Cosmologia

Lista de Exercícios 1

Observação: quando se aplicar, todos os exercícios desta lista se referem à cosmologia de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

1. *Teorema do Virial*

   a) Demonstre o teorema do virial, expicitando suas premissas. Suponha um sistema ligado de partículas sob ação unicamente da força gravitacional e cuja forma global permanece constante no tempo. Mostre que

   $$2\langle E_K \rangle = -\langle E_G \rangle \,, \tag{1}$$

   onde $\langle E_K \rangle$ é a energia cinética média e $\langle E_G \rangle$ é a energia potencial média.

   b) Para situações típicas de galáxias e aglomerados de galáxias (dimensões, velocidades e massas típicas), qual é a ordem de grandeza esperada das correções relativísticas? Há alguma situação astrofísica em que as correções relativísticas poderiam ser importantes?

   c) Como se pode considerar os efeitos relativísticos no teorema do virial? Que tipo de cálculo você faria? Faça uma busca bibliográfica de literatura com esse foco/objetivo.

   d) Estimativa da massa de aglomerados

   Para ter uma estimativa da ordem de grandeza da massa de um aglomerado de galáxias, suponha que a massa de todas as galáxias do aglomerado têm a mesma ordem de grandeza e que o mesmo vale para as velocidades. Usando o teorema do virial, mostre que

   $$M \sim \frac{2Rv^2}{G}, \tag{2}$$

onde M é a massa total do aglomerado, R é o tamanho característico e v é a velocidade característica das galáxias em relação ao centro de massa do aglomerado[1].

Supnha que $v \sim 10^3$km/s e que $R \sim 10$Mpc, qual é a massa do aglomerado?

Dica para demostrar o teorema do Virial: Parta de equação de Newton para uma partícula sob a ação da gravidade de N outras partículas,

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j\neq i} \frac{Gm_j\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}, \tag{3}$$

multiplique essa equação por $m_i\vec{r}_i$ (produto escalar) e some sobre todas as partículas. Mostre que o lado esquerdo será simplesmente

$$\sum_i \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}m_i r_i^2\right) - \sum_i m_i v_i^2 = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\right) - 2E_K. \tag{4}$$

Usando que

$$\sum_{j\neq i} \frac{Gm_i m_j\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}\cdot\vec{r}_i = -\sum_{j\neq i} \frac{Gm_i m_j\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}\cdot\vec{r}_j \tag{5}$$

mostre que

$$\sum_{j\neq i} \frac{Gm_i m_j\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}\cdot\vec{r}_i = -\frac{1}{2}\sum_{j\neq i} \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = E_G. \tag{6}$$

Desse modo, teremos finalmente que

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i r_i^2\right) - 2E_K = E_G. \tag{7}$$

Fazendo uma média temporal e supondo que a forma do objeto não muda com o tempo, obtemos o resultado 1.

Observação: o resultado acima pode ser escrito de forma mais geral para outros tipos de interação e é conhecido como teorema do virial de Clausius. Uma demonstração um pouco mais cuidadosa e mais geral pode ser encontrada na wikipedia (`http://en.wikipedia.org/wiki/Virial_theorem`).

[1] Note que, pelo desvio pelo vermelho, medimos apenas a componente da velocidade na direção do observador (Terra). Como podemos modificar a equação acima para levar em conta o fato de que só uma componente da velocidade é medida?

2. *Esfera isotérmica singular*

   Um modelo muito utilizado para representar a distribuição de matéria em galáxias é o da esfera isotérmica singular (EIS).

   Como o nome diz, a hipótese por trás da EIS é que temperatura (na realidade, a distribuição de velocidades) é a mesma em todos os pontos. A partir dessa hipótese, a) mostre que a distribuição de massa da EIS é dada por

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2}. \tag{8}$$

   b) Obtenha as curvas de rotação para essa distribuição de matéria e comente. Como você construiria um modelo da galáxia usando a EIS?

   c) Em um aglomerado de galáxias a emissão de raios-x é essencialmente devida aos elétrons no plasma intra-aglomerado. É possvél usar a expressão acima para determinar a densidade da matéria no galomerado? Nesse caso, quem seria σ_v? Essa é a densidade dos elétrons ou é a densidade total de matéria? Estime a massa contida em um raio de 10 Mpc para uma temperartura de 7 keV.

   Dica: Note que $p \propto \rho\sigma_v^2$.[2] Logo, se $\sigma_v = const.$, teremos $p \propto \rho$. A combinação da equação de Euler (pressupondo equilíbrio hidrostático e utilizando a equação de estado acima) com a solução da equação de Poisson para simetria esférica leva a uma equação integro-diferencial para ρ. Procure soluções dessa equação, por exemplo, supondo que ela possui a forma de uma lei de potência.

   Comentário: assim como um gás ideal, a matéria escura tamém segue uma distribuição aproximadamente maxwelliana de velocidades, mesmo sem ter colisões. Desse modo, o resultado obtido no exercício, supondo um gás ideal isotérmico, também acaba valendo para a matéria escura.

3. *Unidades e ordens de grandeza*

   a) A temperatura da radiação cósmica de fundo (RCF) hoje é $T_0 = 2.725 \pm 0.002$ [1]. Lembrando da lei de Stephan-Boltzmann ($\rho = \sigma T^4$)

[2] Como no caso de um gás ideal, $p = nkT$, onde n é a densidade de número de partículas e T é determinado pela energia cinética "microscópica" $< E >= (3/2)kT$. Assim, $kT = (2/3) \times (1/2)m\sigma_v^2$, de modo que $p \propto \rho\sigma_v^2$, onde ρ é a densidade de massa.
Comentário: na expressão da dispersão de velocidades $\sigma_v^2 = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$, v é a velocidade "microscópica" de cada ou partícula, não confundir com a velocidade global, média, V de um elemento de volume (que aparece na equação de Euler), que no caso do equilíbrio é nula.

calcule a densidade (e densidade de energia) dos fótons da RCF. Expresse seus resultados em $\mathrm{g/cm^3}$. Note que, para usar a lei de Stephan-Boltzmann, estamos supondo que os fótons da RCF obedecem à distribuição de Planck, o que é verificado experimentalmente com uma excelente precisão.

b) O parâmetro de Hubble é geralmente escrito na forma $H_0 = 100\,h\,\mathrm{Km/s/Mpc}$. A partir dessa quantidade, obtenha o tempo de Hubble $t_H = H_0^{-1}$, em segundos e em anos (em termos de h). Também podemos definir uma distância de Hubble pela relação $D_H = c/H_0$. Obtenha D_H em kilômetros e em megaparsecs (Mpc).

Calcule t_H e D_H supondo que $h \simeq 0.72$ [2].

c) Obtenha a densidade crítica $\rho_{\mathrm{crit}} := 3H_0^2/8\pi G$ em $\mathrm{g/cm^3}$ em termos de h. Em cosmologia, é muito conveniente introduzirmos os parâmetros cosmológicos de densidade, definidos pela relação $\Omega_i = \rho_{i0}/\rho_{\mathrm{crit}}$, onde o índice i denota cada componente do conteúdo energético-material do universo. Calcule Ω_γ (parâmetro de densidade dos fótons) em termos de h e para $h = 0.72$.

Observações: Os cosmólogos e físicos de partículas costumam utilizar convenções em que $c = 1$, onde c é a velocidade da luz (no vácuo). Insira essa quantidade para obter as dimensões corretas nos exercícios, quando for necessário.

O subscrito 0 costuma denotar quantidades calculadas "hoje", ou seja, na presente idade do universo.

4. *Cosmologia newtoniana*

   É possível construir uma cosmologia puramente newtoniana para um Universo homogêneo e isotrópico? Mencione alguns problemas que surgem em tal construção.

5. *Conservação da energia e evolução das componentes materiais*

   Seguindo o procedimento discutido em aula, a) obtenha a equação da conservação da energia

$$\frac{d\rho}{da} + (\rho + p)\frac{3}{a} = 0, \tag{9}$$

   que é válida para um fluido perfeito "adaptado" às simetrias de um Universo espacialmente homogêneo e isotrópico.

b) Resolva a equação da conservação da energia (9) para as seguintes equações de estado $p = w\rho$ e $p = -A^{\alpha+1}/\rho^{\alpha}$.

Dica: no primeiro caso (equação de estado linear), $p \propto a^m$ pode ser um bom *Ansatz* para encontrar a solução. Já no caso em que p é dado por uma lei de potência em função de ρ, pode ser mais conveniente transformar a equação (9) na forma integral

$$\int_{a_0}^{a} \frac{da}{a} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho + p}, \tag{10}$$

onde os limites de integração foram escolhidos de modo que $\rho(a_0) = \rho_0$.

Observação: A equação de estado $\rho(a)$ (com $w < -1/3$) é um modelo fenomenológico muito utilizado para representar a energia escura. Já a equação de estado $p = -A^{\alpha+1}/\rho^{\alpha}$ foi proposta como um modelo de unificação matéria-energia escura. Esse fluido ficou conhecido como gás de Chaplygin generalizado.

c) Mostre que, para $a \gg 1$, $\rho(a)$ o gás de Chaplygin generalizado se comporta como poeira e que, para $a \ll 1$, se comporta como constante cosmológica.

Observação: da expressão (10), temos que

$$\frac{a}{a_0} = \exp\left(\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho + p}\right) = G(\rho),$$

de modo que a solução sempre pode ser escrita na forma

$$\rho = \rho_0 F\left(\frac{a}{a_0}\right), \tag{11}$$

com $F(1) = 1$ (já que, por construção $\rho(a_0) = \rho_0$). Naturalmente, F pode depender de uma série de parâmetros da equação de estado e também de ρ_0 (nós apenas colocamos ρ_0 em evidência nessa expressão). A expressão (11) é muito conveniente para expressar o parâmetro de Hubble, já que a contribuição de uma componente i para (H/H_0) será dada simplesmente por $\Omega_{i0} F_i\left(\frac{a}{a_0}\right) = \Omega_{i0} F_i(z)$. Obtenha F para os casos $p = w\rho$ e $p = -A^{\alpha+1}/\rho^{\alpha}$ discutidos acima.

d) Reescreva a equação da conservação de energia

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0$$

utilizando a como variável. Mostre que para radiação ($p = \rho/3$), matéria ($p = 0$) e "vácuo" ($p = -\rho$) as soluções são, respectivamente, $\rho_\mathrm{r} = \rho_{\mathrm{r}0} \left(a_0/a\right)^4$, $\rho_\mathrm{m} = \rho_{\mathrm{m}0} \left(a_0/a\right)^3$ e $\rho_\mathrm{v} = \rho_{\mathrm{v}0} = const$. Se quiser, é fácil encontrar a solução para uma equação de estado um pouco mais geral, da forma $p = w\rho$.

Utilize esses resultados na equação de Friedmann (14), junto com as definições dos parâmetros cosmológicos (parâmetros de densidade e parâmetro de Hubble), para obter (num universo composto por matéria, radiação, curvatura e constante cosmológica)

$$H\left(a\right) = H_0 \sqrt{\Omega_\mathrm{r}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\mathrm{m}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\mathrm{K}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\Lambda} \qquad (12)$$

onde Ω_Λ pode denotar tanto a constante cosmológica, quanto um termo do tipo energia do vácuo, ou uma combinação dos dois.

6. *Soluções da equação de Friedmann*

   a) Resolva a equação de Friedmann para $k = 0$ e um único fluido com equação de estado $p = w\rho$. Sugestão: utilize um Ansatz $a\left(t\right) \propto t^n$. No caso $w = -1$ esse é um bom "chute"? Qual a solução nesse caso?

   b) É possível encontrar soluções analíticas para o caso $p = -A^{\alpha+1}/\rho^\alpha$?

7. *Aceleração cósmica*

   A partir das equações de Friedmann e da conservação da energia, mostre que $\ddot{a} = -\left(4\pi G/3\right)\left(\rho + 3p\right)$. Vemos portanto que não é possível produzir uma desaceleração do universo apenas com matéria não relativística (e sem constante cosmológica), o que fornece um argumento a favor da energia escura (ou de uma constante cosmológica não nula). Obviamente essa conclusão é obtida sob a hipótese de um fluido perfeito "adaptado" às simetrias de um Universo espacialmente homogêneo e isotrópico no contexto da relativiade geral.

8. *Equação de Friedmann e parâmetros de densidade*

   Lembrando que o parâmetro de Hubble é dado por

$$H\left(t\right) = \frac{\dot{a}}{a} \qquad (13)$$

   (onde a é o fator de escala e o ponto denota a derivada temporal), utilize as definições dos parâmetros de densidade, da densidade crítica, junto com a equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\sum_i \rho_i + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2}, \qquad (14)$$

para obter

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1,$$

onde $\Omega_\Lambda = \Lambda/(3H_0^2)$ e $\Omega_K = -K/(a_0^2 H_0^2)$. Incluindo a constante cosmológica e a curvatura como "componentes de matéria", temos simplesmente $\sum_j \Omega_j = 1$ onde o índice j denota as componentes materiais (bárions, matéria escura, fótons, etc.), a curvatura e a constante cosmológica.

9. *Distâncias cosmológicas*

a) Mostre que

$$\chi = c\int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{a\,(t')} = c\int_{a_0}^{a} \frac{da'}{H\,(a')\,a'^2} = c\int_0^z \frac{dz'}{H\,(z')}$$

(para a última igualdade, escolha a "normalização" $a_0 = 1$).

b) Resolva a integral

$$\chi = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2}}.$$

Resposta: $r = \frac{1}{\sqrt{|K|}} S_K\left(\sqrt{|K|}\chi\right)$, onde $S_K = sen$, $senh$, ou 1, para $K > 0$, $K < 0$ e "$K = 0$" (naturalmente, nesse caso $r = \chi$)

A partir desses resultados, obtenha a expressão da distância comóvel r em função de z, em termos de H_0 e Ω_{i0} (lembre-se que $K = \Omega_K H_0^2$, para $a_0 = 1$).

Resposta:

$$r = \frac{1}{H_0\sqrt{|1-\Omega_0|}}\, S_K\left(\sqrt{|1-\Omega_0|}\, H_0 \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}\right), \tag{15}$$

onde $E\,(z) = H\,(z)\,/H_0$.

c) A partir desse resultado, encontre a expressão para a distância de luminosidade D_L.

Cálculos com a_0 explícito. Para verificar explicitamente que a_0 não está presente em nenhuma relação entre observáveis, podemos repetir o procedimento acima sem fazer a escolha ($a_0 = 1$). Esse procedimento é útil para adquirir uma certa prática em manipulações comuns em cosmologia.

Refaça os passos do exercício acima (e os da obtenção de D_L) para uma escolha genérica de a_0. Mostre que $D_L = (1+z)\, a_0 r\,(z)$, e que $\frac{1}{\sqrt{|K|}} S_K \left(\sqrt{|K|}\chi\right)$. No entanto, $K = -a_0^2 H_0^2 \Omega_K$ e

$$\chi = c \int_{a_0}^{a} \frac{da'}{H\,(a')\, a'^2} = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{dz'}{H\,(z')}$$

de modo que a expressão final é idêntica à (15).

10. *Distâncias cosmológicas para uma escolha diferente da coordenada radial na métrica de Friedmann*

    Repita as passos que levam à expressão das distâncias cosmológica seguidas em aula (iniciando pela trajetória dos fótons, etc.), mas para a métrica expressa na forma

    $$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(d\chi^2 + F(\chi)(d\theta^2 + sen^2\theta\, d\phi^2) \right). \qquad (16)$$

    Qual é a expressão de $F(\chi)$ para um Universo homogêneo e isotrópico?

    Aqui χ é uma coordenada radial. Ela possui alguma conexão com a função χ definida acima?

    Como ficam os resultados do exercício acima nesse caso?

11. *Distância diâmetro angular e outras definições de distância*

    a) Como se define a distância de diâmetro angular?

    b) Obtenha a sua expressão em termos do parâmetro de Hubble utilizando a métrica de Friedmann e detalhado seus passos.

    c) Que outras definições de disância são utilizadas em cosmologia?

12. *Comportamento das distâncias cosmológicas com o desvio para o vermelho e a composição do Universo*

    Obtenha numericamente as distâncias de luminosidade e de diâmetro angular em unidades do raio de Hubble (c/H_0). Faça gráficos de d_L e d_A em função do desvio para o vermelho z para as seguintes combinações de parâmetros de densidade:

    $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0$

    $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$

$\Omega_m = 1, \Omega_\Lambda = 0$

Que conclusões você tira desses gráficos?

A partir de que valores de z você espera que Ω_γ começe a ser relevante?

13. *Lei de Hubble em segunda ordem*

    Como ficam as distâncias de luminosidade e de diâmetro angular expandidas em segunda ordem em z? E as outras distâncias cosmológicas?

14. *Lei de Hubble em ordens mais altas e sacolejada*

    Obtenha a lei de Hubble, a partir da distância de luminosidade, expandindo até terceira ordem em z, sem introduzir nenhum modelo cosmológico *a priori*, apenas usando homogeneidade e isotropia (ou seja, sem utilizar uma forma específica de $H(a)$). **Dica:** ver as refs. em [4].

15. *Idade do Universo*

    Utilizando a definição do parâmetro de Hubble (13) obtenha a expressão para a idade do universo

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = H_0^{-1} \int_0^{a_0} \frac{da}{a\sqrt{\Omega_{\rm r}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{\rm m}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{\rm K}\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\Lambda}}. \tag{17}$$

Calcule a idade do universo (em Ga $= 10^9$ anos) para $\Omega_{\rm m} = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ e $h = 0.72$. O valor de $\Omega_{\rm r}$ será dado pelo resultado do exercício (3) (aqui, apenas com propósitos didáticos, desprezaremos a contribuição dos neutrinos).

O que ocorre se desprezamos a contribuição da radiação? E da curvatura?

Como fica a idade do Universo se agora $\Omega_\Lambda = 0$ e $\Omega_{\rm K} = 0$?

Supondo que o universo é plano ($K = 0$) e desprezando a radiação, faça um gráfico de t_0 em unidades de h^{-1}Ga em função de $\Omega_{\rm m}$.

Faça o mesmo gráfico, mas agora para $\Omega_\Lambda = 0$ (e portanto $K \neq 0$).

Diversas estimativas atuais para a idade das estrelas mais velhas indicam um limite inferior de 11 Ga (veja, por exemplo, a ref. [3]). Naturalmente esse valor fornece um limite inferior para a idade do universo. A que conclusões você pode chegar, tendo em vista os resultados que você obteve acima?

Como mencionado no curso, podemos definir um "início do universo" extrapolando a curva $a(t)$ para $a \to 0$. Isso implica em supor que as componentes de matéria vão continuar a se comportar como na equação (12). No entanto, não sabemos como é a equação de estado da matéria a temperaturas altíssimas, onde podem intervir inúmeros efeitos ainda não estudados em laboratório. Que condições seria preciso impor ao comportamento da matéria para o universo não ter tido um início, ou seja, para a integral (17) divergir?

16. *Horizonte acústico e escala acústica*

    a) Calcule numericamente o horizonte acústico r_s (em unidades de comprimento) em $z = 1000$. Utilize os valores dos parâmetros cosmológicos discutidos nesta lista. Qual a sensibilidade de r_s a cada parâmetro cosmológico?

    b) Calcule a escala angular θ_s associada ao horizonte acústico. **Dica:** utilize a distância de diâmetro angular.

17. *Equivalência matéria-radiação*

    a) Determine o valor do desvio para o vermelho em que ocorre a equivalência matéria-radiação. Suponha que $\Omega_m = 0.3$ e utilize o valor de Ω_γ obtido nesta lista.

    b) O resultado depende de Ω_Λ e Ω_K?

18. *Nucleossíntese primordial e densidade de bárions*

    Cite algumas medidas atuais de Ω_b por nucleossíntese primordial a partir das observações de elementos leves. Elas estão em acordo com os valores obtidos a partir de outros observáveis cosmológicos? Quais são os problemas/questões atuais.

    Dica: ver os artigos do experimento Planck e de Gary Steigman, especialmente artigos de revisão.

19. *Espectro da radiação cósmica de fundo*

    Cite algumas medidas atuais do espectro da radiação cósmica de fundo e de algumas consequências que se tira dessa medida (coloque gráficos e referências/urls).

    Que experimento é mais adequado para sondar cada intervalo de ordem de multipolo l e qual a escala angular associada?

    Qual a medida de l mais alto obitda até agora? Quais fenômenos físicos influenciam o espectro de potência nessas escalas?

Qual é a forma do espectro de polarização medido com o Planck e que consequências se tira dele?

20. *Efeito Sunyaev-Zel'dovich*

    Quais experimentos detectaram aglomerados de galáxias através do efeito Sunyaev-Zel'dovich? Quais são as vantagens e desvantagens do Planck em relação aos projetos no solo quanto a esse aspecto?

    Cite um catálogo de aglomerados obtido a partir desse efeito

21. *Simulações cosmológicas da estrutura em grande escala do Universo*

    Quais são as grandes simulações cosmológicas de N-corpos da atualidade? Qual é o número típico de partículas envolvido e qual é a resolução/massa típica?

    Mesmas perguntas em relação às simulações hidrodinâmicas.

    Quas processos físicos são incluídos nas simulações.

    Dica: ver artigos de revisão e sítios internet dos grandes grupos de simulação.

Referências

[1] J.C. Mather, D. J. Fixsen, R.A. Shafer, C. Moser, D.T. Wilkinson, *Calibrator Design for the COBE Far-Infrared Absolute Spectrophotometer (FIRAS)*, ApJ **512**, 511 (1999), `astro-ph/9810373`.

[2] W.L. Freedman, et al., *Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant*, ApJ, **553**, 47 (2001), `astro-ph/0012376`.

[3] L. M. Krauss, B. Chaboyer, Science, **299**, 5603, 65 (2003); L. M. Krauss, ApJ, **604**, 481 (2004), `astro-ph/0212369`.

[4] M. Visser, *Jerk, snap, and the cosmological equation of state*, Class. Quant. Grav. **21**, 2603 (2004), `gr-qc/0309109`; veja também R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, *Expansion, Geometry, and Gravity*, `astro-ph/0403003` e T. Chiba, T. Nakamura, *The Luminosity Distance, the Equation of State, and the Geometry of the Universe*, Prog. Theor. Phys. **100**, 1077 (1998); `astro-ph/9808022`