relatividade geral e permitiria discriminar entre teorias alternativas da gravitação, como a NDL [32], por exemplo. As simulações de alta resolução permitirão entender a formação de galáxias a partir das flutuações primordiais.

Voltando às medidas dos parâmetros cosmológicos. Diz-se que, a partir da década passada, a cosmologia entrou na "era da precisão". Não apenas as barras de erro diminuíram de uma ordem de magnitude, mas também estimativas utilizando diferentes métodos estão convergindo. Um cálculo recente [33], utilizando dados da estrutura em grande escala e da radiação cósmica de fundo, leva aos seguintes valores para os parâmetros cosmológicos: $\Omega_M = 0.37^{+0.25}_{-0.15}$, $\Omega_\Lambda = 0.69^{+0.15}_{-0.20}$, $\Omega_\nu = 0.03^{+0.07}_{-0.03}$, $\Omega_b = 0.037^{+0.033}_{-0.018}$ e $H_0 = 71^{+22}_{-19} Km/s/Mpc$. As barras de erro ainda são bastante grandes, mas o cenário já parece estar bem definido. Esses valores estão em acordo com uma série de outras medidas independentes como: estatística de lentes gravitacionais, abundâncias de elementos leves, dados das supernovas do tipo Ia, idade do universo e oscilação de neutrinos.

De acordo com esses dados, estaríamos vivendo num universo plano, em que a contribuição da matéria que se aglomera é de uns 30% da densidade do universo. Dessa fração que gera estruturas, 82% é composto por CDM, 10% por matéria bariônica e 8% por neutrinos.

Mesmo se os parâmetros do modelo padrão já estivessem definitivamente determinados, ainda seria preciso entender pelo menos dois assuntos fundamentais: como foi o universo primordial, logo após o *Big-Bang* e como surgiram as estruturas em grande escala no universo. Nesta tese nos preocuparemos apenas com o segundo ponto, estudando um método aproximado que poderia ajudar a compreender e simular as estruturas em grandes escalas.

1.2 Cosmologia Newtoniana e Coordenadas Co-móveis

Nesta seção vamos introduzir as equações da cosmologia newtoniana partindo da própria mecânica de Newton. Como veremos a seguir, a teoria newtoniana não se aplica diretamente à cosmologia: é preciso estabelecer um procedimento para eliminar as inconsistências que surgem ao considerarmos uma distribuição infinita de matéria. Através desse procedimento chegaremos à formulação da cosmologia newtoniana em coordenadas comóveis, que nos permitirá estudar a formação de estruturas em grande escala. Em última instância, a justificativa para esse tratamento vem do limite newtoniano da relatividade geral, que fornece as mesmas equações a serem deduzidas nesta seção[10].

A cosmologia newtoniana é de fundamental importância para estudar a formação de estruturas em grandes escalas. No regime não-linear, apenas um tratamento newtoniano é factível, portanto quase todas as simulações computacionais e aproximações analíticas são feitas com base na cosmologia newtoniana. Além disso, o limite newtoniano é uma ótima aproximação para a dinâmica das estruturas em grande escala. Para pequenas flutuações é possível fazer um tratamento relativístico, mas a análise newtoniana é muito mais simples e ajudará a compreender fisicamente o início da formação das estruturas (seção 1.3).

Para determinar as forças gravitacionais, devemos calcular o potencial gravitacional ϕ, que é obtido pela solução da equação de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\vec{r}, t).$$

No entanto, essa equação apenas não é suficiente par determinar ϕ: precisamos fornecer *condições de fronteira*. Num universo ilimitado, não há um critério para definir essas condições, e portanto não temos como calcular ϕ a priori. Assim, as equações da mecânica, junto com a equação de Poisson, não são suficientes para determinar a solução do problema cosmológico.

Essa ambigüidade na teoria newtoniana aparece somente no estudo de um espaço infinito preenchido de matéria. Em problemas nos quais a densidade cai suficientemente rápido no infinito, podemos utilizar a condição $\phi \longrightarrow 0$ para $r \longrightarrow \infty$. Essa condição,

[10]Veja o apêndice 1, seção A.5.

juntamente com a equação de Poisson, permite determinar o potencial ϕ completamente:

$$\phi(\vec{r}, t) = -G \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'.$$

Se insistirmos em utilizar essa expressão quando ρ não decai para $r \to \infty$, então ϕ diverge. A impossibilidade de se obter uma cosmologia puramente newtoniana é atribuída por muitos autores à divergência de ϕ. No entanto, as quantidades observáveis são as derivadas segundas $\partial\phi/\partial r_i \partial r_j$, que determinam a aceleração relativa de partículas vizinhas. Elas ficam indefinidas devido à divergência do potencial, ou melhor, pela falta de condições de fronteira apropriadas.

Qual seria o valor do campo gravitacional $\vec{g}$ num meio infinito e homogêneo? Se consideramos primeiro o campo dentro de uma esfera finita de raio R temos, pelo teorema de Gauss, $\vec{g} = -(4\pi/3)G\rho\vec{r}$ (para $r < R$). Esse resultado não muda para $R \to \infty$ e logo seríamos tentados a concluir que o campo está bem definido em qualquer r finito. Suponha agora que estejamos no interior de um esferóide de excentricidade $e > 0$. Nesse caso o campo gravitacional não é radial. A única diferença está na casca entre o esferóide e a esfera nele circunscrita, no entanto o campo muda em todos os pontos (exceto em $r = 0$). Temos um exemplo explícito em que o campo gravitacional depende das condições de contorno no infinito. Outro problema é que, mesmo num espaço homogêneo o campo dependeria fortemente da posição e da origem do sistema de coordenadas.

Vamos ver agora um modo de evitar esses problemas que nos permite *construir* uma cosmologia newtoniana. Dessa forma, as condições de contorno no infinito já estarão "embutidas" nas equações de movimento.

As observações de objetos distantes mostram que o universo está se expandindo. Se a expansão fosse perfeitamente uniforme, as separações entre objetos co-móveis com a expansão cósmica mudariam com o mesmo fator de escala $a(t)$. Na verdade sabemos que ela não é uniforme, mas podemos fatorar a expansão média. É nesse processo que desaparecerá a indeterminação de $\vec{g}$.

Definimos *coordenadas co-móveis* $\vec{x}$ pela relação[11]

$$\vec{x} := \frac{\vec{r}}{a(t)} \tag{1.2}$$

e *o tempo conforme* τ por[12]

$$d\tau := \frac{dt}{a(t)}. \tag{1.3}$$

Para uma expansão perfeitamente uniforme os vetores posição co-móveis $\vec{x}$ permanecem fixos para todas as partículas. No caso de uma expansão perturbada, cada partícula segue uma trajetória $\vec{x}(\tau)$. A velocidade em coordenadas co-móveis, conhecida como velocidade peculiar é definida por

$$\vec{v} := \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{1}{a}\frac{d\vec{r}}{d\tau} - \frac{da/d\tau}{a^2}\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} - H\vec{r}. \tag{1.4}$$

O parâmetro de Hubble é definido por

$$H(t) := \frac{1}{a^2}\frac{da}{d\tau} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt}.$$

Note que $\vec{v}$ é a velocidade medida por um observador cuja coordenada co-móvel é fixa (para esse observador, $\vec{r} = a\,\vec{x}$ e portanto a sua velocidade é dada por $(da/dt)\,(1/a)\,\vec{r} = H\vec{r}$).

Como sempre podemos multiplicar o fator de escala a por uma constante, é melhor trabalhar com quantidades que são invariantes com relação a essa mudança, estas serão chamadas de quantidades *próprias*. Assim H e $v_i = dx_i/d\tau = (adr_i)\,/\,(adt)$ são quantidades próprias, enquanto dx_i/dt não é. Por isso utilizamos τ em vez de t como variável independente.

Para deduzir as leis que governam a expansão média, consideraremos uma distribuição

[11] As coordenadas cartesianas usuais de uma partícula ou elemento de volume serão denotadas por r_i.

[12] A variável t, conhecida como tempo cosmológico, é o tempo próprio medido por um observador co-móvel com a expansão média.

esfericamente simétrica e uniforme com densidade $\bar{\rho}$. Para que a homogeneidade seja mantida, é preciso que todas as escalas se alterem por igual. Dessa forma a trajetória de um elemento de volume de massa m será dada por $r(t) = a(t)x$ com x fixo (diferentes valores de x denotam elementos de diferentes cascas esféricas). A equação de conservação da energia para esse elemento de volume é

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GMm}{r} = E,$$

onde M é a massa contida numa esfera de raio r. Logo

$$\frac{\left(\frac{da}{dt}x\right)^2}{2} - G\frac{\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}\,(ax)^3}{ax} = \frac{E}{m}.$$

(Note que cada casca pode ter uma energia total diferente $E(x)$. Ela é fixada pelas condições iniciais). Assim, obtemos

$$(aH)^2 = \frac{8\pi G}{3}\bar{\rho}a^2 - K, \tag{1.5}$$

onde $K = -2E/mx^2$. Essa equação é conhecida como equação de Friedmann. Para termos uma expansão homogênea, a função $a\,(\tau)$ deve ser a mesma para todos os elementos de volume, logo devemos ter $K = const.$ A equação de Friedmann que acabamos de deduzir é *idêntica* àquela obtida utilizando a relatividade geral (eq. A.65). Na relatividade geral pode-se mostrar que K está relacionado à curvatura do espaço (ou seja, das hipersuperfícies com τ constante).

Em termos do parâmetro cosmológico de densidade $\Omega := 8\pi G\rho/(3H^2)$, a equação (1.5) pode ser escrita como

$$K = (\Omega - 1)(aH)^2. \tag{1.6}$$

Vemos que a curvatura é nula se $\Omega = 1$, o que ocorre se a densidade é igual à densidade crítica $\rho_c := 3H^2/\,(8\pi G)$. No caso de termos diversas componentes com densidades ρ_i o parâmetro Ω é a soma das contribuições de cada componente: $\Omega = \sum_i \Omega_i = \sum_i 8\pi G\rho_i/(3H^2)$.

Para resolver a equação de Friedmann ainda é preciso obter uma relação do tipo $\bar{\rho} = \bar{\rho}\,(a\,(\tau))$. Consideremos um elemento de volume V formado por um dado conjunto de partículas, e cuja densidade é $\bar{\rho}$. A conservação da massa implica em $\bar{\rho}V = m = const.$ No caso da expansão uniforme, uma esfera de raio $r(t) = xa(t)$ terá sempre as mesmas partículas, assim $\bar{\rho}\,(4\pi/3)\,(ax)^3 = const.$ ou seja

$$\bar{\rho} \propto a^{-3}. \tag{1.7}$$

Substituindo essa expressão na eq. (1.5) obtemos uma equação diferencial de 1^a ordem no tempo para o fator de escala $a(t)$ [ou $a(\tau)$]

$$\left(\frac{1}{a}\frac{da}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G\bar{\rho}_i a_i^{-3}}{3}\frac{1}{a} - K, \tag{1.8}$$

onde $\bar{\rho}_i$ e a_i são os valores de $\bar{\rho}$ e a num tempo t_i dado. Essa equação pode ser integrada para vários valores de K. Os diversos valores dessa constante determinam o comportamento assintótico do fator de escala.

Um caso importante é o universo de Einstein-de Sitter, que consiste em escolher $K = 0$ (ou seja, $\Omega = 1$). Nessa situação a equação de Friedmann (1.8) possui uma solução analítica simples:

$$a(\tau) = \left(\frac{\tau - \tau_0}{\tau_i}\right)^2, \tag{1.9}$$

onde $\tau_i^2 = 3/\left(2\pi G\bar{\rho}_i a_i^{-3}\right)$. De agora em diante escolheremos o intante $\tau_0 = 0$, que corresponde ao *Big-Bang*. Note que sempre é possível redefinir a_i, de modo que $a\,(\tau)$ é determinado a menos de uma constante. O importante é o comportamento temporal $a \propto \tau^2$. No universo de Einstein-de Sitter a conversão para o tempo usual t, chamado de tempo cosmológico, fica fácil: $t = \int a(\tau)d\tau$ o que leva a $\tau \propto t^{1/3}$. Dessa forma, temos

$a \propto t^{2/3}$.

Note que a (1.7) só é válida para matéria não-relativística, para a qual não há variação da massa de repouso. É possível estender esse tratamento considerando fluidos relativísticos (veja a seção A.3), ou mesmo misturas de fluidos.

Quando $a \longrightarrow 0$, os dois primeiros termos da equação (1.5) divergem. Dessa forma, para pequenos valores de a, a curvatura não é importante. As primeiras medidas do parâmetro de Hubble já indicavam que a curvatura deveria pequena *hoje*, de modo que o primeiro termo do lado direito da (1.5) domina sobre o segundo. Dessa forma, quando as primeiras estruturas foram formadas o termo de curvatura era totalmente desprezível. Assim que o universo passa a ser dominado pela matéria, de modo que a (1.7) é válida, o fator de escala a é dado pela solução de Einstein-de Sitter. A equação (1.5) não inclui o termo cosmológico, mas como vimos na seção (1.1.3) ele também é desprezível para pequenos valores de a. Desse modo, mesmo num universo em que $\Omega \neq 1$ e $K \neq 0$, a solução de Einstein-de Sitter, representa bem o comportamento do fator de escala para $a \ll 1$, em particular, no início da formação de estruturas.

Derivando a (1.8) em relação a τ e usando a (1.7) obtemos[13]:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\bar{\rho}_i a_i^3}{a} = -\frac{4\pi G}{3}a^2\bar{\rho}. \tag{1.10}$$

Agora estamos prontos para descrever o movimento de um meio não uniforme num universo em expansão. A distribuição de massa pode ser escrita como:

$$\rho(\vec{x},\tau) = \bar{\rho}(\tau) + \delta\rho(\vec{x},\tau),$$

onde $\bar{\rho}$ é a densidade média: $\bar{\rho} = (1/V)\int_V \rho(\vec{x},\tau)d^3x$, se V é um volume "representativo" do universo. Aí entra explicitamente a hipótese do universo ser homogêneo - em média - a partir de uma certa escala (senão a integral não converge, e $\bar{\rho}$ não é bem definido). Esse tratamento não seria válido num universo com estrutura fractal ilimitada, mas é

[13]A partir deste capítulo utilizaremos a notação $\dot{} \equiv \partial/\partial\tau$.

perfeitamente aplicável se a distribuição de matéria é fractal até uma dada escala.

Vamos partir da equação de Newton

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} = -G\int \rho \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r',$$

e transformá-la para coordenadas co-móveis e tempo conforme. Usando a (1.4) e a (1.3), obtemos

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{a}\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} + \vec{x}\frac{1}{a}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{\dot{a}}{a^2}\frac{d\vec{x}}{d\tau}.$$

Assim, a equação de movimento fica

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} + \vec{x}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \frac{\dot{a}}{a}\frac{d\vec{x}}{d\tau} = -Ga^2\int (\bar{\rho}(\tau) + \delta\rho(\vec{x},\tau))\,\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} d^3x'.$$

Agora podemos eliminar os termos que aparecem num universo homogêneo da seguinte forma. O primeiro termo do lado direito é o campo gerado por uma distribuição uniforme de matéria (multiplicado por a). Se supomos que o universo é (em média) esfericamente simétrico a grandes distâncias, esse termo dá $-(4\pi/3)Ga^2\bar{\rho}\,\vec{x}$. É aqui que as condições de contorno no infinito são usadas explicitamente. Usando a (1.10), vemos que os termos proporcionais a $\vec{x}$ se cancelam, de modo que a equação de movimento fica[14]

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{d\vec{x}}{d\tau} = -Ga^2\int \delta\rho(\vec{x}',\tau)\frac{(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\, d^3x' = -\vec{\nabla}_x\tilde{\phi}\ , \tag{1.11}$$

[14]Se $\bar{\rho}$ inclui matéria relativística, tanto o campo gravitacional como o comportamento de $a(\tau)$ mudam. Os termos homogêneos também se cancelam nesse caso, mas a sua justificativa requer a relatividade geral, ou sua extensão newtoniana (sec. A.3).

onde

$$\tilde{\phi}(\vec{x},\tau) := -Ga^2 \int \frac{\delta\rho(\vec{x}',\tau)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x'. \tag{1.12}$$

Note que $\tilde{\phi}$ é uma quantidade própria: $a^2 d^3x'/|\vec{x}-\vec{x}'| \sim d^3r/|\vec{r}-\vec{r}'|$.

Como $\int_V \delta\rho\, d^3x \to 0$ em grandes escalas, $\tilde{\phi}$ é finito e bem definido (exceto sobre massas pontuais, que ignoramos ao tratar o campo de densidade como contínuo). Não há mais ambigüidade na equação de movimento para $\vec{x}(\tau)$. O campo $\tilde{\phi}$ não varia muito com a origem do sistema de coordenadas, já que a contribuição da distribuição de matéria distante é pequena; o que resolve mais um paradoxo da cosmologia newtoniana. Concluímos que $\tilde{\phi}$, chamado de *potencial gravitacional peculiar*, é o potencial apropriado para a cosmologia newtoniana, desde que trabalhemos em coordenadas co-móveis. Esse tratamento é válido mesmo em regiões altamente heterogêneas, já que em nenhum momento foi preciso supor que $\delta\rho \ll \bar{\rho}$. O procedimento efetuado nesta seção serve apenas para eliminar o problema das condições de contorno no infinito.

Em resumo, as equações de movimento ficam:

$$\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{d\vec{x}}{d\tau} = -\vec{\nabla}_x\tilde{\phi}, \qquad \nabla_x^2\tilde{\phi} = 4\pi G a^2 \delta\rho(x_i,\tau) \tag{1.13}$$

As mesmas equações saem do limite de campos fracos ($|\phi| \ll c^2$) e baixas velocidades ($v^2 \ll c^2$) da relatividade geral para um espaço-tempo de Robertson-Walker perturbado. Localmente, a descrição da relatividade geral num universo de Friedmann-Lemaître perturbado é equivalente à cosmologia newtoniana, com a condição de fronteira de que a distribuição de massa é homogênea e isotrópica no infinito. O tratamento da cosmologia newtoniana requer que o espaço seja euclidiano, o que é uma ótima aproximação; exceto próximo a objetos compactos (como buracos negros), e eventualmente, em escalas da ordem da distância de Hubble c/H.

Observação: Há várias maneiras de se eliminar a indeterminação em $\partial\phi/\partial r_i \partial r_j$.

que foi discutida no início desta seção. Um método consiste no exame preliminar de um corpo finito, seguido da transição para um corpo infinito. Foi esse o método utilizado nesta seção para uma distribuição de matéria esférica. O mesmo procedimento pode, por exemplo, ser aplicado a um elipsóide homogêneo. Ao investigar o caso de um elipsóide finito, vemos que é possível acrescentar infinitas camadas sem alterar a sua evolução temporal, nem o campo gravitacional em seu interior (veja a seção 3.3.1). Assim podemos produzir um universo infinito com as propriedades das condições de fronteira do elipsóide. O resultado seria portanto diferente do obtido nesta seção, que está em acordo com os dados observacionais e com o limite newtoniano de um universo de Friedmann-Lamaître perturbado (veja a seção A.5). Dessa forma, vemos que não é possível introduzir uma cosmologia puramente newtoniana de forma unívoca.

Uma outra forma de se obter a cosmologia newtoniana é estudar o desvio geodésico num universo homogêneo, através da formulação da gravitação newtoniana na linguagem do espaço curvo [34, 35]. No entanto, essa abordagem é muito mais complicada, pois utiliza o aparato matemático da geometria diferencial. Além disso ela não leva imediatamente às equações newtonianas para um universo heterogêneo.

1.3 O Crescimento Linear das Estruturas

Nesta seção introduziremos as equações de fluido da cosmologia newtoniana e estudaremos o seu comportamento para pequenas flutuações de um universo homogêneo. Mostraremos como funciona o mecanismo de crescimento das estruturas no regime linear, introduziremos o comprimento de Jeans e veremos como surgem as oscilações acústicas num fluido com colisões. Também discutiremos como aparecem os modos adiabáticos e isentrópicos e mostraremos a importância da matéria escura para a formação de estruturas. Apresentaremos algumas relações válidas no regime linear que servem de motivação para a introdução de várias aproximações não-lineares.

Lembramos que as equações deste capítulo só serão válidas para flutuações com dimensões menores que o raio de Hubble. Além disso, só poderemos estudar as perturbações na componente não relativística, na era dominada pela matéria. Com essas restrições, os resultados newtonianos são idênticos aos da teoria de perturbação relativística[15].

1.3.1 Equações Cosmológicas de Fluidos

Um fluido é um conjunto de partículas tratado como um contínuo. Em cosmologia lidamos com dois tipos de fluido: Se as colisões entre as partículas são suficientemente rápidas para estabelecer um equilíbrio térmico local (ou seja uma distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann), o fluido é um gás. Se não há colisões temos um gás de matéria escura. As equações de fluido discutidas nesta seção aplicam-se a gases com colisões, ou à matéria escura antes da interseção das trajetórias. Vamos lidar com um gás não relativístico e ignorar forças elétricas e magnéticas.

As equações de fluido vêm das leis de conservação da massa e do momentum e das equações de estado. A conservação da massa é representada pela *equação de continuidade*. Nas coordenadas $(\vec{r}, t)$ ela é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\mathrm{v}}) = 0 \ , \quad \vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} \ . \tag{1.14}$$

Como na seção anterior, reescrevemos a densidade e a velocidade fatorando o comportamento médio:

$$\rho = \bar{\rho}(1 + \delta) \ , \tag{1.15}$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = H\vec{r} + \vec{v} \tag{1.16}$$

onde $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$ e $\vec{v} = d\vec{x}/d\tau$ é a velocidade peculiar. Transformando a equação de continuidade (1.14) para coordenadas co-móveis e tempo conforme (eqs. 1.2 e 1.3),

[15] Ainda é possível estudar as perturbações na componente relativística com equações muito semelhantes às newtonianas. Basta fazer uma pequena modificação nessas equações para incluir os efeitos inerciais e gravitacionais da pressão. Veja uma discussão no apêndice 1, seção A.3.

ontemos

$$\frac{\partial\delta}{\partial\tau} + \vec{\nabla}_x \cdot [(1+\delta)\vec{v}] = 0 \ . \tag{1.17}$$

A conservação do momentum é representada pela *equação de Euler*

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p. \tag{1.18}$$

Escrevendo essa equação em coordenadas co-móveis e notando que $d/dt = (1/a)d/d\tau$, obtemos

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(H\vec{r} + \vec{v}) = \frac{\vec{x}}{a}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) + \vec{v}\frac{\dot{a}}{a^2} + \frac{1}{a}\frac{d\vec{v}}{d\tau}.$$

Como vimos na seção 1.2, o campo gravitacional é

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}_r\phi = -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}\, a\vec{x} - \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x\tilde{\phi}. \tag{1.19}$$

Ao substituirmos estes resultados na (1.18) notamos que os termos proporcionais a $\vec{x}$ se cancelam (pela 1.10). Assim, obtemos finalmente:

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p, \tag{1.20}$$

com as derivadas sendo calculadas no sistema co-móvel, e ϕ representando o potencial peculiar (a partir de agora não colocaremos mais o til, nem o símbolo x na derivada).

Para fechar as equações de fluido ainda é necessária uma equação de evolução para a pressão, ou para outra variável termodinâmica, como por exemplo a entropia. Para um gás com colisões temos uma *equação de estado* $p = p(\rho, S)$ onde S é a entropia específica. Num um gás monoatômico ideal não-relativístico, em processos reversíveis temos,

$$TdS = d\left(\frac{3}{2}\frac{p}{\rho}\right) + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \ . \tag{1.21}$$

Os principais efeitos da pressão do gás podem ser extraídos da teoria de perturbação linear. Nela linearizamos as equações de fluido em torno da solução uniforme. Essa técnica é útil para analisar a instabilidade gravitacional e outras instabilidades. As equações de fluido linearizadas proporcionam uma descrição razoável das flutuações na matéria (escura e luminosa) de pequena amplitude e grande escala, mesmo se a estrutura é não-linear em escalas menores. Essa é uma suposição usual na teoria das estruturas em grandes escalas. Ela é sustentada razoavelmente pelas simulações numéricas.

Consideraremos que δ e $\vec{v}$ são pequenos ($\mathcal{O}_{(\varepsilon)}$) e desprezaremos termos de segunda ordem ($\mathcal{O}_{(\varepsilon^2)}$). Linearizando as equações de continuidade e de Euler temos

$$\dot{\delta} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \approx 0 \,, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} \approx -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{\bar{\rho}}\vec{\nabla}p \tag{1.22}$$

A pressão pode ser obtida da equação de estado $p = p(\rho, S)$. Para um gás monoatômico ideal não-relativístico, utilizando a (1.21)

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = c_{\mathrm{s}}^2\vec{\nabla}\delta + \frac{2}{3}T\vec{\nabla}S \,, \quad c_{\mathrm{s}}^2 := \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{5}{3}\frac{p}{\rho} \,. \tag{1.23}$$

Como estamos lidando com pequenas perturbações de um universo homogêneo, podemos escrever a temperatura e a entropia como: $T(\vec{x},\tau) = \bar{T}(\tau) + \delta T(\vec{x},\tau)$ e $S(\vec{x},\tau) = \bar{S}(\tau) + \delta S(\vec{x},\tau)$. O lado direito da (1.23) fica, em 1^a ordem: $(2/3)\bar{T}\nabla^2(\delta S)$, no restante desta discussão ficará subentendido que nos referimos a $\bar{T}$ (não faz diferença se escrevemos δS ou S no laplaciano).

Se a escala de tempo para variações da entropia é longa comparada com as escalas de tempo acústicas ou gravitacionais, teremos $dS/d\tau \approx 0$. Na teoria de perturbação linear, essa condição implica em $\dot{S} \approx 0$. Há cinco variáveis do fluido (ρ, S e três componentes de $\vec{v}$), e portanto há cinco modos linearmente independentes. A perturbação linear geral é uma combinação desses modos, que estudaremos agora.

1.3.2 Flutuações Isentrópicas e o Critério de Jeans

Vamos estudar primeiramente o comportamento de *flutuações isentrópicas*, para as quais não há gradientes de entropia entre elementos vizinhos. Esse tipo de perturbação seria o produto natural das flutuações quânticas durante a inflação seguida pelo reaquecimento [3]. As interações rápidas entre partículas em equilíbrio térmico eliminariam os gradientes de entropia. Se $\vec{\nabla}S = 0$, as equações linearizadas do fluido e do campo gravitacional (1.22), (1.23) e (1.13) são

$$\dot{\delta} + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \ , \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v} = -\vec{\nabla}\phi - c_{\mathrm{s}}^2 \vec{\nabla}\delta \ , \quad \nabla^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \ . \tag{1.24}$$

Aplicando o operador $\vec{\nabla}$ na equação de Euler e combinando com as duas restantes, obtemos uma equação de onda acústica forçada e amortecida para δ:

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta + c_{\mathrm{s}}^2 \nabla^2 \delta \ . \tag{1.25}$$

Exceto pelo amortecimento de Hubble (segundo termo) e pelo termo gravitacional, essa equação é idêntica à que obteríamos para ondas de som num meio estático.

Para eliminar o laplaciano aplicamos a transformada de Fourier na equação de onda. A equação para o modo $\vec{k}$ fica:

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = \left(4\pi G \bar{\rho} a^2 - k^2 c_{\mathrm{s}}^2\right)\delta \equiv \left(k_{\mathrm{J}}^2 - k^2\right) c_{\mathrm{s}}^2 \delta \ , \tag{1.26}$$

onde definimos o numero de onda de Jeans co-móvel

$$k_{\mathrm{J}} := \left(\frac{4\pi G \bar{\rho} a^2}{c_{\mathrm{s}}^2}\right)^{1/2} . \tag{1.27}$$

Note que a dependência de δ em $\vec{k}$ se dá apenas em termos de $k = \left|\vec{k}\right|$, o que é uma conseqüência de isotropia do espaço.

Desprezando o amortecimento de Hubble (colocando $a = 1$), a dependência temporal da solução da equação (1.26) seria $\delta \propto \exp(-i\omega\tau)$, com

$$\omega^2 = -\omega_J^2 + k^2 c_s^2 \,, \qquad \omega_J = k_J c_s = (4\pi G\bar{\rho})^{1/2}. \tag{1.28}$$

onde ω_J é a freqüência de Jeans. Modos gravitacionais com $k < k_J$ são *instáveis* ($\omega^2 < 0$), como foi observado por Jeans em 1902. Fisicamente, as forças de pressão não podem evitar o colapso gravitacional quando o tempo para o som atravessar o corpo λ/c_s é maior que o tempo de queda livre $(G\rho)^{-1/2}$ para uma perturbação de tamanho $\lambda = 2\pi a/k$.

O comprimento de Jeans (co-móvel) é definido por $\lambda_J := 2\pi/k_J$. Para perturbações muito maiores que esse comprimento ($k \ll k_J$) a evolução se comporta como num fluido sem colisões, isto é, a pressão é desprezível.

Incluindo o amortecimento, a instabilidade de Jeans passa a ter um comportamento em lei de potência no tempo, em vez de exponencial, para $k \ll k_J$. Em geral há uma solução crescente e outra decrescente para $\delta(k,\tau)$; elas serão denotadas por $\delta_\pm(k,\tau)$.

Para um fluido não relativístico sem colisões, como a matéria escura fria a expressão (1.25) fica

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta. \tag{1.29}$$

Essa equação também é válida num fluido com $p \neq 0$ para modos com $k \ll k_J$.

Num fundo de Einstein-de Sitter ($\Omega = 1$, matéria não relativística), a equação de Friedmann (1.5) fica $4\pi G\bar{\rho}a^2 = (3/2)(\dot{a}^2/a^2)$, cuja solução é dada por $a(\tau) = (\tau/\tau_0)^2$ (eq. 1.9). Dessa forma o termo $4\pi G\bar{\rho}a^2$ fica igual a $6/\tau^2$ e a equação (1.29) pode ser escrita como

$$\ddot{\delta} + \frac{2}{\tau}\dot{\delta} = \frac{6}{\tau^2}\delta \,.$$

As soluções dessa equação são

$$\delta_+ \propto \tau^2 \propto a \quad \text{e} \quad \delta_- \propto \tau^{-3}, \tag{1.30}$$

que são chamados de modos crescente e decrescente, respectivamente

Para $\Omega \neq 1$, a equação (1.29) também possui modos crescentes e decrescentes, que podem ser calculados a partir do fator de escala $a(\tau)$.

Vamos ver agora o papel da pressão na evolução das estruturas. Estudaremos um caso particular que permite obter uma solução analítica simples e que ilustra o comportamento geral para $c_s^2 \neq 0$.

Suporemos que, depois de recombinação, a temperatura dos bárions é da ordem da temperatura dos fótons ($T_\gamma \approx T_{gas}$). Esta é uma aproximação razoável, já que a ionização residual acopla termicamente os dois fluidos por um longo período, mesmo havendo uma transferência de momentum desprezível. Num gás de fótons $\rho_\gamma \propto T_\gamma^4$ além disso temos que $\rho_\gamma \propto a^{-4}$ (veja a seção 1.1.3) logo $T_\gamma \propto a^{-1}$. Para um gás ideal $p/\rho \propto T_{gas}$. Assim $c_s^2 = c_{0s}^2 a^{-1}$ onde c_{0s} é constante. Num universo de Einstein-de Sitter a eq. (1.26) fica:

$$\ddot{\delta} + \frac{2}{\tau}\dot{\delta} = \left(6 - k^2 c_{0s}^2 \tau_0^2\right) \frac{\delta}{\tau^2}.$$

As soluções dessa equação são potências de τ:

$$\delta_\pm(k,\tau) \propto \tau^n \ , \quad n = \frac{-1 \pm \sqrt{25 - 4(kc_{0s}\tau_0)^2}}{2}. \tag{1.31}$$

Note que, neste caso, $c_{0s}\tau_0 = c_s\tau$. Em situações mais genéricas, as soluções dependem de τ e $c_s\tau$ mesmo que este último não seja constante[16]. Para $kc_{s0}\tau_0 < \sqrt{6} \simeq 2.45$, há soluções crescentes e decrescentes. Para $kc_{s0}\tau_0 > 5/2$ temos oscilações amortecidas (pois $n^2 < 0$ e $\mathrm{Re}(n) < 0$). Note que o número de onda crítico $k_{cr} = (5/2)(1/c_{s0}\tau_0)$ é muito

[16] Por exemplo, quando a velocidade do som é constante, num universo de Einstein-de Sitter, a solução da (1.26) é [6]: $\delta_+(k,\tau) \propto j_2(kc_s\tau)$, $\delta_-(k,\tau) \propto y_2(kc_s\tau)$, onde j_2 e y_2 são as funções eféricas de Bessel (no entanto essa solução não é realista).

próximo do número de onda de Jeans k_J (1.27):

$$k_J = \sqrt{6}\frac{1}{c_{s0}\tau_0} \cong 0.98\, k_{cr}.$$

No limite $k \ll k_J$ a solução (1.31) fica igual ao resultado (1.30). As soluções oscilatórias para $k \gg k_J$ são ondas sonoras. Nesse limite, a (1.31) fica $\delta_\pm \propto \tau^{-1/2}\exp(\pm ikc_{s0}\tau_0\ln(\tau))$, o que leva, para uma onda plana, a $\delta_\pm(x,\tau) \propto \tau^{-1/2}\exp(ik\,x \pm ikc_{s0}\tau_0\ln(\tau))$. Para determinar a velocidade da onda, devemos calcular $dx/d\tau$ tal que a fase seja constante. Assim a velocidade instantânea da onda é dada por $d/d\tau(kc_{s0}\tau_0\ln(\tau)/k) = c_s$, que coincide com a velocidade do som no meio.

Esse comportamento se repete em situações mais genéricas, obtendo-se *oscilações acústicas* para $k \gg k_J$. Essas oscilações suprimem o crescimento para pequenos comprimentos de onda. No limite $k \ll k_J$ (grandes comprimentos de onda) o comportamento fica igual ao da poeira, e $\delta_\pm$ não depende de k (como podemos ver a partir das eqs. 1.26 e 1.27).

Num universo estático a amplitude acústica para uma onda plana adiabática fica constante. Já num universo em expansão, ela é geralmente amortecida (como no exemplo acima). Uma exceção importante consiste nas oscilações no fluido de bárions e fótons na era dominada pela radiação, na qual a amplitude dessas oscilações permanece constante. Para mostrar isso é preciso generalizar as equações de fluido para um gás relativístico, o que pode ser feito utilizando os resultados da seção A.3.

Como a (1.26) é uma equação diferencial linear, as duas soluções $\delta_+(k,\tau)$ e $\delta_-(k,\tau)$ são obtidas a menos de constantes multiplicativas $A_\pm\left(\vec{k}\right)$. Essas constantes são determinadas pelas condições iniciais para cada k. A determinação de $\delta(k,\tau_i)$ em um dado tempo inicial τ_i é um problema fundamental em cosmologia. Uma teoria completa da formação de estruturas deve especificar essa função a partir de considerações físicas. No apêndice B apresentamos uma discussão sobre a distribuição estatística de $\delta(k)$.

A solução geral para $\delta(\vec{x},\tau)$ é:

$$\delta(\vec{x},\tau) = \int A_+\left(\vec{k}\right)\delta_+(k,\tau)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d^3k + \int A_-\left(\vec{k}\right)\delta_-(k,\tau)\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}d^3k \tag{1.32}$$

Se $k \ll k_{\rm J}$, δ_- decai rapidamente, de forma que só os modos crescentes sobrevivem. Para poeira, a evolução de δ não depende de k. Mantendo apenas os modos crescentes vemos que $\delta(\vec{x},\tau)$ mantém a sua forma e é apenas multiplicado por $\delta_+(\tau)$.

Evolução do potencial gravitacional

É interessante escrever a equação de onda linear em termos de ϕ, em vez de δ. Para isso, usamos a transformada de Fourier na equação de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G a^2\bar{\rho}\delta$, obtendo

$$\phi(\vec{k},\tau) = -\frac{4\pi G}{k^2}a^2\bar{\rho}\delta(\vec{k},\tau) \propto a^{-1}\delta\,. \tag{1.33}$$

Note que, para modos crescentes num universo de Einstein-de Sitter, no regime linear, temos $\phi = const.$ Essa propriedade, sendo extrapolada para o regime não-linear, dá origem à aproximação do potencial congelado [36, 37].

Substituindo a expressão (1.33) na equação (1.26) e utilizando equação de Friedmann (1.5), obtemos:

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3}{2}K\right)\phi + k^2c_s^2\phi = 0. \tag{1.34}$$

Utilizando novamente e equação de Friedmann, em conjunto com a (1.10) podemos mostrar que $\ddot{a}/a - (1/2)\dot{a}^2/a^2 = -(1/2)K$. Assim a (1.34) fica

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \left(k^2c_s^2 - 2K\right)\phi = 0\,. \tag{1.35}$$

Quando escrita em termos do potencial gravitacional, em vez do contraste de densidade, a equação de onda perde seu termo de fonte gravitacional.

As soluções da eq. (1.35) dependem do comportamento temporal da velocidade do som, assim como da cosmologia de fundo. Para termos uma idéia, vamos considerar a evolução do potencial num universo de Einstein-de Sitter composto de um gás ideal. Usando a aproximação $c_s^2 = c_{0s}^2 a^{-1}$ a eq. (1.35) fica:

$$\ddot{\phi} + \frac{6}{\tau}\dot{\phi} + (kc_{0s}\tau_0)^2 \frac{\phi}{\tau^2} = 0$$

As soluções dessa equação são[17]:

$$\phi_{\pm}(k,\tau) \propto \tau^m \ , \quad m = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(kc_{0s}\tau_0)^2}}{2} \ . \tag{1.36}$$

Nessa solução, modos crescentes de grandes comprimentos de onda ($kc_s\tau \ll 1$) têm potencial correspondente $\phi_+ = const.$, enquanto os modos decrescentes têm $\phi_- \propto \tau^{-5} \propto \int a^{-3}d\tau$. Esse comportamento se repete para qualquer equação de estado usual num universo de Einstein-de Sitter. As perturbações na densidade e no potencial diferem por um fator $\bar{\rho}a^2 \propto a^{-1}$ (1.33). Se $K < 0$ ou $k^2c_s^2 > 0$, então ϕ_+ decai com o tempo, embora δ_+ continue crescendo.

Perturbações na matéria escura e na matéria bariônica

A equação (1.26) pode ser generalizada para várias componentes da matéria. Nesse caso, o termo gravitacional contém as contribuições de todas as componentes e a equação fica

$$\ddot{\delta}_A + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_A + k^2c_s^2\delta_A = 4\pi G a^2 \sum_B \bar{\rho}_B\delta_B,$$

onde $\delta_B := (\rho_B - \bar{\rho}_B)/\bar{\rho}_B$ [18].

Um exemplo importante é o sistema bárions + matéria escura logo após o desacopla-

[17] Esse resultado poderia ser obtido substituindo a (1.31) na (1.33).

[18] De modo que $\sum_B \bar{\rho}_B\delta_B = \sum_B (\rho_B - \bar{\rho}_B) = \rho_{\rm tot} - \bar{\rho}_{\rm tot} = \bar{\rho}_{\rm tot}\delta_{\rm tot}$.

mento. Para $k \ll k_J$ a evolução será governada pelo sistema de equações

$$\ddot{\delta}_{ME} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_{ME} = 4\pi G a^2 \left(\bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_{ME}\delta_{ME}\right) \simeq 4\pi G a^2 \bar{\rho}_{ME}\delta_{ME}, \tag{1.37}$$

$$\ddot{\delta}_b + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_b = 4\pi G a^2 \left(\bar{\rho}_b \delta_b + \bar{\rho}_{ME}\delta_{ME}\right) \simeq 4\pi G a^2 \bar{\rho}_{ME}\delta_{ME}. \tag{1.38}$$

Antes do desacoplamento as flutuações na componente bariônica não evoluem, pois ela está em forte interação com a radiação. Já as perturbações na matéria escura podem evoluir livremente na era dominada pela matéria ($\tau > \tau_{\text{eq}}$). Por isso, logo após o desacoplamento, temos $\bar{\rho}_{ME}\delta_{ME} \gg \bar{\rho}_b\delta_b$.

Como para $a \sim a_{\text{desacoplamento}} \ll 1$, temos $a \simeq a_{\text{EdS}} \propto \tau^2$, o modo crescente será dado por $\delta_+ (\tau) \simeq a(\tau)$ e a solução da equação (1.37) será

$$\delta_{ME} = ca,$$

onde c é uma constante. Substituindo essa relação na (1.38) e usando que, em EdS $4\pi G a^2 \bar{\rho} = 6/\tau^2$, temos

$$\ddot{\delta}_b + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_b = 6c.$$

A solução do modo crescente dessa equação é

$$\delta_b = c\left(a(\tau) - b\right) = \delta_{ME}\left(1 - \frac{b}{a(\tau)}\right), \tag{1.39}$$

onde b é uma constante. Essa solução mostra que $\delta_b \longrightarrow \delta_{ME}$ para $a(\tau) \gg b$, mesmo se $\delta_b \simeq 0$ para algum $a(\tau_i) = b$, que pode ocorrer, digamos, para $\tau_i = \tau_{\text{desacoplamento}}$. Esse importante resultado mostra que *as perturbações na matéria bariônica são induzidas pelas flutuações da matéria escura após o desacoplamento.* Isso mostra que a matéria escura é a principal responsável pela formação das primeiras estruturas em grande escala. Sem a matéria escura, as flutuações seriam muito menores e não teria havido tempo de produzir as estruturas em grande escala que são observadas.

1.3.3 Flutuações de Entropia e Modos de Isocurvatura

Gradientes de entropia agem como fonte para o crescimento de perturbações na densidade. Usando a (1.23) na (1.22) e repetindo a dedução da equação linear acústica, obtemos

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta - c_s^2\nabla^2\delta = \frac{2}{3}T\nabla^2 S \; . \tag{1.40}$$

Para uma evolução *adiabática*, $dS/d\tau = 0$ e o que importa é o gradiente inicial de entropia. Gradientes de entropia podem ser produzidos no universo primordial por transições de fase de 1^a ordem resultando em variações espaciais da razão fóton/bárion ou outras abundâncias. Se não há gradientes de entropia antes dessas transições, então as variações na entropia só podem ser criadas por processos não adiabáticos. Na prática essas flutuações na entropia são tomadas como condições iniciais para uma evolução adiabática subseqüente.

A equação (1.40) não é aplicável ao universo primordial, pois a sua dedução supõe um gás não relativístico ($c_s^2 \ll c^2$). No entanto, o comportamento de suas soluções é qualitativamente similar ao que se obtém no universo primitivo.

O *modo de isocurvatura* é dado pela solução da equação de evolução da densidade com $\delta = \dot{\delta} = 0$, mas $\nabla^2 S \neq 0$ em algum tempo inicial τ_i. As condições iniciais podem ser encaradas como perturbações na equação de estado num universo de Robertson-Walker não perturbado (com curvatura constante), daí o nome "isocurvatura". Variações na entropia com densidade constante correspondem a variações na pressão, que levam, através da expansão adiabática, a mudanças na densidade. Portanto, perturbações iniciais na entropia provocam perturbações na densidade.

Se conhecemos as soluções $\delta_{\pm}(k,\tau)$, da equação homogênea (1.25), é fácil obter as soluções da eq. (1.40). No espaço de Fourier temos (lembrando que a evolução adiabática leva $\dot{S} = 0$, em 1^a ordem):

$$\ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - \left(4\pi G\bar{\rho}a^2 - k^2c_s^2\right)\delta = -k^2\frac{2}{3}T\left(\tau\right)S\left(\vec{k}\right), \tag{1.41}$$

cuja solução é dada por

$$\delta_S\left(\vec{k},\tau\right) = -\frac{2}{3}k^2 S\left(\vec{k}\right)\left[\delta_+(k,\tau)\int_{\tau_i}^{\tau} aT\delta_-\,d\tau' - \delta_-(k,\tau)\int_{\tau_i}^{\tau} aT\delta_+\,d\tau'\right] . \qquad (1.42)$$

Note que essa expressão satisfaz as condições iniciais $\delta_S(\vec{k},\tau_i) = \dot{\delta}_S(\vec{k},\tau_i) = 0$. Vemos que tanto perturbações crescentes como decrescentes são induzidas. Depois da fonte $(aT\delta_-)$ se tornar pequena, as flutuações na densidade evoluem da mesma forma que as flutuações isentrópicas.

1.3.4 Escoamento Potencial e Vorticidade

Com as perturbações isentrópicas crescentes e decrescentes e o modo de isocurvatura, temos três dos cinco modos lineares esperados. Os outros dois graus de liberdade foram perdidos quando tomamos a divergência da equação de Euler, aniquilando qualquer contribuição transversa (rotacional) ao vetor velocidade. Consideraremos agora a parte transversa de $\vec{v}$.

Pelo teorema de Helmholtz qualquer campo vetorial diferenciável $\vec{v}(\vec{x})$ pode ser escrito como a soma de suas partes longitudinal (irrotacional) e transversa (com divergência nula) $\vec{v}_{\parallel}$ e $\vec{v}_{\perp}$, respectivamente:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}_{\parallel}(\vec{x}) + \vec{v}_{\perp}(\vec{x}) \ , \qquad \vec{\nabla}\times\vec{v}_{\parallel} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{\perp} = 0 \ , \qquad (1.43)$$

com $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{\parallel} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \theta$ e $\vec{\nabla}\times\vec{v}_{\perp} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\omega}$. As variáveis θ e $\vec{\omega}$ são chamadas escalar de expansão e vetor vorticidade co-móveis.

Em nossa discussão precedente sobre a evolução de perturbações, implicitamente só foi considerado $\vec{v}_{\parallel}$. Os dois graus de liberdade restantes correspondem às componentes de $\vec{v}_{\perp}$ (a condição de transversalidade $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}_{\perp} = 0$ remove um grau de liberdade desse campo trivetorial). Podemos obter uma equação relativamente simples para $\vec{v}_{\perp}$, na verdade para o seu rotacional $\vec{\omega}$. Calculando o rotacional da equação de Euler (1.20) e usando que

$\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{v} + (1/2)\,\vec{\nabla}\left(\rho^2\right)$ obtemos:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\tau} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{\omega}) + \rho^{-2}\left(\vec{\nabla}\rho\right)\times\left(\vec{\nabla}p\right). \tag{1.44}$$

Essa expressão é conhecida como equação de Kelvin-Helmholtz para o transporte de vorticidade. Para um gás ideal monoatômico, podemos substituir o gradiente da pressão utilizando a (1.23). Lembrando que $\vec{\nabla}\rho = \bar{\rho}\vec{\nabla}\delta$, temos:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\tau} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times(\vec{v}\times\vec{\omega}) + \frac{2}{3}T\left(\vec{\nabla}\ln\rho\right)\times\left(\vec{\nabla}S\right). \tag{1.45}$$

O termo proveniente do gradiente da entropia é chamado de termo *baroclínico.*

Com a equação (1.45), podemos provar um resultado genérico muito importante: Se $\vec{\omega} = 0$ inicialmente em todos os pontos, então $\vec{\omega}$ permanece nulo, se o termo baroclínico é igual a zero (supondo que outros torques, como os causados por campos magnéticos, também se anulam). A importância desse resultado em cosmologia é devida à utilização de condições iniciais irrotacionais e isentrópicas em muitos modelos cosmológicos. Se a evolução é adiabática, segue que $\vec{\omega} = 0$. Um escoamento desse tipo também é chamado de potencial, pois o campo de velocidades pode ser obtido a partir de um potencial de velocidade $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} = -\vec{\nabla}\Phi_v$.

Processos não adiabáticos (aquecimento e resfriamento) e ondas de choque[19] podem gerar vorticidade. Num fluido sem colisões, a sua velocidade é definida como a média das velocidades de todas as massas num ponto. Essa média se comporta como produtora de entropia nas regiões em que as trajetórias se interceptam e portanto a vorticidade pode ser gerada pelo campo médio de velocidades. A vorticidade também pode ser gerada por condições iniciais de isocurvatura. Para grandes comprimentos de onda, vemos pela equação (1.42) que $\delta_S \propto \nabla^2 S$ no regime linear. O gradiente de entropia fornece um torque baroclínico proporcional a $\vec{\nabla}\delta_S\times\vec{\nabla}S \propto \vec{\nabla}(\nabla^2 S)\times\vec{\nabla}S$, que é diferente de zero

[19] A prova da eq. (1.44) está baseada na hipótese de que o fluido é um contínuo. Essa aproximação deixa de valer em ondas de choque.

em geral (mas ele aparece apenas na teoria de perturbação de 2^a ordem).

Na maioria dos modelos de formação de estruturas, a produção de vorticidade é pequena até a formação de choques (ou o cruzamento das trajetórias, no caso de matéria sem colisões). Desse modo, podemos obter o potencial de velocidade calculando a integral de linha do campo de velocidades:

$$\Phi_v(\vec{x}) = \Phi_v(0) - \int_0^{\vec{x}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \,. \tag{1.46}$$

Escolhendo um caminho radial em relação ao observador, é possível reconstruir o potencial de velocidade. Assim podemos obter as componentes transversais da velocidade a partir da componente radial. Essa idéia é a base do método potencial de reconstrução do escoamento, chamado de POTENT [38]. Se as flutuações médias da densidade são suficientemente pequenas para que seja válida a teoria linear, podemos estimar a flutuação na densidade a partir da divergência de $\vec{v}$. Se a pressão é desprezível ($k \ll k_J$), não há oscilações e podemos usar $\delta_+(\tau)$. Assim, a equação de continuidade linearizada (1.22) fica:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\dot{\delta} = -aH \left(\frac{d \ln \delta_+}{d \ln a} \right) \delta \,. \tag{1.47}$$

Para um grande número de modelos cosmológicos, $d \ln \delta_+ / d \ln a \equiv f(\Omega) \approx \Omega^{0.6}$ depende principalmente do parâmetro de massa e varia pouco com os outros parâmetros cosmológicos [39]. Assim, combinando medidas de $\vec{v}$ (componentes radiais a partir de medidas dos desvios para o vermelho de galáxias e de suas distâncias) e medidas independentes de δ (a partir do campo de densidade das galáxias, e alguma suposição de como a matéria escura é distribuída em relação às galáxias) é possível estimar Ω [40].

Evolução da vorticidade

Vimos que, se a vorticidade é inicialmente nula, ela continua igual a zero ao longo da evolução (desde que o termo baroclínico se anule e que não haja nem choques, nem cruzamento de trajetórias). Vamos supor agora que há uma pequena vorticidade primordial. Linearizando a equação (1.44) temos

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \tau} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{\omega} = 0,$$

de modo que

$$\vec{\omega} \propto a^{-1}. \tag{1.48}$$

Vemos portanto que a vorticidade co-móvel decai com o inverso do fator de escala. Além disso, $\vec{\omega}$ não aparece nas equações de perturbação (linearizadas) da densidade, não influenciando o seu comportamento. Dessa forma, mesmo que comecemos com $\vec{\omega} \neq 0$, a vorticidade não terá nenhuma influência na evolução linear, e decairá à medida que o universo se expande. Entretanto, no regime não-linear, a vorticidade se acopla às outras quantidades. Numa região colapsante seria de se esperar, pela conservação do momento angular, que $\vec{\omega}$ aumente. Essa possibilidade será discutida brevemente na seção (3.5.2).

A vorticidade co-móvel $\vec{\omega}$ é dada pelo rotacional da velocidade peculiar em coordenadas co-móveis. Nas coordenadas r_i teremos (eqs. ?? e 1.16)

$$\vec{\omega}_r := \vec{\nabla}_r \times \vec{\mathrm{v}} = \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x \times (H\vec{r} + \vec{v}) = \frac{1}{a}\vec{\nabla}_x \times \vec{v} = \frac{1}{a}\vec{\omega}_x.$$

Desse modo, a vorticidade nas coordenadas fixas usuais decai com a^{-2}. Esse resultado pode ser entendido pela conservação do momento angular. Para uma região circular de raio r e massa m, $mr^2\omega_r$ é constante. Para uma flutuação linear que se expande com o universo temos $r \propto a$, de modo que $\omega_r \propto r^{-2} \propto a^{-2}$.

Relação entre velocidade e campo gravitacional

No regime linear, há uma relação direta entre a velocidade e o campo gravitacional, como veremos a seguir. Notando que $\delta = +\vec{\nabla} \cdot \vec{g}/4\pi G a^2 \bar{\rho}$ e substituindo na equação de continuidade linearizada (1.22), teremos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\dot{\delta} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{g}}{4\pi G a^2 \bar{\rho}} \right).$$

Dessa forma, podemos obter a componente longitudinal $\vec{v}_{\parallel}$ da velocidade (a componente transversal $\vec{v}_{\perp}$ tem divergência nula):

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\vec{g}}{4\pi G a^2 \bar{\rho}} \right). \tag{1.49}$$

Notando que $\vec{g}_k \propto a^2 \bar{\rho} \delta_k$ (eq. 1.33), essa equação fica

$$\vec{v}_{\parallel k} = \frac{\vec{g}_k}{4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta_k} \frac{\partial \delta_k}{\partial \tau}.$$

Dessa forma, vemos que a velocidade peculiar é proporcional à aceleração peculiar, modo a modo, com uma constante de proporcionalidade dependente do tempo. Desprezando os efeitos da pressão, a constante de proporcionalidade não depende de k e podemos voltar ao espaço dos x. Assim, teremos

$$\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{g}}{4\pi G a^2 \bar{\rho}} \frac{1}{\delta} \frac{\partial \delta}{\partial \tau} = \frac{\vec{g}}{4\pi G a^2 \bar{\rho}} \frac{\dot{a}}{\delta} \frac{d\delta}{da} = -\frac{2f}{3H\Omega} \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \phi, \tag{1.50}$$

onde, como antes $f = (a/\delta)(d\delta/da)$. Se o escoamento é irrotacional, teremos $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel}$. Tomando a divergência dessa expressão, obtemos a equação (1.47). Extrapolando a equação (1.50) no regime não-linear, obtemos a aproximação de Zel'dovich (veja a seção 2.3.4). A relação (1.50) também dá origem a outra aproximação não-linear. Como $\phi = \phi_0$ para pequenas flutuações num universo de EdS, temos que $\vec{v} \propto \vec{\nabla}\phi_0$. A aproximação do fluxo congelado [41] extrapola essa relação para o regime não-linear.

Se a velocidade tem uma componente transversal $\vec{v}_{\perp}$ temos pelas (1.48) e (??) que $\vec{v}_{\perp} \propto a^{-1}$. A componente longitudinal é dada pela (1.50), assim a velocidade será dada por (eq. 1.43)

$$\vec{v} = -\frac{2f}{3H\Omega}\frac{1}{a}\vec{\nabla}_x\phi + \frac{\vec{f}(\vec{x})}{a}, \tag{1.51}$$

com $\vec{\nabla}\cdot\vec{f} = 0$.

1.3.5 Flutuações na Radiação Cósmica de Fundo

Nas seções precedentes, estudamos o comportamento de pequenas perturbações de um universo homogêneo. Há duas formas de observar essas flutuações: nas estruturas em grandes escalas, onde as concentrações de matéria ainda são lineares e na radiação cósmica de fundo. Nesse último caso, é preciso transformar as flutuações na densidade nas variações de temperatura que são observadas.

A distribuição dos fótons da radiação cósmica de fundo (RCF) é dada por uma distribuição de corpo negro com altíssimo grau de precisão[20]

$$f(\vec{x}, \vec{p}, \tau) = f_{\text{Planck}}\left(\frac{E}{kT}\right) = f_{\text{Planck}}\left[\frac{p}{kT_0(1+\Delta)}\right],$$

onde $T_0 = 2.728K$ é a temperatura média da RCF e $\Delta(\vec{n}, \tau) = \delta T/T_0$ é a flutuação de temperatura para fótons vindos da direção $\vec{n}$. A densidade no espaço de fase é dada por um corpo negro, mas a temperatura depende da direção do fóton, como resultado das variações intrínsecas da temperatura de emissão e de processos gravitacionais e de espalhamento sofridos no caminho até o detector.

O campo Δ é definido em todos os pontos $\vec{x}$, mas só podemos observá-lo aqui ($\vec{x}_0$) e gora (τ_0). A única coisa com que podemos trabalhar é a variação da temperatura em função da direção $\vec{n}$. Desse modo, toda a riqueza que observamos vem das mudanças de temperatura em função de $\vec{n}$.

A densidade no espaço de fase pode ser calculada a partir das condições iniciais através

[20] De fato, a radiação cósmica de fundo oferece o melhor espectro de corpo negro já observado.

da equação de Boltzmann

$$\frac{Df}{D\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial \tau} = \left(\frac{df}{d\tau}\right)_c ,$$

onde o lado direito é uma integral de colisão, que vem do espalhamento Compton.

O procedimento para calcular a anisotropia da RCF é linearizar a equação de Boltzmann supondo $\Delta^2 \ll 1$. Integrando ao longo da linha de visão do observador otêm-se [42]

$$\Delta(\vec{n}, \tau_0) = \int_0^{\tau_0} d\chi e^{-\tau_C(\chi)} \left[-\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + a n_e \sigma_C \left(\frac{1}{4}\delta_\gamma + \vec{v}_e \cdot \vec{n} \right) \right], \quad (1.52)$$

onde τ_0 é o tempo conforme hoje, χ é a coordenada radial co-móvel e a integral é calculada no tempo retardado $\tau = \tau_0 - \chi$. A flutuação na densidade dos fótons é dada por δ_γ, $\vec{v}_e$ é a velocidade média dos elétrons, σ_C é a seção de choque do espalhamento Compton e τ_C é a espessura ótica de Compton:

$$\tau_C(\chi) := \int_0^{\chi} d\chi \, (a n_e \sigma_C) .$$

Os termos devidos à polarização e à anisotropia do espalhamento Compton foram desprezados na expressão para $\Delta(\vec{n}, \tau_0)$.

Vamos discutir agora a origem de cada termo na expressão (1.52). O fator $\exp(-\tau_C)$ leva em conta a opacidade causada pelo espalhamento o que nos impede de ver além de um desvio para o vermelho $z = 1100$, para o qual $\tau_C \approx 1$. A radiação cósmica de fundo parece vir de uma fina camada chamada fotosfera, como ocorre com a radiação vinda da superfície do Sol. Os dois termos envolvendo ϕ estão relacionados à variação de freqüência causada pelo campo gravitacional. Os termos proporcionais à opacidade $a n_e \sigma_C$ são a emissividade efetiva devida ao espalhamento Compton. Levando em consideração que o plasma de fótons e bárions está em equilíbrio térmico quase perfeito, os fótons que vem de um dado elemento de volume possuem a temperatura de corpo negro correspondendo a esse elemento. Como a energia de corpo negro é dada por $\rho_\gamma \propto T^4$, vemos que o termo

$\delta_\gamma/4$ é simplesmente a variação intrínseca de temperatura desse elemento de volume ($\delta_\gamma = \delta\rho_\gamma/\rho_\gamma = 4\delta T$). A densidade de energia é definida no referencial de repouso do fluido, mas como ele se move com velocidade $\vec{v}_e$, a temperatura medida por um termômetro com coordenadas $\vec{x}$ fixas é alterada pelo efeito Doppler. A variação de freqüência e conseqüente variação na temperatura aparente, causada pelo efeito Doppler na direção $\vec{n}$ é dada por $\vec{v}_e \cdot \vec{n}$.

Quando olhamos para a superfície de uma estrela, vemos a temperatura do gás, que corresponde ao termo $\delta_\gamma/4$. Para estrelas normais, o efeito Doppler e o desvio para o vermelho gravitacional são desprezíveis (esses termos são importantes para supernovas e anãs brancas, respectivamente). Por outro lado, para a RCF todos quatro termos de emissão da equação (1.52) são comparáveis.

A fotosfera pode ser aproximada por uma camada infinitamente fina, supondo que a recombinação é instantânea. Nessa aproximação a fração de elétrons livres, e portanto a opacidade, caem abruptamente em $\tau_{\rm rec}$, o tempo conforme na época da recombinação ($z \approx 1100$):

$$\tau_C = \begin{cases} \infty, & \chi > \chi_{\rm rec} = \tau_0 - \tau_{\rm rec}, \\ 0, & \chi < \chi_{\rm rec}. \end{cases}$$

Substutindo essa expressão na equação (1.52) e integrando por partes o termo do desvio para o vermelho gravitacional obtem-se

$$\Delta\left(\vec{n}, \tau_0\right) = \left(\frac{1}{4}\delta_\gamma + \phi + v_r\right)_{\rm rec} + 2\int_0^{\chi_{\rm rec}} d\chi \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \tag{1.53}$$

onde $v_r := \vec{v}_e \cdot \vec{n}$ é a componente radial da velocidade. Esse resultado foi obtido primeiramente por Sachs e Wolfe [43].

A radiação cósmica de fundo é causada pelos desvios em relação ao equilíbrio hidrostático. Pode-se mostrar que, se o gás de fótons estivesse em equilíbrio hidrostático, teríamos $\delta_\gamma/4 + \phi$ (e obviamente $v_e = 0$) de modo que não haveria anisotropias primárias na RCF. As flutuações seriam dadas apenas pela variação ocorrida na trajetória da luz, que é o chamado efeito Sachs-Wolfe integrado e é dado pelo último termo na expressão (1.53).

Sachs e Wolfe [43] mostraram que, para perturbações adiabáticas na era dominada pela matéria, em escalas maiores que o horizonte acústico, as contribuições intrínseca e gravitacional dominam. A soma desses fatores (os dois primeiros termos da expressão 1.53) é $\phi/3$. Dessa forma, em escalas maiores do que $1°$ (que equivale aproximadamente o tamanho do horizonte acústico) as anisotropias na radiação cósmica de fundo são uma medida direta do potencial gravitacional na fotosfera, na recombinação.

O fator $\phi/3$ pode ser compreendido com a combinação do desvio para o vermelho causado pelo campo gravitacional e uma dilatação temporal. Para sair do poço de potencial o fóton perde energia, de modo que

$$\Delta_1 = \phi.$$

Além disso, como o potencial produz uma dilatação temporal, quando vemos o fóton ele viajou um caminho maior e veio portanto de uma época mais quente. A variação temporal é dada por $\delta t/t = \phi$. Utilizando que $a \propto t^{2/3}$ e que $T \propto a^{-1}$ obtemos

$$\Delta_2 = -\frac{2}{3}\phi.$$

A combinação desses dois efeitos dá

$$\Delta_{SW} = \frac{\phi}{3} \propto \frac{\delta_k}{k^2},$$

que é o chamado efeito Sachs-Wolfe. Na última relação, utilizamos a equação (1.33). Desse modo, as flutuações na temperatura se relacionam diretamente com as perturbações na densidade.

Em escalas angulares menores que $1°$ predomina o efeito Doppler. Nessas regiões menores do que o horizonte acústico, ocorrem as oscilações acústicas discutidas na seção 1.3.2. Essas oscilações dão origem aos picos no espectro da radiação cósmica de fundo que foram detectados recentemente [20, 21].

O espectro da radiação cósmica de fundo

O espectro de potência angular fornece a amplitude quadrática média da radiação cósmica de fundo por componente de esférico harmônico. Expande-se a anisotropia da temperatura em esféricos harmônicos

$$\Delta(\vec{n}) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\vec{n}) .$$

Os dados observacionais proporcionam valores bem definidos de a_{lm}. No entanto, teoricamente só é possível predizer a distribuição de probabilidade de a_{lm}. Para flutuações estatisticamente isotrópicas (que não possuem nenhuma direção privilegiada *a priori*), os a_{lm} são variáveis estocásticas com covariância

$$\langle a_{lm} a^{*}_{l'm'} \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{1.54}$$

de modo que eles não são correlacionados. A variância de cada harmônico é dada pelo *espectro de potência* angular C_l. A simetria rotacional faz com que ele seja independente de m.

O espectro de potência da RCF pode ser calculado a partir da estatística das flutuações primordiais e da evolução temporal dessas flutuações. Pode-se mostrar que [42]:

$$C_l = 4\pi \int d^3k P_\phi(k) D_l^2(k) , \tag{1.55}$$

onde $P_\phi(k)$ é o espectro das flutuações primordiais no potencial gravitacional[21]. A *função de transferência* D_l está relacionada à evolução das perturbações até o desacoplamento.

No limite de grandes escalas angulares a função de transferência é dada por $D_l = j_l[k(\tau_0 - \tau_{rec})]/3$ [42]. Nesse caso a (1.55) pode ser calculada analiticamente para $P_\phi \propto$

[21] O espectro $P_\phi(k)$ está associado ao espectro das flutuações primordiais na densidade $P(k) = \sigma_k^2$, pela relação $P_\phi(k) \propto P(k)/k^2$ (eq. 1.33).

Veja o apêndice 1 para a definição de σ_k a partir do funcional de probabilidade das condições iniciais. Aqui supõe-se que as flutuações em diferentes $\vec{k}$ não estão correlacionadas.

k^{n-4}. Quando $n = 1$ o resultado é $l\,(l+1)\,C_l = const.$ O satélite COBE varreu escalas angulares equivalentes a $2 \leq l \leq 34$ e os resultados obtidos são consistentes com $n = 1$, o que é predito pelo modelo inflacionário para flutuações quânticas primordiais. Vemos que as variações na temperatura da radiação cósmica de fundo permitem sondar o espectro primordial das flutuações.

Para pequenas escalas angulares, o espectro $l\,(l+1)\,C_l$, apresenta uma série de picos. Esses picos são devidos às oscilações acústicas, que modificam o potencial ϕ e a velocidade v_r na recombinação.

O primeiro pico no espectro da RCF está associado ao comprimento de Jeans. A posição angular desse primeiro pico depende do tamanho aparente de λ_J. A curvatura do universo afeta diretamente os tamanhos angulares, de modo que a determinação de sua posição coloca limites muito fortes sobre K e portanto sobre Ω_{tot}. Segundo o modelo inflacionário, que prevê curvatura nula, esse pico estaria em $l \approx 200$. O experimento de Balão MAXIMA [19], explorou escalas angulares equivalentes a $36 \leq l \leq 785$ e, juntamente com o BOOMERGANG [18], detectou o primeiro pico na posição esperada para um universo chato. Como a instabilidade de Jeans só ocorre na matéria bariônica, a determinação dos picos no espectro da RCF também permite calcular a Ω_b (na verdade $\Omega_b H_0^2$). Esse parâmetro está associado à diferença de altura entres os picos pares e ímpares.

As medidas em grandes escalas angulares fornecem informações sobre o espectro das flutuações primordiais na densidade, que incluem tanto a CDM como a matéria bariônica. Já em pequenas escalas angulares, podemos ter informação sobre Ω_b e Ω_{Tot}. O espectro da radiação cósmica de fundo permite estabelecer limites sobre todos os parâmetros cosmológicos. Espera-se que os novos experimentos possam ajudar a determinar esses parâmetros com grande precisão.

Para calcular a função de transferência, é preciso evoluir as flutuações primordiais até o desacoplamento matéria-radiação. Para isso é preciso utilizar a teoria de perturbação relativística (sec. A.5). No entanto, a discussão das seções precedentes fornece a imagem correta dos processos que ocorrem na época dominada pela matéria. Além disso, é possível fazer um tratamento newtoniano das perturbações na componente relativística, desde que se incluam alguns efeitos relativísticos da pressão (veja a seção A.3).

1.4 Simulações Computacionais

A análise linear das perturbações ajuda a compreender as primeiras fases da formação de estruturas e a radiação cósmica de fundo. Nas maiores escalas observáveis, as flutuações na densidade são pequenas e a teoria linear ainda pode ser aplicada. No entanto, em escalas menores - talvez já nos *voids* e certamente nos super-aglomerados de galáxias - a aglomeração de matéria não é linear ($\delta\rho/\rho > 1$). Portanto, para compreender a estrutura em grande escala, é preciso fazer simulações computacionais, ou recorrer a aproximações para a evolução não-linear.

Nas simulações numéricas utilizam-se condições de contorno periódicas para representar um universo infinito. Como o volume simulado é fixo nas coordenadas $\vec{x}$, na verdade temos uma fronteira que evolui acompanhando a expansão média. A equação de Poisson (1.13) é resolvida numericamente, utilizando a transformada de Fourier, ou algum método hierárquico[22]. Em geral, para simular a matéria escura utilizam-se algoritmos de N-corpos. Cada partícula segue uma trajetória dada pela equação (1.13). A matéria bariônica (gás) é simulada utilizando algoritmos de fluidos para resolver as eqs. (1.17) e (1.20), como por exemplo SPH (*Smooth Particle Hydrodynamics*[23] [44]). A referência [45] é excelente artigo de revisão sobre simulações numéricas em cosmologia.

Para se ter uma idéia, num cálculo de grande porte [46] é simulado um cubo de 500 milhões de anos luz ($\sim 150 Mpc$), dividido em 134 milhões de elementos de volume, com 1 milhão de anos luz ($\sim 300 Kpc$) e um total de 50 milhões de partículas de matéria escura (1/3 de não relativísticas e 2/3 de neutrinos). Existem várias colaborações visando a realização de simulações de grande porte [46, 47, 48].

As simulações com matéria escura e gás são feitas para determinar a temperatura final

[22] Para uma breve discussão sobre o cálculo da força gravitacional, veja seção 3.5.1.
[23] Para uma discussão do método SPH, veja a seção 4.6.1.

do gás (e comparar com os resultados das observações de raios-X), ou para acompanhar a formação de galáxias. Nas escalas maiores a dinâmica é dominada pela matéria escura, e portanto o gás não teria muita influência. Por isso muitas simulações da formação de estruturas utilizam apenas matéria com $p = 0$ (N-corpos).

As simulações computacionais são fundamentais para o estudo da evolução de estruturas, mas também têm suas desvantagens: ocupam muito tempo de cálculo, o que limita a varredura de condições iniciais e a resolução espacial. Além disso, elas não fornecem uma compreensão física transparente do problema. É portanto fundamental o desenvolvimento e estudo de aproximações para a aglomeração não-linear da matéria.