efeitos mais interessantes da equação de estado proposta.

Evidentemente, a abordagem adotada nesta seção é uma descrição *efetiva* em termos de um fluido. Vimos que diversos sistemas podem ser representados por equações de fluido, como por exemplo a dinâmica de $d$-branas. Uma vez encontrada a equação de estado, ela poderia servir de motivação para investigar a microfísica, impondo restrições sobre a lagrangiana e o acoplamento dos campos fundamentais que descreveriam essa componente.

Mesmo sem nenhuma motivação para a microfísica, este modelo serve ao menos para testar a "degenerescência cosmológica", ou seja, até que ponto as observações determinam unívocamente a teoria e os modelos, e até que onde é possível "falsificar" um dado cenário.

## A.5 Teoria de Perturbação e o Limite Newtoniano da Cosmologia Relativística

Como foi discutido na seção 1.2 não é possível estabelecer uma cosmologia puramente newtoniana. É preciso fazer alguns "truques" para contornar a necessidade de condições de fronteira no infinito. Qual seria então a validade de se fazer um tratamento newtoniano? A resposta será dada pelo limite newtoniano da cosmologia relativística. Veremos a seguir que, nesse limite, as equações relativísticas se reduzem às equações da cosmologia newtoniana introduzidas na seção 1.2.

O limite newtoniano corresponde a campos gravitacionais fracos e baixas velocidades. No espaço chato, esse limite é obtido fazendo-se pequenas perturbações na métrica de Minkowski. Já no caso cosmológico faremos perturbações na métrica de Robertson-Walker, que descreve um universo homogêneo e isotrópico. A teoria de perturbação será apresentada num calibre que permite fazer a comparação direta com a cosmologia newtoniana. Aqui mostraremos apenas algumas idéias básicas e alguns resultados, para uma discussão mais completa e detalhada veja as referências [3] e [252].

O ponto de partida da teoria de perturbação cosmológica é a métrica de Robertson-Walker perturbada,

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left[g^{(0)}_{\mu\nu} + g^{(1)}_{\mu\nu}\right] dx^\mu dx^\nu \\ &= a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + \gamma_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j + h_{\mu\nu}(\vec{x},\tau)dx^\mu dx^\nu\right] \,, \end{aligned} \tag{A.98}$$

onde $x^i$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ são as coordenadas espaciais co-móveis, $\tau$ é o tempo conforme, $a(\tau)$ é o fator de escala e $\gamma_{ij}(\vec{x})$ é a métrica espacial de um espaço homogêneo e isotrópico com curvatura constante. Utilizar o tempo conforme $\tau$ é mais conveniente para a teoria de perturbação cosmológica, ele está relacionado com o tempo próprio $t$ medido por um observador co-móvel[19] por $dt = a(\tau)d\tau$.

Note que estaremos lidando com pequenas perturbações na *geometria*, em relação a um universo de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW). Isso não implica que estaremos trabalhando com pequenas perturbações na *matéria*. De fato, no universo temos estruturas em grande escala não-lineares, cujos campos gravitacionais são fracos.

### A.5.1 Classificação das Perturbações Métricas e Escolha do Calibre

Na teoria de perturbação linear, as perturbações na métrica $h_{\mu\nu}$ são tratadas como um campo tensorial sobre uma geometria de fundo de Robertson-Walker. Como é uma matriz simétrica $4 \times 4$, $h_{\mu\nu}$ tem 10 graus de liberdade. Na relatividade geral, podemos fazer transformações genéricas das coordenadas. Assim, 4 desses graus de liberdade podem ser eliminados pela escolha das coordenadas, deixando 6 graus de liberdade físicos. As transformações locais de coordenadas são transformações de calibre na relatividade geral. Um tratamento adequado da teoria de perturbação relativística requer uma separação clara entre os graus de liberdade físicos e os de calibre. Para efetuar essa separação, faremos

[19] Aqui denotaremos por co-móvel, um referencial que se move junto com a expansão global, ou seja, que tem coordenadas $\vec{x}$, fixas.

uma decomposição escalar-vetorial-tensorial das perturbações. Depois escolheremos um calibre a mostraremos as equações para as perturbações nesse calibre.

Utilizar um dado calibre na relatividade geral, é equivalente a fixar o calibre no eletromagnetismo. Uma escolha usual no eletromagnetismo, é trabalhar no calibre de Coulomb, para o qual a divergência do potencial vetorial é nula. O seu análogo na RG é o calibre de Poisson que será discutido a seguir. No eletromagnetismo, em vez de trabalharmos com os potenciais, podemos utilizar diretamente os campos elétrico e magnético, que são automaticamente invariantes de calibre. O análogo a trabalhar com esses campos, na relatividade geral é utilizar as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl, e a decomposição nos parâmetros dinâmicos e cinemáticos. Essa é a idéia do formalismo de projeção da relatividade geral, que foi discutido na seção A.2.

As perturbações métricas na teoria de perturbação linear foram classificadas por Lifshitz [253]. Ele introduziu a decomposição escalar-tensorial-vetorial, que é baseada numa separação $3+1$ das componentes da métrica, que são escritas da seguinte forma:

$$h_{00} \equiv -2\Psi \ , \quad h_{0i} \equiv W_i \ , \quad h_{ij} = 2\left(-\Phi\gamma_{ij} + S_{ij}\right) \text{ com } \gamma^{ij}S_{ij} = 0, \tag{A.99}$$

onde, $\gamma^{ij}$ é a matriz inversa de $\gamma_{ij}$. O traço de $h_{ij}$ foi absorvido em $\Phi$, de modo que $S_{ij}$ tem apenas 5 componentes independentes. Na separação espaço-temporal $(3+1)$, usamos $\gamma_{ij}$ (ou $\gamma^{ij}$) para abaixar (ou levantar) os índices espaciais. Por conveniência, as derivadas espaciais serão escritas utilizando a derivada tridimensional covariante $_{;i}$ definida com relação à tri-métrica $\gamma_{ij}$. Se $K=0$, podemos escolher coordenadas cartesianas de modo que $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ e $_{;i} =_{,i}$.

A decomposição escalar-tensorial-vetorial é baseada na decomposição de um campo vetorial em suas partes longitudinal e transversa. Para qualquer campo vetorial $W_i(\vec{x})$, podemos escrever (veja a seção 1.3.4)

$$W_i = W_i^{\parallel} + W_i^{\perp} \quad \text{com} \quad \left(\operatorname{rot} W^{\parallel}\right)_i = 0 = \operatorname{div} W^{\perp}. \tag{A.100}$$

O rotacional e a divergência são definidos de forma análoga às eqs. (A.26) e (A.27), utilizando a derivada covariante espacial (por exemplo div $W = \gamma^{ij} W_{j;i}$).

A decomposição longitudinal-transverso não é unívoca (por exemplo, sempre podemos adicionar uma constante a $W_i^{\|}$), mas sempre existe. Essa terminologia origina-se do fato de que no espaço de Fourier $W_i^{\|}$ é paralelo ao vetor de onda, enquanto $W_i^{\perp}$ é perpendicular a esse vetor. Note que podemos escrever a parte longitudinal como $W_i^{\|} = (\phi_W)_{,i}$, para algum campo escalar $\phi_W$.

Uma decomposição semelhante pode ser efetuada para um tensor de dois índices, mas agora cada índice pode ser longitudinal ou transverso. Para um tensor simétrico, há três possibilidades: os dois índices são longitudinais, um é transverso, ou os dois são transversos. Essas componentes são escritas da seguinte forma:

$$S_{ij} = S_{ij}^{\|} + S_{ij}^{\perp} + S_{ij}^{\mathrm{T}} \,, \tag{A.101}$$

onde

$$(\operatorname{div} S)_i = \gamma^{jk} S_{ij;k} = \gamma^{jk} S_{ij;k}^{\|} + \gamma^{jk} S_{ij;k}^{\perp} \,. \tag{A.102}$$

O primeiro termo na equação (A.102) é um vetor longitudinal enquanto o segundo é um vetor transverso. A divergência de parte duplamente transversa, $S_{ij}^{\mathrm{T}}$, é zero. Para um tensor simétrico sem traço, as partes longitudinal e duplamente longitudinal podem ser obtidas a partir do gradientes de um escalar e de um vetor transverso, respectivamente:

$$S_{ij}^{\|} = \phi_{S,i;j} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\phi_S{}^{,k}{}_{;k} \,, \qquad S_{ij}^{\perp} = S_{i;j}^{\perp} + S_{j;i}^{\perp} \,. \tag{A.103}$$

Sob uma transformação infinitesimal de coordenadas $S_{ij}^{\|}$ e $S_{ij}^{\perp}$ podem mudar, enquanto $S_{ij}^{\mathrm{T}}$ é invariante [253, 254]. Da mesma forma, as partes tranversa e longitudinal de $W_i = h_{0i}$ são dependentes de calibre.

Agora podemos fazer a separação escalar-tensorial-vetorial dos graus de liberdade da métrica. O *modo tensorial* representa a parte de $h_{ij}$ que não pode ser obtida a partir dos gradientes de um vetor ou escalar, e é dado por $S_{ij}^{\mathrm{T}}$. O modo tensorial é invariante de calibre e tem dois graus de liberdade, cinco de uma matriz $3 \times 3$ simétrica sem traço, menos três da condição $\gamma^{jk} S^{\mathrm{T}}_{ij,k} = \operatorname{div} S^{\mathrm{T}} = 0$. Fisicamente o modo tensorial representa a radiação gravitacional e os dois graus de liberdade correspondem às duas polarizações. A radiação gravitacional é transversa: uma onda propagando-se na direção $z$ pode ter apenas as componentes $h_{xx} - h_{yy}$ e $h_{xy} = h_{yx}$ não nulas. O modo tensorial $S^{\mathrm{T}}_{ij}$ se comporta como um campo de spin 2 sob rotações espaciais.

O *modo vetorial* se comporta como um campo de spin 1 sob rotações. Ele corresponde às partes vetoriais transversas de métrica, que aparecem em $W^{\perp}_i$ e $S^{\perp}_{ij}$. Cada uma possui dois graus de liberdade. É possível eliminar dois desses graus de liberdade impondo condições de calibre [253, 254]. A escolha mais popular é o calibre síncrono de Lifshitz, para o qual $W^{\perp}_i = 0$. Entretanto, nesse calibre as equações perturbativas na métrica só são válidas para pequenas perturbações na matéria ($\delta\rho \ll \bar{\rho}$). Para estudar a aglomeração não-linear da matéria e o limite newtoniano, é mais conveniente escolher a condição $S^{\perp}_{ij} = 0$ [3]. Nos dois casos, há dois graus de liberdade, que correspondem ao gravitomagnetismo. Ele produz efeitos semelhantes aos do eletromagnetismo sobre massas em movimento ou em rotação (precessão de Lense-Thirring).

O *modo escalar* possui spin zero sob rotações espaciais e corresponde fisicamente à gravitação newtoniana com modificações relativísticas. As partes escalares da métrica são dadas por $\Phi$, $\Psi$, $W^{\parallel}_i$ e $S^{\parallel}_{ij}$. Quaisquer duas funções desse conjunto podem ser eliminadas por uma transformação de calibre. Aqui escolheremos $W^{\parallel}_i = S^{\parallel}_{ij} = 0$, de modo que as condições de calibre ficam:

$$\operatorname{div} W = 0, \qquad \operatorname{div} S = 0.$$

Bertschinger [3] chama essa escolha de *calibre de Poisson*, em analogia com o calibre de Coulomb do eletromagnetismo. As variáveis $(\Phi, \Psi, W^{\perp}_i, S^{\mathrm{T}}_{ij})$ correspondem às variáveis invariantes de calibre introduzidas por Bardeen [178] como combinações lineares das perturbações da métrica em outros calibres.

### A.5.2 Equações de Movimento e Limite Newtoniano

Nas equações de Einstein A.22, o tensor energia-momentum é a fonte para as variáveis da métrica. Para um fluido genérico no referencial de energia (ou referencial de Landau, veja a seção A.2.1) o tensor energia-momentum é dado por

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u^{\alpha} u^{\beta} + p g^{\alpha\beta} + \Sigma^{\mu\nu}$$

Definimos a trivelocidade por $v^i := dx^i/d\tau = u^i/u^0$. A componente $u^0$ é determinada a partir de $v^i$ e das perturbações métricas usando a condição de normalização $u^{\mu}u_{\mu} = -1$. A pressão e a densidade são separadas numa parte homogênea e numa perturbação:

$$\rho\left(x^i, \tau\right) = \bar{\rho}\left(\tau\right) + \delta\rho\left(x^i, \tau\right), \qquad p\left(x^i, \tau\right) = \bar{p}\left(\tau\right) + \delta p\left(x^i, \tau\right).$$

Consideraremos velocidades não relativísticas, de modo que podemos desprezar termos quadráticos em $v$. As equações de Einstein são linearizadas com relação às perturbações métricas, de modo que também podemos desprezar termos envolvendo produtos de $v$ com essas perturbações.

A parte não perturbada das equações de Einstein fornece a equação de Friedmann (A.65) e a conservação da energia (A.64) para o fundo de Robertson-Walker. As componentes do tensor de Einstein e do tensor energia-momentum também são decompostas nas suas partes escalares, vetoriais e tensoriais. As equações de Einstein levam às seguintes equações para as perturbações métricas [3]:

$$
\begin{aligned}
&G^0{}_0: && \left(\nabla^2+3K\right)\Phi - 3\frac{\dot a}{a}\left(\dot\Phi+\frac{\dot a}{a}\Psi\right) = 4\pi G a^2\delta\rho\ , && \text{(A.104)}\\
&G^0{}_{i,\parallel}: && -(\dot\Phi+\frac{\dot a}{a}\Psi)_{;i} = 4\pi G a^2\left[(\rho+p)(v_i+W_i)\right]_{\parallel}\ , && \text{(A.105)}\\
&G^0{}_{i,\perp}: && \left(\nabla^2+2K\right)W_i = 16\pi G a^2\left[(\rho+p)(v_i+W_i)\right]_{\perp}\ , && \text{(A.106)}\\
&G^i{}_i: && \ddot\Phi - K\Phi + \frac{\dot a}{a}(\dot\Psi+2\dot\Phi) + \left[2\frac{\ddot a}{a}+\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right]\Psi - \frac{1}{3}\nabla^2(\Phi-\Psi) = 4\pi G a^2\delta p\ , && \\
&G^i{}_{j\neq i,\parallel}: && (\Phi-\Psi)_{,(i;j)} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\nabla^2(\Phi-\Psi) = 8\pi G a^2\Sigma_{ij,\parallel}\ , && \text{(A.107)}\\
&G^i{}_{j,\perp}: && \dot W_{(j;i)} + 2\frac{\dot a}{a}W_{(j;i)} = -8\pi G a^2\Sigma_{ij,\perp}\ , && \text{(A.108)}\\
&G^i{}_{j,\mathrm{T}}: && \ddot S_{ij} + 2H\dot S_{ij} - \nabla^2 S_{ij} + 2KS_{ij} = 8\pi G a^2\Sigma_{ij,\mathrm{T}}\ , && \text{(A.109)}
\end{aligned}
$$

onde $\nabla^2 A_{ij} := A_{ij;k}{}^{;k}$, e o ponto denota $\partial/\partial\tau$. É interessante notar que, no calibre de Poisson, os modos vetoriais e escalares podem ser obtidos diretamente a partir da distribuição instantânea do tensor energia-momentum, sem necessitar nenhuma integração temporal. Isso fica óbvio nas equações acima para as quantidades $(\Phi-\Psi)$ e $W_i$. Apenas o modo tensorial obedece explicitamente uma equação de evolução. Note que, ao obter essas equações não precisamos supor que $|\delta\rho| \ll \bar\rho$, apenas que poderíamos desprezar todos os termos não-lineares envolvendo perturbações na métrica e na velocidade. Assim, elas são válidas mesmo no regime não-linear. das perturbações na densidade ✓

A conservação do tensor energia-momentum já está embutida nas equações de Einstein (A.104) a (A.109). A parte temporal da equação $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ fornece

$$\dot\rho + 3(\frac{\dot a}{a}-\dot\phi)(\rho+p) + \left[(\rho+p)v^i\right]_{;i} = 0, \qquad \text{(A.110)}$$

enquanto a parte espacial fica

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left[(\rho+p)(v_i+W_i)\right] + 4\frac{\dot a}{a}(\rho+p)(v_i+W_i) + p_{,i} + (\operatorname{div}\Sigma)_i + (\rho+p)\Psi_{,i} = 0\ . \qquad \text{(A.111)}$$

Combianado as equações (A.104) e (A.105) obtemos também uma equação instantânea para $\Phi$:

$$\left(\nabla^2 + 3K\right)\Phi = 4\pi G a^2 \left[\delta\rho + 3\frac{\dot{a}}{a}\phi_f\right], \quad -\phi_{f,i} \equiv \left[(\rho+p)(v_i + W_i)\right]_{\|}. \tag{A.112}$$

O último termo é desprezível para perturbações menores que o raio de Hubble e velocidades não relativísticas. Se a curvatura for muito pequena nas escalas de interesse, podemos desprezar $K$ na equação para $\Phi$. Além disso, todas as derivadas covariantes espaciais viram derivadas ordinárias. Mesmo se o universo não fosse chato (ou seja, se $K \neq 0$) a curvatura só seria apreciável em escalas muito maiores do que as que podemos observar atualmente para estudar as estruturas em grande escala. Nessa situação, a equação (A.112) se reduz à equação de Poisson da cosmologia newtoniana

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho, \tag{A.113}$$

que é idêntica à equação (1.13) obtida na seção 1.2. Note que $\Phi$ é o potencial gravitacional peculiar, pois representa a perturbação sobre um universo homogêneo. Se a pressão anisotrópica não é relativística, temos $\Psi = \Phi$. No limite newtoniano $\Phi$, $W_i$ e $S_{ij}$ são muito pequenos, e podem ser desprezados face a $v_i$ ou $\dot{a}/a$. Notando que $\rho = \rho_0 c^2 + \varepsilon$, e considerando que $\rho_0 \gg \varepsilon/c^2$ e $\rho_0 \gg p/c^2$, a equação (A.110) leva à equação de continuidade

$$\frac{\partial\delta}{\partial\tau} + \left[(1+\delta)\,v^i\right]_{,i} = 0, \tag{A.114}$$

onde $1+\delta := \rho_0/\bar{\rho}_0$, que é idêntica à equação de continuidade da cosmologia newtoniana[20] (eq. 1.17).

Combinando as equações (A.110) e (A.111) obtemos (sempre desprezando termos

[20]Note que, na notação utilizada na cosmologia newtoniana, representamos a densidade de massa por $\rho$ e não por $\rho_0$.

quadráticos em $v$):

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a}\rho_0 v_i + p_{,i} + \rho \Phi_{,i} = 0, \tag{A.115}$$

que é igual à equação de Euler da cosmologia newtoniana (eq. 1.18), exceto pela ausência do termo $v_j \partial_j v_i$. Para obter a equação completa, não podemos simplesmente desprezar os termos quadráticos em $v$ para obter as equações (A.110) e (A.111). No entanto, considerar termos de qualquer potência em $v$ complicaria muito as equações (A.104) a (A.109). O que deve ser feito é um limite mais cuidadoso, colocando explicitamente as potências de $c$, de modo a manter os termos quadráticos que sejam relevantes para a evolução newtoniana, não-linear em $v$.

Dessa forma, a partir de perturbações genéricas sobre uma métrica de FLRW, obtemos as equações da cosmologia newtoniana. Isso fornece uma justificativa formal para a cosmologia newtoniana, partindo da relatividade geral e sem nenhum "truque" para tornar o campo gravitacional bem definido.

### A.5.3 Limite Newtoniano da Parte Elétrica do Tensor de Weyl

O fato das perturbações escalares e tensoriais serem determinados instantaneamente, torna o calibre de Poisson particularmente útil para cálculos numéricos. Mas isso significaria uma propagação infinita dos sinais? Não, e há um exemplo bem conhecido disso. No eletromagnetismo, no calibre de Coulomb, o potencial elétrico obedece à equação de Poisson, mas a evolução para o campo elétrico $E_i$ é causal. A analogia com o eletromagnetismo é discutida em detalhes em [3] e fica aparente quando introduzimos os campos "gravito-elétrico" $g_i$ e "gravito-magnético" $H_i$:

$$g_i := -\Psi_{,i} - \dot{W}_i\,, \qquad H_i = (\operatorname{rot} W)_i\,.$$

No limite de pequenas distâncias co-móveis comparadas com $|K|^{-1/2}$ e com o raio de Hubble $(\dot{a}/a)^{-1}$, e se a pressão anisotrópica não é relativística, os campos $g_i$ e $H_i$ obedecem a equações análogas às equações de Maxwell.

Bertschinger e Hamilton [219] calcularam as partes elétrica e magnética do tensor de Weyl no calibre de Poisson, para baixas velocidades e pequenas perturbações métricas. O resultado é

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\,D_{ij}(\Psi + \Phi) + \frac{1}{2}\,\dot{w}_{(i;j)} - \frac{1}{2}\,(\ddot{S}_{ij} + \nabla^2 S_{ij} - 2KS_{ij})\,,$$
$$H_{ij} = -\frac{1}{2}\,H_{(i;j)} + \epsilon_{kl(i}\dot{h}_{j);k}^{\ \ l}\,. \tag{A.116}$$

Isso significa que no limite newtoniano $H_{ij} = 0$ e $E_{ij} = \Phi_{,i,j} - 1/3\nabla^2\Phi$? Se por limite newtoniano entendemos $\Psi = \Phi$ e $W_i = 0 = S_{ij}$, a resposta é sim. Nesse caso, como vimos na seção A.2.3, a evolução seria local.

Seria surpreendente se isso ocorresse para condições iniciais genéricas no limite newtoniano. De fato, Bertschinger e Hamilton [219] e Kofman e Pogosyan [82] mostraram que a evolução do campo de maré no limite newtoniano não é local. A razão é que, enquanto podemos desprezar a perturbação vetorial $W_i$ no limite newtoniano, *o seu gradiente não pode ser desprezado.* Fazer isso violaria o vínculo (A.106), a menos que $\phi_f$ fosse nulo. No limite newtoniano, $E_{ij}$ será dado pelo campo de maré, e

$$H_{ij} = -\frac{1}{2}\,H_{(i;j)} - 2v_k\epsilon^{kl}{}_{(i}E_{j)l} + O(v/c)^2\,, \tag{A.117}$$

que é tomada como a definição de $H_{ij}$ nesse limite [219].

No limite newtoniano desprezamos a radiação gravitacional, mas é preciso incluir termos de primeira ordem na velocidade. Apesar da parte magnética do tensor de Weyl ser calculada incluindo a velocidade (eq. A.41), estamos calculando as suas componentes num calibre em que a trivelocidade não se anula. O segundo termo da (A.117) vem de calcular a equação (A.41) em primeira ordem em $v/c$ [219] e é análogo à transformação de Lorentz do campo elétrico no campo magnético. Os dois termos nessa expressão são da ordem de $G\rho v$ e não podem ser desprezados no limite newtoniano.

Na teoria de perturbação linear, para pequenas flutuações na matéria, os modos escalar, tensorial e vetorial evoluem de forma independente. Dessa forma, os modos vetoriais e tensoriais não produzem perturbações na densidade. Nesse limite, temos $H_{ij} = 0$. Já se queremos tratar flutuações não-lineares na densidade, estas induzem modos vetoriais e tensoriais e não podemos desprezar $H_{ij}$ na evolução de $E_{ij}$.

A conclusão é que, se utilizamos o campo gravitacional peculiar $\phi$ na cosmologia newtoniana, não precisamos nos preocupar com as perturbações vetoriais: a equação de Poisson é suficiente para determinar $\phi$. Já se queremos trabalhar diretamente com o campo de maré $E_{ij}$ e utilizar as equações quase-maxwellianas, é preciso considerar o limite newtoniano de $H_{ij}$. A evolução não é local, mas evidentemente podemos buscar *aproximações locais*, que são o assunto dos capítulos 2 e 3. Essas aproximações podem ser baseadas na equação de Poisson (seções 2.3.1, 2.3.2 e 2.73) ou na equação de evolução para $E_{ij}$ (seção 2.3.4).